



HAL
open science

Sur une conjecture de Ramanujan et ses généralisations.

Luc Abergel

► **To cite this version:**

| Luc Abergel. Sur une conjecture de Ramanujan et ses généralisations.. 2012. hal-00747720v3

HAL Id: hal-00747720

<https://hal.science/hal-00747720v3>

Preprint submitted on 4 Nov 2012 (v3), last revised 8 Nov 2012 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur une conjecture de Hardy-Ramanujan

Evaluation asymptotique à tout ordre de $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ où x_n tend vers $+\infty$
Le cas envisagé par la conjecture étant le cas $x_n = n$.

Par Luc Abergel ¹ Novembre 2012

Abstract :

Le but de cet article est de d'obtenir une asymptotique de $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ ou de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!}$ en $+\infty$, avec $x_n \rightarrow +\infty$.

Cela permettra :

- De répondre à la question de Hardy-Ramanujan concernant une asymptotique de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.
- De traiter des cas pratiques comme par exemple $x_n = \sqrt{n}$ ou d'autres exemples.
- D'obtenir une asymptotique de x_n caractérisé par $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!} = \frac{e^{x_n}}{2}$.

Pour cela, nous allons établir des développements asymptotiques d'intégrales provenant de la méthode de Laplace, à savoir $\int_a^b f^x(t)\pi(t) dt$ pour $x \rightarrow +\infty$ (§3).

Il faudra ensuite établir des méthodes effectives de calculs des asymptotiques (§4).

Puis généraliser à des intégrales du type $\int_0^1 f^x(t)\varphi^x(t) dt$ avec $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ (§5 et §6).

Les exemples, comme la question de Hardy-Ramanujan, seront ensuite traités pour illustrer ces méthodes (§7).

Cette question posée par Ramanujan a été l'objet de nombreux travaux (voir [4] pour une approche historique), aussi bien par des voies d'inégalités (voir [1], [2], [8], [9], [12]), que par des arguments analytiques (voir [3], [5], [6]), ou enfin par une approche probabiliste (voir [7], [10]). Une réponse complète à la question, dans le cas envisagé par Ramanujan, ayant été donnée par J. C. W. Marsaglia (voir [11]).

Notations :

On définit différentes intégrales pour f continue par morceaux sur $[0, 1]$, et π positive, continue et intégrable sur $]0, 1]$:

$$I(x, f) = \int_0^1 f^x(t) dt, I_\pi(x, f) = \int_0^1 f^x(t)\pi(t) dt \text{ ainsi que } J(x, f) = \int_0^1 f(t^x) dt.$$

¹Professeur en classes préparatoires, Lycée Janson de Sailly, PARIS, email : Luc.Abergel@ac-paris.fr

1 Introduction.

Nous allons ici donner une représentation intégrale de $R_n(x_n)$ et $S_n(x_n)$, base pour obtenir les asymptotiques cherchées.

On pose $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$. Une intégration par parties donne

$$I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x) \text{ si } n \geq 1$$

En itérant on a :

$$I_n(x) = -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + \dots + n(n-1)\dots 2x) + n!I_0(x)$$

D'où $I_n(x) = -n!e^{-x}(\frac{x^n}{n!} + \dots + \frac{x}{1}) + n!(1 - e^{-x})$ ou encore $I_n(x) = -n!e^{-x}(e^x - 1 - R_n(x)) + n!(1 - e^{-x})$

Ainsi $R_n(x) = \frac{e^x}{n!}I_n(x)$ et $R_n(x_n) = \frac{e^{x_n}}{n!}I_n(x_n) = \frac{e^{x_n}}{n!} \int_0^{x_n} t^n e^{-t} dt \stackrel{t=x_n(1-u)}{=} \frac{x_n^{n+1}}{n!} \int_0^1 e^{x_n t} (1-t)^n dt$

qu'on écrira sous la forme :

$$R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} \int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-(n-x_n)t} dt$$

De même on obtient :

$$S_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} [e^{-t}(1+t)]^n e^{-(x_n-n)t} dt$$

qui permet de traiter le cas où x_n est trop grand devant n et pour lequel $R_n(x_n) \sim e^{x_n}$. Dans cet article, pour la théorie, nous ne nous intéresserons qu'au cas $x_n = O(n)$ et n'étudierons donc que $R_n(x_n)$. Dans un exemple du paragraphe 7 il sera cependant fait allusion aux résultats concernant $S_n(x_n)$.

2 Position du problème et résultats préliminaires.

définition 1 : On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'hypothèse (H) si :

- f définit un difféomorphisme local autour de a .
- $f(a) = 1$ et pour tout $c > a$, $\sup_{[c, b]}(f) < 1$.

Si de plus f est un homéomorphisme décroissant de $[a, b]$ sur $[0, 1]$, on dit que f vérifie (H').

L'intervalle $[a, b]$ ne jouant aucun rôle, on prendra dans la suite $[0, 1]$.

