HAL
open science

# Faisceaux cohérents sur les courbes multiples

Jean-Marc Drézet

**To cite this version:**

Jean-Marc Drézet. Faisceaux cohérents sur les courbes multiples. Collectanea Mathematica, 2006, 57 (2), pp.121-171. hal-00742490

**HAL Id: hal-00742490**

**https://hal.science/hal-00742490**

Submitted on 16 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# FAISCEAUX COHÉRENTS SUR LES COURBES MULTIPLES

JEAN–MARC DRÉZET

Abstract. This paper is devoted to the study of coherent sheaves on non reduced curves that can be locally embedded in smooth surfaces. If $Y$ is such a curve then there is a filtration $C \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = Y$ such that $C$ is the reduced curve associated to $Y$, and for every $P \in C$ there exists $z \in \mathcal{O}_{Y,P}$ such that $(z^i)$ is the ideal of $C_i$ in $\mathcal{O}_{Y,P}$. We define, using canonical filtrations, new invariants of coherent sheaves on $Y$ : the *generalized rank* and *degree*, and use them to state a *Riemann-Roch theorem* for sheaves on $Y$. We define *quasi locally free sheaves*, which are locally isomorphic to direct sums of $\mathcal{O}_{C_i}$, and prove that every coherent sheaf on $Y$ is quasi locally free on some nonempty open subset of $Y$. We give also a simple criterion of quasi locally freeness. We study the ideal sheaves $\mathcal{I}_{n,Z}$ in $Y$ of finite subschemes $Z$ of $C$. When $Y$ is embedded in a smooth surface we deduce some results on deformations of $\mathcal{I}_{n,Z}$ (as sheaves on $S$). When $n = 2$, i.e. when $Y$ is a *double curve*, we can completely describe the torsion free sheaves on $Y$. In particular we show that these sheaves are reflexive. The torsion free sheaves of generalized rank 2 on $C_2$ are of the form $\mathcal{I}_{2,Z} \otimes \mathcal{L}$, where $Z$ is a finite subscheme of $C$ and $\mathcal{L}$ is a line bundle on $Y$. We begin the study of moduli spaces of stable sheaves on a double curve, of generalized rank 3 and generalized degree $d$. These moduli spaces have many components. Sometimes one of them is a multiple structure on the moduli space of stable vector bundles on $C$ of rank 3 and degree $d$.

## Sommaire

1. Introduction 1
2. Préliminaires 8
3. Fibrés vectoriels sur les courbes multiples 11
4. Invariants des faisceaux cohérents sur les courbes multiples 14
5. Faisceaux quasi localement libres 19
6. Faisceaux cohérents sur les courbes doubles 23
7. Déformations des faisceaux cohérents sur les courbes multiples 33
8. Faisceaux d'idéaux de points 37
9. Faisceaux de rang généralisé 3 sur les courbes doubles 41
Références 44

## 1. Introduction

Les courbes projectives multiples *primitives* ont été définies et étudiées par C. Bănică et O. Forster dans [2]. Les cas les plus simples et qu'on étudiera en détail ici sont les courbes non réduites plongées dans une surface lisse, et dont la courbe réduite associée est projective lisse.

Les faisceaux semi-stables sur des courbes projectives réduites non lisses on été étudiés par de nombreux auteurs, notamment par C.S. Seshadri dans [30], et U.N. Bhosle dans [4], [5] et d'autres articles. Les faisceaux semi-stables sur des variétés non réduites semblables à celles qui sont considérées ici sont le sujet de l'article [13] de M.-A. Inaba. L'article [14] du même auteur traite des faisceaux stables sur une variété non irréductible ayant deux composantes qui se coupent. Il est possible qu'on puisse obtenir par l'étude des faisceaux cohérents sur les courbes non réduites des résultats sur la dégénération des fibrés vectoriels ou des variétés des modules de fibrés semi-stables sur les courbes lisses. Certains résultats ont déjà été obtenus en utilisant des courbes réduites mais singulières (cf. [33], [34]).

Les faisceaux cohérents sur les courbes non réduites interviennent aussi lorsqu'on veut étudier les faisceaux de dimension 1 sur les surfaces. Les faisceaux sur des courbes non réduites apparaissent (cf. [15], [16]) comme limites de fibrés vectoriels sur des courbes lisses. Leur rôle est sans doute plus important si on cherche à obtenir d'autres variétés de modules fins de faisceaux de dimension 1 que les classiques variétés de modules de faisceaux semi-stables (cf. [8]).

Le but du présent article est de donner les bases de l'étude des faisceaux cohérents sur une courbe multiple primitive $Y$ et de leurs variétés de modules. On introduit deux nouveaux invariants des faisceaux cohérents : le *rang* et le *degré généralisés*, avec lesquels on peut énoncer un *théorème de Riemann-Roch* sur les courbes primitives. On s'intéressera aux faisceaux génériques qui sont ici les faisceaux *quasi localement libres* jouant le même rôle que les faisceaux localement libres sur les variétés lisses. On étudiera ensuite les faisceaux d'idéaux de sous-schémas finis de la courbe réduite associée $C$, qui sont les premiers exemples non triviaux de faisceaux sur $Y$. On s'intéressera enfin aux *courbes doubles*. Dans ce cas on peut décrire précisément les faisceaux sans torsion sur $Y$ et prouver en particulier qu'ils sont réflexifs. Pour finir on s'intéressera aux variétés de modules de faisceaux stables de rang généralisé 3 et de degré généralisé $d$ sur une courbe double et on mettra en évidence de multiples composantes. Une d'elles est une structure multiple sur la variété de modules des fibrés vectoriels de rang 3 et de degré $d$ sur $C$.

### 1.1. Faisceaux cohérents sur les courbes multiples primitives

**Courbes multiples primitives -** Soit $C$ une courbe algébrique projective irréductible lisse, de genre $g_C$, plongée dans une variété projective lisse $X$ de dimension 3 sur $\mathbb{C}$. Soit $Y \subset X$ une sous-variété fermée de Cohen-Macaulay dont la sous-variété réduite associée est $C$. On dit que $Y$ est *primitive* si elle peut localement être plongée dans une surface : pour tout point $P$ de $C$ il existe une surface $S \subset X$ et un ouvert $U$ de $X$ contenant $P$ tels que $U \cap S$ soit lisse et $Y \cap U \subset S$ . Si tel est le cas il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout point $P \in C$ on peut choisir l'ouvert $U$ précédent et des coordonnées locales en $P$, $x$, $z$, $t$ de telle sorte que l'idéal de $S$ dans $U$ soit $(x)$ et celui de $Y$ $(x, z^n)$. L'entier $n$ s'appelle la *multiplicité* de $Y$ et $C$ son *support*.

