HAL open science

Foncteurs de Mackey à réciprocité

Bruno Kahn

To cite this version:

Bruno Kahn. Foncteurs de Mackey à réciprocité. 1991. hal-00746289

HAL Id: hal-00746289

https://hal.science/hal-00746289v1

Preprint submitted on 28 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Foncteurs de Mackey à réciprocité

version préparatoire (1991 ?)

Bruno Kahn

On fixe un corps de base k. On considère des foncteurs de Mackey définis sur la catégorie des k-schémas affines (donc des k-algèbres commutatives) par rapport aux morphismes finis et plats, et commutant aux limites inductives filtrantes (*i.e.* "continus").

On dit qu'un foncteur de Mackey A est :

- *cohomologique* si, pour tout morphisme fini f de degré constant d, $A_*(f) \circ A^*(f)$ est la multiplication par d ;
- *additif* si, pour tous k-schémas affines X, X', $(\iota^*, \iota'^*) : A(X) \oplus A(X') \xrightarrow{\sim} A(X \coprod X')$, où ι et ι' sont les inclusions $X \hookrightarrow X \coprod X'$ et $X' \hookrightarrow X \coprod X'$;
- *faiblement additif* si, pour tout k-schéma affine S et tous morphismes finis et plats $f : X \to S$ et $f' : X' \to S$, on a (avec les notations ci-dessus) $A_*(f \coprod f') = A_*(f) \circ A^*(\iota) + A_*(f') \circ A^*(\iota')$;
  - *topologiquement invariant* si, pour tout morphisme radiciel f, $A^*(f)$ est un isomorphisme ;
- (si A est cohomologique :) *faiblement topologiquement invariant* si, pour toute extension F de k et toute F-algèbre locale artinienne R de longueur d, de corps résiduel l de degré fini sur F, on a $A_*(p_R) = dA_*(p_F) \circ A^*(\iota)$, où p_R (*resp.* p_l) est la projection Spec $R \to$ Spec F (*resp.* Spec $l \to$ Spec F) et ι est l'immersion fermée Spec $l \to$ Spec R.

Il est clair qu'un foncteur de Mackey additif est faiblement additif ; de même :

Lemme 0.1 *Un foncteur de Mackey cohomologique topologiquement invariant est faiblement topologiquement invariant.*

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, supposons d'abord l/F radiciel. Par hypothèse, $A^*(p_R)$ est un isomorphisme. La formule à démontrer est donc équivalente à

$$A_*(p_R) \circ A^*(p_R) = dA_*(p_l) \circ A^*(\iota) \circ A^*(p_R),$$

qui est claire.

Supposons maintenant l/F quelconque. Soit l_0 la fermeture séparable de F dans l. Par le lemme de Hensel, l_0 se relève de manière unique dans R au-dessus de F ; autrement dit, il existe un unique $s : \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} l_0$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} l \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p'"'] & \operatorname{Spec} R \arrow[d, "p_R"] \\ \operatorname{Spec} l_0 \arrow[r, "p_{l_0}"] \arrow[ur, "s"] & \operatorname{Spec} F \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a alors :

$$A_*(p_R) = A_*(p_{l_0}) \circ A_*(s)$$

et

$$A_*(s) = dA_*(p') \circ A^*(\iota)$$

d'après le cas radiciel. □

Toutes les courbes sur k sont lisses, mais pas nécessairement complètes ou irréductibles. Si U est un ouvert dense d'une courbe complète X, on considérera toujours $\mathbf{Div}(U)$ comme le groupe des diviseurs de X à support dans U : cela munit $\mathbf{Div}$ d'une structure de foncteur covariant pour les immersions ouvertes.

