HAL
open science

# Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant

Bruno Kahn, Ngan Thi Kim Nguyen

## To cite this version:

Bruno Kahn, Ngan Thi Kim Nguyen. Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant. Algebraic Geometry, 2016, 3 (3), pp.264-295. hal-00747778

**HAL Id: hal-00747778**

**https://hal.science/hal-00747778v1**

Submitted on 1 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MODULES DE CYCLES ET CLASSES NON RAMIFIÉES SUR UN ESPACE CLASSIFIANT

*par*

Bruno Kahn & Nguyen Thi Kim Ngan

***Abstract.*** — Let $G$ be a finite group of exponent $m$ and let $k$ be a field of characteristic prime to $m$, containing the $m$-th roots of unity. For any Rost cycle module $M$ over $k$, we construct exact sequences

$$0 \to \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \mathrm{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

where $\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$ is Serre's group of invariants of $G$ with values in $M_n$, $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ is its subgroup of unramified invariants, and the "residue" morphisms $\partial_{D,g}$ are associated to pairs $(D, g)$ where $D$ runs through the subgroups of $G$ and $g$ runs through the homomorphisms $\mu_m \to G$ whose image centralises $D$. This allows us to recover results of Bogomolov and Peyre on the unramified cohomology of fields of invariants of $G$, and to generalise them.

## Table des matières

Introduction . . . . . 2
1. Rappel sur les torseurs . . . . . 5
2. Le classifiant d'un groupe algébrique linéaire, à la Totaro . . . . . 10
3. Reformulation en termes de foncteurs homotopiques . . 20
4. Cohomologie motivique étale de $BG$ . . . . . 27
5. Modules de cycles de Rost et cohomologie de cycles . . 32
6. Suites spectrales de coniveau pour $BG$ . . . . . 39
7. Classes non ramifiées . . . . . 45
8. Résidus géométriques . . . . . 51
9. Classes non ramifiées sur un espace classifiant . . . . . 60

10. Le théorème principal ..... 63
11. Reformulation : 0-cycles sur le compactifié de $BG$ .. 75
12. Application : théorèmes de Bogomolov et de Peyre .. 82
Références ..... 88

## Introduction

Soit $G$ un groupe algébrique linéaire sur un corps $k$, et soit $M = M_*$ un module de cycles sur $k$ au sens de Rost [**Rost**]. Suivant Serre [**GMS**, déf. 1.1], on définit le *groupe des invariants de $G$ de degré $n$ à valeurs dans $M$*

$$\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ : il s'agit du groupe des transformations naturelles $\varphi_K : H^1(K, G) \to M_n(K)$ où $K$ décrit la catégorie des extensions de $k$. On peut aussi parler d'invariants non ramifiés au sens de [**GMS**, 33.9] : ils forment un sous-groupe $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$, dont la trivialité est une condition nécessaire pour une solution positive au problème de Noether.

En général le calcul de $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ est difficile, et celui de $\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$ est un peu plus facile. Le but de cet article est de réduire le calcul du premier à celui du second, dans certains cas particuliers. Le résultat principal est le suivant :

***Théorème 1***. — *Supposons $G$ fini constant, d'ordre premier à la caractéristique de $k$. Supposons de plus que $k$ contienne les racines $m$-ièmes de l'unité, où $m$ est l'exposant de $G$. Alors, à tout sous-groupe $D$ de $G$ et à tout homomorphisme $g : \mu_m \to Z_G(D)$ (centralisateur de $D$ dans $G$), on peut associer un "homomorphisme résidu"*

$$\partial_{D,g} : \mathrm{Inv}_k(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

*tel que la suite*

$$0 \to \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \mathrm{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

*soit exacte.*

Les hypothèses sont essentielles, en particulier celle sur les racines de l'unité. Pour $G$ et $k$ quelconques, on a encore un complexe comme ci-dessus, mais les $\partial_{D,g}$ ne sont sans doute pas suffisants pour détecter les

invariants non ramifiés. En trouver la bonne généralisation est un problème ouvert. (1)

***Corollaire 1***. — *Gardons les hypothèses du théorème 1 et définissons*

$$\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nab}}(G, M_n) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Inv}_k(G, M_n) \to \bigoplus_A \mathrm{Inv}_k(A, M_n)\right)$$

*où $A$ décrit les sous-groupes abéliens de $G$. Alors la suite exacte du théorème 1 se raffine en une suite exacte*

$$0 \to \widetilde{\mathrm{Inv}}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n) \to \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nab}}(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nab}}(D, M_{n-1})$$

*où $\widetilde{\mathrm{Inv}}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ désigne le sous-groupe des invariants non ramifiés normalisés (triviaux sur le $G$-torseur neutre).*

Ce corollaire peut être considéré comme une généralisation d'un théorème de Bogomolov [**CTS**, th. 7.1], qu'il permet de retrouver. Nous retrouvons aussi un théorème de Peyre [**Pe08**, th. 1].

Voici la stratégie de la démonstration. D'après Totaro [**GMS**, app. C], on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Inv}_k(G, M_n) = A^0(BG, M_n)$$

où le groupe de droite est celui de [**Rost**, §5]. Le sous-groupe $\mathrm{Inv}_k^{\mathrm{nr}}(G, M_n)$ du membre de gauche correspond à un sous-groupe $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ du membre de droite. Ceci demande un explication, puisque $BG$ n'est pas bien défini en tant que variété lisse : c'est l'objet du §2 et des §§5 et 7 (corollaire 5.11 et proposition 7.4). Au §8, on définit les résidus $\partial_{D,g}$. Au §10 on démontre le théorème 1 et on en déduit le corollaire 1. Enfin, au §12, on fait le raccord avec les résultats antérieurs de Bogomolov et de Peyre.

Voici une intuition qui peut éclairer le théorème 1. Soit $X$ une $k$-variété lisse, et supposons donnée une compactification lisse $X \subset \bar{X}$, telle que $D = \bar{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux. On a alors une suite exacte [**K11**, rem. 6.9]

$$0 \to A^0(\bar{X}, M_n) \to A^0(X, M_n) \to \bigoplus_{i=1}^{r} A^0(D_i^{\circ}, M_{n-1})$$

1. Mathieu Florence a fait une suggestion dans ce sens au premier auteur, quand $G$ est fini constant mais que $k$ ne contient pas assez de racines de l'unité.

où $D_i$ décrit l'ensemble des composantes irréductibles de $D$ et $D_i^{\mathrm{o}} = D_i \setminus \bigcup_{j\neq i} D_j$. Imaginons que $BG$ soit représenté par une variété $X$ comme ci-dessus. Dans le théorème 1, tout se passe comme si on pouvait alors trouver une compactification $\bar{X}$ tel que les $D_i^{\mathrm{o}}$ soient de la forme $BD$, où $D$ décrit les sous-groupes de $G$...

Ce travail est une version remaniée et augmentée de la thèse du premier auteur (N.T.K.N.) [**Ng10**] ; la plus grande partie en a été annoncée dans [**Ng11**]. B.K. tient à remercier N.T.K.N. de l'avoir invité à rédiger ce texte en commun.

**Guide de lecture.** — La section 1 rassemble des résultats standard (et moins standard) sur les torseurs. La section 2 reformule de manière universelle la théorie de Totaro du classifiant d'un groupe algébrique linéaire $G$ : l'ajout principal par rapport à [**Tot**] est la fonctorialité en $G$, qui joue un rôle central dans la suite. La section 3 applique la précédente à un certain nombre de foncteurs concrets, généralisant le cas des groupes de Chow considérés par Totaro. Dans la section 4, on calcule la cohomologie motivique étale de $BG$ quand $G$ est un groupe fini constant sur un corps $k$ ; lorsque $k$ est séparablement clos, on trouve essentiellement la cohomologie entière de $G$. La section 5 rappelle la théorie des modules de cycles et de la cohomologie de cycles de Rost [**Rost**] : on y vérifie que cette dernière prend un sens sur $BG$.

Dans la section 6, on établit l'existence de suites spectrales de coniveau pour la cohomologie motivique, la cohomologie étale et la cohomologie motivique étale de $BG$ : les deux derniers cas sont relativement délicats. Losrque $G$ est fini et $k$ est algébriquement clos, disons de caractéristique zéro, ceci joint au résultat du §4 fournit des renseignements très riches sur la cohomologie entière de $G$, parmi lesquels on retrouve des notions antérieures (invariants cohomologiques de Serre, cohomologie stable de Bogomolov) et des isomorphismes et suites exactes déjà connues (Bogomolov, Peyre), mais aussi de telles suites exactes, isomorphismes et invariants nouveaux.

La section 7 étudie les classes non ramifiées dans un module de cycles, à la Colliot-Thélène–Ojanguren [**CTO**] ; son but est de leur donner un sens sur un "espace classifiant" $BG$.

La section 8 introduit l'outil principal de l'article : les résidus géométriques $\partial_{D,g}$. La section 9 enchaîne en montrant que les classes sur $BG$, non ramifiées au sens de [**CTO**], sont non ramifiées au sens des résidus géométriques.

La section 10 est le cœur de ce travail. On y démontre que réciproquement, si $G$ est fini constant d'exposant $m$ et que $k$ est de caractéristique première à $m$ et contient les racines $m$-ièmes de l'unité, les classes sur $BG$, non ramifiées au sens des résidus géométriques, le sont au sens de [**CTO**]. La raison pour laquelle les résidus géométriques suffisent dans ce cas semble être que, si $G$ est le groupe de Galois d'une extension $L/K$ où $K \supset k$ et que $w$ est une valuation discrète de rang 1 sur $L$, le groupe d'inertie de $w$ est *central* dans son groupe de décomposition.

Enfin, la section 11 reformule le résultat précédent de manière universelle, tandis que la section 12 l'utilise pour retrouver (et généraliser) des théorèmes de Bogomolov et Peyre [**Bog87, Pe08**].

## 1. Rappel sur les torseurs

Dans cette section, nous rappelons les définitions et les propriétés des torseurs dont nous aurons besoin. Notre parti pris, comme dans [**Tot**] et contrairement à [**EG**], est ici de ne considérer que des quotients représentables en évitant les espaces algébriques. Cela permet une présentation plus élémentaire dans les sections suivantes.

**1.1. Quotients.** — Soit $k$ un corps.

***Définition 1.1*** **(Mumford [GIT**, déf. 0.6 ii, p. 4**])**

Soit $G$ un $k$-groupe algébrique et soit $X$ un $k$-schéma de type fini sur lequel $G$ opère par le morphisme $\mu_X : G \times X \to X$.

a) Un *quotient géométrique* de $X$ par $G$ est un $k$-schéma $Y$ muni d'un $k$-morphisme $f : X \to Y$ tel que :

(i) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mu_X"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

(ii) $f$ et le morphisme $\varphi : G \times X \to X \times_Y X$ défini par $\varphi(g, x) = (gx, x)$ sont surjectifs.

(iii) $f$ est submersif, i.e. $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $X$.

(iv) Le faisceau $\mathcal{O}_Y$ est isomorphe au sous-faisceau de $f_*\mathcal{O}_X$ formé des fonctions $G$-invariantes.

b) $f$ est un *quotient géométrique universel* s'il le reste après tout changement de base.

Si ce schéma $Y$ existe, il est unique à isomorphisme unique près. On le note $Y = X/G$.

### 1.2. Existence de quotients. —

***Proposition 1.2.*** — *Soit $G$ opérant sur $X$ et soit $N$ un sous-groupe distingué de $G$. Supposons que $X$ admette un quotient géométrique universel $f : X \to Y$ relativement à l'action de $N$. Alors $G/N$ opère sur $Y$ et les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$X$ admet un quotient géométrique universel $Z$ relativement à l'action de $G$.*

(ii) *$Y$ admet un quotient géométrique universel $Z'$ relativement à l'action de $G/N$.*

*Si c'est le cas, alors $Z$ est isomorphe à $Z'$.*

*Démonstration.* — On peut vérifer que cette proposition est vraie en remplaçant "quotient géométrique" par "quotient catégorique" (*cf.* [**GIT**, déf. 0.5, p. 3]). En particulier, les deux quotients coïncident si l'un des deux existe par la propriété universelle des quotients catégoriques. Supposons donc que $Z$ soit un quotient catégorique universel de $X$ par $G$ et de $Y$ par $G/N$, et notons $g : Y \to Z,\ h = g \circ f : X \to Z$.

Appliquons le critère [**GIT**, (3), p. 6] : Il suffit de vérifier la submersion de $g, h$ et la surjectivité de $\varphi_X, \bar{\varphi}_Y$ dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
N \times X \arrow[r, two heads, "\varphi'_X"] \arrow[d] & X \times_Y X \arrow[d] \\
G \times X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, two heads, "\pi \times f"'] & X \times_Z X \arrow[d, two heads, "f \times f"] \\
G/N \times Y \arrow[r, "\bar{\varphi}_Y"] & Y \times_Z Y.
\end{tikzcd}$$

D'abord, comme $f$ est un quotient géométrique universel, il est universellement submersif ; par conséquent, $g$ est universellement submersif si et seulement si $h$ l'est.

D'autre part, comme $f$ est surjectif, $f \times f$ est surjectif ; donc si $\varphi_X$ est surjectif, $\bar{\varphi}_Y$ est surjectif.

Inversement, si $\bar{\varphi}_Y$ est surjectif, alors on peut vérifier que $\varphi_X$ est surjectif sur les $\bar{k}$-points grâce au diagramme ci-dessus. Enfin, $\varphi_X$ est surjectif d'après [**EGA I**, prop. 7.1.8, p. 331]. □

***Corollaire 1.3***. — *Dans la situation de la proposition 1.2, supposons que l'action de $N$ sur $X$ soit triviale. Alors l'action de $G$ sur $X$ en induit une de $G/N$. De plus, le quotient géométrique de $X$ par $G$ existe si et seulement si celui par $G/N$ existe, et alors ils coïncident.* □

### 1.3. Torseurs. —

***Définition 1.4*** **(Mumford [GIT**, déf. 0.10, p. 17**])**
Soit $X$ un $k$-schéma sur lequel $G$ opère et soit $f : X \to Y$ un $k$-morphisme. On dit que $f$ est un *$G$-torseur* de *base* $Y$ et *d'espace total* $X$ si

(i) $Y$ est un quotient géométrique de $X$

(ii) $f$ est plat

(iii) $\varphi$ (*cf.* déf. 1.1 a) (ii)) est un isomorphisme.

***Remarque 1.5***. — On peut montrer que cette définition est équivalente à celle de Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS**, déf. 2.9].

***Théorème 1.6*** **([DG**, III.2.6.1, p. 313**])**. — *Si $G$ est fini et opère sur un $k$-schéma $X$ de sorte que toute orbite ensembliste soit contenue dans un ouvert affine de $X$, alors*

1. *Le carré* (1.1) *existe et est cocartésien dans la catégorie des $k$-schémas.*
2. *La projection $f : X \to Y := X/G$ est entière et le morphisme $\varphi$ est surjectif.*
3. *Si $G$ opère librement sur $X$, $f$ est fini localement libre et $\varphi$ est un isomorphisme. En particulier, $X$ est l'espace total d'un $G$-torseur.*

### 1.4. Fermés $G$-irréductibles. —

***Définition 1.7***. — Un $G$-schéma $X$ est *$G$-irréductible* si, pour toute décomposition $X = F_1 \cup F_2$ où $F_1, F_2$ sont des fermés $G$-stables, on a $X = F_1$ où $X = F_2$.

***Lemme 1.8***. — *Soit $G$ opérant sur $X$ de type fini. Alors on peut écrire $X = \bigcup_{\beta \in B} X_\beta$ où les $X_\beta$ sont des fermés $G$-irréductibles. On appelle les $X_\beta$ les composantes $G$-irréductibles de $X$.* □

***Lemme 1.9***. — *Soit $U$ un $k$-schéma intègre de type fini, muni d'une action d'un groupe algébrique $G$. Soit $j : U' \hookrightarrow U$ une immersion ouverte, avec $U'$ $G$-invariant. Alors $j$ est composée d'immersions ouvertes $V_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} V_{i+1}$ où $V_i$ est $G$-stable et $V_{i+1} - V_i$ est $G$-irréductible pour tout $i$. Si $k$ est parfait, on peut choisir les $j_i$ de complémentaire lisse.* □

## 1.5. Propriétés de permanence des torseurs. —

***Lemme 1.10***. — *Soient $G, H$ deux groupes algébriques et $U_G, U_H$ les espaces totaux d'un $G$ et d'un $H$-torseur. Alors $U_G \times U_H$ est l'espace total d'un $G \times H$-torseur.* □

***Proposition 1.11***. — *Les $G$-torseurs ont les propriétés suivantes :*

1. Stabilité par changement de base : *si on a le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} X' = Y' \times_Y X & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y, \end{array}$$

   *et si $f$ est un $G$-torseur, alors $f'$ l'est aussi pour tout $g$. Réciproquement, si $f'$ est un $G$-torseur et $g$ est fidèlement plat, alors $f$ est un $G$-torseur.*

2. Formule de la dimension : *si $X$ est $G$-irréductible (cf. déf. 1.7), alors*

$$\dim X = \dim Y + \dim G.$$

3. *Soit $f : X \to Y$ un $G$-torseur et soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel sur $X$ avec $G$-action linéaire équivariante, alors $E/G$ existe et est un fibré vectoriel sur $Y$.*

*Démonstration.* —

1. La première assertion découle de la platitude de $f$. La deuxième assertion résulte de la descente fidèlement plate.

2. L'hypothèse implique que $Y$ est irréductible. Comme $f$ est plat, on peut appliquer [**Har**, chap. III, cor. 9.6, p. 257] : on a

$$\dim X - \dim Y = \dim X_y,$$

   où $X_y$ est la fibre d'un point quelconque de $Y$ (elle est équidimensionnelle). D'après [**GIT**, (4), p. 6/7], on a $\dim X_y = \dim G$.

3. Cela résulte de la descente fidèlement plate [**SGA 1**, VIII, cor. 1.3 et prop. 1.10].

□

***Remarque 1.12***. — : Soient $f : X \to Y$ un $G$-torseur et $\pi : X' \to X$ un morphisme $G$-équivariant avec l'action de $G$ sur $X'$. Alors, $X'/G$ existe dans certains cas :
– si $\pi$ est un fibré vectoriel (Proposition 1.11, 3).
– Dans le cas de [**GIT**, prop. 7.1].
Voici un autre cas utile :

***Lemme 1.13*** **(Colliot-Thélène)**. — *Soit $X$ l'espace total d'un $G$-torseur de base $Y$ avec $X$ de type fini. Soit $U$ un ouvert non vide de $X$, stable par $G$. Posons $Z = (X - U)_{red}$. Alors, $U$ et $Z$ sont aussi les espaces totaux de $G$-torseurs.*

*Démonstration.* — Comme $U$ est $G$-stable, $Z$ l'est aussi. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \supset & U \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y & \supset & f(U) \end{array} \tag{1.2}$$

où $f(U)$ est un ouvert de $Y$ car $f$ est plat. On a $U \subset f^{-1}(f(U))$ et aussi l'égalité car $U$ est $G$-stable. En effet, il nous suffit de montrer pour tout $K \supset k$, $K$ algébriquement clos, on a $f^{-1}(f(U))(K) = U(K)$ (*cf.* [**EGA I**, prop. 7.1.8, p. 331]). Soit $x \in X(K)$ tel que $f(x) \in f(U)(K)$ i.e. $f(x) = f(u)$ pour $u \in U(K)$. Comme $f$ est un $G$-torseur, $f(K)$ l'est aussi (au sens discret). Alors, il existe $g \in G(K)$ tel que $x = gu$ et donc $x \in U(K)$. Donc le diagramme (1.2) est cartésien et donc $U \to f(U)$ est un $G$-torseur (par la proposition 1.11).

Posons $Z' = Y - f(U)$. Alors $f^{-1}(Z') = f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(U)) = X - U = Z$ car $f$ est fidèlement plat. De manière analogue, on a que $Z \to Z'$ est un $G$-torseur. □

***Proposition 1.14***. — *Soit $f : X \to Y$ un $G$-torseur.*
*a) Si $X$ est lisse, $Y$ est lisse.*
*b) Si $G$ est lisse, $f$ est lisse.*
*c) Si $G$ et $Y$ sont lisses, $X$ est lisse.*

*Démonstration.* — a) est clair puisque $f$ est plat [**EGA IV**, prop. 17.7.7]. Il suffit de voir b) après changement de base par $f$, puisque $f$ est fidèlement plat (*ibid.*, prop. 17.7.1). Ceci nous ramène au cas où $f$ est de la forme $p_2 : G \times Y \to Y$, et alors c'est clair. Enfin, c) résulte de b) puisqu'un composé de morphismes lisses est lisse. □

## 2. Le classifiant d'un groupe algébrique linéaire, à la Totaro

Dans cette section, nous reformulons la théorie développée par Totaro dans [**Tot**] pour donner un sens aux groupes de Chow d'un espace classifiant, en la plaçant dans sa généralité naturelle. Ceci lui donne la flexibilité dont nous aurons besoin dans les sections suivantes. Mis à part la fonctorialité de $BG$ (proposition 2.21), il n'y a rien d'essentiellement nouveau par rapport à l'article de Totaro.

### 2.1. Coniveaux. —

***Définition 2.1.*** — Soit $U$ un $k$-schéma intègre de type fini, et soit $j : U' \to U$ une immersion ouverte (avec $U' \neq \emptyset$). On définit

$$\delta(j) = \delta(U, U') = \operatorname{codim}_U(U - j(U')) = \dim U - \dim(U - j(U')) \tag{2.1}$$

(*cf.* [**Har**, Exercise 3.20,(d), p. 95]). C'est le *coniveau* de $j$ (ou de $U'$ dans $U$).

***Lemme 2.2.*** — *Soit $U$ un $k$-schéma lisse et soit $r$ un entier positif.*

1. *Soient $U'' \overset{j'}{\hookrightarrow} U' \overset{j}{\hookrightarrow} U$ des immersions ouvertes. On a*
$$\delta(j) \geq r \text{ et } \delta(j') \geq r \Leftrightarrow \delta(jj') \geq r.$$
2. *Soit $X$ un autre schéma lisse, on a $U' \times X \overset{j\times 1_X}{\hookrightarrow} U \times X$ et $\delta(j \times 1_X) = \delta(j)$.*
3. *Si $U$ est un $G$-torseur et que $G$ laisse stable $U' \hookrightarrow U$, on a*
$$\delta(U/G, U'/G) = \delta(U, U').$$

*Démonstration.* — Seul le point (3) mérite une démonstration. D'après le lemme 1.13, $U'/G$ existe et $U' \to U'/G$ est un $G$-torseur. Grâce au lemme 1.9, on se ramène au cas où $U - U'$ est $G$-irréductible, et l'énoncé résulte alors facilement de la proposition 1.11 (2). □

**2.2. Catégories de fractions en géométrie algébrique.** — Pour les catégories de fractions, nous renvoyons au chapitre 1 du livre de Gabriel et Zisman [**GZ**]. Rappelons que, si $\mathcal{C}$ est une catégorie et $S$ est une classe de morphismes de $\mathcal{C}$, on définit (modulo des problèmes ensemblistes) une catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ (notée $\mathcal{C}[S^{-1}]$ dans [**GZ**]), ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$, et un foncteur $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$, qui est l'identité sur les objets et universel parmi les foncteurs de source $\mathcal{C}$ rendant les éléments de $S$ inversibles. On dit que $S^{-1}\mathcal{C}$ est la *catégorie de fractions* ou la *localisée* de $\mathcal{C}$ relativement à $S$.

Soit $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des $k$-variétés lisses. Dans [**KS**], on a étudié la catégorie de fractions $S^{-1}\,\mathbf{Sm}(k)$, où $S$ désigne l'ensemble des morphismes birationnels, ou celui des morphismes birationnels stables. Dans cet article, nous en utiliserons des versions de coniveau supérieur ; par ailleurs, nous nous restreindrons pour une large part à la sous-catégorie non pleine de $\mathbf{Sm}(k)$ qui suit.

***Définition 2.3.*** — a) On note $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ la catégorie dont les objets sont les $k$-variétés lisses et les morphismes sont les morphismes plats.
b) On introduit des classes de morphismes de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ :
– $S^h$ : projections $E \to X$, où $E$ est un fibré vectoriel sur $X$.
– Pour $r \geq 1$, $S_r^o$ : immersions ouvertes de coniveau $\geq r$ ; $S_r = S_r^o \cup S^h$.

D'après le lemme 2.2, $S_r^o$ est stable par composition. On voit facilement que cette classe admet un calcul des fractions à droite au sens de [**GZ**] ; ce n'est pas le cas de $S_r$. On a des inclusions

$$\cdots \subset S_{r+1} \subset S_r \subset \ldots$$

d'où des projections

$$\cdots \to S_{r+1}^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \xrightarrow{\Pi_r} S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to \ldots$$

***Définition 2.4.*** — On note $\mathbf{Grp}$ la catégorie des $k$-groupes algébriques linéaires, les morphismes étant les $k$-homomorphismes.

Le but des numéros suivants est de construire un système compatible de foncteurs

$$B_r : \mathbf{Grp} \to S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$$

conceptualisant la construction de Totaro [**Tot**]. Ce but est atteint dans la proposition 2.21.