Il existe une filtration canonique

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y \ ,$$

où $C_i$ est l'intersection de $Y$ et du $i^{\text{eme}}$ voisinage infinitésimal de $C$ dans $X$. Au voisinage de $P$ l'idéal de $C_i$ dans $U$ est donc $(x, z^i)$. On note, pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{O}_i$ le faisceau structural de $C_i$ (en particulier, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_C$ et $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_Y$), et $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de $C$ dans $Y$.

**Rang et degré généralisés - Théorème de Riemann-Roch -** Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $Y$. On définit en 4.1 la *première filtration canonique* de $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E}_{n+1} = 0 \subset \mathcal{E}_n \subset \cdots \subset \mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \ .$$

Pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{I}_C^i \mathcal{E}$ est le noyau de la restriction $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i|C}$ . On a donc $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_{i|C}$, $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_{|C_i}$ . Le gradué $\mathrm{Gr}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_C$-modules.

Les entiers $R(\mathcal{E}) = rg(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ , $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \deg(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appellent respectivement le *rang généralisé* et le *degré généralisé* de $\mathcal{E}$. On montre que le rang et le degré généralisés sont *additifs* : si $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux cohérents sur $C_n$ alors on a

$$R(\mathcal{E}) \ = \ R(\mathcal{E}') + R(\mathcal{E}"), \qquad \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) \ = \ \mathrm{Deg}(\mathcal{E}') + \mathrm{Deg}(\mathcal{E}").$$

On déduit des définitions le théorème de Riemann-Roch pour les courbes primitives (cf. 4.2) :

**Théorème :** *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $C_n$, alors on a*

$$\chi(\mathcal{E}) \ = \ \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})(1 - g_C).$$

On montre aussi que le rang et le degré généralisés sont *invariants par déformation*, c'est-à-dire que dans une famille plate de faisceaux cohérents sur $C_n$ paramétrée par une variété irréductible, tous les faisceaux ont les mêmes rang et degré généralisés.

On utilisera aussi la *seconde filtration canonique* de $\mathcal{E}$ :
$\mathcal{E}^{(n+1)} = \{0\} \subset \mathcal{E}^{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{(2)} \subset \mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}$ , où $\mathcal{E}^{(i)}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{E}$ annulateur de $\mathcal{I}_C^{n+1-i}$. Cette filtration a été définie et utilisée par M.A. Inaba dans [13].

**Faisceaux semi-stables -** On déduit du théorème de Riemann-Roch précédent le calcul des polynômes de Hilbert des faisceaux cohérents sur $Y$(cf. 4.2.2). Il en découle que la définition des faisceaux de dimension 1 sur $Y$ (semi-)stables au sens de C. Simpson (cf. [31]) est analogue à celle des fibrés (semi-)stables sur les courbes lisses : un faisceau $\mathcal{E}$ de dimension 1 sur $Y$ est *semi-stable* (resp. *stable*) si et seulement si il est pur et si pour tout sous-faisceau propre $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ on a

$$\frac{\mathrm{Deg}(\mathcal{F})}{R(\mathcal{F})} \ \leq \ \frac{\mathrm{Deg}(\mathcal{E})}{R(\mathcal{E})} \qquad \text{(resp.} \quad < \quad \text{)}.$$

**Fibrés vectoriels et groupe de Picard -** On démontre (théorème 3.1.1) que si $1 \leq i \leq n$, tout fibré vectoriel sur $C_i$ peut se prolonger en fibré vectoriel sur $C_n$.

On en déduit brièvement en 3.2 et 3.3 la description du groupe de Picard de $C_n$. Le morphisme de restriction $\mathrm{Pic}(C_n) \to \mathrm{Pic}(C)$ est surjectif et son noyau, le groupe des fibrés en droites sur $C_n$ dont la restriction à $C$ est triviale est une somme directe de groupes $\mathbb{G}_a$.

**Faisceaux quasi localement libres -** Soient $P \in C$ et $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. On dit que $M$ est *quasi libre* s'il existe des entiers $m_1, \ldots, m_n$ non négatifs tels que

$$M \ \simeq \ \bigoplus_{i=1}^{n} m_i \mathcal{O}_{i,P}.$$

Si tel est le cas la suite $(m_1, \ldots, m_n)$ est unique, on l'appelle le *type* de $M$.

Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$ et $P \in C$. On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre en* $P$ s'il existe des entiers $m_1, \ldots, m_n$ non négatifs et un ouvert $U \subset C$ contenant $P$ tels que

$$\mathcal{E}_{|U} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} m_i \mathcal{O}_{i|U}.$$

Dans ce cas le $\mathcal{O}_{n,P}$-module $\mathcal{E}_P$ est quasi libre. On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre* s'il l'est en tout point de $C$. On démontre en 5.1.6 le

**Théorème :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. Alors il existe un ouvert non vide $U$ tel que $\mathcal{E}$ soit quasi localement libre en tout point de $U$.*

Rappelons que tout faisceau cohérent sur une variété réduite est localement libre sur un ouvert dense. On peut donc dire que les les faisceaux quasi localement libres sur les courbes primitives jouent le même rôle que les faisceaux localement libres sur les variétés réduites.

On donne en 5.1.4 une caractérisation des faisceaux quasi localement libres :

**Théorème :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. Alors $\mathcal{E}$ est quasi localement libre si et seulement si tous les termes de* $\mathrm{Gr}(\mathcal{E})$ *sont localement libres sur $C$.*

Les faisceaux quasi localement libres ont des propriétés semblables à celles des faisceaux localement libres. En particulier on montre (théorème 5.2.1) que le noyau d'un morphisme surjectif de faisceaux cohérents quasi localement libres l'est.

### 1.2. Faisceaux sans torsion sur les courbes primitives doubles

On suppose que $n = 2$. On dit alors que $C_2$ est une courbe primitive *double*. Soit $L = \mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de $C$ dans $C_2$. On peut dans ce cas décrire complètement les faisceaux quasi localement libres et les faisceaux sans torsion sur $C_2$ (par définition un faisceau est dit *sans torsion* s'il ne possède pas de sous-faisceau dont le support est de dimension 0).

**Faisceaux quasi localement libres -** Soient $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur $C_2$ et $E \subset \mathcal{E}$ sa première filtration canonique. Si $F = \mathcal{E}/E$ on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

et $E$, $F$ sont des fibrés vectoriels sur $C$. Le morphisme canonique $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_C \to \mathcal{E}$ induit un morphisme surjectif $\Phi_{\mathcal{E}} : F \otimes L \to E$. On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(F, E) \simeq \mathcal{H}om(F \otimes L, E)$$

et $\Phi_{\mathcal{E}}$ n'est autre que l'image dans $H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(F, E))$ de l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F, E)$ associé à la suite exacte précédente. Le faisceau $\mathcal{E}$ est localement libre si et seulement si $\Phi_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme. En général le noyau du morphisme composé $\mathcal{E} \to F \to E \otimes L^*$ (où $L^*$ est le fibré dual de $L$ sur $C$ et le second morphisme provient de $\Phi_{\mathcal{E}}$) est un fibré vectoriel sur $C$ et c'est le plus grand sous-faisceau de $\mathcal{E}$ de support $C$.