1 Un accouplement "divisoriel"

Soient A un foncteur de Mackey et U une courbe affine sur k. Pour tout point fermé x de U, on définit l'*évaluation en* x, $a \mapsto a(x)$, comme le composé

$$A(U) \xrightarrow{\iota_x^*} A(k(x)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}_{k(x)/k}} A(k)$$

où ι_x est l'inclusion $x \mapsto U$. On l'étend par linéarité en un accouplement :

$$\begin{array}{ccc} A(U) \times \mathbf{Div}(U) & \to & A(k) \\ (a, D) & \mapsto & a(D). \end{array} \tag{1}$$

On a le lemme trivial suivant :

Lemme 1.1 *Soient U' un ouvert dense de U, $a \in A(U)$, a' son image dans $A(U')$ et D un diviseur de X à support dans U'. Alors on a $a(D) = a'(D)$.*□

Soit D un diviseur effectif de U, vu comme sous-schéma fermé de U. Soit ι_D l'inclusion de D dans U. On a un morphisme de fonctorialité $\iota_D^* : A(U) \to A(D)$ et (puisque D est fini sur Spec k) un transfert

$$A(D) \to A(k)$$

noté abusivement $\mathrm{Cor}_{D/k}$.

Lemme 1.2 *Si A est cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant, on a pour tout diviseur effectif D et tout $a \in A(U)$:*

$$a(D) = \mathrm{Cor}_{D/k}\, \iota_D^*(a).$$

Cela résulte du lemme 0.1.

Lemme 1.3 *Soient U et V deux courbes affines sur k et $f : V \to U$ un morphisme fini de degré n. Supposons A cohomologique. Alors :*
a) Pour tout $a \in A(U)$ et tout $D \in \mathbf{Div}(U)$, $(f^*a)(f^*D) = na(D)$.
b) Pour tout $a \in A(U)$ et tout $D \in \mathbf{Div}(V)$, $a(f_*D) = (f^*a)(D)$.
c) Si de plus A est faiblement additif et faiblement topologiquement invariant, on a pour tout $a \in A(V)$ et tout $D \in \mathbf{Div}(U)$, $a(f^*D) = (f_*a)(D)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer a), b) et c) lorsque D est un point fermé x. Dans le cas a), on écrit $f^*x = \sum e_i y_i$, d'où

$$\begin{array}{rcl}
(f^*a)(f^*x) & = & \sum e_i (f^*a)(y_i) \\
& = & \sum e_i \,\mathrm{Cor}_{k(y_i)/k}\, \iota_{y_i}^*(f^*a) \\
& = & \sum e_i \,\mathrm{Cor}_{k(y_i)/k}(f \circ \iota_{y_i})^* a \\
& = & \sum e_i \,\mathrm{Cor}_{k(y_i)/k}\, \mathrm{Res}_{k(y_i)/k(x)}\, \iota_x^* a \\
& = & \sum e_i [k(y_i) : k(x)]\, \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \iota_x^* a \\
& = & n\, \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \iota_x^* a \\
& = & na(x).
\end{array}$$

(On a utilisé la formule $\sum e_i [k(y_i) : k(x)] = n$.)

Dans le cas b), on a $f_*(x) = [k(x) : k(y)]y$, où $y = f(x)$, et

$$\begin{array}{rcl}
(f^*a)(x) & = & \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \iota_x^* f^* a \\
& = & \mathrm{Cor}_{k(x)/k}(f \circ \iota_x)^* a \\
& = & \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \iota_y^* a \\
& = & [k(x) : k(y)]\, \mathrm{Cor}_{k(y)/k}\, \iota_y^* a \\
& = & a(f_*(x)),
\end{array}$$

puisque A est cohomologique.

Pour c), notons Δ le diviseur effectif f^*x, ι_Δ l'inclusion de Δ dans U et f' la restriction de f à Δ. On a alors :

$$\iota_x^* f_* a = f'_* \iota_\Delta^* a$$

donc

$$\begin{array}{rcl} (f_*a)(x) & = & \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \iota_x^* f_* a \\ & = & \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, f'_* \iota_\Delta^*(a) \\ & = & \mathrm{Cor}_{\Delta/k}\, \iota_\Delta^*(a) \\ & = & a(\Delta) \end{array}$$

d'après le lemme 1.2.