**2.3. Un théorème de Totaro. —**

***Théorème 2.5* (Totaro).** — *Soient $G \in \mathbf{Grp}$ et $r$ un entier $> 0$. Il existe une représentation linéaire $E$ de $G$ et un ouvert $U$ de $E$, stable par $G$, tels que le quotient géométrique $U/G$ existe, que $U \to U/G$ soit un $G$-torseur et que $\delta(E, U) \geq r$ (définition 2.1).*

*Démonstration.* — Voir [**Tot**, rem. 1.4, p. 4] ou [**CTS**, lemme 9.2]. Ces démonstrations montrent que $U/G$ est de la forme $GL_N/\Gamma$, donc en particulier quasi-projectif. □

***Définition 2.6.*** — Dans la situation du théorème 2.5, on dit que $E$ est une *représentation très fidèle* de $G$ de coniveau $\geq r$ et que $U$ est un *$G$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$.*

***Remarque 2.7.*** — Si $G$ est fini, il est facile d'obtenir des représentations très fidèles de $G$ de coniveau aussi grand qu'on veut en partant d'une représentation fidèle $W$ : d'après le théorème 1.6, l'ouvert $G$-stable $U = W - \bigcup_{g \neq 1} W^g$ est l'espace total d'un $G$-torseur. On a

$$\nu(W) := \delta(W, U) = \inf_{g \neq 1} \{\operatorname{codim}_W W^g\}$$

d'où facilement :

$$\forall n \geq 1,\ \nu(W^n) = n\nu(W).$$

**2.4. Le lemme sans nom, version catégorique.** — Soit $G \in \mathbf{Grp}$. Notons $G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ la catégorie des $k$-variétés lisses $X$ munies d'une action de $G$, telles que le quotient géométrique $X/G$ existe et soit séparé. Les morphismes de $G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ sont les morphismes plats $G$-équivariants. On note $S^h$, $S_r^o$ et $S_r$ les mêmes classes de morphismes que dans la définition 2.3.

La définition suivante est un peu désagréable, mais très pratique pour la suite :

***Définition 2.8.*** — Soit $X \in G - \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. On dit que $X$ est (l'espace total d')un *$G$-torseur potentiel* s'il existe un sous-groupe fermé normal $N \lhd G$ tel que l'action de $G$ sur $X$ se factorise par $G/N$, et que $X$ soit l'espace total d'un $G/N$-torseur. On parlera aussi de $G$-torseurs potentiels linéaires de coniveau $\geq r$, *cf.* déf. 2.6.

Soit $G-\mathbf{Tors}$ la sous-catégorie pleine de $G-\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ formée des $G$-torseurs potentiels. On dispose de deux foncteurs $G-\mathbf{Tors} \to \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ :

$$X \mapsto X \qquad \text{(oubli)} \tag{2.2}$$

$$X \mapsto X/G \qquad \text{(quotient)} \tag{2.3}$$

et d'une transformation naturelle $X \to X/G$. En effet, si $X \in G-\mathbf{Tors}$, $X/G$ est lisse grâce à la proposition 1.14 ; si $f : X \to Y$ est un morphisme de $G-\mathbf{Tors}$, alors $f/G$ est plat grâce à [**EGA IV**, cor. 2.2.11 (iv)].

***Lemme 2.9***. — *Le foncteur* (2.3) *envoie $S^h$, $S_r^o$ et $S_r$ respectivement dans $S^h$, $S_r^o$ et $S_r$.*

*Démonstration.* — Pour $S^h$, cela résulte de la proposition 1.11 3. Pour $S_r^o$, cela résulte du lemme 2.2 3. Le cas de $S_r$ en découle. □

***Définition 2.10***. — Soit $r > 0$. Soient $U, U' \in G-\mathbf{Tors}$. On dit que le couple $(U, U')$ est *admissible de coniveau* $\geq r$ si $U$ est un $G$-torseur et $U'$ est un $G$-torseur potentiel, linéaire de coniveau $\geq r$ (définition 2.8).

***Remarque 2.11***. — $(U, U)$ est admissible de coniveau $\geq r$ si et seulement si $U$ est un $G$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$. Si $(U, U')$ et $(U', U'')$ sont admissibles, alors $(U, U'')$ est admissible.

***Construction 2.12***. — *À tout couple admissible de coniveau $\geq r$ $(U, U')$, on associe un morphisme $\Psi_{U,U'} : U \to U'$ dans $S_r^{-1}(G-\mathbf{Tors})$, ces morphismes ayant les propriétés suivantes :*

**Réflexivité :** *si $(U,U)$ est admissible, alors $\Psi_{U,U} = 1_U$.*

**Symétrie :** *si $(U, U')$ et $(U', U)$ sont admissibles, alors*

$$\Psi_{U,U'}\Psi_{U',U} = 1_U$$

*et $\Psi_{U,U'}$ est un isomorphisme.*

**Transitivité :** *si $(U, U')$, $(U', U'')$ et $(U, U'')$ sont admissibles, alors*

$$\Psi_{U',U''}\Psi_{U,U'} = \Psi_{U,U''}.$$

*On note $\psi_{U,U'}$ (resp. $\varphi_{U,U'}$) l'image de $\Psi_{U,U'}$ par le foncteur* (2.2) *(resp.* (2.3)*).*

*Démonstration.* — C'est la construction de la double fibration qui remonte à Bogomolov, Katsylo... ("lemme sans nom", *cf.* [**CTS**, §3.2]).

Définissons le morphisme $\Psi_{U,U'}$. Soit $E'$ une représentation linéaire associée à $U'$ : $U'$ est un ouvert $G$-stable de $E'$, de coniveau $\geq r$. Comme

$U$ est l'espace total d'un $G$-torseur et que $U \times E' \to U$ est un fibré vectoriel $G$-équivariant, la proposition 1.11 3 montre que $U \times E'$ est aussi l'espace total d'un $G$-torseur et que $(U \times E')/G \to U/G$ est un fibré vectoriel. D'après le lemme 1.13, comme $U \times U' \hookrightarrow U \times E'$ est une immersion ouverte, $U \times U'$ est encore (l'espace total d'un) $G$-torseur. On a ainsi un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \times E' & \overset{j}{\supset} & U \times U' \arrow[r, "p_{U'}^{U,U'}"] \arrow[d, "p_U^{U,U'}"'] & U' \\ U \arrow[u, "p"] & = & U. \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $p \in S^h$ et $j \in S_r^o$ (lemme 2.2). On définit $\Psi_{U,U'}$ comme la composition $p_{U'}^{U,U'} j^{-1} p^{-1}$.

Notons que $p_U^{U,U'}$ est donc inversible dans $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$ et qu'on a aussi

$$\Psi_{U,U'} = p_{U'}^{U,U'} (p_U^{U,U'})^{-1}, \tag{2.4}$$

ce qui montre que $\Psi_{U,U'}$ ne dépend que de $U'$ et pas de l'immersion $U' \hookrightarrow E'$.

Il reste à vérifier les trois propriétés de l'énoncé : elles découlent immédiatement de (2.4). □

***Définition 2.13***. — Soit $r > 0$. On note

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_r G &= \varinjlim U \in S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors}) \\ E_r G &= \varinjlim U \in S_r^{-1}\, \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \\ B_r G &= \varinjlim U/G \in S_r^{-1}\, \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \end{aligned}$$

où les limites sont prises sur le système transitif d'isomorphismes $\Psi_{U,U'}$, pour $U, U'$ parcourant les $G$-torseurs linéaires de coniveau $\geq r$.

***Remarque 2.14***. — La notion de limite inductive sur un groupoïde trivial n'est pas très sérieuse : tout terme du système inductif en vérifie la propriété universelle. Cette notion est donc soit utile quand on a un foncteur "limite inductive" explicite (par exemple dans la catégorie des ensembles), soit rassurante sur le plan psychologique. On peut la considérer comme l'ensemble des termes du système inductif, sans choix privilégié.

***Lemme 2.15***. — *L'objet $E_r G \in S_r^{-1}\, \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ est "contractile" : le morphisme naturel $E_r G \to \operatorname{Spec} k$ est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Cet objet est représenté par l'espace total d'un $G$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$ : l'énoncé est donc évident. □

L'objet $\mathbb{E}_r G$ a les propriétés "universelles" suivantes, qui sont de simples reformulations de la construction 2.12 :

***Lemme 2.16.*** — *Dans la catégorie $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$,*

*(a) Si $U$ est l'espace total d'un $G$-torseur, on a un "morphisme classifiant" $\Psi_U : U \to \mathbb{E}_r G$, d'où un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\psi_U} & E_r G \\ \downarrow & & \downarrow \\ U/G & \xrightarrow{\varphi_U} & B_r G \end{array}$$

*dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.*

*(b) Si $f : U' \to U$ est un morphisme de $G$-torseurs, on a $\Psi_{U'} = \Psi_U \circ f$.*

*(c) Si $U$ est un $G$-torseur potentiel, linéaire de coniveau $\geq r$, on a un morphisme canonique $\Theta_U : \mathbb{E}_r G \to U$.*

*(d) Si $f : U' \to U$ est un morphisme avec $U, U'$ comme en (c), alors $\Theta_U = f \circ \Theta_{U'}$.*

*(e) Si $U$ est un $G$-torseur linéaire de coniveau $\geq c$, $\Psi_U$ et $\Theta_U$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

***Exemple 2.17.*** — Si $H \subset G$ est un sous-groupe fermé de $G$, alors $G \to G/H$ est un $H$-torseur. Donc on a un morphisme canonique

$$G \to \mathbb{E}_r H \tag{2.5}$$

dans $S_r^{-1}(H - \mathbf{Tors})$, induisant un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E_r H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longrightarrow & B_r H \end{array} \tag{2.6}$$

dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

Le lemme suivant est évident par construction :

***Lemme 2.18.*** — *Les foncteurs canoniques $S_{r+1}^{-1}\mathbf{Tors} \to S_r^{-1}\mathbf{Tors}$ et $S_{r+1}^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ envoient respectivement $\mathbb{E}_{r+1}G$ sur $\mathbb{E}_r G$, $E_{r+1}G$ sur $E_r G$ et $B_{r+1}G$ sur $B_r G$.*

***Remarque 2.19***. — L'image de $G$ dans $S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ est toujours un objet en groupes ; on peut donc parler de $G$-objet dans cette catégorie, et le foncteur (2.2) s'enrichit en un foncteur $S_r^{-1}(G-\mathbf{Tors}) \to G-(S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}})$. Ceci permet de considérer $E_rG$ comme un $G$-objet, mais malheureusement pas $E_rG \to B_rG$ comme un $G$-fibré principal...

## 2.5. Fonctorialité en $G$. —

***Définition 2.20***. — Soient $f : G \to H$ un homomorphisme de $k$-groupes algébriques linéaires et $X$ un schéma sur lequel $H$ opère. On note $f^*(X)$ le schéma $X$ muni de l'action de $G$ via $f$ : c'est l'image réciproque de $X$ par $f$.

***Proposition 2.21***. — *La loi $G \mapsto B_rG$ définit un foncteur $B_r : \mathbf{Grp} \to S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. Les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}
 & S_{r+1}^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \arrow[dd, "\Pi_r"] \\
\mathbf{Grp} \arrow[ur, "B_{r+1}"] \arrow[dr, "B_r"'] & \\
 & S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}
\end{tikzcd}$$

*sont naturellement commutatifs.*

*Démonstration.* — Soit $f : G \to H$ un homomorphisme. Soient $U$ un $G$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$ et $U'$ un $H$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$, ce dernier de représentation sous-jacente $E'$. Alors $G$ opère aussi sur $E'$ via $f$, en laissant stable $U'$. Décomposons $f$ comme suit :

$$G \twoheadrightarrow G/N \hookrightarrow H,$$

où $N = \mathrm{Ker}(f)$. D'après le corollaire 1.3, $U'$ est l'espace total d'un $f(G/N)$-torseur et $U'/(f(G/N)) \to U'/H$ est fidèlement plat. On note $f^*(U')$ l'image réciproque de $U'$ relative à $f$ (déf. 2.20). Donc

$$f^*(U')/(G/N) \xrightarrow{\sim} U'/(f(G/N)) \to U'/H$$

est fidèlement plat et $f^*(U')$ est aussi l'espace total d'un $G/N$-torseur (i.e. $f^*(U')$ est l'espace total d'un $G$-torseur potentiel). D'après la proposition 1.2, le quotient géométrique $f^*(U')/G$ existe et est égal à $f^*(U')/(G/N)$.

Notons $\pi_f^{U'} : f^*(U')/G \to U'/H$. On obtient donc un morphisme de $B_rG$ vers $B_rH$ comme suit :

$$B_rG \xleftarrow{\sim} U/G \xrightarrow{\varphi^G_{U,f^*(U')}} f^*(U')/G \xrightarrow{\pi_f^{U'}} U'/H \xrightarrow{\sim} B_rH.$$

Voir construction 2.12 pour $\varphi^G_{U,f^*(U')}$ : on a ajouté $G$ en exposant pour en garder trace dans la suite. Par la transitivité de cette construction, ce morphisme ne dépend pas du choix de $U$ et $U'$.

Si $g : H \to K$ est un autre morphisme, on a

$$B(gf) = Bg \circ Bf.$$

En effet, soit $U''$ un $K$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$. Il nous faut montrer que

$$\pi_{gf}^{U''}\varphi^G_{U,(gf)^*(U'')} = \pi_g^{U''}\varphi^H_{U',g^*(U'')}\pi_f^{U'}\varphi^G_{U,f^*(U')}.$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
U/G \arrow[r, "\varphi^G_{U,f^*(U')}"] & f^*(U'/G) \arrow[r, "\varphi^G_{f^*(U'),(gf)^*(U'')}"] \arrow[d, "\pi_f^{U'}"'] & (gf)^*(U''/G) \arrow[d, "\pi_f^{U''}"'] \\
& U'/H \arrow[r, "\varphi^H_{U',g^*(U'')}"] & g^*(U''/H) \arrow[d, "\pi_g^{U''}"'] \\
& & U''/K.
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

On a

$$\varphi^G_{U,(gf)^*(U'')} = \varphi^G_{f^*(U'),(gf)^*(U'')}\varphi^G_{U,f^*(U')}$$

(propriété de transitivité de $\varphi$ dans la construction 2.12) et

$$\pi_{gf}^{U''} = \pi_g^{U''} \circ \pi_f^{U'_0}.$$

Considérons maintenant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
U'/G \arrow[d] & (U' \times U'')/G \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & U''/G \arrow[d] \\
U'/H & (U' \times U'')/H \arrow[l] \arrow[r] & U''/H.
\end{tikzcd}$$

Il est commutatif. Ceci implique que le rectangle dans le diagramme (2.7) l'est aussi. Enfin, l'assertion “naturellement commutatifs" résulte du lemme 2.18. □

***Exemple 2.22.*** — a) En prenant $H = 1$, on obtient un morphisme canonique

$$\operatorname{Spec} k \simeq B_r 1 \to B_r G$$

bien que la catégorie $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ soit construite en termes de morphismes plats. On note $e_G$ ce "point rationnel" de $B_r G$. Une flèche vers $B_r G$ qui se factorise à travers $e_G$ sera dite *nulle*.

b) En prenant $H \subset G$ et en tenant compte de l'exemple 2.17, on obtient une suite dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$

$$G \to G/H \to B_r H \to B_r G$$

dans laquelle les compositions de deux flèches successives sont nulles. Nous ignorons sous quelles conditions, pour $X \in S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, la suite correspondante d'ensembles

$$\begin{aligned} S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, G) \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, G/H) \\ \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, B_r H) \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}(X, B_r G) \end{aligned}$$

est exacte (voir note 2 ci-dessous).

**2.6. Le classifiant d'un produit.** — Le lemme suivant résulte de la définition 2.13 et du lemme 1.10 :

***Lemme 2.23.*** — *Soient $G, H$ deux $k$-groupes algébriques linéaires, et $r > 0$. On a un isomorphisme canonique et bifonctoriel :*

$$B_r(G \times H) \xrightarrow{\sim} B_r G \times B_r H. \tag{2.8}$$

***Mise en garde 2.24.*** — Il faut donner un sens au membre de droite de (2.8) comme objet de $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. On vérifie tout de suite que le produit cartésien $\times : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \times \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ induit un bifoncteur $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \times S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, encore noté $\times$. C'est celui qui intervient dans (2.8). On prendra garde toutefois que ce bifoncteur n'a pas la propriété universelle d'un produit.

**2.7. Application : le théorème de Fischer sur un corps quelconque.** — Rappelons d'abord la notion d'équivalence stable et de rationalité stable :

***Définition 2.25.*** — Soit $X$ une $k$-schéma intègre de type fini. On dit que

- $X$ est *$k$-rationnel* si il est $k$-birationnel à un espace affine.
- $X$ est *stablement $k$-rationnel* si $X \times_k \mathbb{A}^n$ est $k$-rationnel.

Plus généralement, si $X, Y$ sont intègres et de type fini, on dit qu'ils sont *stablement équivalents* si $X \times \mathbb{A}^m$ est birationnel à $Y \times \mathbb{A}^n$ pour des entiers convenables $m, n$ (notation : $X \sim_{\mathrm{st}} Y$).

L'équivalence stable est une relation d'équivalence sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $k$-schéma intègres de type fini. Si $X, Y \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, alors $X \sim_{\mathrm{st}} Y \Rightarrow X \simeq Y$ dans $S_1^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, mais la réciproque est loin d'être claire. [2] Pour cette raison, la relation $B_1G \sim_{\mathrm{st}} B_1H$ n'a *a priori* pas de sens. Mais le lemme sans nom lui en donne un :

***Définition 2.26***. — Soient $G, H$ deux $k$-groupes algébriques linéaires, et soit $U$ (resp. $V$) un $G$- (resp. un $H$-) torseur linéaire de coniveau $> 0$. Alors le fait que $U/G$ soit stablement birationnel à $V/H$ ne dépend que de $G$ et $H$. On note cette relation $G \sim_{\mathrm{st}} H$.

On a alors le théorème bien connu [**Fi**] :

***Théorème 2.27*** **(Fischer)**. — *Ssupposons que $k$ contienne le groupe $\mu_m$ des racines $m$-ièmes de l'unité où $m$ est inversible dans $k$ et soit $A$ un groupe abélien fini d'exposant $m$. Alors $A \sim_{\mathrm{st}} 1$.*

Retrouvons ce théorème dans son contexte naturel :

***Théorème 2.28*** (*cf.* [**KS2**, prop. 7.6.2]). — *Le corps $k$ étant quelconque, soit $M$ un $k$-groupe de type multiplicatif déployé : $M$ est de type multiplicatif et son groupe des caractères est un module galoisien trivial (de manière équivalente : $M$ est un sous-groupe fermé d'un tore déployé). Alors $G \times M \sim_{\mathrm{st}} G$ pour tout $k$-groupe linéaire $G$. En particulier, $B_1(G \times M) \xrightarrow{\sim} B_1G$.*

*Démonstration.* — Soit $X(M)$ le groupe des caractères de $M$. La relation $\sim_{\mathrm{st}}$ sur les $k$-groupes linéaires étant clairement transitive et stable par produit, on se ramène d'abord à $G = 1$, puis (par récurrence sur le nombre de facteurs cycliques) au cas où $X(M)$ est cyclique, c'est-à-dire au cas où $M = \mathbb{G}_m$ ou $\mu_m$ pour un entier $m > 1$.

Dans les deux cas, $M$ admet une représentation linéaire très fidèle de rang 1, à savoir $E = k$ muni de l'action par homothéties. Le $M$-torseur linéaire correspondant est $U = E - \{0\}$. Si $M = \mathbb{G}_m$, on a $U/M = \operatorname{Spec} k$.

2. La question est de savoir si tout isomorphisme dans $S_1^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ s'écrit comme zig-zag de morphismes de $S_1$.

Si $M = \mu_m$, il s'agit du torseur de Kummer ; donc $U/M \simeq \mathbb{G}_m \sim_{\mathrm{st}} \operatorname{Spec} k$. □

**2.8. Comparaison avec le classifiant étale de Morel-Voevodsky.** — Dans ce numéro, on indique de quelle façon les objets $B_rG$ se comparent à l'objet $B_{\text{ét}}G \in \mathcal{H}(k) = \mathcal{H}$ défini dans [**MV**, §4].

Rappelons qu'on a un foncteur canonique $\mathbf{Sm} \to \mathcal{H}$, qui rend les morphismes de $S^h$ inversibles. On en déduit un diagramme commutatif de catégories et foncteurs :

$$\begin{tikzcd} (S^h)^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \arrow[r] \arrow[d] & S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \arrow[d, "E_r"'] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "D_r"] & S_r^{-1}\mathcal{H} \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

pour tout $r > 0$. Étant donné la description de $B_{\text{ét}}G$ dans [**MV**, §4, prop. 2.6 et rem. 2.7], on voit que

***Proposition 2.29***. — *Pour tout groupe algébrique linéaire $G$, les objets $E_r(B_rG)$ et $D_r(B_{\text{ét}}G)$ de $S_r^{-1}\mathcal{H}$ sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes.* □

## 3. Reformulation en termes de foncteurs homotopiques

**3.1. Foncteurs homotopiques.** — Le foncteur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}} \to S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ est le cas universel de la définition suivante :

***Définition 3.1***. — Soit $F$ un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et soit $r$ un entier $> 0$. On dit que $F$ est *homotopique et pur en coniveau* $\geq r$ s'il vérifie les deux axiomes suivants :

1. **Homotopie :** Si $f : V \to X$ est un fibré vectoriel, alors $F(f) : F(V) \to F(X)$ est un isomorphisme.
2. **Pureté :** $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$ si $U$ est un ouvert de $X$ tel que $\delta(X, U) \geq r$.

Autrement dit, tout foncteur $F$ vérifiant les conditions de la définition 3.1 se factorise à travers $S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. De la définition 2.13, du lemme 2.18 et de la proposition 2.21, on déduit alors un objet $F(BG)$, bien défini et fonctoriel en $G$.

***Exemple 3.2.*** — Si $F$ est homotopique et pur en coniveau $\geq r$, alors

$$Y \mapsto F(X \times Y)$$

l'est aussi.

***Définition 3.3.*** — Soit $F : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un foncteur homotopique et pur en coniveau $\gg 0$. On note

$$\nu(F) = \inf\{\nu \geq 0 \mid F \text{ est pur en coniveau } > \nu.\}$$

C'est le *coniveau* de $F$.

***Remarque 3.4.*** — Dans la définition 3.1, le foncteur $F$ est covariant. Dans la suite, on utilisera le plus souvent des foncteurs contravariants. Mais on passe des uns aux autres en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (catégorie opposée). C'est ce que nous faisons dans le théorème suivant, formulation générale d'un théorème de Totaro [**Tot**, th. 1.3] :

***Théorème 3.5.*** — *Supposons $F$ contravariant, à valeurs dans la catégorie des ensembles. Alors $F(BG)$ s'identifie à l'ensemble $M$ des symboles $\alpha$ associant à chaque variété lisse $X$ et à chaque $G$-torseur $E \to X$ un élément $\alpha(E) \in F(X)$ tel que pour tout morphisme $f : Y \to X$, on ait*

$$\alpha(f^*E) = f^*(\alpha(E)).$$

*Démonstration.* — Soit $E \to X$ un $G$-torseur comme dans l'énoncé. D'après le lemme 2.16 (a), on a un morphisme

$$F(\varphi_E) : F(BG) \to F(X)$$

qui définit une application $F(BG) \to M$ grâce au point (b) du même lemme. Inversement, à $\alpha \in M$ on associe $\alpha(EG) \in F(BG)$ (ce qui est bien défini : prendre un représentant quelconque de $\mathbb{E}_r G$ dans $S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$). Il est immédiat que ces flèches sont inverses l'une de l'autre. □

En utilisant les points (c) et (d) du lemme 2.16, on obtient une version covariante de cet énoncé :

***Théorème 3.6.*** — *Supposons $F$ covariant, à valeurs dans la catégorie des ensembles. Alors $F(BG)$ s'identifie à l'ensemble des symboles $\alpha$ associant à chaque $G$-torseur potentiel $U$, linéaire de coniveau $\geq r$, un élément $\alpha(U) \in F(U/G)$ tel que pour tout $G$-morphisme $f : U \to V$, on ait*

$$\alpha(V) = f_*(\alpha(U)).$$

***Remarque 3.7.*** — Soit $(F_n)$ un système inductif de foncteurs homotopiques et purs en coniveau $\geq r_n$ (avec $r_n \to +\infty$) vers une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des limites inductives filtrantes dénombrables. Pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, posons $F(X) = \varinjlim F_n(X)$. Ceci définit un nouveau foncteur $F = \varinjlim F_n$. Alors le lemme 2.18 donne un sens à $F(BG) := \varinjlim F_n(BG)$, qui est alors fonctoriel en $G$, même si $F$ n'est pur en aucun coniveau.

On peut procéder de même en remplaçant "limites inductives" par "limites projectives".

En termes des $B_rG$, cela reviendrait à introduire la catégorie

$$2 - \varprojlim S_r^{-1}\,\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$$

ce qui paraît trop pédant dans le présent contexte...

***Définition 3.8.*** — Soit $F$ un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ à valeurs dans une catégorie karoubienne (dont tout endomorphisme idempotent a un noyau). Pour tout $k$-groupe algébrique linéaire $G$, on pose

$$\tilde{F}(BG) = \mathrm{Ker}(F(B\varepsilon))$$

où $\varepsilon$ est l'idempotent $G \to \mathrm{Spec}(k) \to G$ (cf. ex. 2.22 a)).