Réciproquement, si $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F, E)$ est tel le morphisme associé $\Phi : E \otimes L \to F$ soit surjectif, le faisceau $\mathcal{E}$ extension de $F$ par $E$ défini par $\sigma$ est quasi localement libre, $E \subset \mathcal{E}$ est sa première filtration canonique et $\Phi_{\mathcal{E}} = \Phi$.

Soit $P \in C$. On donne en 7.3.1 une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $\mathcal{O}_{2,P}$-module quasi libre de type $(m_1, m_2)$ se déforme en modules quasi libres de type $(n_1, n_2)$ : on doit avoir $m_1 + 2m_2 = n_1 + 2n_2$ et $n_1 \geq m_1$.

**Faisceaux sans torsion -** Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur $C_2$ et $E \subset \mathcal{E}$ sa première filtration canonique. Alors $E$ est un fibré vectoriel mais $\mathcal{E}/E$ a de la torsion si $\mathcal{E}$ n'est pas quasi localement libre. Posons $\mathcal{E}/E = F \oplus T$ , où $F$ est un fibré vectoriel sur $C$ et $T$ un faisceau de torsion sur $C$. On appelle *index* de $\mathcal{E}$ l'entier $i(\mathcal{E}) = h^0(T)$ . Soient $P \in C$, $z \in \mathcal{O}_{2,P}$ une équation locale de $C$ et $x \in \mathcal{O}_{2,P}$ un élément au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{2,P}$ est donc $(x, z)$. On note $I_{k,P} = (x^k, z)$ , pour tout entier positif $k$.

On donne dans 6.5.3 la structure des $\mathcal{O}_{2,P}$-modules de type fini sans torsion. Si $M$ en est un, alors il existe des entiers $m$, $p$ et une suite d'entiers $n_1, \ldots, n_p$ tels que

$$M \simeq \left( \bigoplus_{i=1}^{p} I_{n_i,P} \right) \oplus m\mathcal{O}_{2,P}.$$

Les deux résultats suivants sont démontrés dans 6.5.3 :

**Théorème :** *Tout faisceau cohérent sans torsion sur $C_2$ est réflexif.*

On a donc le même résultat que sur les courbes lisses.

**Théorème :** *Tout faisceau cohérent sans torsion sur $C_2$ est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif $\mathcal{F} \to T$, où $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi localement libre sur $C_2$ et $T$ un faisceau de torsion sur $C$.*

On a donc un résultat analogue à ce qu'on a sur les surfaces lisses. Le fibré $\mathcal{F}$ n'est pas en général unique, mais on peut les décrire tous.

### 1.3. Faisceaux d'idéaux de points sur les courbes multiples primitives

Soit $Z \subset C$ un sous-ensemble fini. On note $\mathcal{I}_{n,Z}$ le faisceau d'idéaux de $Z$ sur $C_n$.

**1.3.1. Limites de fibrés en droites sur les courbes lisses -** Pour montrer l'intérêt de l'étude des faisceaux d'idéaux de points sur les courbes multiples, examinons les cas du plan projectif $\mathbb{P}_2$. Supposons que $C_n \subset \mathbb{P}_2$, $C$ étant une courbe de degré $d$. Soit $\mathcal{M}$ la variété de modules de faisceaux de dimension 1 contenant tous les fibrés en droites de degré 0 sur les courbes lisses de degré $nd$ de $\mathbb{P}_2$. On a $\dim(\mathcal{M}) = n^2d^2 + 1$ (cf. [15], [16]). Les faisceaux du type $\mathcal{I}_{n,Z}(k)$, où $Z$ a $knd$ points sont limites de faisceaux de $\mathcal{M}$. Étant donné que si $\mathcal{I}_{n,Z} \simeq \mathcal{I}_{n,Z'}$ alors $Z = Z'$ (car $Z$ est précisément le lieu des points de $C$ où $\mathcal{I}_{n,Z}$ n'est pas libre), les faisceaux du type $\mathcal{I}_{n,Z}(k)$ (avec $k$ fixé et $\#Z = knd$) constituent une famille de dimension $knd$ de faisceaux

limites de $\mathcal{M}$. On obtient donc des familles de dimension arbitrairement grande de faisceaux limites de $\mathcal{M}$.

**1.3.2. Résultats généraux -** On calcule en 8.1 les dimensions de $\mathrm{End}(\mathcal{I}_{n,Z})$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})$ . Cela permet d'obtenir, si $C_n$ est plongée dans $S$ (où $S$ est le plan projectif $\mathbb{P}_2$ ou une surface K3), des informations sur les déformations $\mathcal{I}_{n,Z}$ en tant que faisceau sur $S$. Soit $(\mathcal{E}_t)_{t\in T}$ une telle déformation, $t_0 \in T$ l'origine, tel que $\mathcal{E}_{t_0} = \mathcal{I}_{n,Z}$. On a alors une application canonique

$$\Theta^{\mathcal{E}}_{t_0} : T_{t_0}T \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_S(nC))/\langle\sigma^n\rangle$$

(où $\sigma \in H^0(\mathcal{O}_S(C))$ est une équation de $C$) qui est en gros l'application tangente du morphisme associant à un point $t$ de $T$ la courbe support de $\mathcal{E}_t$. On démontre en 8.1.5 le

**Théorème :** *Si $\mathcal{E}$ est une déformation complète de $\mathcal{I}_{n,Z}$, l'application $\Theta^{\mathcal{E}}_{t_0}$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})/\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z}) \;\simeq\; V/\langle\sigma^n\rangle,$$

*où $V \subset H^0(\mathcal{O}_S(nC))$ est l'espace des courbes passant par tous les points de $Z$.*

Il est bien entendu possible d'obtenir $\mathcal{I}_{n,Z}$ comme limite de fibrés en droites sur des courbes lisses de $S$ ne passant pas par $Z$. Le résultat précédent indique que dans ce cas les courbes lisses en question convergeront vers $C_n$ avec une multiplicité $> 1$ de manière à annuler l'application tangente $\Theta^{\mathcal{E}}_{t_0}$.

**1.3.3. Le cas des courbes doubles -** On suppose maintenant que $n = 2$. Les seuls faisceaux sans torsion sur $C_2$ de rang généralisé 1 sont les fibrés en droites sur $C$. Les exemples les plus simples de faisceaux sans torsion de rang généralisé 2 sur $C_n$ sont ceux qui sont quasi localement libres. Ils sont de deux sortes : les fibrés vectoriels de rang 2 sur $C$ et les fibrés en droites sur $C_2$ .