Remarque. Le lemme 1.3 peut s'interpréter de la manière suivante : sous les hypothèses de b), l'accouplement (i) se prolonge en un homomorphisme

$$ev : A \overset{M}{\otimes} \mathbf{Div} \to A(k)$$

du foncteur de Mackey $A \overset{M}{\otimes} \mathbf{Div}$ vers le foncteur de Mackey constant de valeur $A(k)$.

2 Topologie modulaire

Soient U une courbe affine (lisse) sur k, X sa complétée et Z le fermé complémentaire. Un *module* sur U est un diviseur effectif de X, de support Z. Si $\mathfrak{m}$ est un module sur U, on lui associe un sous-groupe $\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ de $\mathbf{Div}(U)$:

$$\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U) = \{(f) | f \in k(X)^*;\ \text{pour tout } x \in Z, v_x(f-1) \geq v_x(D)\}.$$

Les $\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ forment une base de voisinages de 0 pour une topologie sur $\mathbf{Div}(U)$: la *topologie modulaire*. Si $\mathfrak{m} = \sum_{x \in Z} x$, le quotient $\mathbf{Div}(U)/\mathbf{Div}^m(U)$ s'identifie au *groupe de Picard relatif* $\mathbf{Pic}(X, Z)$.

Si x est un point fermé de X, on note $\hat{\mathcal{O}}_x$ le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\hat{K}_x$ le corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_x$.

Définition 2.1 *Le groupe des idèles $\mathcal{I}(X)$ de X est le produit direct restreint des $\hat{K}_x^*$ relativement aux $\hat{O}_x^*$. Le groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}(X)$ de X est le quotient de $\mathcal{I}(X)$ par le sous-groupe image de $k(X)^*$ par le plongement diagonal.*

Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 2.1 *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{C}(X) \simeq \varprojlim \mathbf{Div}(U)/\,\mathbf{Div}^m(U),$$

où U parcourt les ouverts affines de X et $\mathfrak{m}$ parcourt les modules sur U.

3 Foncteurs de Mackey à réciprocité

Définition 3.1 *Soient A un foncteur de Mackey, u une courbe affine (lisse) sur k, $a \in A(U)$ et $\mathfrak{m}$ un module sur U. On dit que a admet le module $\mathfrak{m}$ si la restriction de l'application $\mathbf{Div}(U) \to A(F)$ induite par a à $\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ est identiquement nulle.*

Définition 3.2 *Soient A un foncteur de Mackey et U une courbe affine (lisse) sur k. On dit que A vérifie la k-réciprocité sur U si l'accouplement* (1) *est continu pour la topologie modulaire sur $\mathbf{Div}(U)$ et la topologie discrète sur $A(U)$ et $A(k)$. On dit que A vérifie la k-réciprocité forte sur U si, de plus, l'accouplement $A(U) \times \mathbf{Div}(U) \to A(k)$ restreint à $A(U) \times \mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$ est identiquement nul pour $\mathfrak{m} = \sum_{x \in Z} x$.*
On dit que A vérifie la k-réciprocité (resp. vérifie la k-réciprocité forte) s'il la vérifie sur toute courbe U sur k.
On dit que A vérifie la réciprocité (resp. vérifie la réciprocité forte) s'il vérifie la l-réciprocité (resp. la l-réciprocité forte) pour toute extension finie l de k.

Remarque. Supposons k algébriquement clos. Dans la terminologie de [1, ch. III], la définition de la k-réciprocité signifie que, pour tout $a \in A(U)$, l'application $x \mapsto a(x)$ de U dans $A(k)$ possède un module.