Rappel 1 : On sait, par convergence dominée, que $I_\pi(x, f) \xrightarrow{\infty} 0$. On va établir que $I_\pi(x, f) \underset{\infty}{=} e^{o(x)}$ dès que f vérifie (H) et si π n'est identiquement nulle sur aucun voisinage de 0. Pour cela on va démontrer que $[I_\pi(x, f)]^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\infty} 1$.

Démonstration :

- Tout d'abord $[I_\pi(x, f)]^{\frac{1}{x}} \leq N_1(\pi)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$.
- Pour une minoration, on choisit $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$ sur lequel $f \geq 1 - \varepsilon$. Quitte à réduire $[a, b]$, on peut supposer que sur cet intervalle $\pi \geq \alpha$ pour un certain $\alpha > 0$. On obtient alors $I_\pi(x, f)^{\frac{1}{x}} \geq [\alpha(b-a)]^{\frac{1}{x}}(1-\varepsilon)$ et donc $\liminf_{x \rightarrow \infty} [I_\pi(x, f)]^{\frac{1}{x}} \geq 1$. •

Premier résultat : Si π n'est nulle sur aucun voisinage de 0, comme $f \leq \rho < 1$ sur tout intervalle $[\alpha, 1]$, on en déduit :

$$\int_\alpha^1 f^x \pi = O(\rho^x)$$

puis :

$$\int_0^1 f^x \pi = \int_0^\alpha f^x \pi + o(e^{o(x)})$$

On peut donc modifier la définition de f à droite d'un point $\alpha > 0$ pour étudier $I_\pi(x, f)$ à $o(e^{o(x)})$ près, donc par exemple à $o(\frac{1}{x^\alpha})$ près, ce qui sera l'objectif de ce travail en pratique.

Dans toute la suite, on supposera que f vérifie (H') , et que π est continue et strictement positive sur $]0, 1]$.

Propriété 1 : Une adjonction entre I_π et J .

Soit Π la primitive de π qui s'annule en 0. Si f vérifie (H') alors $I_\pi(x, f) = J(\frac{1}{x}, \Pi \circ f^{-1})$.

Démonstration :

On effectue le changement de variable $u = f(t)$:

$$I_\pi(x, f) = - \int_0^1 u^x \cdot (f^{-1})'(u) \cdot \pi \circ f^{-1}(u) du = - \underbrace{[f^x(u) \Pi \circ f^{-1}(u)]_0^1}_{=0} + x \int_0^1 u^{x-1} \pi \circ f^{-1}(u) du.$$

On pose alors $u^x = v$: $I_\pi(x, f) = \int_0^1 \Pi \circ f^{-1}(v^{\frac{1}{x}}) dv$ comme souhaité. •

On remarquera que si f^{-1} vérifie (H') , soit si f vérifie (H) , alors $J(x, f) = e^{o(\frac{1}{x})}$ pour $x \rightarrow 0$.

Cette écriture est efficace pour l'obtention de relations de comparaison en vue de l'étude de $I_\pi(x, f)$ en $+\infty$ comme le montre la proposition suivante :

3 Relations de comparaisons sur J et sur I_π .

Propriété 2 : Si $f \underset{1}{=} o(g)$ (resp. $f \underset{1}{=} O(g)$) avec g vérifiant (H) , alors $J(x, f) \underset{0}{=} o(J(x, g))$ (resp. $J(x, f) \underset{0}{=} O(J(x, g))$)

Démonstration :

$$J(x, f) = \int_0^a f(v^x) dv + \int_a^1 f(v^x) dv.$$

Or $f(v) \leq g(v)$ si $1 - \alpha \leq v \leq 1$. On choisit alors $a = (1 - \alpha)^{\frac{1}{x}}$ et on a :

$$|J(x, f)| \leq \underbrace{\int_0^a f(v^x) dv}_{\leq aN_\infty(f)} + \varepsilon \underbrace{\int_a^1 g(v^x) dv}_{\leq J(x, g)}$$

Mais $(1 - \alpha)^{\frac{1}{x}} = o(J(x, g))$ puisque $J(x, g) = e^{o(\frac{1}{x})}$ et donc $aN_\infty(f) \leq \varepsilon J(x, g)$ si x est voisin de 0.

Donc, pour de tels x , $|J(x, f)| \leq 2\varepsilon J(x, g)$.

Le cas $f \underset{1}{=} O(g)$ se traite de façon analogue. •

Première application :

- Si $f^{-1} \underset{1}{\sim} g^{-1}$ alors $I(x, f) \underset{\infty}{\sim} I(x, g)$.

- Si $\Pi \circ f^{-1} \underset{1}{\sim} \Pi \circ g^{-1}$ alors $I_\pi(x, f) \underset{\infty}{\sim} I_\pi(x, g)$.

On obtient des énoncés analogues avec o ou O .