On montre en 8.2 qu'un faisceau sans torsion de rang généralisé 2 qui n'est pas quasi localement libre est isomorphe à un faisceau du type $\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}$, où $Z \subset C$ est un sous-schéma fini, $\mathcal{I}_Z$ son faisceau d'idéaux sur $C_2$ et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $C_n$. Le sous schéma $Z$ est unique, mais pas le fibré en droites $\mathcal{L}$.

**Déformations des faisceaux de rang généralisé 2 -**

Les fibrés en droites sur $C_2$ ne peuvent évidemment se déformer qu'en fibrés en droites. Seuls les fibrés vectoriels de rang 2 sur $C$ peuvent se déformer en faisceaux sans torsion de rang généralisé 2 d'un autre type. On démontre dans le théorème 7.2.3 qu'un fibré vectoriel de rang 2 sur $C$ se déforme en faisceau non concentré sur $C$ si et seulement si il contient un fibré en droites de degré suffisamment élevé.

Un fibré vectoriel de rang 2 sur $C$ est donc la limite d'un nombre fini (éventuellement nul) de familles de faisceaux d'index positif.

Dans ce qui suit on suppose pour simplifier les notations que $C_2$ est plongée dans une surface lisse $S$. Soit $E$ un fibré vectoriel sur $C$. On montre en 7.2.1 que l'application canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(E,E)$$

est un isomorphisme.

Soit $Z \subset S$ un sous-schéma fini. On montre de même en 7.1.1 que l'application canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)$$

est un isomorphisme. Les déformations de $\mathcal{O}_Z$ en tant que faisceau sur $C_2$ sont les mêmes que ses déformations en tant que faisceau sur $S$ contenues dans $C_2$.

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}$ un faisceau sans torsion de rang généralisé 2 sur $C_2$. Alors toutes les déformations de $\mathcal{E}$ proviennent de déformations de $\mathcal{O}_Z$ et de $\mathcal{L}$ (cf. 8.2.4).

### 1.4. Faisceaux quasi localement libres de rang généralisé 3 sur les courbes doubles

Soient $S$ une surface projective lisse irréductible et $C \subset S$ une courbe projective lisse irréductible. Soient $C_2 \subset S$ la courbe double associée, $L = \mathcal{O}_C(-C)$ et $l = -\deg(L)$. On suppose que $l = C^2 \geq 1$. Le genre de $C$ est $g = \frac{1}{2}(C^2 + K_S C) + 1$ . On étudie dans 9.1 les variétés de modules de faisceaux quasi localement libres de rang généralisé 3 sur $C_2$.

Si $\mathcal{E}$ est un faiseau quasi localement libre de rang généralisé 3 sur $S$, la première filtration canonique de $\mathcal{E}$ donne une suite exacte $0 \to E_{\mathcal{E}} \to \mathcal{E} \to F_{\mathcal{E}} \to 0$, où $E_{\mathcal{E}}$, $F_{\mathcal{E}}$ sont des fibrés vectoriels sur $C$, $E_{\mathcal{E}}$ étant de rang 1 et $F_{\mathcal{E}}$ de rang 2. Soient $\Phi_{\mathcal{E}} : F_{\mathcal{E}} \otimes L \to E_{\mathcal{E}}$ le morphisme canonique surjectif, et $\Gamma_{\mathcal{E}} = \ker(\Phi_{\mathcal{E}}) \otimes L^*$ . On a aussi une autre suite exacte $0 \to G_{\mathcal{E}} \to \mathcal{E} \to E_{\mathcal{E}} \otimes L^* \to 0$, où $G_{\mathcal{E}}$ est le plus grand sous-faisceau de $\mathcal{E}$ de support $C$, qui est localement libre de rang 2 sur $C$. On montre que les degrés de $E_{\mathcal{E}}$, $F_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$, $\Gamma_{\mathcal{E}}$ sont invariants par déformation.

Soient $\gamma$, $\epsilon$ des entiers tels que $\gamma - l < \epsilon < \gamma$ . Soit $\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ l'ensemble des faisceaux $\mathcal{E}$ tels que $E_{\mathcal{E}}$ soit de degré $\epsilon$, $\Gamma_{\mathcal{E}}$ de degré $\gamma$, et que $F_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$ soient stables. On montre que $\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ est un ouvert non vide de la variété de modules $M(3, 2\epsilon + \gamma + l)$ des faisceaux semi-stables (au sens de Simpson) de rang généralisé 3 et de degré généralisé $2\epsilon + \gamma + l$ sur $C_2$. On a $\dim(\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)) = 5g + 2l - 4$ .

L'adhérence $\overline{\mathcal{M}_s}(\epsilon, \gamma)$ de $\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ dans $M(3, 2\epsilon + \gamma + l)$ est une composante irréductible de cette dernière. Il existe une autre composante $M_C(3, 2\epsilon + \gamma + l)$, celle qui est constituée des fibrés semi-stables sur $C$. Les variétés $\overline{\mathcal{M}_s}(\epsilon, \gamma)$ rencontrent toutes $M_C(3, 2\epsilon + \gamma + l)$. J'ignore si elles sont disjointes.

La variété $\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ est non réduite. La variété réduite sous-jacente $\mathcal{M}_s^{red}(\epsilon, \gamma)$ est lisse. En tout point $\mathcal{E}$ le conoyau de l'application canonique $T\mathcal{M}_s^{red}(\epsilon, \gamma)_{\mathcal{E}} \to T\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)_{\mathcal{E}}$ est canoniquement isomorphe à $H^0(L^*)$.

Pour des faisceaux de rang plus élevé, la situation est plus compliquée, car les rangs et degrés des gradués de la première filtration canonique ne sont pas invariants par déformation.

## 2. Préliminaires

### 2.1. Courbes multiples

(cf. [2], [36], [18], [3]).

Soit $X$ une variété algébrique lisse connexe de dimension 3, et $C \subset X$ une courbe lisse connexe. On appelle *courbe multiple de support* $C$ un sous-schéma de Cohen-Macaulay $Y \subset X$ tel que l'ensemble des points fermés de $Y$ soit $C$. Autrement dit, $Y_{red} = C$.

Soit $n$ le plus petit entier tel que $Y \subset C^{(n-1)}$, $C^{(k-1)}$ désignant le $k$-ième voisinage infinitésimal de $C$, c'est-à-dire $\mathcal{I}_{C^{(k-1)}} = \mathcal{I}_C^k$ . On a une filtration $C = C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = Y$ où $C_i$ est le plus grand sous-schéma de Cohen-Macaulay contenu dans $Y \cap C^{(i-1)}$. On appelle $n$ la *multiplicité* de $Y$.