**3.2. Exemples de foncteurs homotopiques.** — Le corps $k$ est maintenant supposé parfait. On note $G_k$ son groupe de Galois absolu.

Soit $j : U \hookrightarrow V$ une immersion ouverte de coniveau $\delta(j) = r$ (*cf.* déf. 2.1). On va donner ici des conditions sur $r$ pour que $F(j)$ soit un isomorphisme, pour un certain nombre de foncteurs $F$. D'après le lemme 1.9 (appliqué avec $G = 1$ !), on peut se limiter aux immersions ouvertes $j : U \hookrightarrow V$ telles que le fermé complémentaire $Z \overset{i}{\hookrightarrow} V$ soit lisse, irréductible et de codimension $r$.

*3.2.1. Cohomologie étale.* —

***Proposition 3.9.*** — *Soient $m$ un entier inversible dans $k$, $q \geq 0$ et $M$ un $G_k$-module de torsion première à* car $k$. *Alors le foncteur $F : X \mapsto H^q_{\text{ét}}(X, M)$ est homotopique et pur en coniveau $> \frac{q+1}{2}$.*

*Démonstration.* — On se ramène au cas où $M$ est d'exposant fini $m$. L'axiome d'homotopie résulte de l'acyclicité de la cohomologie étale [**Mil**, p. 240, cor. 4.20] plus un argument de type Mayer-Vietoris. La pureté résulte de la longue suite exacte dans la preuve de [**Mil**, p. 244, cor.

5.3] :

$$\cdots \to H^{q-2c}(Z, M \otimes T_{Z/V}) \to H^q(V, M) \\ \to H^q(U, M) \to H^{q-2c+1}(Z, M \otimes T_{Z/V}) \to \dots$$

où le faisceau $T_{Z/V}$ est localement isomorphe à $\mathbb{Z}/m$. □

*3.2.2. Cohomologie motivique.* — Dans ce numéro et les suivants, on va utiliser la catégorie triangulée des motifs effectifs géométriques de Voevodsky $\mathbf{DM} := \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},-}_{\mathrm{Nis}}(k)$, pour laquelle nous renvoyons à [**MVW**, Lect. 14]. Rappelons que cette catégorie possède une structure monoïdale, qu'on a un foncteur

$$M : \mathbf{Sm}(k) \to \mathbf{DM},$$

et des "objets de Tate" $\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes n} \in \mathbf{DM}$ pour tout $n \geq 0$, dont nous utiliserons les trois propriétés suivantes (on note $M(n) := M \otimes \mathbb{Z}(n)$) :

**Homotopie :**

$$M(E) \xrightarrow{\sim} M(X) \tag{3.1}$$

pour tout fibré vectoriel $E \to X$ [**MVW**, 14.5].

**Triangle exact de Gysin :**

$$M(U) \to M(U - Z) \to M(Z)(r)[2r] \to M(U)[1] \tag{3.2}$$

pour tout couple lisse $(U, Z)$ de codimension $r$ [**MVW**, 15.15].

**Simplification :** Le foncteur $M \mapsto M(1)$ est pleinement fidèle [**MVW**, 16.25, 16.26].

Pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, notons $H^p(X, \mathbb{Z}(q))$ les groupes de cohomologie motivique de $X$ définis par Suslin-Voevodsky [**MVW**, déf. 3.4] : on a aussi

$$H^p(X, \mathbb{Z}(q)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p])$$

[**MVW**, prop. 14.16]. De tout ceci on tire la *suite exacte de Gysin*

$$\cdots \to H^{q-2c}(Z, \mathbb{Z}(n-c)) \to H^q(U, \mathbb{Z}(n)) \\ \to H^q(U - Z, \mathbb{Z}(n)) \to H^{q+1-2c}(Z, \mathbb{Z}(n-c)) \to \dots \tag{3.3}$$

pour $(U, Z)$ comme en (3.2) [**MVW**, thm. 15.15].

***Proposition 3.10.*** — *Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et tout $n \geq 0$, le foncteur $X \mapsto H^q(X, \mathbb{Z}(n))$ est homotopique et pur en coniveau $> n$.*

*Démonstration.* — La propriété d'homotopie résulte de l'isomorphisme La preuve de la pureté est la même que pour la proposition 3.9 étant donné (3.3), avec deux différences : on a $\mathbb{Z}(q) = 0$ si $q < 0$, et on ignore si $H^p(X, \mathbb{Z}(q)) = 0$ pour $p < 0$ en général (c'est la conjecture de Beilinson-Soulé). □

***Exemple 3.11.*** — Les groupes de cohomologie motivique sont canoniquement isomorphes aux groupes de Chow supérieurs de Bloch [**MVW**, Lect. 17]. En particulier, pour $q = 2n$ on a $H^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) = CH^n(X)$ : on retrouve le fait que $CH^n(B_rG)$ est bien défini pour $r > n$ [**Tot**, déf. 1.2].

*3.2.3. Cohomologie motivique étale.* —

***Définition 3.12.*** — Soit $X$ une $k$-variété lisse. Pour $(q, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et pour un groupe abélien $A$, on pose

$$H^q_{\text{ét}}(X, A(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\text{ét}}}(\alpha^* M(X), A \otimes \mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}[q])$$

où $\mathbf{DM}_{\text{ét}} := \mathbf{DM}^{\text{eff},-}_{\text{ét}}(k)$ est la catégorie triangulée analogue à $\mathbf{DM}$, mais construite en termes de la topologie étale [**MVW**, déf. 9.2], et

$$\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} = \begin{cases} \alpha^*\mathbb{Z}(n) & \text{si } n \geq 0 \\ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)[-1] & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})' := \bigoplus_{l \neq \text{car } k} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$, cf. [**HK**, déf. 3.1].

Rappelons que pour $A = \mathbb{Z}/m$ ou $A = \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ ($m, l$ inversibles dans $k$), on retrouve la cohomologie étale ordinaire à coefficients dans des racines de l'unité tordues [**MVW**, 10.6].

On a un foncteur évident $\alpha^* : \mathbf{DM} \to \mathbf{DM}_{\text{ét}}$ (changement de topologie).

***Proposition 3.13.*** — *Soit $(q, n) \in \mathbb{Z}$. Alors le foncteur*

$$X \mapsto H^q_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$$

*est homotopique et pur en coniveau $\geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$, au sens de la définition 3.1.*

*Démonstration.* — C'est la même que pour la proposition 3.10 : l'axiome d'homotopie est clair d'après (3.1). Pour l'axiome de pureté, soit $U$ une

variété lisse et soit $Z$ un fermé lisse purement de codimension $r$. En utilisant le théorème de simplification de [**HK**, prop. A.4], on trouve :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k)}(\alpha^* M(Z)(r)[2r], A \otimes \mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}[q]) \simeq H^{q-2r}_{\text{ét}}(Z, \mathbb{Z}(n-r)).$$

Si $r > n$, ce groupe est la cohomologie étale d'un complexe de faisceaux concentré en degré 1 : il est donc nul dès que $q-2r-1 < 0$, soit $q-2r \leq 0$. On conclut à l'aide du triangle exact de Gysin (3.2). □

*3.2.4. Homologie motivique.* —

***Définition 3.14.*** — L'*homologie motivique* est définie par

$$H_i(X, \mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}(n)[i], M(X)).$$

Contrairement aux précédents, ce foncteur est *covariant* en $X$.

***Proposition 3.15.*** — *$H_i(-, \mathbb{Z}(n))$ est homotopique et pur en coniveau $> i - n + 1$.*

*Démonstration.* — C'est la même que ci-dessus. L'axiome d'homotopie résulte de (3.1). D'après le triangle exact de Gysin (3.2) et le théorème de simplification, on a une longue suite exacte

$$\begin{aligned} \ldots H_{i+1-2r}(Z, \mathbb{Z}(n-r)) &\to H_i(U, \mathbb{Z}(n)) \\ &\to H_i(V, \mathbb{Z}(n)) \to H_{i-2r}(Z, \mathbb{Z}(n-r)) \to \ldots \end{aligned}$$

De plus, pour $X$ lisse, on a $H_i(X, \mathbb{Z}(n)) = 0$ si $i < n$ [**K11**, prop. 6.1]. Donc $H_i(U, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H_i(V, \mathbb{Z}(n))$ si $r > i - n + 1$. □

*3.2.5. Le faisceau $h_0^{\mathrm{Nis}}$.* — Notons HI la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie [**MVW**, ch. 13]. Soit $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$. Le foncteur

$$\mathrm{HI} \ni \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$$

est représentable par un objet $h_0^{\mathrm{Nis}}(X) \in \mathrm{HI}$ (*cf.* [**Voe00b**, lemma 3.2.1]).

***Proposition 3.16.*** — *Le foncteur (covariant) $X \mapsto h_0^{\mathrm{Nis}}(X)$ est homotopique et pur en coniveau $\geq 2$.*

*Démonstration.* — La propriété d'homotopie se réduit à la $\mathbb{A}^1$-invariance homotopique par un argument de Mayer-Vietoris. Pour la pureté, on observe que si $Z \subset X$ est un fermé de codimension $\geq 2$, on a un isomorphisme $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X - Z)$ pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{HI}$ en vertu de la résolution de Gersten de [**MVW**, 24.11]. □

*3.2.6. K-théorie algébrique.* — Soit $i \geq 0$. Le foncteur de Quillen

$$K_i : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

est homotopique, mais pur en aucun coniveau. Pour donner un sens à $K_i(BG)$, on peut utiliser la remarque 3.7 : notons, pour $r \geq 0$ et $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, $K_i(X)^{(r)}$ le $r$-ième cran de la filtration par la codimension du support. La suite spectrale de Quillen

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(k(x)) \Rightarrow K_{-p-q}(X),$$

aboutissant à cette filtration, montre que le foncteur $K_i/K_i^{(r)}$ est homotopique et pur en coniveau $> (r-1)^2$ (voir le raisonnement de la preuve de la proposition 6.1 ci-dessous). De plus, $K_i(X)^{(r)} = 0$ pour $r > \dim X$ : on a donc un isomorphisme

$$K_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_r K_i/K_i^{(r)}$$

sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, et on est en mesure d'appliquer la remarque indiquée. On notera $\hat{K}_i(BG)$ le groupe obtenu ainsi : pour $i = 0$, on retrouve la définition de $K_0(BG)$ donnée dans [**Tot**, §3].

Si l'on utilise par contre la formule

$$K_i(BG) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet}(\Sigma_s^i(B_{\text{ét}}G_+), (BGL_\infty, *))$$

de [**MV**, p. 140, th. 3.13], la proposition 2.29 fournit des homomorphismes

$$K_i(BG) \to \hat{K}_i(BG)$$

qui ne sont pas *a priori* bijectifs, mais le deviennent après complétion du membre de gauche par rapport à la filtration par la codimension du support (le membre de droite étant complet par construction). Ceci est à comparer à Jacowski-Oliver [**JO**].

*3.2.7. Autres exemples.* — Nous laissons aux lecteurs le plaisir de les explorer (cobordisme algébrique, etc.) Dans la section 5, on calculera le coniveau des groupes de Chow à coefficients de Rost (cor. 5.11).

**3.3. Le transfert.** — Soit $G \in \mathbf{Grp}$, et soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé d'indice fini. Donnons-nous un foncteur $F : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$, homotopique et pur en coniveau $> r$, qui soit muni d'une fonctorialité covariante

pour les morphismes finis et plats. On peut alors définir un homomorphisme

$$\mathrm{Cor}_H^G : F(BH) \to F(BG) \tag{3.4}$$

de la manière suivante. Soit $U$ un $G$-torseur linéaire de coniveau $> r$. Alors $U/H \to U/G$ est fini et plat, d'où le morphisme cherché : on vérifie comme d'habitude qu'il ne dépend pas du choix de $U$.

***Lemme 3.17***. — *Supposons que les transferts de $F$ vérifient l'identité*

$$f_* \circ f^* = \deg(f)$$

*pour $f$ fini et plat. Alors, pour tout $G$ fini, on a $|G|\tilde{F}(BG) = 0$.* □

La condition du lemme 3.17 est vérifiée dans tous les exemples du §3.2, sauf dans le cas de la $K$-théorie algébrique.[3] Pour $F = CH^r$, *cf.* [**Tot**, §4] où l'utilisation de ces transferts est implicite mais leur construction n'est pas explicitée.

## 4. Cohomologie motivique étale de $BG$

Soit $G \in \mathbf{Grp}$, et soit $(q, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. D'après la proposition 3.13, les groupes $H^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ sont définis et fonctoriels en $G$. On va les calculer quand $G$ est un groupe fini (constant). Le résultat principal est :

***Théorème 4.1***. — *Supposons $k$ séparablement clos. Pour tout $(n, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\tilde{H}^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \simeq H^q(G, \mathbb{Z})'(n)$$

*où $'$ désigne la partie de torsion première à l'exposant caractéristique de $k$. (Voir définition 3.8 pour la notation $\tilde{H}$.)*

Ceci précise un résultat de Peyre [**Pe99**, prop. 4.2.1] : ici, la conjecture de Bloch-Kato n'intervient pas.

Voir §4.3 pour la démonstration ; elle donne aussi un isomorphisme à coefficients finis

$$H^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}/m(n)) \simeq H^q(G, \mathbb{Z}/m)(n)$$

pour $m$ premier à car $k$.

3. Dans le cas de l'homologie motivique, il faut renverser le sens des flèches...

Le raisonnement approximatif est le suivant. Soit $EG$ l'espace total du $G$-torseur universel de base $BG$. Alors $EG \to BG$ est un revêtement étale ; la suite spectrale de Hochschild-Serre associée (à coefficients $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}$) peut se décrire comme la suite spectrale d'hypercohomologie associée au complexe de $G$-modules

$$R\Gamma_{\text{ét}}(EG, \mathbb{Z}(n)).$$

Comme $EG$ est contractile, la projection $EG \to \operatorname{Spec} k$ induit un quasi-isomorphisme $G$-équivariant

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(EG, \mathbb{Z}(n))$$

qui montre que $H^*_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ s'identifie à l'hypercohomologie (*à coefficients $G$-triviaux*)

$$\mathbb{H}^*(G, R\Gamma_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Z}(n))).$$

Il est bien connu que, dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, tout complexe est isomorphe à la somme directe de ses groupes de cohomologie décalés. La suite spectrale correspondante

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \tag{4.1}$$

dégénère donc en $E_2$ (quoique pas canoniquement).

**4.1. $BG$ et suite spectrale de descente.** — Pour rendre le raisonnement ci-dessus rigoureux, il faut le faire à des niveaux "finis", c'est-à-dire en remplaçant $EG \to BG$ par $U \to U/G$ où $U$ est l'espace total d'un $G$-torseur linéaire de coniveau tendant vers l'infini. En effet, on vérifie facilement que la proposition 3.13 est optimale, c'est-à-dire que pour $n$ fixé, le coniveau de $H^q_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$ tend vers l'infini avec $q$. Ceci force à appliquer une version de la remarque 3.7. Cela peut se faire de la manière suivante :

Soit $n \in \mathbb{Z}$. pour tout $q \in \mathbb{Z}$, considérons le foncteur

$$\mathbf{Sm}_{\text{fl}} \ni X \mapsto \tau_{\leq q} R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n)) \tag{4.2}$$

à valeurs dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. La proposition 3.13 implique qu'il est homotopique et pur en coniveau $\geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$.

À tout $G$-torseur $p : U \to U/G$, associons maintenant la suite spectrale

$${}_{(q)}E_2^{p,q}(p) = H^p(G, H^q(\tau_{\leq q} R\Gamma_{\text{ét}}(U, \mathbb{Z}(n))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(G, \tau_{\leq q} R\Gamma_{\text{ét}}(U, \mathbb{Z}(n)).$$

Ceci définit un foncteur contravariant de la catégorie des $G$-torseurs vers celle des suites spectrales, qui est homotopique et pur en coniveau $\geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$, au sens qui généralise celui de la définition 3.1 (axiomes

relatifs à la base du $G$-torseur). De plus, les ${}_{(q)}E$ forment un système inductif, de limite la suite spectrale de Hochschild-Serre habituelle.

La construction 2.12, restreinte aux $G$-torseurs, fournit alors que ${}_{(q)}E$ prend un sens sur le "$G$-torseur universel" $\mathbb{E}_r G$ de la définition 2.13 pour $r \geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$, est indépendante d'un tel $r$, et que ces suites spectrales convergent quand $q \to \infty$ vers une suite spectrale de Hochschild-Serre pour le torseur universel $\mathbb{E}G$ [4]. Enfin, la propriété d'homotopie pour les (4.2) justifie la forme (4.1) de cette suite spectrale, et donc sa dégénérescence.

On peut résumer la discussion ci-dessus par le théorème suivant :

***Théorème 4.2.*** — *Soit $G$ un groupe fini, et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors la cohomologie $H^*_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de la forme* (4.1) *(action triviale sur les coefficients), qui dégénère en $E_2$.* □

**4.2. Rappels sur la cohomologie motivique étale d'un corps.** — Si $p$ est un nombre premier, un groupe abélien $A$ est dit *$p'$-divisible* (resp. *uniquement $p'$-divisible*) si, pour tout entier $m$ premier à $p$, la multiplication par $m$ sur $A$ est surjective (resp. bijective).

Rappelons que la conjecture de Bloch-Kato en degré $n$

$$K_n^M(F)/m \xrightarrow{\sim} H^m_{\text{ét}}(F, \mu_m^{\otimes n})$$

est triviale pour $n \leq 0$, se réduit au théorème 90 de Hilbert pour $n = 1$, est un théorème classique de Merkurjev et Suslin pour $n = 2$ **[MS]** et que sa démonstration complète résulte de travaux récents de Voevodsky, Rost et al.

***Lemme 4.3.*** — *Soit $p$ l'exposant caractéristique de $k$.*
*1) Supposons $k$ séparablement clos. Pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est nul pour $q > n$ et uniquement $p'$-divisible pour $q \leq n$, sauf pour $q = 1$. Le groupe $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est $p'$-divisible, de torsion isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)$.*
*2) Supposons $k$ quelconque, et $n \neq 0$.*
*a) $H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est uniquement divisible pour $q \leq 0$.*
*b) Pour $q \geq n + 2$, l'homomorphisme*

$$H^{q-1}_{\text{ét}}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \to H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$$

4. qui existe dans une catégorie $2 - \varprojlim S_r^{-1}(G - \mathbf{Tors})$, cf. remarque 3.7

*est bijectif.*
*c) Sous la conjecture de Bloch-Kato en degré $n$, on a*

$$\begin{aligned} H^q(k,\mathbb{Z}(n)) &\xrightarrow{\sim} H^q_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(n)) \text{ pour } q \le n \\ H^n_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(n)) &\simeq K^M_n(k) \\ H^{n+1}_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(n)) &= 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer 2) : 1) en est un cas particulier.

On a un triangle exact

$$\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \to \mathbb{Q}(n)_{\text{ét}} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) \xrightarrow{+1} .$$

Comme $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)$ est un faisceau concentré en degré 0, cela démontre a) sauf pour $q = 0$, où on n'a a priori qu'une suite exacte

$$H^0_{\text{ét}}(k,\mathbb{Q}(n)) \to H^0_{\text{ét}}(k,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \to H^1_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(n)).$$

Pour prouver la nullité de la première flèche, on peut raisonner comme suit (cf. preuve de [**K97**, th. 3.1]). Il suffit de montrer que, pour tout corps $k_0 \subset k$, de type fini sur le corps premier, l'homomorphisme

$$H^0_{\text{ét}}(k_0,\mathbb{Q}(n)) \to H^0_{\text{ét}}(k_0,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n))$$

est nul. Mais c'est évident, puisque le terme de gauche est divisible et le terme de droite est fini. (Ici on utilise que la cohomologie motivique étale à coefficients rationnels et de torsion commute aux limites inductives de corps : pour la seconde c'est standard, et pour la première cela résulte du théorème de comparaison avec la cohomologie Nisnevich [**MVW**, 14.24].)

b) provient du fait que le complexe (de faisceaux Nisnevich) $\mathbb{Z}(n)$ n'a pas de cohomologie en degré $> n$. Quant à c), le premier isomorphisme est l'énoncé "Bloch-Kato $\Rightarrow$ Beilinson-Lichtenbaum" [**Su-Vo, GL**], le second résulte du premier et de l'isomorphisme canonique $K^M_n(k) \simeq H^n(k,\mathbb{Z}(n))$ [**MVW**, 5.1] et le dernier est "Hilbert 90 en poids $n$". □

***Remarque 4.4.*** — Pour référence ultérieure, donnons une reformulation triangulée de la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum (qui est maintenant un théorème) utilisée dans le lemme ci-dessus : pour $n \ge 0$, la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum est vraie en poids $n$ si et seulement si le triangle

$$\mathbb{Z}(n) \to R\alpha_*\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \to \tau_{\ge n+2}R\alpha_*\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{+1}$$

est exact dans **DM**.

**4.3. Démonstration du théorème 4.1.** — L'énoncé est évident pour $n = 0$, on peut donc supposer $n \neq 0$. Appliquons le lemme 4.3 : dans la suite spectrale (4.1), les seuls termes $E_2^{p,q}$ non nuls sont pour $p = 0$ ou $q = 1$. On obtient donc

$$\tilde{H}^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \simeq \begin{cases} H^{q-1}(G, H^1(k, \mathbb{Z}(n))) & \text{si } q \neq 1 \\ 0 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

En réappliquant le lemme 4.3, on obtient un homomorphisme

$$H^{q-1}(G, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \to H^{q-1}(G, H^1(k, \mathbb{Z}(n)))$$

qui est bijectif pour $q \neq 1$. Toujours pour $q \neq 1$, on peut écrire

$$H^{q-1}(G, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \simeq H^{q-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) \xrightarrow{\sim} H^q(G, \mathbb{Z})'(n).$$

On conclut en observant que $H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$ et que $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est sans torsion.

**4.4. Cas d'un corps $k$ parfait quelconque.** — Dans les numéros suivants, on décrit le groupe $H^{n+2}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ pour $n \leq 2$. On aura besoin de ces résultats au §12.1.

*4.4.1.* $n < 0$. — Par définition, $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)[-1]$. On en déduit :

$$\tilde{H}^{n+2}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) = 0. \tag{4.3}$$

*4.4.2.* $n = 0$. — On a $\mathbb{Z}(0)_{\text{ét}} = \mathbb{Z}$, d'où

$$\tilde{H}^2_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(0)) = H^2(G, \mathbb{Z}). \tag{4.4}$$

(Rappelons que $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) = 0$.)

*4.4.3.* $n = 1$. — On a $\mathbb{Z}(1)_{\text{ét}} = \mathbb{G}_m[-1]$, d'où

$$\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(1)) = \widetilde{\mathrm{Br}}(BG) = H^2(G, k^*). \tag{4.5}$$

(Rappelons que $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{G}_m) = 0$ : théorème 90 de Hilbert.)

*4.4.4.* $n = 2$. — Dans ce cas, grâce au lemme 4.3 a) on obtient une suite exacte (scindée)

$$0 \to H^2(G, H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))) \to \tilde{H}^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \to H^3(G, H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))) \to 0.$$

D'après le lemme 4.3 c), on a $H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2)) \simeq K_2^M(k) = K_2(k)$. Il reste un groupe à décrire :

***Lemme 4.5***. — *On a un isomorphisme*

$$H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2)) \simeq K_3(k)_{\text{ind}}$$

*où* $K_3(k)_{\text{ind}} := \operatorname{Coker}(K_3^M(k) \to K_3(k))$.

*Démonstration*. — Cela résulte de [**BL**, th. (7.2)], du lemme 4.3 2) c) et du théorème de Voevodsky comparant cohomologie motivique et groupes de Chow supérieurs [**MVW**, Lect. 19]. Une autre manière de conclure est d'utiliser la suite spectrale de Bloch-Lichtenbaum

$$E_2^{p,q} = H^{p-q}(k, \mathbb{Z}(-q)) \Rightarrow K_{-p-q}(k)$$

[**BL, Le**]. Comme $E_2^{p,q} = 0$ pour $p < 0$ et $q = 0, -1$, cette suite spectrale donne une suite exacte

$$H^3(k, \mathbb{Z}(3)) \to K_3(k) \to H^1(k, \mathbb{Z}(2)) \to 0$$

c'est-à-dire un isomorphisme $K_3(k)_{\text{ind}} \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathbb{Z}(2))$. On utilise alors l'isomorphisme $H^1(k, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))$ du lemme 4.3. □

Soit $k_0$ le sous-corps des constantes de $k$, c'est-à-dire la fermeture algébrique du sous-corps premier. Alors $K_3(k_0)_{\text{ind}} \to K_3(k)_{\text{ind}}$ est injectif, de conoyau uniquement divisible (cf. [**K93**, (1.4)]). Comme dans [**K93**, th. 2.1], on en déduit :

***Proposition 4.6***. — *On a une suite exacte scindée :*

$$0 \to H^2(G, K_2(k)) \to \tilde{H}^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \to H^3(G, K_3(k_0)_{\text{ind}}) \to 0 \tag{4.6}$$

*où* $k_0$ *est le sous-corps des constantes de* $k$. □

*4.4.5. $n > 2$.* — La situation est plus compliquée. Pour $n = 3$, le groupe $\tilde{H}^5_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(3))$ admet une filtration à trois crans, commençant par $H^3(G, K_3^M(k))$.