Lemme 3.1 *Supposons A cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant. Pour que A vérifie la k-réciprocité forte, il faut et il suffit qu'il soit k-invariant par homotopie, i.e. que $A(k) \xrightarrow{\sim} A(\mathbf{A}^1_k)$.*

En effet, supposons que A vérifie la k-réciprocité forte. Prenons $U = \mathbf{A}^1_k$. On a alors $X = \mathbf{P}^1_k$ et $\mathbf{Pic}(\mathbf{P}^1_k, \{\infty\}) = \mathbf{Z}$. Soient $a \in A(U)$ et $a_0 = a(0)$: on peut voir a_0 comme un élément de $A(U)$ via l'homomorphisme $A(k) \to A(U)$ déduit du morphisme structural. Montrons que $a = a_0$: cela montrera que $A(k) \to A(U)$ est surjectif, donc bijectif puisque c'est *a priori* une injection scindée. Quitte à remplacer a par $a - a_0$ on peut supposer $a_0 = 0$. Soit x un point fermé de U, de degré d : il existe une (unique) fonction rationnelle $f \in k(U)^*$ telle que $(f) = x - d0$ et que $f(\infty) = 1$ (c'est $f(t) = P(t)/t^d$, où P est le polynôme minimal de x). Par hypothèse, on a $0 = a((f)) = a(x) - da(0) = a(x)$.

Supposons maintenant A invariant par homotopie. Soient U une courbe affine et irréductible sur k, X sa complétée, $a \in A(U)$ et $f \in k(X)^*$ une fonction rationnelle (supposée non constante), telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \notin U$. Considérons f comme un morphisme (fini et plat) de X dans $\mathbf{P}^1_k$, donc comme un morphisme fini et plat d'un ouvert U' de U dans $\mathbf{P}^1_k - \{1\}$. On a alors $(f) = f^*(0 - \infty)$, donc d'après les lemmes 1.1 et 1.3 :

$$a((f)) = a'((f)) = a'(f^*(0 - \infty)) = (f_* a')(0 - \infty),$$

où a' est l'image de a dans U'. En appliquant l'invariance par homotopie à $\mathbf{P}^1_k - \{1\} \simeq \mathbf{A}^1_k$, on trouve $(f_* a')(0 - \infty) = 0$, donc $a((f)) = 0$.

Question. Est-il vrai que A vérifie la k-réciprocité si et seulement si il la vérifie sur les ouverts de $\mathbf{P}^1_k$? (*c.f.* [1, ch III, prop. 9]).

Définition 3.3 *On dit qu'un foncteur de Mackey A vérifie la réciprocité (resp. la réciprocité forte) s'il vérifie la l-réciprocité (resp. la l-réciprocité forte) pour toute extension finie l de k.*

4 Réciprocité et symboles locaux

Définition 4.1 *Soit A un foncteur de Mackey. Un symbole local associé à A est la donnée ∂, pour toute k-algèbre de valuation discrète d'origine géométrique $\mathcal{O}$, de corps résiduel l algébrique sur k et de corps des fractions*

K, d'un accouplement $\partial_{\mathcal{O}} : A(K)\times K^* \to A(l)$ ayant les propriétés suivantes :
(i) $\partial_{\mathcal{O}}$ est continu pour la topologie naturelle de K^* et pour les topologies discrètes de $A(K)$ et $A(l)$.
(ii) Soient a un élément de $A(\mathcal{O})$, a' son image dans $A(K)$ et $\overline{a}$ son image dans $A(l)$. Alors, pour tout $x \in K^*$, on a $\partial_{\mathcal{O}}(a', x) = v(x)\overline{a}$, où v est la valuation associée à $\mathcal{O}$.
(iii) Soit $\mathcal{O}'$ une extension finie, intégralement close de $\mathcal{O}$: c'est un anneau principal semi-local. Soient K' son corps des fractions, $\mathcal{O}_i$ les localisés de $\mathcal{O}'$ en ses idéaux maximaux, l_i le corps résiduel de $\mathcal{O}_i$, e_i l'indice de ramification de $\mathcal{O}_i/\mathcal{O}$. Alors :
(iii1) Pour $(a, x) \in A(K) \times K^*$ et pour tout i,

$$\partial_{\mathcal{O}_i}(\mathrm{Res}_{K'/K}\, a, x) = e_i \,\mathrm{Res}_{l_i/l}\, \partial_{\mathcal{O}}(a, x);$$