On dit que $Y$ est *primitive* si pour tout point fermé $x$ de $C$, il existe une surface $S$ de $X$ contenant un voisinage de $x$ dans $Y$ et lisse en $x$. Dans ce cas, $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2}$ est un fibré en droites sur $C$ et on a $\mathcal{I}_{C_j}/\mathcal{I}_{C_{j+1}} = L^j$ pour $1 \leq j < n$. Soit $P \in C$. Alors il existe des éléments $x$, $y$, $t$ de $m_{X,P}$ (l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$) dont les images dans $m_{X,P}/m_{X,P}^2$ forment une base, et que pour $1 \leq i < n$ on ait $\mathcal{I}_{C_i,P} = (x, y^i)$ .

Le cas le plus simple est celui où $Y$ est contenue dans une surface lisse de $X$. Dans ce cas il est même inutile de mentionner la variété ambiente $X$, et on peut voir une courbe primitive de Cohen-Macaulay comme une courbe multiple qui est une sous-variété fermée d'une surface lisse.

Soient $S$ une surface lisse, $Y \subset S$ une courbe primitive de multiplicité $n$ et $C$ la courbe réduite associée. Soient $P \in C$ et $f \in \mathcal{O}_{S,P}$ une équation locale de $C$. Alors on a $\mathcal{I}_{C_i,P} = (f^i)$ pour $0 \leq j < n$, en particulier $I_{Y,P} = (f^n)$, et $L = \mathcal{O}_C(-C)$ .

### 2.2. Les Ext de faisceaux définis sur des sous-variétés

Soient $X$ une variété projective et $Y \subset X$ une sous-variété fermée. Si $j : Y \to X$ est l'inclusion et $E$ un faisceau cohérent sur $Y$, on notera aussi souvent $E$ le faisceau $j_*(E)$ sur $X$.

**2.2.1. Proposition :** *Soient $E$, $F$ des faisceaux cohérents sur $Y$. Alors on a une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(F, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_Y), E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_Y}(F, E).$$

*Démonstration.* Soient $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur $X$ et $\mathcal{O}_Y(1)$ sa restriction à $Y$. Soient $n_0 > 0$ un entier tel que $F(n_0)$ soit engendré par ses sections globales et $M_0 = H^0(F(n_0))$. Soient $F_0$ le noyau du morphisme canonique surjectif $\mathcal{O}_X(-n_0) \otimes M_0 \to F$ , $n_1$ un entier tel que $F_1(n_1)$ soit engendré par ses sections globales et $M_1 = H^0(F_0(n_1))$. En continuant ce procédé on obtient la résolution localement libre de $F$

$$\cdots \mathcal{O}_X(-n_2) \otimes M_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{O}_X(-n_1) \otimes M_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{O}_X(-n_0) \otimes M_0 \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0$$

En restreignant cette résolution à $Y$ on obtient le complexe

$$\cdots \mathcal{O}_Y(-n_2) \otimes M_2 \xrightarrow{f_{Y2}} \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1 \xrightarrow{f_{Y1}} \mathcal{O}_Y(-n_0) \otimes M_0 \xrightarrow{f_{Y0}} F \longrightarrow 0$$

Pour tout $i \geq 0$, soient $\mathcal{X}_i = \ker(f_i)$, $\mathcal{Y}_i = \ker(f_{Yi})$ . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-n_0) \otimes M_0 \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0$$

d'où on déduit la suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{X}_{0|Y} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_Y(-n_0) \otimes M_0 \xrightarrow{f_{0Y}} F \longrightarrow 0$$

On a donc une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{X}_{0|Y} \longrightarrow \mathcal{Y}_0 \longrightarrow 0$$

Posons $M'_2 = H^0(\mathcal{Y}_1(n_2))$ . Rappelons que $M_2 = H^0(\mathcal{X}_1(n_2))$ . Le morphisme $\mathcal{X}_{1|Y} \to \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1$ déduit de l'inclusion $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{O}_X(-n_1) \otimes M_1$ est à valeurs dans $\mathcal{Y}_1$. On en déduit une application linéaire naturelle $\Phi : M_2 \to M'_2$ . On note $f'_2 : \mathcal{O}_Y(-n_2) \otimes M'_2 \to \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1$ la composée

$$\mathcal{O}_Y(-n_2) \otimes M'_2 \longrightarrow \mathcal{Y}_1 \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1$$

de l'inclusion et de l'évaluation. Alors on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(-n_2) \otimes M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "r_2 \otimes \Phi"] & \mathcal{O}_X(-n_1) \otimes M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "r_1 \otimes I_{M_1}"] & \mathcal{O}_X(-n_0) \otimes M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "r_0 \otimes I_{M_0}"] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{O}_Y(-n_2) \otimes M'_2 \arrow[r, "f'_2"] & \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1 \arrow[r, "f_{1Y}"] & \mathcal{O}_Y(-n_0) \otimes M_0 \arrow[r, "f_{0Y}"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où pour $i = 0, 1, 2$, $r_i : \mathcal{O}_X(-n_i) \to \mathcal{O}_Y(-n_i)$ est le morphisme canonique. d'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(-n_0) \otimes M_0, E) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1, E) \arrow[r, "F_{1Y}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(-n_2) \otimes M'_2, E) \arrow[d, "{}^t\Phi \otimes I"] \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-n_0) \otimes M_0, E) \arrow[r, "F_0"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-n_1) \otimes M_1, E) \arrow[r, "F_1"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-n_2) \otimes M_2, E)
\end{tikzcd}$$

On peut supposer que $n_0$ est suffisamment grand pour que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(F, E)$ puisse se calculer à l'aide de la suite exacte du haut, c'est à dire que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(F, E) \simeq \ker(F_{1Y}) / \mathrm{im}(F_0)$ . On déduit du diagramme précédent une application linéaire

$$\Theta : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(F, E) = \ker(F_{1Y}) / \mathrm{im}(F_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F, E) = \ker(F_1) / \mathrm{im}(F_0).$$

Montrons que $\Theta$ est injective. Soit $\alpha : \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1 \to E$ s'annulant sur $\mathrm{im}(f'_2)$, tel que le morphisme induit $\overline{\alpha} : \mathcal{O}_X(-n_1) \otimes M_1 \to E$ ait pour image 0 dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F, E)$ . Cela signifie que $\overline{\alpha}$ se factorise par $f_1$ :

$$\overline{\alpha} : \mathcal{O}_X(-n_1) \otimes M_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{O}_X(-n_0) \otimes M_0 \xrightarrow{\gamma} E$$

Par restriction à $Y$ on obtient la factorisation

$$\alpha : \mathcal{O}_Y(-n_1) \otimes M_1 \xrightarrow{f_{Y1}} \mathcal{O}_Y(-n_0) \otimes M_0 \xrightarrow{\gamma_{|Y}} E$$

qui prouve que l'image de $\alpha$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(F, E)$ est 0.