Exemple : On suppose $f(y) \underset{0}{=} 1 - py^d + o(y^d)$ avec $d > 0$. On pose $g(y) = 1 - py^d$ sur $[0, y_0]$ où y_0 est choisi pour que $g(y_0) = 0$. On a bien $g^{-1}(t) = (1 - \frac{t}{p})^{\frac{1}{d}} \underset{1}{\sim} f^{-1}(t)$. Donc

$$I(x, f) \underset{\infty}{\sim} \int_0^{y_0} (1 - py^d)^x dy \underset{py^d=u}{=} \frac{1}{d} \int_0^1 (1-u)^x p^{-\frac{1}{d}} u^{\frac{1}{d}-1} du \underset{v=xu}{=} \frac{1}{d(px)^{\frac{1}{d}}} \int_0^x (1 - \frac{v}{x})^x v^{\frac{1}{d}-1} dv$$

On rédige, par exemple par convergence dominée, que la dernière intégrale converge vers $\Gamma(\frac{1}{d})$ pour $x \rightarrow +\infty$ (mais des résultats plus précis seront donnés dans le paragraphe suivant) et on obtient :

$$\int_0^1 f^x(t) dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{d})}{d(px)^{\frac{1}{d}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{d})}{(px)^{\frac{1}{d}}}$$

4 Calculs numériques.

4.1 Étude de $I_P(x, a) = \int_0^x t^a e^{-t} P(t) dt$ **et** $I_P(a) = \int_0^\infty t^a e^{-t} P(t) dt$.

Clairement, à l'aide d'une intégration par parties, on obtient $\int_x^\infty t^a e^{-t} P(t) dt = O(e^{-x} x^{a+n})$ si $n = \deg(P)$.

Donc $I_P(x) = \int_0^\infty t^a e^{-t} P(t) dt + O(x^{-q})$ pour tout q .

4.2 Étude de $F_a(x) = \int_0^x (1 - \frac{t}{x})^x dt$ **pour** $x \rightarrow +\infty$ **et** $a > 0$.

On écrit $F_a(x) = \int_0^x t^a e^{-t} e^{t+x \ln(1-\frac{t}{x})} dt$ puis $e^{t+x \ln(1-\frac{t}{x})} = \sum_{i \geq 0} \frac{P_i(t)}{x^i}$.

Propriété 3 : $F_a(x) = \sum_{i=0}^k \frac{P_i(t)}{x^i} + o(\frac{1}{x^k})$.

Démonstration :

On rappelle $|e^{-\theta} - \sum_{i=0}^k \frac{(-\theta)^i}{i!}| \leq \frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!}$ si $\theta \geq 0$.

Étudions $\varepsilon_k = F_a(x) - \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^x t^a e^{-t} [-t - x \ln(1 - \frac{t}{x})]^i dt$:

On a $|\varepsilon_k| \leq \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x t^a e^{-t} [-t - x \ln(1 - \frac{t}{x})]^{k+1} dt$. Appelons η_k cette dernière quantité.

Notons $\varphi(u) = \frac{-u - \ln(1-u)}{u^2}$ en remarquant que φ est continue sur $[0, 1[$ et que φ^p est intégrable sur $[0, 1[$ pour tout $p > 0$. En posant $t = xu$ dans l'intégrale qui définit η_k , on obtient

$$\eta_k \leq \frac{x^{a+k+2}}{(k+1)!} \int_0^1 u^{a+k+2} e^{-xu} \varphi^{k+1}(u) du$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette intégrale, on déduit :

$$|\eta_k| \leq \left[\int_0^1 u^{2a+4k+4} e^{-2xu} du \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \varphi^{2k+2}(u) du \right]^{\frac{1}{2}}$$

D'où $\eta_k \leq C_k x^{a+k+2} \left[(2x)^{-2a-4a-5} \int_0^{+\infty} t^{2a+4k+4} e^{-t} dt \right]^{\frac{1}{2}} = C'_k x^{-k-\frac{1}{2}}$.

Ceci montre que $\varepsilon_k = o(\frac{1}{x^k})$.

Il suffit alors de remarquer que

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \int_0^x t^a e^{-t} (t + x \ln(1 - \frac{t}{x}))^i dt = \sum_{i=0}^k \frac{P_i(t)}{i!} + o(\frac{1}{x^k})$$

et d'utiliser 4.1 pour obtenir le résultat souhaité. •

4.3 Étude de $D_a(x) = \int_0^1 (1 - u^{\frac{1}{x}})^a du$ **pour** $x \rightarrow +\infty$ **et** $a > 0$.

On pose $v = 1 - u^{\frac{1}{x}}$ et $D_a(x) = x \int_0^1 v^a (1-v)^{x-1} dv$.

On pose alors $v = \frac{t}{x-1}$ et $D_a(x) = \frac{x}{(x-1)^{a+1}} \int_0^{x-1} t^a (1 - \frac{t}{x-1})^{x-1} dt = \frac{x}{(x-1)^{a+1}} F_a(x-1)$.