## 5. Modules de cycles de Rost et cohomologie de cycles

**5.1. Modules de cycles.** — Pour tout ce qui concerne les modules de cycles et leur cohomologie, on renvoie à l'article de Rost [**Rost**]. Nous nous contentons de résumer les points essentiels de sa théorie :

Soit $\mathcal{F}(k)$ la catégorie des corps de type fini sur $k$. Pour $F \in \mathcal{F}(k)$, on note $\mathcal{P}(F/k)$ l'ensemble des valuations discrètes divisorielles sur $F$, centrées en $k$ (l'anneau $\mathcal{O}_v$ de $v$ est une localisation d'une $k$-algèbre intègre

de type fini en un point régulier de codimension 1). Si $v \in \mathcal{P}(F/k)$, on note $\kappa(v)$ son corps résiduel. Notons que l'hypothèse sur $v$ entraîne

$$tr.deg.(F|k) = tr.deg.(\kappa_v|k) + 1.$$

*5.1.1. Prémodules de cycles.* — Un *prémodule de cycles* (sur $k$) est un foncteur covariant $M$ de $\mathcal{F}(k)$ vers la catégorie des groupes abéliens gradués, muni des structures supplémentaires suivantes :

1. Fonctorialité contravariante pour les extensions finies.
2. Pour chaque $F \in \mathcal{F}(k)$, une structure de $K_*^M F$-module gradué sur $M(F)$, où $K_*^M F$ est l'anneau de Milnor de $F$. On la note $x \cdot \rho$ où $x \in K_*^M F$ et $\rho \in M(F)$.
3. Pour $F \in \mathcal{F}(k)$ et $v \in \mathcal{P}(F/k)$, un "morphisme résidu" $\partial_v : M(F) \to M(\kappa(v))$, de degré $-1$.

Ces données sont assujetties à une liste d'axiomes donnée dans [**Rost**, déf. 1.1, p. 328].

*5.1.2. Modules de cycles.* — Soit $X$ un $k$-schéma : on écrit $M(x) = M(k(x))$ pour $x \in X$. Si $X$ est normal intègre, alors l'anneau local de X en $x \in X^{(1)}$ est un anneau de valuation discrète de rang un ; soit $\partial_x : M_n(\xi_X) \to M_{n-1}(x)$ l'homomorphisme résidu associé, où $\xi_X$ est le point générique de $X$. Pour $X$ quelconque et $x, y \in X$, on en déduit un morphisme $\partial_y^x : M(x) \to M(y)$ [**Rost**, p. 337].

***Définition 5.1*** ([**Rost**, déf. 2.1, p. 337]). — Un *module de cycles* $M$ sur $k$ est un prémodule de cycles satisfaisant aux conditions (FD) et (C) suivantes :

**(FD) :** "SUPPORT FINI". Soient $X$ un $k$-schéma normal intègre et $\rho \in M(\xi_X)$, alors $\partial_x(\rho) = 0$ pour tout $x \in X^{(1)}$ en dehors d'un ensemble fini.

**(C) :** "FERMETURE". Soit $X$ intègre et local de dimension 2, alors

$$0 = \sum_{x \in X^{(1)}} \partial_{x_0}^x \circ \partial_x^\xi : M(\xi_X) \to M(x_0)$$

où $\xi_X$ est le point générique et $x_0$ est le point fermé de $X$.

***Proposition 5.2*** ([**Rost**, prop. 2.2]). — *Soit $M$ un module de cycles sur $k$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites pour tout corps $F$ de type fini sur $k$.*

**(H) :** *HOMOTOPIE POUR $\mathbb{A}^1$. La suite suivante est exacte :*

$$0 \to M_*(F) \to M_*(F(t)) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}^1_F)_{(0)}} M_{*-1}(F(x)) \to 0$$

*où $F(t)$ est le corps des fonctions de $\mathbb{A}^1_F$.*

**(RC) :** *RÉCIPROCITÉ POUR LES COURBES. Soit $X$ une courbe propre et lisse sur $F$. Alors la suite*

$$M_*(F(X)) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} M_{*-1}(F(x)) \to M_{*-1}(F)$$

*où les flèches $M_{*-1}(F(x)) \to M_{*-1}(F)$ proviennent de la fonctorialité contravariante, est un complexe.*

De la propriété (H), on tire :

***Lemme 5.3.*** — *Soit $K/F$ une extension unirationnelle dans $\mathcal{F}(k)$. Alors, pour tout module de cycles $M$ sur $k$, l'application $M_*(F) \to M_*(K)$ est injective.* □

Nous aurons besoin de la définition suivante :

***Définition 5.4.*** — Un module de cycles $M$ est dit *connectif* s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$ pour tout $n < n_0$. On pose alors

$$\delta(M) = \inf\{n \mid M_n \neq 0\} \quad \text{(connectivité de } M\text{)}.$$

Si $M$ n'est pas connectif, on pose $\delta(M) = -\infty$.

En utilisant [**K11**, thm. 1.3 et prop. 6.7], on peut montrer que tout module de cycles $\mathbb{Z}[1/p]$-linéaire, où $p$ est l'exposant caractéristique de $k$, est limite inductive filtrante de modules de cycles connectifs (*cf.* preuve du corollaire 11.11).

### 5.2. Exemples de modules de cycles. —

*5.2.1.* La $K$-théorie de Milnor la cohomologie galoisienne définissent des modules de cycles de connectivité 0 [**Rost**, rem. 2.4 et 2.5].

*5.2.2.* D'après [**Deg08**, 6.2.1], tout foncteur additif contravariant de **DM** vers la catégorie des groupes abéliens fournit des modules de cycles (un pour chaque $n \in \mathbb{Z}$).

Un exemple de tel foncteur est donné par

$$C' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(C', C).$$

où $C$ est un objet de **DM**. En regardant la formule de [**Deg08**, 6.2.1], on voit que les modules de cycles associés sont donnés par la formule

$$M_q^{(n)}(F) = H^q(F, C(n+q))$$

où on pose, pour une $k$-variété lisse $X$

$$H^q(X, C(n+q)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(M(X), C(n+q)[q])$$

puis

$$H^q(F, C(n+q)) = \varinjlim H^q(U, C(n+q))$$

où $U$ parcourt les modèles lisses de $F/k$. En prenant $C = \mathbb{Z}$, on voit que la cohomologie motivique définit des modules de cycles $M_q^{(n)}(F) = H^q(F, \mathbb{Z}(n+q))$, de connectivité $\geq -n$. (5)

*5.2.3.* Si $C$ est un objet de $\mathbf{DM}_{\text{ét}}$, il définit un foncteur comme ci-dessus

$$C' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\text{ét}}}(\alpha^* C', C).$$

En prenant $C = \alpha^*\mathbb{Z}$, on voit que la cohomologie motivique étale définit des modules de cycles $M_q^{(n)}(F) = H^q_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}(n+q))$, de connectivité $\geq \inf(-n, 1)$ (même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.13). (6)

## 5.3. Complexes de cycles et groupes de Chow. —

***Définition 5.5*** ([**Rost**, 3.2, p. 346]). — Soient $M$ un module de cycles sur $k$, soit $X$ un $k$-schéma de type fini et soit $p$ un entier. Posons

$$C_p(X, M_n) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} M_{n+p}(x).$$

On définit une différentielle

$$d = d_X : C_p(X, M_n) \to C_{p-1}(X, M_n)$$

5. Sous la conjecture de Beilinson-Soulé, cette minoration s'améliore en : $\geq \sup(-n, 0)$.

6. Sous la conjecture de Beilinson-Soulé, cette minoration s'améliore en : $\geq \sup(\inf(-n, 1), 0)$.

dont la composante $d_y^x$ ($x \in X_{(p)}$, $y \in X_{(p-1)}$) est décrite dans [**Rost**, 2.1.0]. Cette définition est bien déterminée par l'axiome (FD). On a $d_X \circ d_X = 0$ ([**Rost**, lem. 3.3]).

Le complexe $C_*(X, M_n) = (C_p(X, M_n), d_X)_{p\geq 0}$ est appelé le *complexe de cycles homologique* sur $X$ à coefficients dans $M_n$.

Si $X$ est équidimensionnel, on pose aussi

$$C^p(X, M_n) = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} M_{n-p}(x)$$

et on définit :

$$d = d_X : C^p(X, M_n) \to C^{p+1}(X, M_n)$$

de la même manière. Le complexe $C^*(X, M_n) = (C^p(X, M_n), d_X)_{p\geq 0}$ est appelé le *complexe de cycles cohomologique* sur $X$ à coefficients dans $M$.

On note $A_p(X, M_n)$ (*resp.* $A^p(X, M_n)$) [7] le $p$-ième groupe d'homologie (*resp.* de cohomologie) du complexe $C_*(X, M_n)$ (*resp.* $C^*(X, M_n)$). Avec Rost, on l'appelle le groupe de Chow des cycles de dimension $p$ (*resp.* de codimension $p$) à coefficients dans $M$.

***Exemple 5.6***. — Si $X$ est intègre de point générique $\xi_X$, on a

$$A^0(X, M_n) = \operatorname{Ker} d = \bigcap_{x\in X^{(1)}} \operatorname{Ker} \partial_x^\xi \subset M_n(\xi_X).$$

On peut voir $A^0(X, M)$ comme le groupe des éléments non ramifiés sur $X$.

***Remarque 5.7*** **(Groupes de Chow classiques)**

On a [**Rost**, rem. 5.1] :

$$A_p(X; K_{-p}^M) = CH_p(X) \text{ et } A^p(X; K_p^M) = CH^p(X).$$

Par exemple, on a $CH_0(X) = A_0(X, K_0^M)$.

***Remarque 5.8***. — Si $X$ est équidimensionnel et de dimension $d$, alors $X^{(p)} = X_{(d-p)}$ et $C^p(X, M_n) = C_{d-p}(X, M_{n-d})$, donc

$$A^p(X, M_n) = A_{d-p}(X, M_{n-d}).$$

7. Rost note $A_p(X, M, n)$ et $A^p(X, M, n)$.

***Lemme 5.9*** **([Rost**, (3.10), p. 350]**).** — *Soient $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $Z$ le fermé complémentaire. Soit $p$ un entier positif. On a une suite exacte de complexes :*

$$0 \to C_*(Z, M_n) \to C_*(X, M_n) \to C_*(U, M_n) \to 0.$$

*D'où une suite exacte de localisation* [**Rost**, §5, p. 356] *:*

$$\cdots \to A_p(Z, M_n) \to A_p(X, M_n) \to A_p(U, M_n) \to A_{p-1}(Z, M_n) \to \dots$$

***Corollaire 5.10.*** —

1. *Sous l'hypothèse du lemme 5.9, on a*

$$A_p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A_p(U, M_n) \text{ si } \dim Z < p - 1.$$

2. *De plus, si $X$ est équidimensionnel, alors*

$$A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n) \text{ si } \operatorname{codim}_X Z > \inf\{n - \delta(M), p + 1\}.$$

*(voir définition 5.4 pour $\delta(M)$).*

*Démonstration.* — 1) résulte de la trivialité

$$A_p(Z, M_n) = 0 \text{ si } Z_{(p)} = \varnothing \ i.e. \ \dim Z < p.$$

2) Du lemme 5.9 et de 1), en supposant que $Z$ soit irréductible lisse de codimension $c$, on déduit que

$$A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n) \text{ si } c > p + 1.$$

Supposons $M$ connectif. Si $x \in X^{(p)} \cap Z$, alors $x \in Z^{(p-c)}$ donc la suite exacte de localisation prend la forme :

$$\cdots \to A^{p-c}(Z, M_{n-c}) \to A^p(X, M_n) \\ \to A^p(U, M_n) \to A^{p-c+1}(Z, M_{n-c}) \to \dots$$

Si $n - c < \delta(M)$ *i.e.* $c > n - \delta(M)$, alors $M_{n-c} = 0$, donc on a aussi $A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n)$. On en déduit (2). □

***Corollaire 5.11.*** — *$A^p(-, M_n)$ est un foncteur contravariant sur* $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$*, homotopique et pur en coniveau $> \inf\{n - \delta(M), p + 1\}$.*

*Démonstration.* — D'après [**Rost**, §12, p. 382], $A^p(-, M_n)$ est un foncteur contravariant et l'invariance par homotopie est démontrée dans [**Rost**, prop. 8.6, p. 370]. L'axiome de pureté résulte du corollaire 5.10. □

Nous aurons enfin besoin du lemme suivant, qui résulte de la description du morphisme bord d'une longue suite exacte de cohomologie :

***Lemme 5.12.*** — *Soit $M$ un module de cycles, et soit $F \in \mathcal{F}(k)$. Notons $\partial_0$ le résidu relatif à la valuation discrète sur $F(t) = F(\mathbb{A}^1)$ correspondant à l'origine de $\mathbb{A}^1_F$. Notons d'autre part $\delta$ le bord de la suite exacte de localisation relative à l'immersion ouverte $\mathbb{G}_{m,F} \hookrightarrow \mathbb{A}^1_F$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A^0(\mathbb{G}_{m,F}, M_n) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, hook] & A^0(F, M_{n-1}) \arrow[d, "="] \\ M_n(F(t)) \arrow[r, "\partial_0"] & M_{n-1}(F) \end{tikzcd}$$

*est commutatif.* □

**5.4. Le transfert.** — Soit $G \in \mathbf{Grp}$, et supposons $M$ connectif. Le corollaire 5.11 donne un sens à $A^p(BG, M_n)$, qui est contravariant en $G$. En appliquant la covariance des groupes de Chow à coefficients pour les morphismes propres [**Rost**, prop. (4.6) (1)], on obtient aussi des transferts (3.4). Ils vérifient la condition du lemme 3.17 d'après [**Rost**, lemma (4.2) (2)]. On en conclut :

***Proposition 5.13.*** — *Si $G$ est fini, on a $|G|\tilde{A}^p(BG, M_n) = 0$ pour tout $p \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.* □

**5.5. Cohomologie de cycles et invariants cohomologiques de torseurs.** — Gardons les hypothèses ci-dessus. L'argument de Totaro [**GMS**, appendix C] démontre (raffinement du théorème 3.5) :

***Théorème 5.14.*** — *Pour tout groupe $G$ algébrique linéaire sur un corps $k$, on a*

$$A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}_k(G, M_n)$$

*où $\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$ est le groupe des invariants de $G$ à valeur dans $M_n$ défini par Serre* [**GMS**, déf. 1.1]*, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de foncteurs $A \to M_n$ où*

$$A : \mathcal{F}(k) \to Ens,\ \ A(F) = H^1(F, G).$$

Cet isomorphisme envoie $\tilde{A}^0(BG, M_n)$ sur le sous-groupe $\widetilde{\mathrm{Inv}}_k(G, M_n)$ des *invariants normalisés* : ceux qui sont triviaux sur le $G$-torseur neutre.

On peut se convaincre que les transferts du numéro précédent coïncident avec ceux définis par Serre dans [**GMS**, §14].

***Mise en garde 5.15.*** — Ceci ne couvre pas les invariants à valeurs dans les groupes de Witt de [**GMS**, ch. VIII]. Pour y parvenir, il faut généraliser la théorie des modules de cycles [**Schmidt**].

## 6. Suites spectrales de coniveau pour $BG$

Notons **Spct** la catégorie des suites spectrales convergentes. Supposons donné un foncteur

$$E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q} : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Spct}\,. \tag{6.1}$$

Supposons que les foncteurs $E_2^{p,q}$ et $H^n$, pris individuellement, soient homotopiques et purs en coniveau $\gg 0$. Quand peut-on en déduire une suite spectrale convergente

$$E_2^{p,q}(BG) \Rightarrow H^{p+q}(BG)$$

pour $G \in \mathbf{Grp}$ ?

Cette question rappelle celle étudiée par Atiyah dans [**At**, §5], mais elle est plus élémentaire. Nous allons donner des conditions suffisantes pour une réponse positive.

**6.1. Cohérence de foncteurs spectraux.** — Un premier cas facile est celui où les $\nu(E_2^{p,q})$ (voir définition 3.3) sont uniformément bornés par un entier $n$. Le lemme des 5 montre alors immédiatement que $n$ borne le coniveau des $E_r^{p,q}$ pour tout $r \in [2, \infty]$, puis celui de $H^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le foncteur spectral (6.1) est alors globalement pur en coniveau $> n$, et est donc défini sur $B_{n+1}G$.

Voici un second cas un peu plus compliqué :

***Proposition 6.1.*** — *Supposons que les foncteurs $E_2^{p,q}$ soient homotopiques et purs en coniveau $\gg 0$ (non nécessairement borné) et que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des couples $(p,q)$ avec $p+q \leq n$ tels que $E_2^{p,q} \neq 0$ soit fini. Alors $(E_r^{p,q}, H^n)$ induit un foncteur*

$$G \mapsto (E_r^{p,q}(BG), H^n(BG))$$

*de* **Grp** *vers la catégorie des suites spectrales convergentes.*

*Démonstration.* — Elle est dans l'esprit de la remarque 3.7, à laquelle on n'arrive pas tout à fait à se ramener.

Montrons qu'il existe deux fonctions $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telles que, pour $p+q \leq n$ et $r \geq 2$, on ait $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ pour $r \geq f(n)$ et $\nu(E_r^{p,q}) \leq g(n)$ pour tout $r$. La première affirmation est évidente, puisque l'hypothèse

implique que $E_2^{p-r,q+r-1} = E_2^{p+r,q-r+1} = 0$ pour $r$ assez grand et que $E_2^{p,q} = 0$ pour $p+q$ assez petit. La seconde affirmation est vraie pour $r = 2$ pour la même raison, avec une fonction $g_2(n)$ ; elle en découle par récurrence pour tout $r \geq 2$, avec une fonction $g_r(n)$, en utilisant le lemme des 5. La première affirmation entraîne alors que $g(n) := \sup_r g_r(n) < \infty$.

En réutilisant le lemme des 5, on voit aussi que $\nu(H^n) \leq g(n)$.

Étant donné $G \in \mathbf{Grp}$, posons alors

$$E_r^{p,q}(BG) = E_r^{p,q}(B_{g(n)+1}G), \quad H^n(G) = H^n(B_{g(n)+1}G).$$

On voit immédiatement que ceci définit une suite spectrale convergente, contravariante en $G$. □

**6.2. Suites spectrales de coniveau et DM.** — Un article récent de Déglise [**Deg12**] permet d'amplifier la construction de modules de cycles expliquée dans 5.2.2 en une construction de suites spectrales.

Soit $C \in \mathbf{DM}$. En appliquant [**Deg12**, (2.3.b)] au foncteur de 5.2.2, il donne naissance à des suites spectrales de coniveau ($n \in \mathbb{Z}$)

$$E_1^{p,q}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(k(x), C(n-p)) \Rightarrow H^{p+q}(X, C(n))$$

pour tout $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, où on note

$$H^i(X, C(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(M(X), C(n)[i])$$
$$H^i(F, C(n)) = \varinjlim_{A \subset F} H^i(\operatorname{Spec} A, C(n)).$$

Le fait que ces suites spectrales soient contravariantes pour les morphismes plats n'est pas explicitement écrit dans [**Deg12**], mais résulte immédiatement de la définition de la filtration par le coniveau.

Même conclusion pour $C \in \mathbf{DM}_{\text{ét}}$ et le foncteur de 5.2.3, avec

$$E_1^{p,q}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H_{\text{ét}}^{q-p}(k(x), C(n-p)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, C(n))$$

En particulier, on obtient des suites spectrales convergentes, pour $X$ lisse :

$$E_1^{p,q}(X, n) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(k(x), \mathbb{Z}(n-p)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Z}(n)) \tag{6.2}$$

$$E_1^{p,q}(X, n)_{\text{ét}} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H_{\text{ét}}^{q-p}(k(x), \mathbb{Z}(n-p)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbb{Z}(n)) \tag{6.3}$$

qui sont contravariantes pour les morphismes plats. D'après [**Deg12**, prop. 2.7], leurs termes $E_1$ sont les complexes de cycles associés aux modules de cycles attachés à la cohomologie motivique (*resp.* à la cohomologie motivique étale), d'où

$$E_2^{p,q}(X,n) = A^p(X, H^q(\mathbb{Z}(n))) \tag{6.4}$$

$$E_2^{p,q}(X,n)_{\text{ét}} = A^p(X, H^q_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(n))). \tag{6.5}$$

En remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/m$, on obtient des versions à coefficients finis ; avec ces coefficients, (6.3) devient la suite spectrale de coniveau classique pour la cohomologie étale [**BO**].

**6.3. Localisation de la cohomologie motivique étale.** — Soit $X$ une $k$-variété lisse. On va étudier l'homomorphisme "edge" de (6.3)

$$H^{n+2}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n)) \to A^0(X, H^{n+2}_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(n))) \tag{6.6}$$

pour de petites valeurs de $n$. Notons que, d'après le lemme 4.3 2) b), le second membre peut aussi s'écrire $A^0(X, H^{n+1}_{\text{ét}}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)))$.

Nous aurons besoin des propriétés suivantes des termes $E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}}$, que nous recopions de [**K10**, prop. 2.7 b)] (en y ajoutant un cas trivial).

***Lemme 6.2.*** — *On a $E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}} = 0$ pour*

(i) $p < 0$.

(ii) $p \geq q$ *et* $p \geq n-1$, *sauf* $p = q = n$.

(iii) $q = n+1$ *sous la conjecture de Bloch-Kato en degré* $n-p$.

*De plus, $E_1^{p,q}(X,n)_{\text{ét}}$ est uniquement divisible pour $p \geq q$ et $p < n-1$. Enfin, pour $q = n$, la flèche naturelle $A^p(X, K_n^M)[1/p] \to E_2^{p,n}(X,n)_{\text{ét}}$ est surjective sous la conjecture de Bloch-Kato en degré $\leq n-p$, et bijective sous cette conjecture en degré $\leq n-p+1$. En particulier, on a un isomorphisme canonique*

$$E_2^{n,n}(X,n)_{\text{ét}} \simeq CH^n(X)$$

*cf. remarque 5.7.*

Étant donné le lemme 6.2, la démonstration du théorème suivant est un exercice facile. Il repose sur la conjecture de Bloch-Kato en degré 2 pour b), en degré 3 pour c).

***Théorème 6.3***. — *a) Pour $n \leq 1$,* (6.6) *est un isomorphisme.*
*b) (cf.* [**K96**, th. 1.1, (9)] *et* [**K13**, prop. 2.9]*). On a une suite exacte courte*

$$0 \to CH^2(X) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to A^0(X, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to 0.$$

*c) (cf.* [**K03**, rem. 4.10]*). On a une suite exacte*

$$0 \to A^2(X, K_3^M) \to H^5_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(3)) \to A^0(X, H^5_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(3))) \\ \to CH^3(X) \to H^6_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(3)).$$

***Remarque 6.4***. — La suite spectrale (6.2) donne un isomorphisme

$$A^2(X, K_3^M) \xrightarrow{\sim} H^5(X, \mathbb{Z}(3)).$$

### 6.4. Suites spectrales de coniveau pour $BG$. —

***Théorème 6.5***. — *Le foncteur spectral* (6.3)*, pris à partir de son terme $E_2$, est homotopique et pur en coniveau $> n$.*

*Démonstration.* — Pour le terme $E_2$ (et donc $E_r$ pour $2 \leq r \leq \infty$), cela résulte de l'exemple 5.2.2 et du corollaire 5.11. Plus précisément, ces références donnent l'estimation

$$\nu(E_2^{p,q}(-, n)) \leq \inf(n, p+1) \leq n.$$

Pour l'aboutissement, cela résulte de la proposition 3.10. □

Le théorème 6.5 donne un sens aux suites spectrales convergentes

$$A^p(BG, H^q(\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow H^{p+q}(BG, \mathbb{Z}(n))$$

pour $G \in \mathbf{Grp}$. Nous allons voir que la situation est plus délicate pour la cohomologie motivique étale.

***Théorème 6.6***. — *Les foncteurs spectraux* (6.3)*, pris à partir de leur terme $E_2$, vérifient les hypothèses de la proposition 6.1.*

*Démonstration.* — En utilisant l'exemple 5.2.3 et le corollaire 5.11, on trouve

$$\nu(E_2^{p,q}(-, n)_{\text{ét}}) \leq \inf(\sup(n, q-1), p+1) < \infty.$$

D'autre part, la condition de finitude de la proposition 6.1 résulte du lemme 6.2. □

Le théorème 6.6 donne un sens aux suites spectrales convergentes

$$A^p(BG, H^q_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$$

pour $G \in \mathbf{Grp}$. Par fonctorialité, on en déduit des suites spectrales convergentes “réduites" :

$$\tilde{A}^p(BG, H^q_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow \tilde{H}^{p+q}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \tag{6.7}$$

*cf.* définition 3.8.

**6.5. Cas d'un schéma en groupes fini.** — Supposons $G$ fini. On a alors un raffinement utile du lemme 6.2 :

***Lemme 6.7.*** — *Si $G$ est fini, on a $\tilde{E}_2^{p,q}(BG, n)_{\text{ét}} = 0$ pour*

(i) $p < 0$.

(ii) $p \geq q$, *sauf* $p = q = n$.

*Démonstration.* — D'après le lemme 6.2, il suffit de traiter le cas $p \geq q$ et $p < n - 1$. Alors $\tilde{E}_2^{p,q}(BG, n)_{\text{ét}}$ est uniquement divisible et annulé par l'ordre de $G$ (proposition 5.13), donc nul. □

**6.6. Cas d'un groupe fini.** — Supposons $k$ algébriquement clos de caractéristique 0 et $G$ fini. Pour simplifier, négligeons les twists à la Tate. Alors (6.7) et le théorème 4.1 fournissent une famille de suites spectrales

$$\tilde{E}_2^{p,q}(BG, n)_{\text{ét}} = \tilde{A}^p(BG, H^q_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow \begin{cases} H^{p+q}(G, \mathbb{Z}) & p + q \neq 0 \\ 0 & p + q = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

aboutissant à la cohomologie entière de $G$.