(iii2) Pour $(a, x) \in A(K) \times K'^*$,

$$\partial_{\mathcal{O}}(a, N_{K'/K}x) = \sum \mathrm{Cor}_{l_i/l}\, \partial_{\mathcal{O}_i}(\mathrm{Res}_{K'/K}\, a, x);$$

(iii3) Pour $(a, x) \in A(K') \times K^*$,

$$\partial_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cor}_{K'/K}\, a, x) = \sum \mathrm{Cor}_{l_i/l}\, \partial_{\mathcal{O}_i}(a, x).$$

On dit que ∂ est un symbole local fort s'il vérifie la condition suivante (qui implique (i)) :
(i) fort : $\partial_{\mathcal{O}}$ est nul sur $A(K) \times U_1$, où U_1 désigne le groupe des unités principales de $\mathcal{O}$.

Remarques.

1. L'existence d'un symbole local impose des restrictions sur la structure de groupe abélien des valeurs de A. Par exemple, la propriété (ii) implique que l'application naturelle $A(\mathcal{O}) \to A(l)$ peut se prolonger à $A(K)$.
2. Les conditions (iii) impliquent que $\partial_{\mathcal{O}}$ se prolonge en un homomorphisme (encore noté) $\partial_{\mathcal{O}} : A \overset{M}{\otimes} \mathbf{G}_m(K) \to A(l)$, ayant les propriétés suivantes (sous les hypothèses de (iii)) :

   (iii1) bis : Pour tout $b \in A \overset{M}{\otimes} \mathbf{G}_m(K)$ et pour tout i, $\partial_{\mathcal{O}_i}(\mathrm{Res}_{K'/K}\, b) = e_i \,\mathrm{Res}_{l_i/l}\, \partial_{\mathcal{O}}(b)$;

   (iii2) bis : Pour tout $b \in A \overset{M}{\otimes} \mathbf{G}_m(K')$, $\partial_{\mathcal{O}}(\mathrm{Cor}_{K'/K}\, b) = \sum \mathrm{Cor}_{l_i/l}\, \partial_{\mathcal{O}_i}(b)$.

Lemme 4.1 *Pour se donner un symbole local (resp. un symbole local fort), il suffit de se donner une famille d'accouplements $\partial_{\mathcal{O}}$ ayant les propriétés (i)-(iii) (resp. (i) fort-(iii)) pour $\mathcal{O}$ parcourant les k-algèbres de valuation discrète henséliennes [d'origine géométrique] dont le corps résiduel est fini sur k.*

Supposons donnée une telle famille. Soit $\mathcal{O}$ une k-algèbre de valuation discrète d'origine géométrique, de corps résiduel l et de corps de fractions K. Soient $\mathcal{O}^h$ la hensélisée de $\mathcal{O}$ (de corps résiduel l) et K^h le corps des fractions de O^h. On définit $\partial_{\mathcal{O}}$ comme le composé :

$$A(K) \times K^* \to A(K^h) \times K^{h*} \to A(l),$$

l'application de droite étant $\partial_{\mathcal{O}^h}$. On vérifie sans peine que les propriétés (i)–(iii) sont vérifiées.

Théorème 4.1 *Soit A un foncteur de Mackey cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) A vérifie la réciprocité (resp. la réciprocité forte).
b) A possède un symbole local (resp. un symbole local fort) ∂, vérifiant la condition suivante : pour toute extension finie l de k, toute courbe X lisse, complète, irréductible sur l, de corps des fonctions K, et tout $(a, f) \in A(K) \times K^*$, on a

$$\sum \mathrm{Cor}_{l(x)/l}\, \partial_x(a, f) = 0,$$

où x parcourt les points fermés de X et, pour tout x, ∂_x est le symbole local associé à $\mathcal{O}_{X,x}$. De plus, sous ces conditions, le symbole local ∂ est unique.