On peut donc effectuer une asymptotique de D_a en $+\infty$ grâce à la relation :

$$D_a(x) = \frac{x}{(x-1)^{a+1}} F_a(x-1)$$

Remarques :

- $D_a(x) = O(\frac{1}{x^a})$ pour $x \rightarrow +\infty$ grâce à la relation $F_a(x) = O(1)$.
- à l'aide de la fonction B d'Euler, on peut obtenir la formule $D_a(x) = xB(x, a+1) = x \frac{\Gamma(x)\Gamma(a+1)}{\Gamma(x+a+1)}$. Ceci démontre dans le cas $x = n$ entier le résultat $D_a(n) = \frac{n!}{(n+a)\cdots(1+a)}$ et on obtient alors directement une asymptotique de $D_a(n)$.

4.4 Application à une asymptotique de $J(x, f)$ pour $x \rightarrow 0$ puis de $I(x, f)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

On suppose avoir une asymptotique du type $f(1-h) = \sum_{i=1}^q \alpha_i h^{a_i} + o(h^{a_q})$ pour une suite strictement croissante et strictement positive $(a_i)_{i \geq 1}$.

On sait alors que $J(x, f) = \sum_{i=1}^q \alpha_i D_{a_i}(\frac{1}{x}) + o(x^{a_q})$ grâce au résultat établi en §3 (propriété 2).

On obtient donc une asymptotique de $J(x, f)$ à $o(x^{a_q})$ près pour $x \rightarrow 0$.

Par la relation $I(x, f) = J(\frac{1}{x}, f^{-1})$ on en déduit :

$$\text{Si } f^{-1}(1-h) = \sum_{i=1}^q \alpha_i h^{a_i} + o(h^{a_q}) \text{ alors } I(x, f) = \sum_{i=1}^q \alpha_i D_{a_i}(x) + o(x^{-a_q})$$

5 Étude de $K(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{\varphi(x)}(t) dt$ pour $x \rightarrow +\infty$.

5.1 Résultats préliminaires.

Dans ce paragraphe on considère 2 fonctions φ et ψ qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et une fonction π continue et intégrable sur $]0, 1]$. On va étudier $K_\pi(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{\varphi(x)}(t) \pi(t) dt$ en $+\infty$.

Lemme 1 : Si $f'(0) \neq 0$, $\pi(t) = O(\frac{1}{t^a})$ avec $a < 1$ alors $\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) \pi(t) dt = O(\frac{1}{\varphi(x)^{1-a}})$.

Démonstration :

On sait que $\pi(t) = O(\frac{1}{t^a})$ et que $f^{-1}(t) = O(t)$.

Donc, si Π désigne la primitive de π qui s'annule en 0, alors

$$\Pi \circ f^{-1}(1-t) = O(t^{1-a}), \text{ soit } \Pi \circ f^{-1}(t) = O((1-t)^{1-a})$$

Puis, par §2 :

$$I_\pi(\varphi(x), f) = J(\frac{1}{\varphi(x)}, \Pi \circ f^{-1}) = O\left(\int_0^1 (1-t^{\frac{1}{\varphi(x)}})^{1-a} dt\right) = O(D_{1-a}(\varphi(x))) = O(\frac{1}{\varphi(x)^{1-a}})$$

comme souhaité. •

Lemme 2 : Si $f'(0) \neq 0$, $\pi(t) = O(\frac{1}{t^a})$ avec $a < 1$, $1-g(t) = O(t^\alpha)$ et $\psi(x) = O(\varphi^\alpha(x))$, alors

$$K_\pi(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) [-\ln(g(t))]^k \pi(t) dt + O(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{k\alpha+1-a}(x)}).$$

Démonstration :

On écrit $g^{\psi(x)} \pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) [-\ln(g)]^k \pi$.

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \psi^k(x) [-\ln(g)]^k \pi = \frac{f^{\varphi(x)}}{g^{\psi(x)}} \pi$ est intégrable au voisinage de 0, (n'oublions pas qu'on peut modifier la définition de g hors d'un voisinage de 0 sans changer l'asymptotique, il suffit ici de prolonger g hors d'un

voisinage $[0, c]$ par $g(c)$ sur $[c, 1]$ si $g(c) \neq 0$ pour obtenir cette intégrabilité).

On a donc

$$K_\pi(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) [-\ln(g(t))]^k dt$$

avec convergence absolue de cette série.

On applique alors le lemme 1 en remplaçant π par $[-\ln(g)]^k \pi$:

on dispose de la relation $[-\ln(g)]^k \pi \underset{0}{=} O(t^{k\alpha-a})$ donc $\int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) [-\ln(g(t))]^k \pi(t) dt = O\left(\frac{1}{\varphi^{k\alpha+1-a}(x)}\right)$.

Par convergence absolue on peut donc conclure :

$$K_\pi(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) [-\ln(g(t))]^k \pi(t) dt + O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{k\alpha+1-a}(x)}\right) \bullet$$

Remarque : par §4 et à l'aide d'asymptotiques pour f^{-1} et pour $[-\ln(g)]^k \pi$ on peut donc effectuer une asymptotique de $K_\pi(f, g)$ si $\psi^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o(\varphi(x))$.