Par définition de $\Theta$ on a $\operatorname{coker}(\Theta) \simeq \ker(F_1)/\ker(F_{1Y})$ . On a $\ker(F_{1Y}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}_0, E)$ , $\ker(F_1) = \operatorname{Hom}(\mathcal{X}_{0|Y}, E)$ . D'après la suite exacte $(*)$ on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\Theta) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tor}^1_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_Y), E) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{Y}_0, E).$$

D'après le choix de $n_0$ et la suite exacte $0 \to \mathcal{Y}_0 \to \mathcal{O}_Y(-n_0) \otimes M_0 \to F \to 0$ on voit que $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{Y}_0, E) \simeq \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O}_Y}(F, E)$ . Le fait que la suite exacte de la proposition 2.2.1 ne dépend pas du choix de la résolution localement libre de $F$ est laissé au lecteur. □

## 2.3. Variétés de Brill-Noether

Les résultats qui suivent seront utilisés en 9. Soit $C$ une courbe projective irréductible lisse de genre $g \geq 2$. Pour tout entier $d$ on note $J^d$ la jacobienne des fibrés en droites de degré $d$ sur $C$ et $M_s(2, d)$ la variété de modules des fibrés stables de rang 2 et de degré $d$ sur $C$, qui est une variété algébrique irréductible lisse de dimension $4g - 3$. Soit

$$W_0^{2,d} \ = \ \{E \in M_s(2, d); h^0(E) > 0\},$$

qui est une sous-variété fermée de $M_s(2, d)$. Si $d \leq 0$ on a $W_0^{2,d} = \emptyset$, et si $d \geq 2g - 2$ on a $W_0^{2,d} = M_s(2, d)$ . Si $0 < d \leq 2g - 2$, $W_0^{2,d}$ est non vide, irréductible et de dimension $2g - 2 + d$. Soit $G_0^{2,d}$ la variété des *paires de Brill-Noether* $(E, s)$, où $E \in M_s(2, d)$ et $s$ est une droite de $H^0(E)$. Si $0 < d \leq 2g - 2$, c'est une variété lisse irréductible de dimension $2g - 2 + d$ (cf. [7], [26], [35]).

On note $det_d : M_s(2, d) \to J^d$ le morphisme associant à un fibré stable $E$ son déterminant.

**2.3.1. Proposition :** *Si $d > 0$, on a $det_d(W_0^{2,d}) = J^d$ .*

*Démonstration.* Il suffit de traiter les cas $d = 1, 2$. En effet, il existe un entier $\delta > 0$ tel que $d - 2\delta$ soit égal à 1 ou 2. Soit $U \in J^\delta$ tel que $h^0(U) > 0$ . Alors $W_0^{2,d}$ contient tous les fibrés du type $E \otimes U$, avec $E \in W_0^{2,d-2\delta}$ . Donc $det_d(W_0^{2,d})$ contient tous les $det_{d-2\delta}(E) \otimes U^2$. Si $det_{d-2\delta}(W_0^{2,d-2\delta}) = J^{d-2\delta}$ on a donc $det_d(W_0^{2,d}) = J^d$ .

*Le cas $d = 1$* - Soit $D \in J^1$ . On va montrer que $D \in \det_1(W_0^{2,1})$. On a $h^1(D^*) = g > 0$, donc il existe une extension non triviale $0 \to \mathcal{O}_C \to E \to D \to 0$ . Alors $E$ est stable : il suffit de montrer que si $U \in J^1$, alors $\operatorname{Hom}(U, E) = \{0\}$. Supposons que $\operatorname{Hom}(U, E) \neq \{0\}$. On a $\operatorname{Hom}(U, E) \subset \operatorname{Hom}(U, D)$, donc $\operatorname{Hom}(U, D) \neq \{0\}$, donc $U = D$, et il existe une section du morphisme $E \to D$, ce qui est absurde car l'extension est non triviale. On a $det(E) = D$, $E \in W_0^{2,1}$, donc $D \in \det_1(W_0^{2,1})$.

*Le cas $d = 2$* - Soit $D \in J^2$ . On va montrer que $D \in \det_2(W_0^{2,2})$. On a $h^1(D^*) = g + 1 > 2$. Soit $0 \to \mathcal{O}_C \to E \to D \to 0$ une extension non triviale. Supposons que $E$ ne soit pas stable. Alors il existe $U \in J^1$ tel que $\operatorname{Hom}(U, E) \neq \{0\}$. On a donc $\operatorname{Hom}(U, D) \neq \{0\}$, et il existe donc un point $x$ de $C$ tel que $U = D(-x)$. De plus, l'application canonique $\operatorname{Hom}(D(-x), D) = \mathbb{C} \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(D(-x), \mathcal{O}_C)$ est nulle. Soit $\sigma \in H^1(D^*)$ correspondant à l'extension précédente. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{End}(D) & \longrightarrow & H^1(D^*) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \alpha_x \\ \operatorname{Hom}(D(-x), D) & \longrightarrow & H^1(D^*(x)) \end{array}$$

où les flèches horizontales proviennent de $\sigma$ et les verticales de la section de $\mathcal{O}_C(x)$. On en déduit que $\sigma \in \ker(\alpha_x)$. Puisque $\dim(\ker(\alpha_x)) = 1$ et $h^1(D^*) > 2$ il existe $\sigma_0 \in H^1(D^*)$ tel que pour tout $x \in C$, $\sigma_0 \notin \ker(\alpha_x)$. Si $0 \to \mathcal{O}_C \to E_0 \to D \to 0$ est l'extension correspondante, le fibré $E_0$ est stable d'après ce qui précède. On a $det(E_0) = D$, $E_0 \in W_0^{2,2}$, donc $D \in \det_2(W_0^{2,2})$. □

## 3. Fibrés vectoriels sur les courbes multiples

Soient $C_n$ une courbe projective multiple primitive de multiplicité $n > 1$,
$C = C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = Y$ la filtration canonique et $L$ le fibré en droites sur $C$ associé (cf. 2.1). On pose, pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$ .

### 3.1. Prolongements de fibrés vectoriels

**3.1.1. Théorème :** *Si $1 \leq i \leq n$, tout fibré vectoriel sur $C_i$ peut se prolonger en fibré vectoriel sur $C_n$.*

*Démonstration.* On peut en raisonnant par récurrence supposer que $i = n - 1$. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $C_{n-1}$ dans $C_n$. On a un isomorphisme de $\mathcal{O}_n$-modules : $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_{|C_{n-1}}$.