Démonstration. Montrons que b) $\Rightarrow$ a). Soient U un ouvert affine non vide de X, $a \in A(U)$ et a' l'image de a dans $A(K)$. Pour tout $x \in U$ et tout $f \in K^*$, on a (propriété (ii) de la définition 4.1) :

$$\partial_x(a', f) = v_x(f)\iota_x^* a.$$

En particulier, supposons que (f) soit à support dans U. Alors

$$\sum_{x \in U} \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \partial_x(a, f) = \sum_{x \in U} v_x(f)\, \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \iota_x^* a = a((f)).$$

Par la propriété (i) de la définition 4.1, il existe un module $\mathfrak{m}$ pour U tel que, si $(f) \in \mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)$, on ait $\partial_x(a, f) = 0$ pour tout $x \notin U$. On a alors :

$$a((f)) = \sum_{x \in U} \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \partial_x(a, f) = \sum_{x \in X} \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \partial_x(a, f) = 0,$$

donc l'accouplement (1) est continu pour la topologie modulaire. Si ∂ est un symbole local fort, on peut choisir ci-dessus $\mathfrak{m} = \sum_{x \notin U} x$, donc A vérifie la k-réciprocité forte.

Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Comme A est continu, on a $A(K) = \varinjlim A(U)$, où U décrit les ouverts non vides de X. Grâce au lemme 2.1, on obtient donc un accouplement continu :

$$A(K) \times \mathcal{C}(X) \to A(k).$$

Soit x un point fermé de X. Par restriction à (l'image de) $\hat{K}_x^*$, on obtient un accouplement local continu :

$$\delta_x : A(K) \times \hat{K}_x^* \to A(k),$$

tel que $\delta_x(a, f) = v_x(f)a(x)$ si a "provient de $\mathcal{O}_{X,x}$". D'où encore par restriction un autre accouplement local continu

$$A(K) \times K_x^{h*} \to A(k),$$

où K_x^h est le hensélisé de K en x.

Choisissons $X = \mathbf{P}_k^1$, $x = 0$. Alors $\hat{K}_x$ est le corps des séries formelles $k((t))$, et K_x^h est le sous-corps $k\{\{t\}\}$ des séries formelles algébriques sur k, corps des fractions du hensélisé $k \ll t \gg$ de $k[t]$ en 0. Soit $Y \to X$ un revêtement non ramifié et décomposé en x, et soit y un point de Y au-dessus de X, de corps résiduel k. Si L est le corps des fonctions de Y, on a $K_x^h \xrightarrow{\sim} L_y^h$, et le lemme 1.3 b) montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A(L) & \times & L_y^{h*} & \to & A(k) \\ & \uparrow & & & || \\ A(K) & \times & K_x^{h*} & \to & A(k) \end{array}$$

est commutatif. En passant à la limite, on obtient un accouplement continu

$$\partial_{k\ll t\gg} : A(k\{\{t\}\}) \times k\{\{t\}\}^* \to A(k),$$

ayant la propriété (ii) de la déf. 4.1 (observer que $k\{\{t\}\} = \varinjlim k(Y)$, où Y parcourt les revêtements de $\mathbf{P}^1_k$ du type ci-dessus).

En répétant cette opération avec pour base une extension finie arbitraire l de k et en tenant compte du lemme 4.1, on obtient un symbole local : en effet, toute k-algèbre de valuation discrète hensélienne, de corps résiduel l est de la forme $l \ll t \gg$ (on vérifie facilement les propriétés (iii) de la définition 4.1 à l'aide du lemme 1.3). Reste à vérifier la formule du th. 4.1 b). On peut supposer $l = k$. Avec les notations ci-dessus, $(a, f) \in A(K) \times K^*$ et $x \in X$, on a :

$$\delta_x(a, f) = \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \partial_x(a, f).$$

On en déduit :

$$\sum_{x\in X} \mathrm{Cor}_{k(x)/k}\, \partial_x(a, f) = \sum_{x\in X} \delta_x(a, f) = 0,$$

puisque la classe de f est triviale dans $\mathcal{C}(X)$.