5.2 Application à l'étude asymptotique de $K(x) = \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) g^{\psi(x)}(t) dt$ en $+\infty$.

Rappel 2 : on dit qu'une fonction h est d'ordre α en 0 si $h(t) = Kt^\alpha + o(t^\alpha)$ avec $K \neq 0$.

Propriété 4 : Si $1 - f$ est d'ordre α en 0, si $1 - g$ est d'ordre au moins β en 0 et si $\psi^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o(\varphi^\beta(x))$

alors $K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f^{\varphi(x)}(t) [-\ln(g(t))]^k dt + O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{p\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}}(x)}\right)$

Démonstration :

On note $f_1(u) = f(u^{\frac{1}{\alpha}})$ et analogue pour g_1 .

On pose $\pi(u) = \frac{1}{\alpha u^{1-\frac{1}{\alpha}}}$. On pose enfin $u = t^\alpha$ dans $K(x)$. On obtient :

$$K(x) = \int_0^1 f_1(u) g_1(u) \pi(u) du$$

On vérifie que $\pi(u) = O\left(\frac{1}{u^a}\right)$ avec $a = 1 - \frac{1}{\alpha}$, que f_1 est d'ordre 1 en 0 et enfin que g_1 d'ordre au moins $\frac{\beta}{\alpha}$.

On peut donc appliquer le résultat précédent :

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \psi^k(x) \int_0^1 f_1^{\varphi(x)}(u) [-\ln(g_1(u))]^k \pi(u) du + O\left(\frac{\psi^p(x)}{\varphi^{p\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}}(x)}\right)$$

Il suffit alors de poser à nouveau $u = t^\alpha$ pour conclure. •

On dispose ainsi d'une méthode pour obtenir une asymptotique de telles intégrales.

5.3 Application à l'étude de $K(x) = \int_0^1 f^x(t) g^{\varphi(x)}(t) dt$ dans le cas où $\varphi(x) \underset{+\infty}{=} O(x)$.

Voici une liste de cas traitables par cette technique :

- Si $1 - f$ et $1 - g$ sont d'ordre α et β respectivement en 0 alors on peut traiter le cas $\varphi^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ en appliquant directement le paragraphe précédent. On obtient donc

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \varphi^k(x) \int_0^1 f^x(t) [-\ln(g(t))]^k dt + O\left(\frac{\varphi^p(x)}{x^{p\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}}}\right)$$

- Si $1 - f$ et $1 - g$ sont d'ordre α et β respectivement en 0 alors on peut traiter le cas $x^\beta \underset{+\infty}{=} o(\varphi^\alpha(x))$

en écrivant au contraire $K(x) = \int_0^1 g^{\varphi(x)}(t) f^x(t) dt$. On obtient donc

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \int_0^1 g^{\varphi(x)}(t) [-\ln(f(t))]^k dt + O\left(\frac{x^p}{\varphi(x)^{p\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}}}\right)$$

Il reste donc à traiter le cas limite où $\varphi^\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} cx^\beta$ avec pour c une constante non nulle.

6 Un cas limite : Étude de $K(x)$ dans le cas $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ si $1 - f$ et $1 - g$ sont d'ordres α et β respectivement en 0

Dans tout ce paragraphe, on considérera f et g C^∞ au voisinage de 0 avec $1 - f$ et $1 - g$ d'ordre α et β respectivement en 0.

Nous allons procéder en plusieurs étapes.

6.1 Étude de $K_\alpha(x) = \int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}}(t)t^\gamma dt$ avec $\gamma > -1$.

On pose $f_1(t) = \frac{\ln(f(t))}{t^\alpha}$ et $g_1(t) = \frac{\ln(g(t))}{t^\beta}$.

Ces fonctions sont C^∞ sur $[0, a]$ avec $a > 0$, et, par l'étude faite au §2, on peut les prolonger en des fonctions continues et C^∞ au voisinage de 0 en ne changeant $K_\alpha(x)$ qu'à un $o(e^{\sigma(x)})$ près, donc à un $o(\frac{1}{x^q})$ près pour tout $q > 0$.

On a :

$$K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \exp(xt^\alpha f_1(t) + x^{\frac{\beta}{\alpha}}t^\beta g_1(t))t^\gamma dt \underset{tx^{\frac{1}{\alpha}}=u}{=} x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp(u^\alpha f_1(x^{-\frac{1}{\alpha}}u) + u^\beta g_1(x^{-\frac{1}{\alpha}}u))u^\gamma du$$

On pose alors $F(z) = \int_0^{+\infty} \exp(u^\alpha f_1(zu) + u^\beta g_1(zu))u^\gamma du$.

F est clairement C^∞ au voisinage de 0. On peut donc écrire

$$F(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{p-1} F^{(k)}(0) \frac{z^k}{k!} + O(z^p)$$

En conclusion :

$$K_\alpha(x) \underset{+\infty}{=} x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!x^{\frac{k}{\alpha}}} + O(x^{-\frac{p+\gamma+1}{\alpha}})$$

6.2 Étude de $K_\pi(x) = \int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}}(t)\pi(t) dt$.