On peut alors s'amuser à faire varier $n$ et étudier quelle information on obtient sur $H^*(G, \mathbb{Z})$. Commençons par examiner le cas où $n \leq 0$.

*6.6.1. Le cas $n \leq 0$.* — En tenant compte des isomorphismes

$$H^{i-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(G, \mathbb{Z}) \quad (i \neq 0, 1)$$

on peut considérer une suite spectrale concurrente

$$E_2^{p,q}(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{ét}} = A^p(BG, H^q_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))) \Rightarrow H^{p+q}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{6.9}$$

dont l'existence et la convergence se démontrent comme pour le théorème 6.6. Pour $n < 0$, la définition de $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}$ (définition 3.12) montre que $(6.8)_n$ est essentiellement équivalente à (6.9) ; un petit calcul montre que c'est encore le cas pour $n = 0$.

On établit facilement un isomorphisme

$$A^p(X, H^p_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(p))) \simeq CH^p(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour tout $X \in \mathbf{Sm}_{\text{fl}}$. En utilisant le lemme 3.17, on en déduit que $E_2^{p,p}(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{ét}} = 0$ pour tout $p > 0$. Ceci justifie qu'en petits degrés, (6.9) fournisse les isomorphismes et suites exactes suivantes :

$$H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} A^0(BG, H^1_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$
$$H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} A^0(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Br}(BG) \quad \text{(Bogomolov ?)}$$
$$0 \to A^1(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to H^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to 0$$

et

$$0 \to A^1(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to H^4(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to A^0(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$
$$\to A^2(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to H^5(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Supposons maintenant $n > 0$. Le lemme 4.3 2) b) fournit alors des isomorphismes

$$E_2^{p,q-1}(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} E_2^{p,q}(BG, n)_{\text{ét}}$$

pour $q \geq n+2$, ce qui montre que les suites spectrales donnent la même information dans cette zone. Par contre, on obtient en bas degré d'autres suites exactes et isomorphismes, certains connus, d'autres non (*cf.* théorème 6.3) :

*6.6.2.* $H^2(G, \mathbb{Z})$. —

$$CH^1(BG) \xrightarrow{\sim} H^2(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 1; [\textbf{Pe99}, \text{ ex. } 3.1.1])$$
$$H^2(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{A}^0(BG, K_2^M) \quad (n = 2)$$

*6.6.3.* $H^3(G, \mathbb{Z})$. —

$$A^1(BG, K_2^M) \xrightarrow{\sim} H^3(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 2)$$
$$0 \to A^1(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(3))) \to H^3(G, \mathbb{Z}) \to \tilde{A}^0(BG, K_3^M) \to 0 \quad (n = 3)$$

*6.6.4.* $H^4(G, \mathbb{Z})$. —

$$0 \to CH^2(BG) \to H^4(G, \mathbb{Z}) \to A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to 0$$
$$(n = 2; [\textbf{Pe08}, \text{ prop. } 1])$$

$$A^1(BG, K_3^M) \xrightarrow{\sim} H^4(G, \mathbb{Z}) \quad (n = 3)$$

*6.6.5.* $H^5(G,\mathbb{Z}), H^6(G,\mathbb{Z}), H^7(G,\mathbb{Z})$. —

$$0 \to A^2(BG, K_3^M) \to H^5(G,\mathbb{Z}) \to A^0(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))) \\ \to CH^3(BG) \to H^6(G,\mathbb{Z}) \quad (n=3)$$

$$0 \to A^2(BG, H^3(\mathbb{Z}(4))) \to H^5(G,\mathbb{Z}) \to A^1(BG, K_4^M) \to 0 \quad (n=4)$$

$$0 \to A^2(BG, K_4^M) \to H^6(G,\mathbb{Z}) \to A^0(BG, H^5_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(4))) \\ \to A^3(BG, K_4^M) \to H^7(G,\mathbb{Z}) \quad (n=4)$$

Enfin, parmi les termes $\tilde{E}_r^{0,q}(BG,n)$ on retrouve des invariants connus :

– D'après le théorème 5.14, $\tilde{E}_2^{0,q}(BG,n)_{\text{ét}}$ est la partie réduite du groupe $\mathrm{Inv}_k(G, M_q^{(n-q)})$ (invariants cohomologiques de Serre), où $M_q^{(r)}$ est le module de cycles $F \mapsto H^q_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}(r+q))$.

– $\tilde{E}_\infty^{0,q}(BG,n)_{\text{ét}}$ est l'image de $H^q(G,\mathbb{Z})$ dans le groupe précédent : pour $n \leq q-2$, c'est la cohomologie stable $H^q_{\text{st}}(G,\mathbb{Z})$ de $G$ au sens de Bogomolov.

On voit donc qu'entre $H^q_{\text{st}}(G,\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Inv}_k(G, M_q^{(2)})$ il existe une suite finie d'invariants plus fins, à savoir les $\tilde{E}_r^{0,q}(BG, q-2)_{\text{ét}}$ pour $2 \leq r \leq \infty$. Le premier cas où on a un invariant nouveau est pour $q=6$.

Enfin on obtient des filtrations sur la cohomologie entière de $G$, dont le premier cran est formé des classes géométriquement négligeables.

## 7. Classes non ramifiées

Le but de cette section est de donner un sens aux groupes $A^0_{\text{nr}}(BG, M_n)$ pour un module de cycles $M$ et un groupe algébrique linéaire $G \in \mathbf{Grp}$. Nous commençons par un retour systématique sur la définition des classes non ramifiées sur un module de cycles, dans le style de Colliot-Thélène–Ojanguren [**CTO**].

### 7.1. Définitions. —

***Définition 7.1.*** —

1. Pour tout corps de fonctions $K$ sur un corps $k$, on définit :

$$A^0_{\text{nr}}(K/k, M_n) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \mathrm{Ker}(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)),$$

où $\mathcal{P}(K/k)$ est l'ensemble des anneaux de valuation discrète $A$ de rang un de type géométrique de $K$ sur $k$ tels que $K = \mathrm{Frac}(A)$.

2. Si $X/k$ est un schéma lisse de corps des fonctions $K$, on note :

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n).$$

***Remarque 7.2.*** —

1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement

$$A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n).$$

2. De plus, on a

$$A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \subset A^0(X, M_n).$$

3. Si $M_n(K) = H^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i))$, $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ est le groupe de cohomologie non ramifiée de $K$ défini par Colliot-Thélène et Ojanguren [**CTO**, déf. 1.1.1, p. 143].

***Lemme 7.3.*** — *Soit $f : K \hookrightarrow L$ une extension de corps. Alors $f_* : M_n(K) \to M_n(L)$ envoie $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ dans $A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$.*

*Démonstration.* — Nous allons utiliser les axiomes (R3a) et (R3c) des (pré)modules de cycles, pour lesquels nous renvoyons à [**Rost**, déf. 1.1, p. 328] (ils sont explicités ci-dessous).

Soit $B \in \mathcal{P}(L/k)$. Si $B$ est trivial sur $K$, alors d'après (R3c), on a $\partial_B \circ f_* = 0$. Si $B$ est au dessus $A \in \mathcal{P}(K/k)$ avec l'indice de ramification $e$, alors d'après (R3a), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_n(L) & \xrightarrow{\partial_B} & M_{n-1}(\kappa_B) \\ {\scriptstyle f_*}\uparrow & & {\scriptstyle e\cdot\bar{f}_*}\uparrow \\ M_n(K) & \xrightarrow{\partial_A} & M_{n-1}(\kappa_A). \end{array}$$

Soit $x \in A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$. Alors $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(K/k)$ et donc $\partial_B(f_*(x)) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{P}(L/k)$ *i.e.* $f_*(x) \in A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$. Donc $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ est bien envoyé dans $A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$. □

Le lemme 7.3 fait de $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ un *sous-foncteur* de $A^0(-, M_n)$ sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

### 7.2. Pureté. —

***Proposition 7.4.*** — *Le foncteur* $X \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$ *est homotopique et pur en coniveau* $\geq 1$ *sur* $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

*Démonstration.* — Il nous faut vérifier deux propriétés :

**Pureté :** Soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte. D'après la définition de $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ on a tout de suite :

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(U, M_n)$$

car $k(X) = k(U)$. C'est vrai pour tout ouvert dense de $X$, donc $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ est pur en coniveau $\geq 1$.

**Homotopie :** on utilise la même méthode que Colliot-Thélène et Ojanguren [**CTO**, prop. 1.2].

Soit $p : V \to X$ un fibré vectoriel. Soit $U$ un ouvert de $X$. En appliquant la pureté, on a :

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{nr}}(V, M_n) \arrow[r, "\sim"] & A^0_{\mathrm{nr}}(f^{-1}(U), M_n) \\ A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "\sim"] & A^0_{\mathrm{nr}}(U, M_n). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Quand $U$ est assez petit, on a $f^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{A}^m$. Donc pour montrer que $p^*$ est un isomorphisme, on peut se limiter au cas $V = X \times \mathbb{A}^1$.

D'après le lemme 7.3, on a :

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \to A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n).$$

D'après la propriété (H) (*cf.* prop. 5.2), on a :

$$A^0_{\mathrm{nr}}(k(V)/k(X), M_n) \xleftarrow{\sim} M_n(k(X)).$$

Et donc grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n) \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & A^0_{\mathrm{nr}}(V/k(X), M_n) \\ A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \arrow[u] \arrow[r, hook] & M_n(k(X)) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

on a une injection

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \hookrightarrow A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n).$$

Réciproquement, soit $\zeta \in A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n)$. Si $B \in \mathcal{P}(k(V)/k)$ est trivial sur $k(X)$, alors d'après l'axiome (R3c) des prémodules de cycles, le morphisme composé suivant est trivial :

$$M_n(k(X)) \to M_n(k(V)) \xrightarrow{\partial_B} M_{n-1}(\kappa_B).$$

Donc, en utilisant (H), on obtient que $\zeta$ vient d'un élément bien déterminé, que nous noterons encore $\zeta$, de $M_n(k(X))$. Soit $A \in \mathcal{P}(k(X)/k)$. Il existe $B \in \mathcal{P}(k(V)/k)$ au dessus de $A$ tel que $\kappa_B = \kappa_A(t)$ [**Bour1**, prop. 2, p. 157]. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \zeta \in M_n(k(X)) & \xrightarrow{\partial_A} & M_{n-1}(\kappa_A) \\ {\scriptstyle p^*}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{p}^*}\downarrow \\ M_n(k(V)) & \xrightarrow{\partial_B} & M_{n-1}(\kappa_B) \end{array}$$

parce que dans ce cas, l'indice de ramification de $B$ sur $A$ est égal à 1 (axiome (R3a) de [**Rost**]).

De plus, toujours d'après la propriété (H), $\bar{p}^*$ est injectif. D'où on a $\partial_A(\zeta) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(X)/k)$ et donc $\zeta \in A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$. Ainsi,

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(V, M_n).$$

□

***Corollaire 7.5***. — *Si $X \sim_{\mathrm{st}} Y$, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel en $M$ :*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \simeq A^0_{\mathrm{nr}}(Y, M_n)$$

*(voir définition 2.25 pour $\sim_{\mathrm{st}}$).* □

**7.3. Cas d'une variété propre et lisse.** — Si $X/k$ est propre et lisse, Rost a montré que $A^0(X, M_n)$ est un invariant birationnel (*cf.* [**Rost**, cor. 12.10]). On a un résultat plus précis :

***Proposition 7.6***. — *Si $X/k$ est lisse et propre, alors*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) = A^0(X, M_n).$$

*Démonstration.* — On utilise [**CT**, prop. 2.1.8 e)] que nous rappelons :

*Soient $F$ un foncteur de la catégorie des $k$-algèbres vers une catégorie abélienne et $X/k$ une variété intègre, propre et lisse, de corps des fonctions $k(X)$. Posons :*

$$F_1(X) = \{\alpha \in F(k(X)) \mid \forall P \in X^{(1)},\ \alpha \in \mathrm{Im} F(\mathcal{O}_{X,P})\}$$
$$F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k) = \{\alpha \in F(k(X)) \mid \forall A \in \mathcal{P}(k(X)/k),\ \alpha \in \mathrm{Im} F(A)\}.$$

*Si $F$ satisfait la condition de la pureté en codimension un pour les anneaux locaux réguliers $A$ de corps des fractions $K$ i.e.*

$$\mathrm{Im}(F(A) \to F(K)) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \mathrm{Im}(F(A_p) \to F(K)) \tag{7.1}$$

*où $p$ est de hauteur 1 dans $A$, alors*

$$F_1(X) = F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k).$$

Considérons $F = A^0(-, M_n)$, on a :

$$\begin{aligned} F_1(X) &= \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Im}(A^0(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}, M_n) \to A^0(k(X), M_n)) \\ &= A^0(X, M_n) \\ F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k) &= \bigcap_{A \in \mathcal{P}(k(X)/k)} \mathrm{Im}(A^0(\mathrm{Spec}\, A, M_n) \to A^0(k(X), M_n)) \\ &= A^0_{\mathrm{nr}}(k(X), M_n) \end{aligned}$$

grâce à la définition 5.6 et $A^0(k(X), M_n) = M_n(k(X))$.

Donc il nous faut vérifier (7.1) pour $F = A^0(-, M_n)$ *i.e.*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}(A^0(\mathrm{Spec}\, A, M_n) \to A^0(K, M_n)) \\ &\qquad = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \mathrm{Im}(A^0(\mathrm{Spec}\, A_p, M_n) \to A^0(K, M_n)) \end{aligned} \tag{7.2}$$

D'après la définition de $A^0(-, M_n)$ (*cf.* déf. 5.6), on a $A^0(K, M_n) = M_n(K)$ et

$$A^0(\mathrm{Spec}\, A, M_n) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \mathrm{Ker}(M_n(K) \to M_{n-1}(\kappa_p)),$$

$$A^0(\mathrm{Spec}\, A_p, M_n) = \mathrm{Ker}(M_n(K) \to M_{n-1}(\kappa_p)).$$

D'où on déduit (7.2). □

**7.4. Invariants non ramifiés.** — La proposition 7.4 fournit un sous-foncteur $\mathbf{Grp} \ni G \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ de $G \mapsto A^0(BG, M_n)$. L'isomorphisme du théorème 5.14 induit alors un isomorphisme

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}^{\mathrm{nr}}_k(G, M_n)$$

où le second membre est le groupe défini par Serre dans [**GMS**, 33.9].

**7.5. Représentabilité.** — Dans [**Me**, §2.2], Merkurjev a aussi introduit le groupe $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$, qu'il note $M_n(K)_{\mathrm{nr}}$ . En particulier, il montre [**Me**, th. 2.10] que pour $X$ lisse et propre, le foncteur

$$M \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(k(X), M) = A^0(X, M)$$

de la catégorie des modules de cycles vers une catégorie abélienne est coreprésentable par $K^X$ où

$$K^X_n(F) = A_0(X_F, K^M_n)$$

pour tout corps de fonctions $F/k$ et $K^X_0(F) = CH_0(X_F)$.

On a un résultat un peu plus général [**K11**, th. 1.3] : pour $X$ lisse,

$$M \mapsto A^0(X, M)$$

est coreprésentable par $H^X$ où

$$H^X_n(F) = H_{-n}(X_F, \mathbb{Z}(-n))$$

pour tout corps de fonctions $F/k$ et $H^X_0(k) = H_0(X, \mathbb{Z}(0)) = H^S_0(X)$ (homologie de Suslin). Si $X$ est projectif, on a $H^X = K^X$.

***Lemme 7.7.*** — *Le foncteur $X \mapsto H^X$ est homotopique et pur en coniveau $\geq 2$. Donc $H^{BG}$ est bien défini pour $G \in \mathbf{Grp}$. De plus, $H^{BG} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est connectif (cf. déf. 5.4) où $p$ est l'exposant caractéristique de $k$.*

*Démonstration.* — La première assertion résulte de la proposition 3.15. D'où $H^{BG}$ en utilisant la définition 2.13. De plus, on a

$$H^{BG}_n = H^{U_G/G}_n$$

où $U_G$ est un $G$-torseur linéaire de coniveau $\geq 2$ (*cf.* déf. 2.6). Comme $U_G/G$ est une variété lisse, $H^{U_G/G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et donc $H^{BG} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est connectif d'après [**K11**, prop. 6.7]. □

***Remarque 7.8***. — Supposons $k$ d'exposant caractéristique $p$ et $G$ fini d'ordre premier à $p$. On a $H_i(k, \mathbb{Z}(n)) = 0$ si $n > 0$, donc

$$\tilde{H}_i(BG, \mathbb{Z}(n)) = H_i(BG, \mathbb{Z}(n)).$$

Ce groupe est annulé par l'ordre de $G$ qui est premier à $p$. Donc on peut enlever $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ dans le lemme 7.7.

***Théorème 7.9***. — *Pour tout groupe algébrique linéaire $G$ et tout module de cycles $M$, on a*

$$A^0(BG, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}(h_0^{Nis}(BG), \mathcal{M}_0)$$

*où* HI *est la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et $\mathcal{M}_0(U) = A^0(U, M_0)$.*
*(D'après la proposition 3.16, $h_0^{Nis}(BG)$ est bien défini.)*

Cela résulte de [**K11**, th. 1.3, th. 1.4] et du lemme 7.7 en remarquant que le foncteur

$$\mathrm{HI} \to \mathrm{PST}$$

est pleinement fidèle, où PST est la catégorie des préfaisceaux Nisnevich avec transferts.

## 8. Résidus géométriques

Nous introduisons ici des "résidus géométriques", inspirés par les travaux de Peyre et de Voevodsky.

Jusqu'ici on n'a utilisé que la fonctorialité plate sur les $k$-schémas lisses : cela a permis par exemple de définir économiquement le foncteur $G \mapsto CH^n(BG)$, en n'utilisant que la contravariance "facile" des groupes de Chow. À partir d'ici, on va aussi avoir besoin de fonctorialité pour certaines immersions fermées.

### 8.1. La construction $F_{-1}$ de Voevodsky. —

***Définition 8.1***. — Soit $F$ un foncteur contravariant de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ vers la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens. On définit pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$ (*cf.* [**MVW**, Lect. 23]) :

$$F_{-1}(X) = \mathrm{Coker}(F(X \times \mathbb{A}^1) \to F(X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}))) \tag{8.1}$$

et on note

$$\partial : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).$$

Si $F$ est contravariant pour les immersions fermées régulières, on note

$$s : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F(X) \tag{8.2}$$

le morphisme défini par la section unité de $\mathbb{G}_m$.

Le lemme suivant se démontre sans difficulté :

***Lemme 8.2***. — *Si $F$ est homotopique et pur en coniveau $\geq r$, $F_{-1}$ l'est aussi.* □

***Lemme 8.3***. — *Si $F$ est invariant par homotopie et contravariant pour les immersions fermées régulières, alors*

$$(s, \partial) : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F(X) \oplus F_{-1}(X)$$

*est un isomorphisme pour tout $X$.*

*Démonstration*. — Comme $F$ est invariant par homotopie, $F(X) \xrightarrow{\sim} F(X \times \mathbb{A}^1)$. De plus, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, bend left, "s"] & F_{-1}(X) \arrow[r] & 0 \\
F(X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, bend right, "p^*"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où $p : X \times \mathbb{G}_m \to X$ est la projection sur $X$. Comme $s \circ p^* = id$, on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X).$$

□

***Exemples 8.4*** **($F_{-1}(X)$ pour certains foncteurs $F$)**

1. Pour $F(X) = H^i(X, \mathbb{Z}(n))$, on a

$$F_{-1}(X) = H^{i-1}(X, \mathbb{Z}(n-1))$$

[**MVW**, 23.1]. On a le même résultat pour la cohomologie étale et la cohomologie motivique étale *i.e.*
   – Si $F(X) = H^i_{\text{ét}}(X, M)$, alors $F_{-1}(X) = H^{i-1}_{\text{ét}}(X, M(-1))$ ;
   – Si $F(X) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$, alors $F_{-1}(X) = H^{i-1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n-1))$.

2. Soit $F(X) = A^0(X, M_n)$. On a une suite exacte de localisation (*cf.* la preuve du cor. 5.10)

$$A^0(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \to A^0(X \times \mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{(4)} A^0(X, M_{n-1})$$
$$\xrightarrow{(5)} A^1(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \xrightarrow{(6)} A^1(X \times \mathbb{G}_m, M_n)$$

D'après le corollaire 5.11 et le lemme 8.3, (6) est injectif scindé donc (5) est nul et donc (4) est surjectif, soit

$$F_{-1}(X) = A^0(X, M_{n-1}).$$

Ce calcul a implicitement utilisé la contravariance de la cohomologie de cycles pour les immersions fermées [**Rost**, §12].

### 8.2. Résidus géométriques "universels". —

***Construction 8.5***. — *Soient $k$ un corps et $m$ un entier inversible dans $k$. Soit $X$ un schéma lisse sur $k$. Soit $F$ un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geq r$. Le* morphisme résidu universel

$$\partial_m : F(X \times B\mu_m) \to F_{-1}(X) \tag{8.3}$$

*est défini de la manière suivante :*

*En utilisant* (2.6) *avec $G = \mathbb{G}_m$ et $H = \mu_m$ et en remarquant que $\mathbb{G}_m/\mu_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$, on obtient une flèche canonique $\mathbb{G}_m \to B_r\mu_m$ dans $S_r^{-1}\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$, d'où une composition :*

$$\partial_m : F(X \times B\mu_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\partial} F_{-1}(X).$$

De manière équivalente, soit $U$ un $\mathbb{G}_m$-torseur linéaire de coniveau $\geq r$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{G}_m \arrow[d] & U \times \mathbb{G}_m \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\mathbb{G}_m & \mathbb{G}_m/\mu_m \arrow[l, "\times m", "\sim"'] & (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m \arrow[l, "\bar{\pi}_1"'] \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] & U/\mu_m.
\end{tikzcd} \tag{8.4}$$

La ligne du bas induit un diagramme

$$F(X \times (U/\mu_m)) \to F(X \times (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m)$$
$$\xleftarrow{\sim} F(X \times (\mathbb{G}_m/\mu_m)) \xleftarrow{\sim} F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).$$

D'où on déduit (8.3).

***Lemme 8.6***. — *Soit $M$ un module de cycles sur $k$, et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors le morphisme résidu* (8.3) *pour $A^0(-, M_n)$ est compatible avec celui considéré par Peyre dans* [**Pe08**, (13) p. 207].
*Plus précisément, soit $\chi : \mu_m \hookrightarrow k^*$ le caractère canonique de $\mu_m$, vu comme représentation fidèle de dimension* 1*, soit $B_\chi$ la valuation discrète de rang* 1 *sur $k(X \times \chi) = k(X)(T)$ définie par le diviseur $T = 0$ et soit $A_\chi$ sa trace sur $k(X \times \chi)^{\mu_m}$. Alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} A^0(X \times B\mu_m, M_n) \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, hook] & A^0(X, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\ M_n(k(X \times \chi)^{\mu_m}) \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(X)). \end{tikzcd}$$

*Démonstration*. — Par fonctorialité, on peut remplacer $X$ par son corps des fonctions, donc (quitte à changer de corps de base) supposer que $X = \operatorname{Spec} k$.

Soit $U = \mathbb{A}^r - \{0\}$ ; faisons opérer $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^r$ et donc sur $U$ par homothéties. Choisissons un point rationnel $x \in U(k)$ : ce point définit un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant $\varphi : \mathbb{G}_m \to U$, d'où un morphisme :

$$\bar{\varphi} : \mathbb{G}_m \xleftarrow{\sim} \mathbb{G}_m/\mu_m \to U/\mu_m.$$

Soit $\gamma : \mathbb{G}_m \to U \times \mathbb{G}_m$ le transposé du graphe de $\varphi$ : avec les notations de (8.4), c'est une section $\mu_m$-équivariante de $\pi_1$ telle que $\pi_2 \circ \gamma = \varphi$. En prenant les quotients par $\mu_m$, $\gamma$ induit une section $\bar{\gamma}$ de $\bar{\pi}_1$ telle que $\bar{\pi}_2 \circ \bar{\gamma} = \bar{\varphi}$, ce qui implique que la composition :

$$A^0((U/\mu_m), M_n) \xrightarrow{\bar{\varphi}^*} A^0(\mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{\delta} M_{n-1}(k)$$

est égale à $\partial_m$, où $\delta$ est le morphisme bord pour la suite exacte de localisation relative à l'immersion ouverrte $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$.

Finalement, on a $\varphi(\mathbb{G}_m) = L - \{0\}$ où $L$ est la droite $kx$. L'assertion résulte maintenant du lemme 5.12. □

## 8.3. Résidus géométriques “à la Peyre". —

***Définition 8.7***. — Soit $F$ comme dans la construction 8.5. Soient $G \in$ **Grp**, $D \subset G$ un sous-groupe fermé et $g : \mu_m \to Z_G(D)$ un homomorphisme, où $Z_G(D)$ désigne le centralisateur de $D$ dans $G$. On note $\varphi : D \times \mu_m \to G$ le morphisme défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. On définit un

morphisme :

$$\partial_{D,g} : F(BG) \xrightarrow{\varphi^*} F(B(D \times \mu_m)) \xrightarrow{\sim} F(BD \times B\mu_m) \xrightarrow{\partial_m} F_{-1}(BD)$$

où $\partial_m$ est comme dans (8.3), l'isomorphisme provient de (2.8) et $F_{-1}(BD)$ est défini par le lemme 8.2.