Soit $E$ un fibré vectoriel sur $C_{n-1}$, de rang $r$. Il existe un recouvrement ouvert $(U_i)$ de $C_{n-1}$ tel que chaque restriction $E_{|U_i}$ soit un fibré trivial. Soient $\lambda_i : E_{|U_i} \simeq \mathcal{O}_{n-1}(U_i) \otimes \mathbb{C}^r$ des trivialisations, $\lambda_{ij} = \lambda_j \circ \lambda_i^{-1} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_{n-1}(U_{ij}))$ . Soient $\Lambda_{ij} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_n(U_{ij}))$ une extension de $\lambda_{ij}$ et $\rho_{ijk} = \Lambda_{jk}\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}$ (élément de $\mathcal{O}_n(U_{ijk}) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$). Alors les $\Lambda_{ij}$ définissent un fibré vectoriel sur $C_n$ si et seulement si les $\rho_{ijk}$ sont nuls. Leurs restrictions à $C_{n-1}$ sont nulles, donc on peut les considérer comme des éléments de

$$\mathrm{End}(\mathcal{O}_n(U_{ijk}) \otimes \mathbb{C}^r) \otimes \mathcal{I} = \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{n-1} \otimes \mathbb{C}^r, \mathcal{I} \otimes \mathbb{C}^r)(U_{ijk}) \ .$$

Soit $\mu_{ijk} = (\lambda_k)^{-1}\rho_{ijk}\lambda_i$ , qui est un élément de $\mathcal{H}om(E, E \otimes \mathcal{I})(U_{ijk})$ . Pour obtenir une extension de $E$ à $C_n$ on peut remplacer les $\Lambda_{ij}$ par $\Lambda'_{ij} = \Lambda_{ij} - \beta_{ij}$ , avec $\beta_{ij}$ nul sur $C_{n-1}$ . On peut donc considérer les $\beta_{ij}$ comme des éléments de $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_i \otimes \mathbb{C}^r, \mathcal{I} \otimes \mathbb{C}^r)(U_{ij})$. Soit $\rho'_{ijk} = \Lambda'_{jk}\Lambda'_{ij} - \Lambda'_{ik}$ . Alors on a $\rho'_{ijk} = \rho_{ijk} - \beta_{jk}\Lambda_{ij} - \Lambda_{jk}\beta_{ij} + \beta_{ik}$ . Posons $\alpha_{ij} = (\lambda_j)^{-1}\beta_{ij}\lambda_i$, qui est un élément de $\mathcal{H}om(E, E \otimes \mathcal{I})(U_{ij})$ . Alors on a $\rho'_{ijk} = 0$ si et seulement si

$$(*) \qquad \mu_{ijk} \ = \ \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

On a $\Lambda_{kl}\rho_{ijk} - \rho_{ijl} + \rho_{ikl} - \rho_{jkl}\Lambda_{ij} = 0$ , d'où il découle que $\mu_{ijk} - \mu_{ijl} + \mu_{ikl} - \mu_{jkl} = 0$ , c'est-à-dire que $(\mu_{ijk})$ est un cocycle associé au fibré vectoriel $\mathcal{H}om(E, E \otimes \mathcal{I})$ sur $C_{n-1}$ et au recouvrement $(U_i)$. Comme $C_{n-1}$ est une courbe, on a $H^2(\mathcal{H}om(E, E \otimes \mathcal{I})) = \{0\}$ , d'où l'existence des $\alpha_{ij}$ satisfaisant l'égalité $(*)$ et des $\beta_{ij}$ définissant le prolongement voulu de $E$. □

**3.1.2.** *Résolutions canoniques* - On suppose que $C_n$ s'étend en une courbe primitive $C_{n+1}$ de multiplicité $n + 1$. Soit $\mathcal{O}_{n+1} = \mathcal{O}_{C_{n+1}}$ . Le faisceau d'idéaux $\mathbb{L}_n$ de $C$ dans $C_{n+1}$ est un $\mathcal{O}_n$-module localement libre de rang 1. D'après le théorème 3.1.1, on peut le prolonger en un fibré en droites sur $C_{n+1}$, noté $\mathbb{L}$. Si $1 \leq p \leq n$, $\mathbb{L}_n^p$ est le faisceau d'idéaux de $C_p$ dans $C_{n+1}$, c'est un $\mathcal{O}_{n+1-p}$-module libre de rang 1, et on a $\mathbb{L}_n^p = \mathbb{L}^p_{|C_{n+1-p}}$ . Soit $\mu_p : \mathbb{L}^p \to \mathcal{O}_{n+1}$ le morphisme

composé $\mathbb{L}^p \to \mathbb{L}^p_{|C_{n+1-p}} = \mathbb{L}^p_n \subset \mathcal{O}_{n+1}$. On a alors, pour $1 \leq i \leq n$ une résolution localement libre canonique de $\mathcal{O}_i$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{L}^{2(n+1)} \xrightarrow{\mu_{n+1-i}} \mathbb{L}^{n+1+i} \xrightarrow{\mu_i} \mathbb{L}^{n+1} \xrightarrow{\mu_{n+1-i}} \mathbb{L}^i \xrightarrow{\mu_i} \mathcal{O}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_i$$

Soit $E_{n+1}$ un fibré vectoriel sur $C_{n+1}$, $E_n$ sa restriction à $C_n$ et $E_C$ sa restriction à $C$. On a une suite exacte canonique sur $C_{n+1}$

$$0 \longrightarrow E_n \otimes \mathbb{L} \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow E_C \longrightarrow 0 \ .$$

D'après la suite spectrale des Ext (cf. (cf. [10], 7.3), on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(E_C, E_n \otimes \mathbb{L})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(E_C, E_n \otimes \mathbb{L}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(E_C, E_n \otimes \mathbb{L})) \longrightarrow 0.$$

**3.1.3. Lemme :** *Les faisceaux $\mathcal{H}om(E_C, E_n \otimes \mathbb{L})$ et $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(E_C, E_n \otimes \mathbb{L})$ sont de support $C$ et on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{H}om(E_C, E_n \otimes \mathbb{L}) \ \simeq \ E_C^* \otimes E_C \otimes L^n, \qquad \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(E_C, E_n \otimes \mathbb{L}) \ \simeq \ E_C^* \otimes E_C.$$

*Démonstration.* De la résolution précédente de $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_1$ on déduit la résolution localement libre de $E_C$

$$\cdots \longrightarrow E_{n+1} \otimes \mathbb{L}^{n+1} \xrightarrow{I_{E_{n+1}} \otimes \mu_n} E_{n+1} \otimes \mathbb{L} \xrightarrow{I_{E_{n+1}} \otimes \mu_1} E_{n+1} \longrightarrow E_C$$

d'où découle aisément le lemme. □

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(E_C^* \otimes E_C \otimes L^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(E_C, E_n \otimes \mathbb{L}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{End}(E_C) \longrightarrow 0.$$

**3.1.4. Corollaire :** *Soit $0 \to E_n \otimes \mathbb{L} \to F \to E_C \to 0$ une extension correspondant à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(E_C, E_n \otimes \mathbb{L})$. Alors $F$ est localement libre si et seulement si $\pi(\sigma)$ est un automorphisme.*