Lemme 3 Si $\pi(t) \underset{0}{=} O(t^\gamma)$ alors $K_\pi(x) \underset{+\infty}{=} O(x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}})$

Démonstration :

Cela provient de la relation

$$\int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}}(t)t^\gamma dt = \int_0^{+\infty} \exp(xt^\alpha f_1(t) + x^{\frac{\beta}{\alpha}}t^\beta g_1(t))t^\gamma dt$$

On pose encore $u = tx^{\frac{1}{\alpha}}$ et on obtient

$$\int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}}(t)t^\gamma dt = x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp(u^\alpha f_1(x^{-\frac{1}{\alpha}}u) + u^\beta g_1(x^{-\frac{1}{\alpha}}u))u^\gamma du \leq Cx^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}}$$

avec

$$C = \int_0^{+\infty} \exp(u^\alpha f_1(u) + u^\beta g_1(u))u^\gamma du$$

si $x \geq 1$ (puisque f_1 et g_1 sont décroissantes). •

Le travail précédent permet donc de traiter le cas où on dispose pour π en 0 d'une asymptotique à tout ordre à l'aide de fonctions puissance, du type

$$\pi(t) \underset{0}{=} \sum_{j=0}^d a_j t^{\gamma_j} + o(t^{\gamma_d}) \text{ avec } -1 < \gamma_1 < \dots < \gamma_d$$

6.3 Étude de $K(x) = \int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}+\theta(x)}(t) dt$ avec $\theta(x) \underset{+\infty}{=} o(x\frac{\beta}{\alpha})$.

On écrit $K(x) = \int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}}(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \theta^k(x) [-\ln(g(t))]^k dt = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \theta^k(x) K_{\pi_k}(x)$

avec $\pi_k = [-\ln(g)]^k$.

On rappelle donc que $K_{\pi_k}(x) = \int_0^1 f^x(t)g^{x\frac{\beta}{\alpha}}(t) [-\ln(g(t))]^k dt$

Cette série étant absolument convergente, on obtient un développement asymptotique de $K(x)$ en tronquant cette série. Comme $K_{\pi_k}(x) \underset{+\infty}{=} O(x^{-\frac{\beta k+1}{\alpha}})$, on a donc

$$K(x) \underset{+\infty}{=} \sum_0^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} \theta^k(x) K_{\pi_k}(x) + O\left(\frac{1}{x\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{\theta(x)}{x\frac{\beta}{\alpha}}\right)^p\right)$$

7 Exemples de résultats.

On rappelle la relation $R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} \int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-(n-x_n)t} dt$.

7.1 Le problème de Hardy-Ramanujan.

On a donc

$$R_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^n(t) dt \text{ avec } f(t) = e^t(1-t) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{8}t^4 + o(t^4)$$

On a :

$$f^{-1}(1-h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sqrt{2h} - \frac{2}{3}h + \frac{11}{36}\sqrt{2}h^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{27}h^2 + o(h^2)$$

Or :

$$I(x, f) = \sqrt{2}D_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{2}{3}D_1(x) + \frac{11}{36}\sqrt{2}D_{\frac{3}{2}}(x) - \frac{5}{27}D_2(x) + o(h^2)$$

Après calculs on trouve :

$$I(x, f) \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{135x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

En utilisant le résultat :

$$\frac{n^{n+1}}{n!} = e^n \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{12\sqrt{2\pi n}} + \frac{1}{576n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

et grâce au calcul précédent on a montré

$$R_n = e^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{23}{540} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right)$$

Cette méthode permet bien sûr d'obtenir une asymptotique à tout ordre du type $o\left(\frac{e^n}{n^p}\right)$ de R_n . Par exemple on trouve

$$R_n = e^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{23}{540} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{96n^2} - \frac{1813}{4320} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{2729}{2304n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

Un programme Maple est proposé en annexe pour des calculs à un ordre quelconque.

7.2 Asymptotique de $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = \sqrt{n}$.

On va étudier

$$I_n = \int_0^1 f^{x_n}(t) g^n(t) dt \text{ avec } f(t) = e^{-t}, x_n = n - \sqrt{n} \text{ et } g(t) = e^t(1-t)$$

Ici g est d'ordre 2 en 0 et $n \underset{+\infty}{=} o(x_n^2)$.

$$\text{On a donc } I_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \int_0^1 f^{x_n}(t) [-\ln(g(t))]^k dt + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

Traitons l'exemple $p = 3$.

On veut une asymptotique à $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ de :

- $a_0 = \int_0^1 f^{x_n}(t) dt.$
- $a_1 = n \int_0^1 f^{x_n}(t) [-\ln(g(t))] dt.$
- $a_2 = n^2 \int_0^1 f^{x_n}(t) [-\ln(g(t))]^2 dt.$

On dispose de l'asymptotique : $f^{-1}(t) = (1-t) + \frac{1}{2}(1-t)^2 + \frac{1}{3}(1-t)^3 + O((1-t)^4)$.