Enfin, l'unicité du symbole ∂ résulte de la démonstration de b) $\Rightarrow$ a).

5 Exemples de foncteurs à réciprocité

Définition 5.1 *Un foncteur de Mackey A est propre si, pour toute k-algèbre de valuation discrète $\mathcal{O}$, de corps des fractions K, $A(\mathcal{O}) \to A(K)$ est surjective.*

Proposition 5.1 *Soit A un foncteur de Mackey propre. Pour que A puisse être muni d'un symbole local ∂, il faut et il suffit que, pour toute k-algèbre de valuation discrète hensélienne $\mathcal{O}$, de corps des fractions K et de corps résiduel l, l'application* $\mathrm{Ker}\,(A(\mathcal{O}) \to A(K)) \to A(l)$ *soit identiquement nulle. Le symbole ∂ est alors unique, et donné par $\partial_{\mathcal{O}}(a, x) = v(x)\overline{a}$ (notations de la déf. 4.1) ; il est fort.*

Cela résulte immédiatement de la propriété (ii) de la déf. 4.1.

Corollaire 5.1 *Soit A un foncteur de Mackey propre, cohomologique, faiblement additif et faiblement topologiquement invariant. Pour que A vérifie la réciprocité, il faut et il suffit qu'il soit invariant par homotopie.*

Cela résulte de la prop. 5.1 et du lemme 3.1.

Les deux lemmes suivants ne présentent aucune difficulté.

Lemme 5.1 *Soient A et B deux foncteurs de Mackey.*
a) Si A et B vérifient la réciprocité (resp. la réciprocité forte), il en est de même pour $A \oplus B$.
b) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de foncteurs de Mackey.
b1) Si φ est surjectif et si A vérifie la réciprocité (resp...), il en est de même pour B.
b2) Si $A(k) \to B(k)$ est injectif et si B vérifie la réciprocité (resp...), il en est de même pour A.

Lemme 5.2 *Soient (A_i) un système inductif de foncteurs de Mackey et $A = \varinjlim A_i$. Si les A_i vérifient la réciprocité (resp...), il en est de même pour A.*

Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de foncteurs de Mackey. Si A et C vérifient la réciprocité, j'ignore s'il en est de même en général pour B. C'est cependant le cas si A et C vérifient la réciprocité forte :

Proposition 5.2 *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de foncteurs de Mackey cohomologiques, faiblement additifs et faiblement topologiquement invariants. Si A et C vérifient la k-réciprocité forte, il en est de même pour B.*

En effet, d'après le lemme 3.1, A et C sont invariants par homotopie. Le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A(k) & \to & B(k) & \to & C(k) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A(\mathbf{A}^1_k) & \to & B(\mathbf{A}^1_k) & \to & C(\mathbf{A}^1_k) & \to & 0 \end{array}$$

montre alors que B est invariant par homotopie.

Théorème 5.1 (Rosenlicht) *Un foncteur de Mackey défini par un groupe algébrique commutatif (resp. par une variété semi-abélienne) vérifie la réciprocité (resp. la réciprocité forte).*