***Proposition 8.8***. — *$\partial_{D,g}$ est canonique et fonctoriel en $F$.* □

***Exemples 8.9***. — D'après les exemples 8.4, on a des résidus suivants :

$$\begin{aligned}
\partial_{D,g} &: H^n_{\text{ét}}(BG, \mu_m^{\otimes j}) \to H^{n-1}_{\text{ét}}(BD, \mu_m^{\otimes (j-1)}),\\
\partial_{D,g} &: H^n_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(q)) \to H^{n-1}_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z}(q-1)),\\
\partial_{D,g} &: H^n(BG, \mathbb{Z}(q)) \to H^{n-1}(BD, \mathbb{Z}(q-1)),\\
\partial_{D,g} &: A^0(BG, M_n) \to A^0(BD, M_{n-1}).
\end{aligned}$$

***Remarque 8.10***. — Supposons $G$ fini constant, d'exposant $e$ premier à la caractéristique de $k$. Alors tout homomorphisme $g$ comme ci-dessus a pour image un sous-groupe cyclique d'ordre $m'$ divisant $e$, donc se factorise par $\mu_{m'}$ via la surjection $\mu_m \to \mu_{m'}$ ; de plus, $\mu_{m'}$ est constant. Si $g' : \mu_{m'} \to Z_G(D)$ est l'homomorphisme induit, on voit tout de suite que $\partial_{D,g} = \partial_{D,g'}$ en comparant deux suites exactes de Kummer. On peut donc se limiter aux valeurs de $m$ divisant $e$ et telles que $\mu_m \subset k$.

**8.4. Le résidu d'un cup-produit.** — Le résultat principal de ce numéro (théorème 8.13) ne sera pas utilisé dans la suite ; il est néanmoins très utile pour des calculs concrets.

*8.4.1. Décomposition de la diagonale.* — Soient $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et $f : X \to \mathbb{G}_m$ ($f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$). Soit $\Gamma_f : X \to X \times \mathbb{G}_m$ le graphe de $f$. Soit $F : \mathbf{Sm}(k)^{\text{op}} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geq c$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_f^*"] & F_{-1}(X) \arrow[r] & 0 \\
& F(X) \arrow[ul, "\sim"] & &
\end{tikzcd}$$

Si $f = 1$, alors $\Gamma_f^* = s^F$ (la section de (8.2)) et donc on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X) \tag{8.5}$$

d'après le lemme 8.3. Alors $\Gamma_f^* - \Gamma_1^* = 0$ sur $F(X \times \mathbb{A}^1)$, donc induit un morphisme

$$\{f\}^* : F_{-1}(X) \to F(X). \tag{8.6}$$

Considérons maintenant la diagonale $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. On a le morphisme

$$(1_X \times \Delta)^* : F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m).$$

Par transport de structure, il définit un morphisme $\tilde{\Delta}$ :

$$\begin{array}{ccc} F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{(1_X \times \Delta)^*} & F(X \times \mathbb{G}_m) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F(X) \oplus 2F_{-1}(X) \oplus F_{-2}(X) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & F(X) \oplus F_{-1}(X) \end{array}$$

où $F_{-2} = (F_{-1})_{-1}$ et l'isomorphisme de gauche est obtenu en appliquant deux fois le lemme 8.3.

On va calculer $\tilde{\Delta}$ dans le cas particulier où $F$ provient d'un foncteur sur $\mathbf{DM}$. Le lemme suivant justifie la notation (8.6) :

***Lemme 8.11***. — *Si $F$ provient d'un foncteur sur $\mathbf{DM}$ et $X = \operatorname{Spec} k$, alors $\{f\}^*$ est induit par le cup-produit par $\{f\} \in K_1^M(k) = H^1(k, \mathbb{Z}(1))$ pour $f \in k^*$.*

*Démonstration*. — Dans ce cas, $\Gamma_f^* - \Gamma_1^*$ provient de

$$M(X) \xrightarrow{\Gamma_f - \Gamma_1} M(X \times \mathbb{G}_m) = M(X) \oplus M(X)(1)[1] \xrightarrow{pr} M(X)(1)[1]$$

Si $X = \operatorname{Spec} k$, d'où $f \in k^*$, alors

$$\Gamma_f - \Gamma_1 \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(1)[1]) \cong K_1^M(k) \text{ [}\mathbf{MVW}\text{, 4.2]}.$$

On vérifie que cet isomorphisme identifie $\Gamma_f - \Gamma_1$ à $\{f\} \in K_1^M(k) \cong k^*$ (voir [**MVW**, preuve de 4.4]). □

***Proposition 8.12***. — *Supposons que $F$ se factorise en*

$$\mathbf{Sm}(k)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{M^{\mathrm{op}}} \mathbf{DM}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}\,.$$

*Alors $\tilde{\Delta}$ est égale à*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — On choisit la décomposition $M(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1]$ donnée par le point $1 \in \mathbb{G}_m$. Cela donne exactement (8.5) sur $F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $F_{-1}(M(X)) = F(M(X)(1)[1])$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)) \arrow[r, "(1_X \times \Delta)^*"] \arrow[d, "\wr"] & F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \arrow[d, "\wr"] \\
F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])) \arrow[d, "\wr"] \\
F(M(X)) \oplus 2F_{-1}(M(X)) \oplus F_{-2}(M(X)) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] & F(M(X)) \oplus F_{-1}(M(X))
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, $\tilde{\Delta}$ est induit par

$$M(\Delta) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1] \to \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}(1)[1] \oplus \mathbb{Z}(2)[2]$$

et on a

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(j)[j], \mathbb{Z}(i)[i]) = \begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(i-j)[i-j]) = K^M_{i-j}(k) & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

D'après [**HK**, lem. 7.4 et cor. 7.9 (b)], on trouve que $\tilde{\Delta}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}$$

où $\sum : 2F_{-1}(M(X)) \to F_{-1}(M(X))$ est induit par $\mathbb{Z}(1)[1] \to 2\mathbb{Z}(1)[1]$ et $\{-1\} : F_{-2}(M(X)) \to F_{-1}(M(X))$ est induit par $\{-1\} : \mathbb{Z}(1)[1] \to \mathbb{Z}(2)[2]$ (*cf.* lemme 8.11), ce qui correspond à la formule de [**HK**, cor. 7.9(b)]. □

*8.4.2. Résidus géométriques et cup-produits.* — Soient $F, G, H$ dans la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{Sm}(k)$ vers les groupes abéliens et supposons que pour tous schémas $X, Y \in \mathbf{Sm}(k)$, on ait un produit externe :

$$F(X) \otimes G(Y) \to H(X \times Y) \tag{8.7}$$

bifonctoriel en $(X, Y)$. D'où un produit interne :

$$F(X) \otimes G(X) \to H(X \times X) \to H(X)$$

où la dernière flèche est donnée par la diagonale $X \to X \times X$.

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
F(X\times\mathbb{A}^1)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\
H(X\times Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r] & H(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H_{-1}(X\times Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit un morphisme

$$F_{-1}(X)\otimes G(Y)\to H_{-1}(X\times Y), \tag{8.8}$$

et de manière analogue

$$F(X)\otimes G_{-1}(Y)\to H_{-1}(X\times Y). \tag{8.9}$$

Pour $Y=X$, on a

$$F(X)\otimes G_{-1}(X)\oplus F_{-1}(X)\otimes G(X)\to H_{-1}(X\times X)\to H_{-1}(X).$$

Considérons encore le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(X\times\mathbb{A}^1)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\
H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r] & H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H_{-2}(X\times Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit un morphisme

$$F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(Y)\to H_{-2}(X\times Y). \tag{8.10}$$

***Théorème 8.13***. — *Supposons que $F,G,H$ se factorisent par* **DM**. *Soient $x\in F(X\times\mathbb{G}_m)$ et $y\in G(X\times\mathbb{G}_m)$ ; notons $xy$ leur cup-produit dans $H(X\times\mathbb{G}_m)$. Alors on a*

$$\partial^H(xy)=\partial^F(x)s^G(y)+s^F(x)\partial^G(y)+\{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y) \tag{8.11}$$

*où on note $\partial^F\dots$ pour garder la trace de $F,G,H$.*

*Démonstration*. — Appliquant ce qui précède, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
F_{-1}(X)\otimes G(Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "1\times\partial^G"] & H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[d, "\partial^{H_{-1}}"] \\
F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] & H_{-2}(X\times Y)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "1 \times s^G"] & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "s^{H_{-1}}"] \\
F_{-1}(X) \otimes G(Y) \arrow[r] & H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

où $s^G, s^{H_{-1}}$ sont des spécialisations comme dans le lemme 8.3.

Maintenant considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (F(X) \oplus F_{-1}(X)) \otimes (G(Y) \oplus G_{-1}(Y)) \arrow[dd] \\
H(X \times \mathbb{G}_m \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\wr"] & \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(1_{X \times Y} \times \Delta)^*"] & H(X \times Y) \oplus 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] & H(X \times Y) \oplus H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

où la longue flèche de droite est construite à partir de (8.7), (8.8), (8.9), (8.10). D'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G", "+\partial^F \times \partial^G"'] \arrow[d] & \begin{matrix} F_{-1}(X) \otimes G(Y) & \oplus F(X) \otimes G_{-1}(Y) \\ \oplus F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) & \end{matrix} \arrow[d] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{X \times Y} \times \Delta)^*"] & 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] & H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

Si $Y = X$, on a

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, shift left, "\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G"] \arrow[r, shift right, "+\partial^F \times \partial^G"'] \arrow[d] & F_{-1}(X) \otimes G(X) \oplus F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(X) \oplus F(X) \otimes G_{-1}(Y) \arrow[d] \\
H(X \times X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{X\times X} \times \Delta)^*"] & 2H_{-1}(X \times X) \oplus H_{-2}(X \times X) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] \arrow[d, "(\Delta_X \times 1)^*"] & H_{-1}(X \times X) \arrow[d, "(\Delta_X)^*"] \\
H(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] & H_{-1}(X)
\end{tikzcd}$$

où $\Delta_X$ est la diagonale $X \xrightarrow{\Delta_X} X \times X$. Du diagramme ci-dessus et de la proposition 8.12, on déduit :

$$\partial^H(xy) = \partial^F(x)s^G(y) + s^F(x)\partial^G(y) + \{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y).$$

□

***Corollaire 8.14***. — *La formule* (8.11) *s'applique aussi aux résidus* $\partial_m$ *de* (8.3) *et* $\partial_{D,g}$ *de la définition 8.7.*

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement de la définition de ces résidus. □

***Remarque 8.15***. — La formule (8.11) est analogue à celle de Rost [**Rost**, **P3**, p. 331] (Un signe apparaît en plus chez Rost parce que les modules de cycles sont gradués).

## 9. Classes non ramifiées sur un espace classifiant

### 9.1. Le foncteur $A^0_{\mathrm{NR}}(-, M_n)$. —

***Définition 9.1***. — Soit $G \in \mathbf{Grp}$. On définit :

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{(D \subset G,\ g:\mu_m \to Z_G(D))} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})),$$

où $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 8.7 et $m$ parcourt les entiers $\geq 1$.

***Proposition 9.2***. — *La loi* $G \mapsto A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ *définit un sous-foncteur de* $G \mapsto A^0(BG, M_n)$ *sur* **Grp**.

*Démonstration.* — Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes : il s'agit de voir que $f^* A^0_{\mathrm{NR}}(BH, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$.

Si $D \subset G$ est un sous-groupe de $G$, posons $D_H = f(D)$ : on a $f(Z_G(D)) \subset Z_H(D_H)$. Soit $g : \mu_m \to Z_G(D)$. La composition

$$g_H : \mu_m \xrightarrow{g} Z_G(D) \xrightarrow{f} Z_H(D_H)$$

donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r] & A^0(BD \times B\mu_m, M_n) \arrow[r] & A^0(BD \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & A^0(BD, M_{n-1}) \\
A^0(BH, M_n) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H \times B\mu_m, M_n) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H, M_{n-1}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

soit

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r, "\partial^G_{D,g}"] & A^0(BD, M_{n-1}) \\
A^0(BH, M_n) \arrow[r, "\partial^H_{D_H,g_H}"] \arrow[u] & A^0(BD_H, M_{n-1}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où l'on a écrit $\partial^G, \partial^H$ pour garder la trace de $G, H$. D'où l'inclusion cherchée. □

**9.2. Une formule simplifiée pour $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$.** —

***Lemme 9.3.*** — *Soient $D' \subset D \subset G$ et $g : \mu_m \to Z_G(D)$, on note $g' : \mu_m \to Z_G(D) \hookrightarrow Z_G(D')$. Alors* $\operatorname{Ker} \partial_{D,g} \subset \operatorname{Ker} \partial_{D',g'}$.

*Démonstration.* — Cela résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F(BG) \arrow[r] \arrow[d, "="] & F(BD \times BI) \arrow[r] \arrow[d] & F(BD \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(BD) \arrow[d] \\
F(BG) \arrow[r] & F(BD' \times BI) \arrow[r] & F(BD' \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & F_{-1}(BD').
\end{tikzcd}$$

□

Du lemme 9.3, on déduit :

***Proposition 9.4.*** — *On a*

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{g:\ \mu_m \to G} \operatorname{Ker}(\partial_{Z_G(g),g})$$

*où $Z_G(g)$ est le centralisateur de $g(\mu_m) \subset G$.*

### 9.3. Une majoration de la cohomologie non ramifiée. —

***Proposition 9.5***. — *On a l'inclusion*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n).$$

*Démonstration*. — Choisissons une représentation très fidèle $W$ de $G$. Soit $x$ un élément de $A^0_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, M_n) \subset A^0(BG, M_n)$ *i.e.* $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$. Remplaçons la notation $\partial_{D,g}$ (déf. 8.7) par $\partial^G_{D,g}$, pour garder la trace du groupe $G$. On veut montrer que pour tout le couple $(D, g)$, on a $\partial^G_{D,g}(x) = 0$.

Pour simplifier, posons $I = \mu_m$. Soit $\varphi : D \times I \to G$ le morphisme défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. D'après la définition des résidus géométriques (déf. 8.7), $\partial^G_{D,g}$ se factorise par $\partial^{D\times I}_{D,g}$ ; autrement dit, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[d, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\partial^G_{D,g}"] & \\
A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r, "\partial^{D\times I}_{D,g}"] & A^0(BD, M_{n-1}).
\end{tikzcd}$$

Mais $\varphi^* A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BD \times BI, M_n)$ (§7.4). On peut donc supposer que $G = D \times I$.

On raisonne comme Peyre dans [**Pe08**, p. 207] : choisissons $W$ de la forme $W' \times \chi$, où $W'$ est une représentation très fidèle de $D$ et $\chi$ est la représentation fidèle canonique de dimension 1 de $I$. Le diagramme commutatif du lemme 8.6 :

$$\begin{tikzcd}
A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r, "\partial^{D\times I}_{D,g}"] \arrow[d, hook] & A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\
M_n(k(W' \oplus \chi)^{D\times I}) \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(W')^D) = M_{n-1}(\kappa_{A_\chi})
\end{tikzcd}$$

où $A_\chi \in \mathcal{P}(k(W'+\chi)^{D\times I}/k)$, montre immédiatement que $\partial^{D\times I}_{D,g} A^0_{\mathrm{nr}}(BD \times BI, M_n) = 0$. □

***Remarque 9.6***. — Pour $G$ quelconque, il est très improbable qu'on ait égalité dans la proposition 9.5 : les résidus géométriques $\partial_{D,g}$ ne semblent pas suffisants. Le résultat principal de cet article est qu'on a égalité quand $G$ est fini constant et que $k$ contient assez de racines de l'unité. C'est l'objet de la section suivante.

## 10. Le théorème principal

À partir de maintenant, on suppose que $G$ est un groupe fini constant d'exposant $m$, où $m$ est un entier inversible dans $k$, et que $\mu_m \subset k$. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

***Théorème 10.1***. — *Sous les hypothèsess ci-dessus, on a :*

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$$

*(égalité dans $A^0(BG, M_n)$).*

**10.1. Un sous-groupe intermédiaire.** — D'après la proposition 9.5, il suffit de démontrer que $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$. Pour cela, on va définir un autre sous-groupe de $A^0(BG, M_n)$ contenant $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ de la manière suivante.

Soit $W$ une représentation linéaire fidèle de $G$. Soient $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ et $B \in \mathcal{P}(k(W)/k)$ au dessus de $A$. Soient $D$ le groupe de décomposition de $B$ dans $G$ et $I$ son groupe d'inertie.

***Remarque 10.2***. — Comme l'exposant de $G$ divise $m$, l'ordre de $G$ divise une puissance de $m$ et donc $|G|$ est inversible dans $k$. D'après [**Se68**, IV, §2, cor. 2, cor. 3], $I$ est cyclique, canoniquement isomorphe à $\mu_q$ avec $q|m$, et *central* dans $D$.

***Définition 10.3***. — On définit :

$$A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) = \bigcap_{(D\subset G,\ g:I\to Z_G(D))} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})),$$

où l'intersection porte sur l'ensemble des sous groupes $D, I$ relatifs à $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ comme ci-dessus et $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 8.7.

Il est clair que

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n).$$

On va montrer dans les numéros suivants :

***Théorème 10.4***. — *Soient $B, A$ comme ci-dessus, et soient $D$ et $I$ les sous-groupes de décomposition et d'inertie de $B$. Considérons les résidus :*

$$A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}) \text{ (cf. déf. 8.7)}$$

*et*

$$M_n(k(W)^G) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)$$

*où* $\kappa_A$ *est le corps résiduel de* $A$*. Si* $x \in A^0(BG, M_n)$ *est tel que* $\partial_{D,g}(x) = 0$*, alors* $\partial_A(x) = 0$*. Par conséquent,*

$$A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \text{ (cf. déf. 10.3 et déf. 7.1).}$$

D'où on déduit le théorème principal 10.1 et un peu plus précisément :

***Corollaire 10.5***. —

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

De plus, comme $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ et $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ sont des foncteurs contravariants en $G$ (*cf.* §5.5 et prop. 9.2), on obtient :

***Corollaire 10.6***. — *On a aussi un résultat équivalent au théorème 10.1 pour la partie réduite (cf. déf. 3.8) :*

$$\tilde{A}^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

**10.2. Lemmes.** — Dans cette partie, on garde les hypothèses de la définition 9.1 et les notations précédentes.

Pour montrer le théorème 10.4, on a besoin des lemmes suivants. Les deux premiers reformulent certains résultats de Saltman [**Sa84**] :

***Lemme 10.7***. — *Soit* $k$ *un corps contenant le groupe* $\mu_q$ *des racines de l'unité où* $q$ *est inversible dans* $k$*. Soient* $G$ *un groupe fini et* $N$ *un groupe cyclique d'ordre* $q$*. Soit* $G'$ *une extension centrale de* $G$ *par* $N$*. Donnons-nous un 2-cocycle normalisé* $c$ *de* $G$ *à valeurs dans* $N$ *définissant l'extension* $G'$*, associé à une section ensembliste* $s$ *de la projection* $\pi : G' \to G$ *(vérifiant* $s(1) = 1$*).*
*Soit* $k'/k$ *une extension de groupe de Galois* $G$*. Soit* $\chi : N \xrightarrow{\sim} \mu_q$ *un caractère fidèle de* $N$ *sur* $k$*. Notons* $W_\chi$ *la* $k$*-représentation de dimension un correspondante. Soit* $W$ *la représentation de* $G'$ *induite de* $W_\chi$*. Alors* $W$ *est fidèle et on a un isomorphisme*

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(S'(k'/k))/\mathrm{Frac}(R(k'/k))$$

*où* $G'$ *opère sur* $k'(W)$ *par son action sur* $k'$ *(via* $G$*) et sur* $W$*, et* $S'(k'/k), R(k'/k)$ *sont associées à* $c$ *comme dans Saltman* [**Sa84**, p. 74, 75].

Rappelons d'abord la définition de l'extension $S'(k'/k)/R(k'/k)$ de [**Sa84**, p. 74, 75]. Dans la situation de l'énoncé :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r] & G' \arrow[r, shift right, "\pi"'] & G \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

le 2-cocycle $c$ est défini par la relation :

$$s(g)s(h) = s(gh)c(g,h).$$

Soit $g' \in G'$ : on écrit $g' = n(g')s\pi(g')$ avec $n(g') \in N \subset Z(G')$.

– $S''(k'/k) := k'[y(g) \mid g \in G](1/s)$ où $s = \prod_{g\in G} y(g)$. Et $G$ opère sur $S''(k'/k)$ par son action sur $k'$ et par

$$gy(h) = y(gh)\ \forall g \in G.$$

– $S(k'/k) := S''(k'/k)[x(g) \mid 1 \neq g \in G]/(x(g)^q = y(g)/y(1))$. Notons $x(1) = 1$. Alors l'action de $G$ sur $S(k'/k)$ s'étend celle sur $S''(k'/k)$ via

$$gx(h) = [x(gh)/x(h)]\chi(c(g,h)).$$

– $S'(k'/k) := S(k'/k)[\gamma]/(\gamma^q = y(1))$. Donc $N$ opère sur $S'(k'/k)$ par son action triviale sur $S(k'/k)$ et par

$$n\gamma = \chi(n)\gamma.$$

Alors $G'$ opère sur $S'(k'/k)$ via $N$ et $G$.

– $R(k'/k) := S(k'/k)^G$.

Le diagramme suivant résume ce qui précède :

$$\begin{tikzcd} & & S'(k'/k) \\ k' \arrow[r] & S''(k'/k) \arrow[r] & S(k'/k) \arrow[u, "N"'] \\ k \arrow[u, "G"] \arrow[rr] & & R(k'/k). \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

*Démonstration du lemme 10.7.* — D'après la définition des représentations induites, on a

$$W = k[G'] \otimes_{k[N]} W_\chi$$

de base $\{s(g) \otimes w | g \in G\}$ où $w$ est une base de $W_\chi$. L'action de $G'$ sur $W$ est :

$$\begin{aligned} g' \in G',\ g'(s(g) \otimes w) &= g's(g) \otimes w \\ &= n(g')s\pi(g')s(g) \otimes w \\ &= n(g')s(\pi(g')g)c(\pi(g'), g) \otimes w \\ &= s(\pi(g')g) \otimes n(g')c(\pi(g'), g).w \\ &= s(\pi(g')g) \otimes \chi(n(g')c(\pi(g'), g))w \\ &= \chi(n(g')c(\pi(g'), g))s(\pi(g')g) \otimes w. \end{aligned}$$

En particulier :

- Si $n \in N$, on a :

$$n(s(g) \otimes w) = \chi(n)s(g) \otimes w.$$

- Si $h \in G$, on a :

$$s(h)(s(g) \otimes w) = \chi(c(h, g))s(hg) \otimes w.$$

Montrons que $\mathrm{Ind}_N^{G'} \chi$ est une représentation fidèle de $G'$. Pour $g' \in G'$ et $x = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \in W,\ \lambda_g \in k$, on a :

$$\begin{aligned} g'x = x &\iff g' \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\ &\iff \sum_{g \in G} \lambda_g g's(g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\ &\iff \sum_{g \in G} \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g))s(\pi(g')g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\ &\iff \sum_{g \in G} \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g))s(\pi(g')g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_{\pi(g')g} s(\pi(g')g) \otimes w \\ &\iff \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) = \lambda_{\pi(g')g}\ \forall g \in G. \end{aligned}$$

Si $g' = n(g') \in N - \{1\}$, alors $\chi(n(g')) \neq 1$ et donc

$$g'x = x \Leftrightarrow \lambda_g \chi(n(g')) = \lambda_g\ \forall g \in G \Leftrightarrow \lambda_g = 0\ \forall g \in G \Leftrightarrow x = 0.$$

Si $g' = n(g')s\pi(g') \in G' - N$ *i.e.* $\pi(g') \neq 1$, soit $m$ le nombre d'éléments de $G$, on a :

$$g'x = x \Leftrightarrow \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) = \lambda_{\pi(g')g}\ \forall g \in G.$$

Ici on a $m$ variables $\lambda_g$ mais il y a au maximum $m-1$ équations indépendantes. Donc on peut trouver des $\lambda_g$ hors des solutions *i.e.* des $\lambda_g$ tels que $g'x \neq x$.

Posons

$$\gamma = 1 \otimes w \text{ et } x(g) = \frac{s(g) \otimes w}{1 \otimes w} \in k(W) \ \forall g \neq 1.$$

Si $h \in G$, on a

$$\begin{aligned} s(h)x(g) &= \frac{s(h)s(g) \otimes w}{s(h) \otimes w} \\ &= \frac{\chi(c(h,g))s(hg) \otimes w}{s(h) \otimes w} \\ &= \chi(c(h,g))x(hg)/x(h). \end{aligned}$$

Si $n \in N$, on a

$$\begin{aligned} nx(g) &= \frac{\chi(nc(1,g))s(g) \otimes w}{\chi(nc(1,1))1 \otimes w} \\ &= x(g) \text{ car } c(1,1) = c(1,g) = c(g,1) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $N$ opère trivialement sur $\{x(g) | g \in G\}$.