- Pour a_0 : $a_0 = \frac{1}{x_n}.$
- Pour a_1 : $g(t) = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3 + O(t^4)$, $\pi(t) = -\ln(g(t)) = \frac{t}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$, $\Pi(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + O(t^5)$ et enfin $\Pi \circ f^{-1}(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 + \frac{1}{3}(1-t)^4 + O((1-t)^5)$.
Ainsi $a_1 = n \left(\frac{1}{6}D_3(x_n) + \frac{1}{3}D_4(x_n) + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right) = \frac{n}{x_n^3} + \frac{2n}{x_n^4} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$
- Pour a_2 : $\pi(t) = [-\ln(g(t))]^2$ puis $a_2 = \frac{6n^2}{x_n^5} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$

Donc $I_n = a_0 - a_1 + a_2 = \frac{1}{x_n} - \frac{n}{x_n^3} - \frac{2n}{x_n^4} + \frac{6n^2}{x_n^5} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ Soit :

$$R_n(\sqrt{n}) = \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{n!} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{n^3} + \frac{13}{n^{\frac{7}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

7.3 Asymptotique de $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n - \sqrt[3]{n}$.

On pose $y_n = \sqrt[3]{n}$ et on écrit encore $R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} I_n.$

On a ici $y_n^2 = o(n)$ et donc

$$I_n = \int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-(n-x_n)t} dt$$

Avec $f(t) = e^t(1-t)$ et $g(t) = e^{-t}$ puis $-\ln(g(t)) = t$, on a donc

$$I_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} n^{\frac{k}{3}} \int_0^1 f^n(t) t^k dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{6} + \frac{1}{2}}}\right)$$

les calculs explicites s'effectuant de la même façon qu'en 7.1 ou 7.2.

7.4 Asymptotique de $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n - n^{\frac{2}{3}}$.

On pose $y_n = n^{\frac{2}{3}}$ et on écrit encore $R_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{n!} I_n.$

Cette fois-ci, $\sqrt{n} = o(y_n)$ et donc

$$I_n = \int_0^1 f^{y_n}(t) g^n(t) dt$$

avec $f(t) = e^{-t}$ et $g(t) = e^t(1-t)$.

D'où :

$$I_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \int_0^1 f^{y_n}(t) [-\ln(g(t))]^k dt + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p+2}{3}}}\right)$$

7.5 Asymptotique de $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ avec $x_n = n - \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

C'est un cas délicat, bien plus que les autres envisagés, mais moins spectaculaire sans doute.

On pose $x_n = n - \sqrt{n} + \theta_n$ avec $\theta_n = o(\sqrt{n})$ et $f_1(t) = \frac{t + \ln(1-t)}{t^2}$

On a $R_n(x_n) = \underbrace{\frac{x_n^{n+1}}{n!} \int_0^1 [e^t(1-t)]^n e^{-\sqrt{n}t} e^{\theta_n t} dt}_{I_n}$. On va donner une asymptotique de I_n .

On sait que

$$I_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\theta_n^k}{k!} K_k(n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{n}}\right)^p\right)$$

avec :

$$K_k(n) = \int_0^{+\infty} t^k \exp(nt^2 f_1(t) - t\sqrt{n}) dt$$

De plus $f_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $f_1'(0) = -\frac{1}{3}$, puis $K_k(n) = \frac{1}{n^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \exp(u^2 f_1(\frac{u}{\sqrt{n}}) - u) u^k du$.

Par exemple :

$$K_k(n) = \frac{1}{n^{\frac{n+1}{2}}} \left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right) du - \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{u^2}{3} + u + 1\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2} - u\right) du \right]$$

Notons A et B ces 2 dernières intégrales, on a donc

$$I_n = \frac{A}{\sqrt{n}} - \frac{A\theta_n + B}{n} + O\left(\frac{\theta_n^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

On peut remarquer que :

$$A = \sqrt{2}e \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ et } B = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}e \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

pour un calcul plus complet.

7.6 Asymptotique de x_n tel que $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!} = \frac{e^n}{2}$

On prend $x_n = n + \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $z_n = \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$.

On étudie $I_n = \int_0^1 g^n(t) e^{z_n t} dt$ avec $g(t) = e^t(1-t)$.