Démonstration. Si k est algébriquement clos, cela résulte de [1, ch. III]. En général, soient A un groupe algébrique commutatif, U une courbe affine sur k et $a \in A(U)$. Soient X la complétée de U et $Z = X - U$. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, $\overline{U} = U \otimes_k \overline{k}$. et $\overline{Z} = Z \otimes_k \overline{k}$. Notons a' l'image de a dans $A(\overline{U})$. Il existe un module $\overline{\mathfrak{m}}$ de support $\overline{Z}$ tel que $a'(\mathbf{Div}^{\overline{\mathfrak{m}}}(\overline{U})) = 0$. Soit $\overline{\mathfrak{m}}'$ le saturé de $\overline{\mathfrak{m}}$ pour l'action de Gal $(\overline{k}/k)$: si p est l'exposant caractéristique de k, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathfrak{m} = p^n\overline{\mathfrak{m}}'$ soit rationnel sur k. A fortiori, on a $a'(\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(\overline{U})) = 0$, d'où $a(\mathbf{Div}^{\mathfrak{m}}(U)) = 0$ (lemme 1.3 b)).

Supposons maintenant que A soit une variété semi-abélienne, c'est-à-dire une extension d'une variété abélienne par un tore. Alors A est invariant par homotopie, donc vérifie la réciprocité forte d'après le lemme 3.1.

Théorème 5.2 *Soit $C^{\cdot}$ un complexe borné à gauche de faisceaux de groupes abéliens sur le grand site étale de* Spec k. *Supposons que les faisceaux d'homologie de $C^{\cdot}$ soient de torsion première à la caractéristique de k. Alors, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, le foncteur de Mackey $X \mapsto \mathbb{H}^i(X_{\text{ét}}, C^{\cdot})$ vérifie la réciprocité forte.*

En effet, il suffit de montrer que ce foncteur de Mackey est cohomologique, additif, topologiquement invariant et invariant par homotopie (lemme 3.1). L'additivité est évidente. Pour le reste, supposons d'abord $C^{\cdot}$ concentré en degré zéro : cela résulte alors de [SGA 4 XVII (6.2.3), VIII (1.1.2), XV (2.2.2)]. Le cas général résulte de celui-ci et de la suite spectrale d'hypercohomologie.

Théorème 5.3 *Soient X une variété lisse sur k et i, j deux entiers ≥ 0. Notons A le foncteur de Mackey défini par $A(Y) = H^i((X \times_k Y)_{Zar}, \mathcal{K}_j)$. Alors A vérifie la réciprocité forte.*

En effet, A est cohomologique, additif, topologiquement invariant et invariant par homotopie ([...]).

Corollaire 5.2 *Avec les notations du th. 5.3, $Y \mapsto CH^i(X \times_k Y)$ vérifie la réciprocité forte.*

C'est le cas particulier $j = i$ ([...]).

Théorème 5.4 *Pour tout $i \geq 0$, le foncteur de Mackey $Y \mapsto \Omega^i_{X/\mathbf{Z}}$ vérifie la réciprocité (mais non la réciprocité forte).*

Démonstration.

6 Produits tensoriels

Soient (A, ∂) et (B, ∂') deux foncteurs de Mackey munis de symboles locaux. On aimerait munir $A \overset{M}{\otimes} B$ d'un symbole local $\partial'' = \partial \otimes \partial'$. Si $\mathcal{O}$ est une k-algèbre de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel l, et si π est une uniformisante de $\mathcal{O}$, on interprète les homomorphismes

$$s_\pi : A(K) \to A(l)$$

$$s'_\pi : B(K) \to B(l)$$

donnés par $s_\pi(a) = \partial_{\mathcal{O}}(a, \pi), s'_\pi(b) = \partial'_{\mathcal{O}}(b, \pi)$, comme des homomorphismes de spécialisation. On désire alors définir ∂'' de telle sorte que, en posant $s''_\pi(c) = \partial''_{\mathcal{O}}(c, \pi)$, on ait identiquement (pour toute uniformisante π) :

$$s''_\pi(a \otimes b) = s_\pi(a) \otimes s'_\pi(b).$$

Ceci impose des relations sur les $s_\pi(a) \otimes s'_\pi(b)$, qui en général ne sont pas vérifiées. On est donc conduit à quotienter le foncteur $A \overset{M}{\otimes} B$ par ces nouvelles relations.

Références

[1] J–P. Serre Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1959.