Pour $n \in N$, $n\gamma = \chi(n)\gamma$.
Pour $h \in G$,

$$\begin{aligned} s(h)\gamma &= s(h) \otimes w \\ &= (1 \otimes w)\frac{s(h) \otimes w}{1 \otimes w} = \gamma x(h). \end{aligned}$$

Ainsi, on a les mêmes générateurs et relations que chez Saltman, et donc

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Frac}(S'(k'/k))/\operatorname{Frac}(R(k'/k)).$$

□

***Remarque 10.8***. — Dans la démonstration ci-dessus, si on note $W^{g'} = \{x \in W | g'x = x\}$ (pour $g' \in G' - N$), alors $\dim W^{g'} = [G : \langle \pi(g') \rangle]$. Donc

$$\nu(W) = 1 \Leftrightarrow \exists g' : |G| - [G : \langle \pi(g') \rangle] = 1 \Leftrightarrow |G| = |\langle \pi(g') \rangle| = 2$$

(*cf.* rem. 2.7).

***Lemme 10.9***. — *Avec les notations du lemme précédent, on a un $k$-isomorphisme*

$$k'(W)^{G'} \simeq k(\mathcal{A})(x)$$

*où $x$ est une indéterminée, $\mathcal{A}$ est la $k$-algèbre centrale simple définie par le 2-cocycle $c$ et $k(\mathcal{A})$ est son corps de déploiement générique (corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de $\mathcal{A}$).*

*Démonstration.* — Cela résulte du lemme 10.7 et de [**Sa84**, thm. 1.5]. □

***Lemme 10.10***. — *Soit $K$ un corps complet pour une valuation discrète $v$ de rang un. Soit $A$ l'anneau de valuation de $v$. On suppose qu'on est dans la situation suivante :*

$$K \xrightarrow{G} K_{\mathrm{nr}} \xrightarrow{N} K'$$

*où $K'/K$ est galoisienne de groupe $G'$, d'inertie $N$. Soit $B \subset K_{\mathrm{nr}}$ au-dessus de $A$. Soient $\kappa_A, \kappa_B$ des corps résiduels de $A, B$. Supposons que $q$ soit inversible dans $\kappa_A$. Alors*
*a) L'image de $[G'] \in H^2(G, N) = H^2(\kappa_B/\kappa_A, N)$ est triviale dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\kappa_A)$.*
*b) L'extension $\kappa_B(W)^{G'}/\kappa_A$ est rationnelle, où $W$ est la représentation du lemme 10.7.*

*Démonstration.* — a) Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{[G']} \in H^2(G,N) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G,\kappa_B^*) \arrow[r, hook] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] & \mathrm{Br}(\kappa_A) \\
H^2(G,K_{\mathrm{nr}}^*) \arrow[d, hook] & & \\
\mathrm{Br}(K). & &
\end{tikzcd}$$

Il existe un morphisme $\varphi : H^2(G, \kappa_B^*) \to H^2(G, K_{\mathrm{nr}}^*)$ faisant commuter le triangle et il est injectif (*cf.* [**Se68**, pp. 192–194]). En effet, on a la suite exacte :

$$1 \to U_{K_{\mathrm{nr}}} \to K_{\mathrm{nr}}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$$

scindée par le choix d'une uniformisante de $K$. On en déduit une suite exacte scindée :

$$0 \to H^2(G, U_{K_{\mathrm{nr}}}) \to H^2(G, K_{\mathrm{nr}}^*) \to H^2(G, \mathbb{Z}) \to 0.$$

De plus, on a une autre suite exacte :

$$1 \to U^1_{K_{\mathrm{nr}}} \to U_{K_{\mathrm{nr}}} \to \kappa_B^* \to 1$$

où $U^1_{K_{\mathrm{nr}}}$ est le sous-groupe de $U_{K_{\mathrm{nr}}}$ formé des $a \in U_{K_{\mathrm{nr}}}$ tels que $v(1-a) \geq 1$. On a $H^q(G, U^1_{K_{\mathrm{nr}}}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ [**Se68**, lemme 2, p. 193]. Donc

$$H^2(G, \kappa_B^*) \xleftarrow{\sim} H^2(G, U_{K_{\mathrm{nr}}}) \hookrightarrow H^2(G, K^*_{\mathrm{nr}}).$$

Comme $K'/K$ est une extension de groupe de Galois $G'$ induite par $K_{\mathrm{nr}}/K$ de groupe $G$ ("the embedding problem"), d'après [**Sa84**, prop. 1.1], l'image de $[G']$ dans $H^2(G, K^*_{\mathrm{nr}})$ est triviale. Elle est donc triviale dans $H^2(G, \kappa_B^*) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\kappa_A)$.

b) Cela résulte de a) et du lemme 10.9, puisqu'avec les notations de ce lemme on a $[\mathcal{A}] = [G'] \in \mathrm{Br}(\kappa_A)$. □

***Lemme 10.11*** **("Lemme sans nom tordu")**. — *Soient $G, N, G'$ comme dans le lemme 10.9. Soit $k'/k$ une extension de groupe de Galois $G$. Soient $W, W'$ deux représentations fidèles de $G'$ sur $k$. Alors $k'(W)^{G'}$ et $k'(W')^{G'}$ sont stablement équivalents sur $k$. Si l'un est pur, l'autre est stablement pur.*

*Démonstration.* — Soit $U$ un ouvert de $W$ tel que $U$ soit un $G'$-torseur (*cf.* rem. 2.7). Alors $U_{k'} = U \times_k \mathrm{Spec}(k')$ est encore un $G'$-torseur (puisque $\mathrm{Spec}(k')$ est un $k$-schéma affine ! [**SGA 1**, VIII, cor. 7.9] ou [**Mil**, chap. 1, th. 2.23]). Donc $U_{k'} \times_k W'/G'$ est un fibré vectoriel sur $U_{k'}/G'$. Et donc $k'(W \oplus W')^{G'} = k'(U_{k'} \times W')^{G'}$ est transcendant pur sur $k'(W)^{G'}$. On raisonne de même avec $W'$. □

**10.3. Démonstration du théorème 10.4.** — D'après la remarque 10.2, $I$ est cyclique ($I \xrightarrow{\sim} \mu_q$ où $q|m$) et central dans $D$. Rappelons aussi que

$$I = \mathrm{Ker}(D \to Gal(\kappa_B/\kappa_A)).$$

Soit $W'$ une $k$-représentation fidèle de $D$, qui est somme directe d'au moins deux représentations régulières de $D$ (*cf.* lemme 2.7 et §5.5). Soit

$$\chi : I \xrightarrow{\sim} \mu_q \hookrightarrow k^*$$

un caractère fidèle de $I$ (*cf.* [**Pe08**, dém. prop. 3, p. 207]). Soit $\pi$ une uniformisante de $B$ telle que $\pi^q \in k(W)^I$ (un tel $\pi$ existe d'après [**Lang**, chap. II, prop. 12]). Alors, $k(W) = k(W)^I[\pi]$ et

$$\sigma\pi = \chi(\sigma)\pi \tag{10.1}$$

pour $\sigma \in I$, parce que $\mu_q \subset k(W)^I$ donc l'extension est kummerienne.

On note $\varphi : D \times I \to G$ le morphisme défini par $(d, i) \mapsto di$. Alors $D \times I$ opère sur $W$ via $\varphi$.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{k(W)} \arrow[r] & \overline{k(W \oplus W' \oplus \chi)} & \overline{k(W' \oplus \chi)} \arrow[l] \\
k(W) \arrow[r] \arrow[u] & k(W \oplus W' \oplus \chi) \arrow[r] \arrow[u] & k(W' \oplus \chi) \arrow[l] \arrow[u] \\
k(W)^G \arrow[r] \arrow[u, "G"] & k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[r] \arrow[u, "D\times I"] & k(W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[l] \arrow[u, "D\times I"]
\end{tikzcd}$$

où $D \times I$ opère sur $W \oplus W' \oplus \chi$ par l'action de $D \times I$ sur $W$, l'action de $D$ sur $W'$ et l'action de $I$ sur $\chi$.

Soit $(X_1, \dots, X_s)$ une base de $W'$. D'après [**Bour1**, lemme 1, p. 156], il existe une unique valuation discrète de rang un $w_1$ prolongeant $v_B$ dans $k(W)(X_1)$, telle que

$$w_1(P) = w_1(\sum_j a_j X_1^j) = \inf_j \{v_B(a_j) + j\xi\}$$

où $a_j \in k(W)$ et $\xi \in \mathbb{Z}$. On choisit $\xi = 0$ et donc $w_1(X_1) = 0$. De plus, d'après [**Bour1**, prop. 2, p. 157], le corps résiduel $\kappa_{w_1}$ de $w_1$ est transcendant pur sur $\kappa_B = \kappa_{v_B}$ et plus précisément $\kappa_{w_1} = \kappa_B(t_1)$ où $t_1$ est l'image de $X_1$ dans $\kappa_{w_1}$. Par récurrence, il existe une unique valuation discrète $w$ prolongeant $v_B$ dans $k(W \oplus W')$ telle que

$$w(\sum_J a_J X^J) = \inf_J \{v_B(a_J)\}$$

où

$$J = (j_1, \dots, j_s), X^J = X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}, a_J \in k(W).$$

Donc $w(X_i) = 0, i = 1, \dots, s$ pour $X_i \in W'$ et $\kappa_w = \kappa_B(t_1, \dots, t_s)$ où $t_i$ est l'image de $X_i$ dans $\kappa_w$ pour tout $i$. Notons la formule :

$$w(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s) = 0 \quad \text{si } k^s \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \neq (0, \dots, 0). \tag{10.2}$$

Enfin, il existe une unique valuation discrète de rang un $v_{B'}$ prolongeant $w$ donc prolongeant $v_B$ dans $k(W \oplus W' \oplus \chi) = k(W \oplus W')(T)$ telle que

$$v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l) = \inf_l \{w(\sum_J a_{J,l} X^J) + l\} = \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\},\ a_{J,l} \in k(W).$$

Donc $v_{B'}(T) = 1$ (on choisit $\xi = 1$). Et donc $v_{B'}(T/\pi) = 0$ où $\pi$ engendre l'idéal maximal $m_B$ de $B$. D'où $\kappa_{B'} = \kappa_{v_{B'}} = \kappa_B(t_1, \ldots, t_s, t)$ où $t$ est l'image de $T/\pi$ dans $\kappa_{B'}$. Ainsi l'anneau $B'$ de $v_{B'}$ prolonge $B$ dans $k(W \oplus W' \oplus \chi)$. Posons $A' = B' \cap k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D \times I}$.

Comme $W'$ est une somme de représentations régulières de $D$, on peut choisir les $X_i$ ci-dessus de telle sorte qu'ils soient permutés par $D$, soit $gX_i = X_{g(i)}$ pour tout $i$. C'est ce que nous faisons dans le lemme qui suit.

***Lemme 10.12***. — *Le groupe de décomposition de $B'$ dans $D \times I$ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$.*

*Démonstration*. — D'abord on va montrer que $(D \times 1)B' = B'$. Soit $g \in D$. Comme $D$ est le groupe de décomposition de $B$, on a $gB = B$. Par le choix des $X_i$, on a $gX^J = g(X_1^{j_1} \ldots X_s^{j_s}) = X^{gJ}$. Alors

$$\begin{aligned} v_{gB'}(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l) &= v_{B'}(g(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l)) = v_{B'}(\sum_{J,l} (ga_{J,l}) X^{gJ} T^l) \\ &= \inf_{J,l} \{v_B(ga_{J,l}) + l\} = \inf_{J,l} \{v_{gB}(a_{J,l}) + l\} \\ &= \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\} = v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l). \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité de $B'$, on a $gB' = B'$ pour tout $g \in D$, donc $(D \times 1)B' = B'$. Et on a aussi que $W' \subset B'$. Grâce à l'équation (10.2), on a $v_{B'}(\sum \lambda_i X_i) = 0$ avec $\lambda_i \in k$ et donc $W' \hookrightarrow \kappa_{B'}$. Posons $\overline{W'} = \mathrm{Im}(W')$, c'est le sous-espace vectoriel de $\kappa_{B'}$ de base $t_1, \ldots, t_s$ et $D$ opère librement sur $\overline{W'}$. Notons que $W' \to \overline{W'}$ est un ismorphisme $D \times I$-équivariant de $k$-espaces vectoriels.

Comme $I \subset D$ et $I = \langle\sigma\rangle$ opère sur $T$ par $\sigma T = \chi(\sigma)T$ où $\chi(\sigma) \in k^*$. De manière analogue, on a

$$\begin{aligned} v_{\sigma B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l) &= v_{B'}(\sigma(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l)) = v_{B'}(\sum_{J,l}(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l}))X^JT^l) \\ &= \inf_{J,l}\{v_B(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l})) + l\} = \inf_{J,l}\{v_{\sigma B}(a_{J,l}) + l\} \\ &= \inf_{J,l}\{v_B(a_{J,l}) + l\} = v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l). \end{aligned}$$

Ainsi $(1 \times I)B' = B'$. En conclusion, $(D \times I)B' = B'$.

D'autre part, $I$ opère trivialement sur $\kappa_B$ à cause de la définition de $I$ et $D$ opère librement sur $\{t_1, \ldots, t_s\}$. De plus,

$$\sigma t = \sigma(T/\pi) = \chi(\sigma)T/\chi(\sigma)\pi = t$$

où $\pi$ est choisi comme en (10.1). Ainsi $1 \times I$ opère trivialement sur le corps $\kappa_B(t_1, \ldots, t_s, t)$. □

Soient $B_\chi$ la restriction de $B'$ à $k(W' \oplus \chi) = k(W')(T)$ et $v_{B_\chi}$ sa valuation associée. Alors $v_{B_\chi}$ est nulle sur $k(W')$ et $v_{B_\chi}(T) = 1$ (donc c'est le même anneau que Peyre a considéré dans [**Pe08**, p. 207]). Posons $A_\chi = B_\chi \cap k(W' + \chi)^{D\times I}$. On a aussi que le groupe de décomposition de $B_\chi$ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$. On a des diagrammes :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B' & B_\chi \arrow[l] \\ A \arrow[r] \arrow[u] & A' \arrow[l] \arrow[u] & A_\chi \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \kappa_B \arrow[r] & \kappa_{B'} & \kappa_{B_\chi} \arrow[l] \\ \kappa_A \arrow[r] \arrow[u, "D/I"'] & \kappa_{A'} \arrow[l] \arrow[u, "D"] & \kappa_{A_\chi}. \arrow[l] \arrow[u, "D"] \end{tikzcd}$$

***Lemme 10.13***. — *L'indice de ramification de $A'|A$ est* 1.

*Démonstration.* — D'abord, d'après notre construction, l'indice de ramification de $B|A$ est $e_{B|A} = |I| = q$ et celui de $B'|B$ est $e_{B'|B} = v_{B'}(\pi_B) = 1$ où $\pi_B$ est une uniformisante de $B$. D'après le lemme 10.12, $e_{B'|A'} = |1 \times I| = |I| = q$. Enfin, grâce à la relation :

$$e_{B'|A} = e_{B'|B}e_{B|A} = e_{B'|A'}e_{A'|A},$$

on en déduit $e_{A'|A} = 1$. □

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[rr, "\partial_{D\times I,g}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & & A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\
M_n(k(W)^G) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_A"] & M_n(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}) \arrow[d, "\partial_{A'}"] & M_n(k(W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[l] \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] \arrow[d, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(W')^D) \arrow[dl, "="] \\
M_{n-1}(\kappa_A) \arrow[r, "\alpha"] & M_{n-1}(\kappa_{A'}) & M_{n-1}(\kappa_{A_\chi}). \arrow[l, "e_{A'|A_\chi}\cdot"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, le rectangle supérieur gauche et le triangle supérieur central commutent par définition du foncteur $A^0(-, M_n)$ et des morphismes $A^p(X, M_n) \to A^p(Y, M_n)$ pour $Y \to X$ [**Rost**, §12]. Le trapèze supérieur droit commute grâce au lemme 8.6. Enfin, la commutativité des rectangles inférieurs résulte du lemme 10.13 et de l'axiome (R3a) de [**Rost**].

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche $\alpha$ est injective, et pour cela, il suffit de voir que l'extension $\kappa_{A'}/\kappa_A$ est unirationnelle (lemme 5.3).

Soit $W'' = \operatorname{Ind}_I^D \chi$ (vue comme $k$-représentation). Comme $\chi$ est un facteur direct de la représentation régulière de $I$, $W''$ est un facteur direct de la représentation régulière de $D$, donc $W'' \subset W'$. D'après le lemme 10.7, $W''$ est fidèle. On note $\overline{W''}$ l'image de $W''$ dans $\kappa_{B'}$.

D'après le lemme 10.10 b), $\kappa_B(\overline{W''}, t)^D = \kappa_B(\overline{W''})^D(t)$ est transcendant pur sur $\kappa_A$. D'après le lemme 10.11, $\kappa_{A'} = \kappa_B(\overline{W'}, t)^D$ et $\kappa_B(\overline{W''}, t)^D$ sont stablement équivalents sur $\kappa_A$ et finalement $\kappa_{A'}$ est stablement pur sur $\kappa_A$.

***Remarque 10.14***. — La représentation $W''$ intervenant à la fin de la démonstration ci-dessus provient du lemme 10.9 ; elle joue un rôle clé dans la démonstration. En principe, on aurait pu utiliser $W'' \oplus W''$ à la place de $W'$ ci-dessus mais cela rendrait la vérification du lemme 10.12 plus délicate. Pour cette raison, nous avons préféré procéder indirectement en passant par la représentation régulière de $D$.

## 10.4. Un raffinement du théorème principal. —

***Définition 10.15***. — Soit $G$ $k$-groupe algébrique linéaire. On définit

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = \bigcap_A \operatorname{Ker}(A^0(BG, M_n) \to A^0(BA, M_n))$$

où $A$ parcourt les sous-groupes abéliens fermés de $G$, de type multiplicatif déployé.

Notons que $A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \subset \tilde{A}^0(BG, M_n)$ (considérer $A = 1$ dans la définition 10.15).

***Lemme 10.16***. — *Avec les notations de la définition 10.15, on a*

$$\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n).$$

*Démonstration*. — C'est évident par fonctorialité, puisque $\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BA, M_n) = 0$ pour tout $A$ de type multiplicatif déployé (théorème 2.28 et corollaire 7.5). □

***Lemme 10.17* (“Lemme de Bogomolov”)**. — *Supposons $G$ fini constant et d'exposant $m$, avec $\mu_m \subset k$. Pour tout $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \to Z_G(D)$, on a*

$$\partial_{D,g}(A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n)) \subset A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}).$$

*Démonstration*. — Soit $A_D$ un sous-groupe abélien de $D$. Posant $A = \langle A_D, g(\mu_m)\rangle$ (qui est abélien !), on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
A^0(BG, M_n) & \longrightarrow & A^0(BA, M_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A^0(BD \times BI, M_n) & \longrightarrow & A^0(BA_D \times BI, M_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A^0(BD, M_{n-1}) & \longrightarrow & A^0(BA_D, M_{n-1}).
\end{array}$$

D'où l'énoncé. □

***Corollaire 10.18***. — *On a la suite exacte suivante*

$$0 \to \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}). \tag{10.3}$$

*Démonstration*. — D'après le théorème 10.1, le lemme 10.17 et le lemme 10.16, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[dr, hook] & \tilde{A}^0(BG, M_n) \arrow[r] & \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1}) \\
& & A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est une suite exacte. D'où (10.3). □

***Théorème 10.19***. — *Avec l'hypothèse de la définition 10.15, soient $M$ un module de cycles et $n \in \mathbb{Z}$.*

(i) *Si $A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = 0$, alors $\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) = 0$.*

(ii) *Si $M$ est connectif (cf. déf. 5.4) et*

$$\forall H \subset G, \forall m \leq n, \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BH, M_m) = 0,$$

*alors*

$$\forall H \subset G, \forall m \leq n, A^0_{\mathrm{nab}}(BH, M_m) = 0.$$

*Démonstration*. — On a tout de suite (i) grâce au lemme 10.16. On montre (ii) par récurrence sur $m$. Comme $M$ est connectif, c'est évident pour $m$ petit. Supposons que ce soit vrai pour $m-1$. Utilions la suite exacte (10.3) avec $A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{m-1}) = 0\ \forall D$, on a

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_m) \xleftarrow{\sim} \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_m) = 0.$$

Et c'est vrai aussi pour tout sous-groupe $H$ de $G$. □

## 11. Reformulation : 0-cycles sur le compactifié de $BG$

### 11.1. Le foncteur $\overline{CH}_0$. —

***Définition 11.1***. — Soient donnés $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et une compactification $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ où $\bar{X}$ est projectif et lisse. On définit

$$\overline{CH}_0(X) = CH_0(\bar{X}) = A_0(\bar{X}, K_0^M).$$

***Proposition 11.2***. — *Si $k$ est de caractéristique zéro, $\overline{CH}_0(X)$ ne dépend que de $X$ et $\overline{CH}_0$ définit un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geq 1$.*

La partie délicate de cette proposition est la fonctorialité.

*Démonstration*. — Notons $\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sm}$ formée des schémas projectifs, $S_b$ la classe des morphismes birationnels de $\mathbf{Sm}$. D'après [**KS**, thm. 2.1], on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbf{Sm} \arrow[d] \\ S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \arrow[r, "\sim"] & S_b^{-1}\,\mathbf{Sm} \end{tikzcd}$$

où le foncteur du bas est une équivalence de catégories.

Considérons le foncteur $F : \mathbf{Sm} \to \mathbf{Ab}$ donné par $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z})$ (homologie de Suslin *cf.* déf. 3.14). Il vérifie les hypothèses de [**KS**, §3] par rapport au digramme ci-dessus. En effet, pour $X$ projectif et lisse, $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z}) = CH_0(X)$ et d'après Fulton [**Ful**, ex. 16.1.11, p .312], $CH_0(X) = CH_0(Y)$ pour tout $X \to Y$ dans $S_b$. Donc on a un isomorphisme naturel de foncteurs :

$$(\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \to \mathbf{Sm} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}) \simeq (\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \to S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}} \xrightarrow{CH_0} \mathbf{Ab}).$$

En appliquant [**KS**, §3 et thm. 2.1], on obtient une transformation naturelle de foncteurs

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(X)$$

où $\overline{CH}_0(X) := CH_0(\bar{X})$ pour $\bar{X}$ une compactification lisse de $X$ : c'est exactement le foncteur de la définition 11.1, qui est donc bien défini.

De plus, $\overline{CH}_0$ est homotopique et pur en coniveau $\geq 1$. En effet, soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, alors $\bar{X}$ est aussi un compactifié de $U$ :

$$U \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{X}.$$

Donc

$$\overline{CH}_0(U) = \overline{CH}_0(\bar{X}) = CH_0(X).$$

D'autre part, soit $f : E \to X$ un fibré vectoriel. Soit $U$ un ouvert de $X$, on a le cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} j^*E \arrow[r, hook] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

où $j^*E \cong U \times \mathbb{A}^n$ quand $U$ est assez petit. Alors

$$\begin{tikzcd} \overline{CH}_0(j^*E) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \overline{CH}_0(E) \arrow[d] \\ \overline{CH}_0(U) \arrow[r, "\sim"] & \overline{CH}_0(X). \end{tikzcd}$$

Il nous amène à considérer le cas $E = X \times \mathbb{A}^n$.

Soit $j : X \hookrightarrow Y$ une compactification de $X$, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E = X \times \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \times \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d] \\ X \arrow[rr, hook] & & Y \end{tikzcd}$$

où $Y \times \mathbb{P}^n$ est une compactification lisse de $E$. D'après [**Ful**, III, thm. 3.3], on a $CH_0(Y \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} CH_0(Y)$. Donc

$$\overline{CH}_0(E) = \overline{CH}_0(X).$$

□

***Remarque 11.3***. — Comme sous-produit de la démonstration de la proposition 11.2, on obtient un morphisme de foncteurs

$$H_0(-, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0.$$

Ce morphisme est surjectif d'après [**K11**, prop. 6.1].

Soit $G \in$ **Grp** : d'après la proposition 11.2 et la définition 2.13, $\overline{CH}_0(BG)$ est bien défini et on a une surjection

$$H_0(BG, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \overline{CH}_0(BG).$$

***Question 11.4***. — Peut-on définir $\overline{CH}_0(-)$ *a priori* comme quotient de $H_0(-, \mathbb{Z})$, sans utiliser la résolution des singularités (sous-jacente à la preuve de la proposition 11.2) ? Voir remarque 11.6 pour une réponse dans le cas particulier de $BG$.