On dispose de l'asymptotique

$$I_n = \int_0^1 g^n(t) dt + z_n \int_0^1 g^n(t) t dt + \frac{z_n^2}{2} \int_0^1 g^n(t) t^2 dt + \frac{z_n^3}{6} \int_0^1 g^n(t) t^3 dt + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Le calcul donne alors

$$I_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} - \frac{2}{3n} + \left(a + \frac{\sqrt{2\pi}}{24}\right) \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{4}{135} - \frac{a}{2} \sqrt{2\pi} + b\right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{3589}{2304} \sqrt{2\pi} + \frac{a^2}{2} \sqrt{2\pi} - \frac{b}{2} \sqrt{2\pi} + c + \frac{2a}{3}\right) \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On obtient de même une asymptotique pour $\frac{x_n^{n+1}}{n!}$ et enfin on obtient :

$$R_n(x_n) = e^n \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

avec

$$A = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad B = \frac{1}{4a^2} + \frac{a}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{24} + \frac{b}{2}, \quad C = \frac{1}{1080} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(46 + 180b + 360a^2 + 270\sqrt{2\pi}(c + ab) + 45a^3\sqrt{2\pi} \right)$$

En écrivant $R_n(x_n) = e^n \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$ on obtient :

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad b = -\frac{8}{9\pi}, \quad c = -\frac{\sqrt{2}}{810\pi^{\frac{3}{2}}} (69\pi - 160)$$

On obtient même $R_n(x_n) = e^n \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$ avec $\alpha = \frac{34}{405\pi} + \frac{28}{81\pi^2}$.

Ainsi

$$x_n = n + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} - \frac{8}{9\pi n} - \frac{\sqrt{2}}{810\pi^{\frac{3}{2}}} (69\pi - 160) \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le travail de recherche de x_n tel que $S_n(x_n) = \frac{e^n}{2}$ se traite de façon analogue avec cette fois-ci :

$$g(t) = e^{-t}(1+t)$$

puis :

$$I_n = \int_0^1 g^n(t) dt - z_n \int_0^1 g^n(t)t dt + \frac{z_n^2}{2} \int_0^1 g^n(t)t^2 dt - \frac{z_n^3}{6} \int_0^1 g^n(t)t^3 dt + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On obtient alors

$$x_n = n - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} - \frac{8}{9\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{810\pi^{\frac{3}{2}}} (69\pi - 160) \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le fait de ne pas obtenir le même résultat n'est pas contradictoire car si $R_n(x_n) = \frac{e^n}{2}$ alors $S_n(x_n)$ n'est pas égal à $\frac{e^n}{2}$ mais à $e^{x_n} - \frac{e^n}{2}$.

Signalons pour terminer qu'on pourrait de même :

- Trouver une asymptotique de x_n tel que $R_n(x_n) = ce^n$ avec $c \in]0, 1[$.
- Plus généralement de x_n tel que $R_n(x_n) = e^{y_n}$ avec une suite y_n vérifiant $0 \leq y_n \leq n$.
- Mais également étudier des valeurs négatives de x_n comme par exemple $x_n = -n$ (cas étudié dans certains articles cités), qui conduit à rechercher une asymptotique de :

$$I_n = \int_0^1 e^{-2nt} [e^t(1-t)]^n dt$$

ce qui se traite comme en 7.2 et donne :

$$R_n(-n) = \frac{(-n)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{128n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right)$$

References

- [1] S. E. ALM. *Monotonicity of the difference between median and mean of Gamma distributions and of a related Ramanujan sequence*. Bernoulli Volume 9, Number 2 (2003), 351-371.
- [2] J. BERGHUIS. *Truncated Power-Series*. Report R 173 Computation department mathematical centre, Amsterdam. 1952.
- [3] B. C. BERNDT, Y. S. CHOI and S. Y. KANG. *The problem submitted by Ramanujan to the Indian Mathematical Society*. Contemporary Mathematics, vol 00, 1997.
- [4] R. BREUSCH. *The truncated exponential serie*. American Mathematical Monthly, vol 75 issue 9, 1019-120.
- [5] J. D. BUCKHOLTZ. *Concerning an approximation of Copson*. Proceedings of the American Mathematical society, vol 14, n° 4, (1963) 564-568.
- [6] L. CARLITZ. *The Coefficients in an Asymptotic Expansion*. Proceedings of the American Mathematical Society vol 16, n° 2 (Apr., 1965), 248-252.
- [7] T. T. CHENG. *The normal approximation to the Poisson distribution and proof of a conjecture of Ramanujan*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol 55, n° 4 (1949), 396-401.
- [8] E. T. COPSON. *An Approximation connected with e^{-x}* . Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol 3, issue 03, (February 1933), 201-206.
- [9] P. FLAJOLET, P. J. GRABNER, P. KIRSCHENHOFER and H. PRODINGER. *On Ramanujan Q' -function*. INRIA rapport de recherche 1992, n° 1760.
- [10] K. JOGDEO and S. M. SAMUELS. *Monotone convergence of binomial probabilities and a generalization of Ramanujan's equation*. The Annals of Mathematics Statistics, vol 39, n° 4 (1968), 1191-1195.
- [11] J. C. W. MARSAGLIA. *The incomplete Gamma function and Ramanujan's rational approximation to e^x* . J. Statist. Comput. Simul. 24 (1986), 163-169
- [12] M. MERKLE. *Inequalities for Residuals of Power Expansions for the Exponential Function and Completely Monotone Functions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 212, 126-134 1997. Article n° AY975485.