### 11.2. Un résultat dual du théorème 10.1. —

***Proposition 11.5***. — *Si $k$ est de caractéristique zéro, on a la suite exacte suivante :*

(11.1)
$$\bigoplus_{D \subset G, g : I \to Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(BG) \to 0.$$

*Démonstration*. — D'après le théorème 10.1, on a :

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_0) \to A^0(BG, M_0) \to \bigoplus_{D, g : I \to Z_G(D)} A^0(BD, M_{-1}).$$

Soient $U_G$ un $G$-torseur linéaire de coniveau $\geq c$ et $\bar{X}$ une compactification lisse de $U_G/G$. D'après la définition 7.1 et la proposition 7.6, on a

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_0) = A^0_{\mathrm{nr}}(U_G/G, M_0) = A^0(\bar{X}, M_0).$$

De plus, d'après [**K11**, thm. 1.3], pour $X$ lisse, on a

$$A^0(X, M_0) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^X, M)$$

où CM est la catégorie des modules de cycles et pour tout corps $F/k$,

$$H^X_n(F) = H_{-n}(X_F, \mathbb{Z}(-n)).$$

Donc on a la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{\bar{X}}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_G/G}, M) \\ \to \bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_D/D}[1], M). \end{aligned}$$

Comme CM est une catégorie abélienne, utilisons le lemme de Yoneda, on a la suite exacte

$$\bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} H^{U_D/D}[1] \to H^{U_G/G} \to H^{\bar{X}} \to 0.$$

D'où la suite exacte suivante sur le corps de base $k$ :

$$\bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) \to 0$$

où $H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) = A_0(\bar{X}, K^M_0) = \overline{CH}_0(BG)$ (*cf.* déf. 11.1).

Le morphisme $H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z})$ est donné explicitement par

$$\begin{array}{ccc} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) = & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D)(1)[1]) & \\ & \downarrow & \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(\mathbb{G}_m)) & \\ & {\scriptstyle (*)}\downarrow & \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(U_{\mu_m}/\mu_m)) & \\ & \downarrow & \\ H_0(BG, \mathbb{Z}) = & \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_G/G)) & \end{array}$$

où $(*)$ est donné par $\mathbb{G}_m \to B\mu_m$. $\square$

***Remarque 11.6***. — Si $k$ est de caractéristique $p$, la suite exacte (11.1) donne une définition de "$\overline{CH}_0(BG)$".

**11.3. Conditions équivalentes pour avoir des groupes non ramifiés triviaux. —**

***Définition 11.7***. — Soient $k$ un corps et $X$ un schéma lisse sur $k$. On dit que $X$ *n'a pas d'invariants non ramifiés*[8] si pour tout module de cycles $M$,

$$M_n(k) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n).$$

***Théorème 11.8***. — *Si $k$ est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$X$ n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 11.7) ;*

b) *L'application $\deg : \overline{CH}_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est bijective pour toute extension $F/k$.*

*Démonstration*. — D'après la définition 11.1 et la résolution des singularités, on a

$$\overline{CH}_0(X_F) = CH_0(\bar{X}_F)$$

où $\bar{X}$ est une compactification propre et lisse de $X$. Donc ce théorème est exactement [**Me**, thm. 2.11]. □

***Corollaire 11.9***. — *Soit $G \in$ **Grp**. Si $k$ est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *"$BG$" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 11.7) ;*

b) *$\widetilde{\overline{CH}}_0(BG_F) = 0$ pour toute extension $F/k$ (déf. 3.8).*

*Démonstration*. — Remarquons que pour $\operatorname{Spec} k \to G$, on a

$$\begin{tikzcd} \overline{CH}_0(BG_F) \arrow[r] & \mathbb{Z} \\ \overline{CH}_0(B1) \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

D'où le résultat d'après le théorème 11.8. □

8. de type motivique, à cause des invariants dans le groupe de Witt...

***Corollaire 11.10***. — *Soit $G$ un groupe fini d'exposant $m$ sur un corps $k$ contenant $\mu_m$, où $m$ est inversible dans $k$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *"$BG$" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 11.7) ;*

b) *Pour tout module de cycles $M$ et pour tout $n$,*

$$\tilde{A}^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1})$$

*est injectif.*

c) *Pour toute extension $F/k$,*

$$\bigoplus_{D,g} H_{-1}(BD_F, \mathbb{Z}(-1)) \to \tilde{H}_0(BG_F, \mathbb{Z})$$

*est surjectif.*

*Démonstration.* — $(a) \Leftrightarrow (b)$ grâce au théorème 10.1 et à la définition 11.7. Et $(a) \Leftrightarrow (c)$ à cause de la proposition 11.5 et du corollaire 11.9. □

***Corollaire 11.11***. — *Soit $G$ un groupe fini d'exposant $m$ sur un corps $k$ contenant $\mu_m$, $m$ est inversible dans $k$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i) Pour tout $H \subset G$, "$BH$" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 11.7) ;*

*$i^{bis}$) Comme i) mais à valeurs dans un module de cycles connectif (déf. 5.4).*

*ii) Pour tout $H \subset G$ et pour toute extension $F/k$,*

$$\bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z})$$

*où $A$ parcourt les sous-groupes abéliens de $H$.*

*Démonstration.* — On va montrer $(i) \Rightarrow (i^{bis}) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (i^{bis})$ est évident.

$(i^{bis}) \Rightarrow (ii)$ : Pour tout $H \subset G$ et pour tout $M$ connectif, d'après le théorème 10.19, on a

$$A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_{A} A^0(BA, M_n).$$

D'après le théorème 7.9, ceci implique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M[n]) \hookrightarrow \bigoplus_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BA}, M[n])$$

pour tout $M$ connectif. Comme $H^{BH}, H^{BA}$ sont connectifs (*cf.* lemme 7.7), ceci implique par le lemme de Yoneda

$$\forall H \subset G, \bigoplus_A H^{BA} \twoheadrightarrow H^{BH}.$$

En évaluant $H_0$ sur un corps $F$, on a

$$\forall H \subset G, \forall F/k, \bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z}).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ : Pour tout module de cycles $M$, on a (*cf.* thm. 7.9)

$$A^0(BH, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}(h_0^{Nis}(BH), \mathcal{M}_0).$$

Donc $(ii)$ implique

$$\bigoplus_{A \subset H} h_0^{Nis}(BA)(\mathrm{Spec}\, F) \twoheadrightarrow h_0^{Nis}(BH)(\mathrm{Spec}\, F)$$

pour tout $F/k$. Pour conclure, on a besoin du lemme suivant :

***Lemme 11.12***. — *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{HI}$ deux faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Alors,*

$$f \text{ est un épimorphisme} \Leftrightarrow \forall F/k, f_F \text{ est surjectif.}$$

*Démonstration*. — C'est évident pour $\Rightarrow$. Pour $\Leftarrow$, posons $\mathcal{H} = \mathrm{Coker}\, f$, on a $\mathcal{H}_{\mathrm{Spec}\, F} = 0$ $\forall F/k$. D'après [**MVW**, cor. 11.2], $\mathcal{H} = 0$. Donc $f$ est un épimorphisme. □

Appliquons le lemme 11.12 pour $\mathcal{F} = \oplus_A h_0^{Nis}(BA)$, $\mathcal{G} = h_0^{Nis}(BH)$, on a

$$\forall H \subset G, \bigoplus_{A \subset H} h_0^{Nis}(BA) \twoheadrightarrow h_0^{Nis}(BH).$$

Ceci implique

$$\forall H \subset G, A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_A A^0(BA, M_n)$$

pour tout module de cycles $M$. On en déduit $(i)$ grâce au lemme 10.16. □

## 12. Application : théorèmes de Bogomolov et de Peyre

On retrouve ici les théorèmes de Bogomolov [**CTS**, thm. 7.1] et de Peyre [**Pe08**, thm. 1].

### 12.1. Généralité du théorème de Bogomolov. —

***Lemme 12.1***. — *Soit $k$ un corps contenant $\mu_m$, où $m$ est inversible dans $k$. Soit $G$ un groupe fini d'exposant $m$. On a*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = 0.$$

*Démonstration.* — On a

$$\begin{aligned}
&A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}))\\
&= \mathrm{Ker}(A^0(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) \to \bigoplus_A A^0(BA, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}))) \text{ (déf. 10.15)}\\
&= \mathrm{Ker}(H^2_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A H^2_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z})) \text{ (théorème 6.3 a), } n = 0)\\
&= \mathrm{Ker}(H^2(G, \mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A H^2(A, \mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z})) \text{ (}cf.\text{ (4.4))}\\
&= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}))\\
&= 0
\end{aligned}$$

où $A$ parcourt les sous-groupes abéliens de $G$. On conclut avec le lemme 10.16. □

***Théorème 12.2***. — *Soit $k$ un corps contenant $\mu_m$, où $m$ est inversible dans $k$. Soient $G$ un groupe fini d'exposant $m$ et $W$ une $k$-représentation fidèle de $G$. On a*

$$\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(H^2(G, k^*) \to H^2(A, k^*)). \tag{12.1}$$

*où $\mathcal{B}_G$ est l'ensemble des sous-groupes bicycliques de $G$ et $\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G)$ est la partie réduite de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG)$ (cf. déf. 3.8).*

*En particulier, si $k = k_s$ est séparablement clos, on a* [**Bog87**]

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})). \tag{12.2}$$

*En général ($\mu_m \subset k$),*

$$\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G).$$

*Démonstration.* — Rappelons que

$$\mathrm{Br}(k(W)^G) = H^2_{\text{ét}}(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))).$$

Utilisons le corolaire 10.18 et le lemme 12.1 : on a

$$\begin{aligned}(12.3)\quad \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG) &= \mathrm{Br}_{\mathrm{nab}}(BG)\\ &\subset \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) \to A^0(BA, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1)))).\end{aligned}$$

En fait, on a égalité. En effet, soit $\gamma$ appartenant à la partie droite de (12.3), on raisonne comme Peyre [**Pe08**, rem. 4]. Soient $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \to Z_G(D)$. Soit $x \in D$, alors $A = \langle x, I\rangle$ est un sous-groupe bicyclique de $G$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(1))) \arrow[r, "\partial_{D,g}"] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z})) \arrow[r, equal, "(4.4)"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H^3_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z}(1))) \arrow[r, "\partial_{\langle x\rangle, g}"] & H^2_{\text{ét}}(B\langle x\rangle, \mathbb{Z})) \arrow[r, equal, "(4.4)"] & \mathrm{Hom}(\langle x\rangle, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

Comme l'image de $\gamma$ dans $H^3_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z}(1))$ et donc dans $H^2_{\text{ét}}(B\langle x\rangle, \mathbb{Z})$ est nulle pour tout $x \in D$, son image dans $H^2_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z})$ l'est aussi. Alors $\gamma \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) &= \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(\tilde{A}^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) \to \tilde{A}^0(BA, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))))\\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(1)) \to \tilde{H}^3_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z}(1))) \ (\textit{cf.}\ (6.6)).\end{aligned}$$

D'après (4.5), on a $\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(1)) = H^2(G, k^*)$. D'où on obtient (12.1).

Si $k$ est séparablement clos, on a

$$H^3_{\text{ét}}(k_s, \mathbb{Z}(1)) = H^2(k_s, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(k_s) = 0, \quad H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(G, k^*).$$

D'où (12.2).

En général, on a $\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G)$ car $\mathrm{Br}(k_s) = 0$. Considérons la longue suite exacte suivante :

$$H^1(G, k^*) \to H^1(G, k_s^*) \to H^1(G, k_s^*/k^*) \to H^2(G, k^*) \to H^2(G, K_s^*)$$

Comme $\mu_m \subset k^* \subset k_s^*$, on a

$$H^1(G,k^*) \xleftarrow{\sim} H^1(G,\mu_m) \xrightarrow{\sim} H^1(G,k_s^*).$$

Donc la suite

$$0 \to H^1(G,k_s^*/k^*) \to H^2(G,k^*) \to H^2(G,K_s^*)$$

est exacte. D'où le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & \widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(BG) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG_{k_s}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(G,k_s^*/k^*) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H^2(G,k^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G,k_s^*) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^1(A,k_s^*/k^*) \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^2(A,k^*) \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^2(A,k_s^*).
\end{tikzcd}$$

La flèche fragmentée est injective parce que

$$H^1(G,k_s^*/k^*) = \mathrm{Hom}(G,k_s^*/k^*) \hookrightarrow \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Hom}(A,k_s^*/k^*) = \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^1(A,k_s^*/k^*).$$

On en déduit $\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(BG) \hookrightarrow \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG_{k_s})$. □

**12.2. Une généralisation de $A^0_{\mathrm{NR}}(-,M_n)$ inspirée par Bogomolov.** —

***Définition 12.3***. — Soit $F : \mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$. On définit

$$F_{\mathrm{neg}}(X) := \bigcup_U \mathrm{Ker}(F(X) \to F(U)) = \mathrm{Ker}(F(X) \to F(\mathrm{Spec}\, k(X)))$$

où $U$ parcourt les ouverts de $X$ et $k(X)$ est le corps des fonctions de $X$, et

$$F_{\mathrm{st}}(X) := F(X)/F_{\mathrm{neg}}(X) = \mathrm{Im}(F(X) \to F(\mathrm{Spec}\, k(X))).$$

Ce sont respectivement la *partie négligeable* et l'*image stable* de $F$ (en $X$). Ils définissent des foncteurs sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{fl}}$.

***Lemme 12.4***. — *Supposons $k$ infini. Si $F$ est homotopique et pur en coniveau $\geq c$ (cf. déf. 3.1), alors $F_{\mathrm{neg}}, F_{\mathrm{st}}$ le sont aussi.*

*Démonstration.* — Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. Soit $U$ un ouvert de $X$. Considérons le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d] & \supset & E_U \arrow[d] & & E_\eta \arrow[ll, hook'] \arrow[d] & & k(E) \arrow[ll, hook'] \\
X & \supset & U & \supset & \operatorname{Spec} k(X) & &
\end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse sur $F$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(E) \arrow[r] & F(E_U) \arrow[r] & F(E_\eta) \arrow[r] & F(k(E)) \\
F(X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & F(U) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & F(k(X)) \arrow[u, "\wr"] &
\end{tikzcd}$$

D'où $F_{\mathrm{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{neg}}(E)'$ où $F_{\mathrm{neg}}(E)' = \operatorname{Ker}(F(E) \to F(E_\eta))$. En fait $F_{\mathrm{neg}}(E)' = F_{\mathrm{neg}}(E)$. En effet, on va montrer $F(E_\eta) \hookrightarrow F(\operatorname{Spec} k(E))$. On peut se ramener au cas $X = \operatorname{Spec} k$. Pour tout ouvert $V$ de $E_\eta = \mathbb{A}^n_k$, $V(k)$ est non vide. Donc $F(k) \to F(V)$ admet une section et $F(k) \hookrightarrow F(k(E))$. Alors, on a $F_{\mathrm{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{neg}}(E)$.

Soit $U \subset X$ un ouvert de $X$ de coniveau $\delta(X, U) \geq c$ (*cf.* déf. 2.1). On a aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{\mathrm{neg}}(U) \arrow[r] & F(U) \arrow[r] & F(\operatorname{Spec} k(U)) \\
0 \arrow[r] & F_{\mathrm{neg}}(X) \arrow[r] \arrow[u, dashed] & F(X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & F(\operatorname{Spec} k(X)) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

car $k(U) = k(X)$. D'où $F_{\mathrm{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{neg}}(U)$. Ainsi, $F_{\mathrm{neg}}$ est homotopique et pur en coniveau $\geq c$.

Donc d'après la définition de $F_{\mathrm{st}}$, on en déduit tout de suite qu'il est homotopique et pur en coniveau $\geq c$. □

***Remarque 12.5.*** — Si $G$ est un groupe fini sur un corps infini $k$ contenant $\mu_m$ où $m$ est inversible dans $k$, alors $F_{\mathrm{neg}}(BG), F_{\mathrm{st}}(BG)$ sont bien définis (*cf.* déf. 9.1).

***Définition 12.6.*** — On définit

$$F_{\mathrm{NR}}(BG) := \{x \in F(BG) \mid \forall (D, g), \partial_{D,g}(x) \in (F_{-1})_{\mathrm{neg}}(BD)\}.$$

***Exemple 12.7*** **([Bog92])**. — Soit $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$. Pour $X$ lisse, on retrouve des classes $k$-négligeables de $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$ :

$$H^i_{\text{neg}}(X, \mathbb{Z}(n)) = \operatorname{Ker}(H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_{\text{ét}}(k(X), \mathbb{Z}(n))),$$

et la cohomologie stable de $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$ :

$$H^i_{\text{st}}(X, \mathbb{Z}(n)) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))/H^i_{\text{neg}}(X, \mathbb{Z}(n)).$$

Donc d'après la proposition 3.9, l'exemple 8.4, 1) et la définition 12.6, on a

$$\begin{aligned}(12.4)\quad & H^i_{\text{NR}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \\ & = \{x \in H^i_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \mid \forall (D, g), \partial_{D,g}(x) \in H^{i-1}_{\text{neg}}(BD, \mathbb{Z}(n-1)).\}\end{aligned}$$

## 12.3. Théorème de Peyre. —

***Définition 12.8***. — Soit $G$ un groupe fini sur un corps $k$ contenant $\mu_m$ où $m$ est inversible dans $k$.

On définit le groupe $H^3_p(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des *classes permutation-négligeables* comme le groupe [**Pe08**, déf. 4]

$$\sum_{H \subset G} \operatorname{Cor}^G_H(\operatorname{Im}(H^1(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\otimes 2} \xrightarrow{\cup} H^3(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))).$$

Notons $H^4_{Ch}(BG, \mathbb{Z}(2)) = \langle c_2(\rho) \rangle$ le sous-groupe de $H^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2))$ engendré par les classes de Chern des représentations $\rho$ de $G$.

Utilisant [**Pe08**, prop. 1 et prop. 2] et le corollaire 4.1, on obtient

***Lemme 12.9***. — *Si $k$ est séparablement clos, alors*

$$H^3_p(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = H^4_{Ch}(BG, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

***Théorème 12.10***. — *Soit $k$ un corps contenant $\mu_m$ où $m$ est inversible dans $k$. Soient $G$ un $k$-groupe fini d'exposant $m$ et $W$ une représentation fidèle de $G$. On a un isomorphisme :*

$$(12.5)\qquad H^4_{\text{NR}}(BG, \mathbb{Z}(2))/H^4_{Ch}(BG, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{\text{nr}}(k(W)^G, \mathbb{Z}(2))$$

*où $H^4_{\text{NR}}(BG, \mathbb{Z}(2))$ est comme dans* (12.4) *et $H^4_{Ch}(BG, \mathbb{Z}(2))$ comme dans la définition 12.8.*

*Démonstration.* — D'après le théorème 10.1, on a :

$$H^3_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = A^0_{\mathrm{NR}}(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

La suite exacte du théorème 6.3 b) donne une suite exacte

$$0 \to CH^2(BG) \to H^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \to A^0(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to 0.$$

Alors, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & CH^2(BG) \arrow[r] & H^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{D,g}"] & A^0(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{D,g}"] & 0 \\
 & & H^3_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\sim"] & A^0(BD, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) &
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme provient du théorème 6.3 a). D'après [**Tot**, p. 257], $CH^2(BG)$ est engendré par des classes de Chern des représentations de $G$. D'où on déduit (12.5). □

***Remarque 12.11.*** — En particulier, si $k$ est algébriquement clos de caractéristique zéro, d'après le lemme 4.3, 1) et le corollaire 4.1, on a

$$H^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \cong H^3(G, H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2)) = H^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$
$$\text{et } H^3_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z}(1)) = H^3(D, \mathbb{Z}) = H^2(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Donc d'après le lemme 12.9 et (12.5), on a :

$$H^3_{\mathrm{nr}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H^3_p(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

et son noyau est annulé par une puissance de 2, où

$$H^3_{\mathrm{nr}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigcap_{D \subset G,\ g: I \to Z_G(D)} \mathrm{Ker}(H^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{D,g}} H^2(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

On peut montrer que les résidus $\partial_{D,g}$ sont égaux à ceux de Peyre [**Pe08**, déf. 5]. On retrouve alors le théorème 1 de [**Pe08**].

***Remarque 12.12.*** — Grâce à la suite exacte (10.3) et au théorème 12.2, on obtient une généralisation en degré 3 de la suite exacte de Bogomolov :

$$\begin{aligned}(12.6)\quad 0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \\ \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BD).\end{aligned}$$

## Références


[At] M. Atiyah *Characters and cohomology of finite groups*, Publ. Math. IHÉS **9** (1961), 23–64.

[BO] S. Bloch, A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **7** (1974), 181–201.

[Bog87] F.A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces of linear representations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), 485-516, 688.

[Bog92] F.A. Bogomolov, *Stable cohomology of groups and algebraic varieties*, Mat. Sb. **183** (1992), 3-28.

[Bour1] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7, Hermann.

[BL] S. Bloch, S. Lichtenbaum, *A spectral sequence for motivic cohomology*, $K$-theory preprint archives # **62**, 1995.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture* in K-theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras (Santa Barbara, 1992), Proc. Sympos. Pure Math. **58** (1995), Amer. Math. Soc., Providence, 1995, 1–64.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), 141–158.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, in Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186.

[Deg08] F. Déglise, *Motifs génériques*, Rend. Mat. Sem. Univ. Padova **119** (2008), 173–244.

[Deg12] F. Déglise, *Coniveau filtration and mixed motives*, *in* Regulators, Contemp. Math. **571** (2012), 51–76.

[DG] M. Demazure, P. Gabriel, Groupes algébriques, Masson-North Holland, 1970.

[EG] D. Edidin, W. Graham, *Equivariant intersection theory*, Inv. Math. **131** (1998), 595-634.

[Fi] E. Fischer *Die Isomorphie der Invariantenkorper der endlichen Abel'schen Gruppen linearen Transformationen*, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen (1915), 77–80.

[Ful] W. Fulton, Intersection theory, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, AMS University Lecture Series, Vol. 28 (2003).

[GL] T. Geisser, M. Levine, *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. reine angew. Math. **530** (2001), 55–103.

[GZ] P. Gabriel, M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Springer-Verlag, 1967.

[Har] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977.

[HK] A. Huber-Klawitter, B. Kahn, *The slice filtration and mixed Tate motives*, Compositio Math. **142** (2006), 907–936.

[JO] S. Jackowski, B. Oliver *Vector bundles over classifying spaces of compact Lie groups*, Acta Math. **176** (1996), 109–143.

[K93] B. Kahn, *Descente galoisienne et $K_2$ des corps de nombres*, $K$-theory **7** (1993), 55–100.

[K96] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395-416.

[K97] B. Kahn, *The Quillen-Lichtenbaum conjecture at the prime* 2, $K$-theory preprint archives # **208**, 1997.

[K03] B. Kahn, *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **36** (2003), 977–1002.

[K10] B. Kahn *Cohomological approaches to $SK_1$ and $SK_2$ of central simple algebras*, Doc. Math. Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 317–369.

[K11] B. Kahn, *Relatively unramified elements in cycle modules*, J. $K$-theory **7** (2011), 409–427.

[K13] B. Kahn *Classes de cycles motiviques étales*, à paraître dans Alg. and Number Theory 6 :7 (2012).

[KS] B. Kahn, R. Sujatha, *A few localisation theorems*, Homology, Homotopy and Applications, vol. **9** (2), 2007, 137-161.

[KS2] B. Kahn, R. Sujatha, *Birational geometry and localisation of categories*, `arXiv:0805.3753 (math.AG)`.

[Lang] S. Lang, Algebraic Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 110.

[Le] M. Levine *The homotopy coniveau tower*, J. of Topology **1** (2008), 217–267.

[Me] A. S. Merkurjev, *Unramified elements in cycle modules*, J. London Math. Soc. **78** (2008), 51-64.

[MVW] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lectures notes on motivic cohomology, Clay Mathematics Monographs **2**, Amer. Math. Soc., 2006.

[MS] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin *$K$-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de reste normique* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 1011–1046, 1135–1136. Trad. anglaise : Math. USSR-Izv. **21** (1983), 307–340.

[Mil] J.S. Milne, Etale Cohomology, Princeton University Press, 1980.

[MV] F. Morel, V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHÉS, **90** (1999), 45–143.

[GIT] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd ed., Springer, Berlin, 1994.

[Ng10] Nguyen T. K. Ngan, Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, 2010.

[Ng11] Nguyen T. K. Ngan *Classes non ramifiées sur un espace classifiant*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **349** (2011), 233–237.

[Pe99] E. Peyre, *Application of motivic complexes to negligible classes*, Algebraic $K$-theory (Seattle 1998) (W. Raskind et C. Weibel, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, AMS, Providence, 1999, 181–211.

[Pe08] E. Peyre, *Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem*, Invent. Math. **171**,191-225 (2008).

[Rost] M. Rost, *Chow groups with cofficients*, Doc. Math. **1** (1996), 319-393.

[Sa84] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77**, 71-84 (1984).

[Schmidt] M. Schmidt Wittringhomologie, thèse, Regensburg, 1997 (non publié).

[Se68] J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Su-Vo] A. Suslin, V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, *in* The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Tot] B. Totaro *The Chow ring of a classifying space*, *in* Algebraic $K$-Theory, ed. W. Raskind and C. Weibel, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **67**, American Mathematical Society, 1999, 249–281.

[Voe00b] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, in *Cycles, transfers and motivic cohomology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000), 188-238.

[Voe02] V. Voevodsky *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*, Int. Math. Res. Not. **2002**, 351–355.

[Voe10] V. Voevodsky *Cancellation theorem*, Doc. Math. Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 671–685.

[EGA I] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, ch. I : Le langage des schémas, Springer, 1971.

[EGA IV] A. Grothendieck, A. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, ch. IV : étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Publ. Math. IHÉS **20, 24, 28, 32** (1964–1967).

[SGA 1] Revêtements étales et groupe fondamental, (A. Grothendieck et al.) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960 – 1961 (SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin, 1971.

---

*31 octobre 2012*

Bruno Kahn, Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* kahn@math.jussieu.fr

Nguyen Thi Kim Ngan, Max Planck Institut, Bonn, Allemagne
*E-mail :* nguyen.t.k.ngan.vn@gmail.com