*Démonstration.* L'assertion est locale. Il suffit donc de montrer que si $P \in C$ et si

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{n-1,P} \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P} \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{O}_{n,P}$-modules, alors $M$ est libre si et seulement si l'élément associé de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n,P}}(\mathcal{O}_{n-1,P} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{C,P} \otimes \mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{O}_{C,P}$ est un automorphisme, ce qui est aisé. □

**3.1.5.** *Le cas des fibrés en droites* - On suppose ici que $\deg(L) < 0$. Soient $D_n$ un fibré en droites sur $C_n$, $D_C = D_{n|C}$. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(L^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n+1}}(D_C, D_n \otimes \mathbb{L}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \ .$$

L'ensemble $P_{D_n}$ des prolongements de $D_n$ à $C_{n+1}$ s'identifie à $\pi^{-1}(1)$, espace affine isomorphe à $H^1(L^n)$. En particulier, considérons $P_{\mathcal{O}_n}$, le groupe des fibrés en droites sur $C_{n+1}$ donc la restriction à $C_n$ est le fibré trivial. La bijection $P_{\mathcal{O}_n} \simeq H^1(L^n)$ définie par le prolongement

$\mathcal{O}_{n+1}$ de $\mathcal{O}_n$ est un morphisme de groupes abéliens (on peut le voir par exemple en utilisant la démonstration du théorème 3.1.1).

### 3.2. Groupe de Picard de $C_n$

Soit $X$ une variété algébrique. Rappelons qu'on appelle *groupe de Picard de* $X$ une variété algébrique, notée habituellement $\mathrm{Pic}(X)$, munie d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\mathrm{Pic}(X) \times X$, appelé *fibré de Poincaré*, tels que pour toute famille plate $\mathcal{D}$ de fibrés en droites sur $X$, paramétrée par une variété algébrique $T$, il existe un unique morphisme $f_{\mathcal{D}} : T \to \mathrm{Pic}(X)$ et un fibré en droites $L$ sur $T$ tel que

$$\mathcal{D} \simeq (f_{\mathcal{D}} \times I_X)^*(\mathcal{L}) \otimes p_T^*(L),$$

($p_T$ désignant la projection $T \times X \to T$). S'il existe, $\mathrm{Pic}(X)$ est unique à isomorphisme près, et $\mathcal{L}$ est unique à un fibré en droites sur $\mathrm{Pic}(X)$ près. L'ensemble des points fermés de $\mathrm{Pic}(X)$ s'identifie avec celui des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur $X$.

**3.2.1. Théorème :** *On suppose que* $\deg(L) < 0$. *Soit* $n \geq 1$ *un entier. Alors il existe un groupe de Picard pour* $C_n$.

*Démonstration.* On construit $\mathrm{Pic}(C_n)$ et le fibré de Poincaré $\mathcal{L}_n$ sur $\mathrm{Pic}(C_n) \times C_n$ par récurrence sur $n$. Ils sont évidemment bien connus pour $n = 1$. Supposons que $n > 1$ et que $\mathrm{Pic}(C_{n-1})$ et $\mathcal{L}_{n-1}$ existent. On peut voir ce dernier comme un faisceau cohérent sur $\mathrm{Pic}(C_{n-1}) \times C_n$. On note $p : \mathrm{Pic}(C_{n-1}) \times C_n \to C_n$, $q : \mathrm{Pic}(C_{n-1}) \times S \to \mathrm{Pic}(C_{n-1})$ les projections.

Soient $\mathbb{L}_{n-1}$ le faisceau d'idéaux de $C$ dans $C_n$, et $\mathbb{L}$ un prolongement de $\mathbb{L}_{n-1}$ à $C_n$. Le faisceau $\mathrm{Ext}^1$ relatif sur $\mathrm{Pic}(C_{n-1})$, $\mathcal{E} = \mathrm{Ext}^1_q(\mathcal{L}_{n-1} \otimes p^*(\mathcal{O}_C), \mathcal{L}_{n-1} \otimes p^*(\mathbb{L}))$ est localement libre. Pour tout $x \in \mathrm{Pic}(C_{n-1})$ on a $\mathcal{E}_x = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{L}_{n-1,x|C}, \mathcal{L}_{n-1,x} \otimes \mathbb{L})$ . On a vu qu'on avait une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^1(L^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{L}_{n-1,x|C}, \mathcal{L}_{n-1,x} \otimes \mathbb{L}) \xrightarrow{\pi_x} \mathrm{End}(\mathcal{L}_{n-1,x}) = \mathbb{C} \longrightarrow 0 \ .$$

On a donc un morphisme surjectif $\mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Pic}(C_{n-1})}$ . On prend $\mathrm{Pic}(C_n) = \pi^{-1}(1)$ et $\mathcal{L}_n$ est une extension universelle. Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. □

### 3.3. Description de $\mathrm{Pic}(C_n)$

On suppose que $\deg(L) < 0$. Comme dans le cas des courbes lisses, les composantes irréductibles de $\mathrm{Pic}(C_n)$ sont définies par le degré : ce sont les variétés $\mathrm{Pic}^i(C_n)$, $i \in \mathbb{Z}$ des fibrés en droites sur $C_n$ dont la restriction à $C$ est de degré $i$.

Rappelons que pour tout fibré en droites $D_{n-1}$ sur $C_{n-1}$, $P_{D_{n-1}}$ désigne l'ensemble des prolongements de $D_{n-1}$ à $C_n$. On a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow P_{\mathcal{O}_{n-1}} \simeq H^1(L^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(C_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(C_{n-1}) \longrightarrow 0$$

(cf. 3.1.5). Soit $\mathbf{P}_n \subset \mathrm{Pic}(C_n)$ le sous-groupe des fibrés en droites dont la restriction à $C$ est le fibré trivial. On a une filtration $0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} = \mathbf{P}_n$ telle que pour $1 \leq i \leq n-1$, on ait $G_i/G_{i-1} \simeq H^1(L^i)$ ($G_i$ est le groupe des fibrés en droites dont la restriction à $C_i$ est

triviale). Il découle de [29], chap. VII, 7, corollaire, que $\mathbf{P}_n$ est isomorphe à un produit de groupes $\mathbb{G}_a$, c'est-à-dire un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_n \longrightarrow \mathrm{Pic}(C_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(C) \longrightarrow 0$$

et on obtient un résultat analogue à ce que l'on observe lorsqu'on calcule le groupe de Picard d'une courbe intègre en fonction de celui de sa normalisée (cf. [28], [29]).

## 4. Invariants des faisceaux cohérents sur les courbes multiples

Soient $C_n$ une courbe projective multiple primitive de multiplicité $n > 1$ et $C = C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n$ sa filtration canonique. Soient $L$ le fibré en droites associé sur $C$, $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de $C$ dans $C_n$ et $g_C$ le genre de $C$.

On pose, pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$, et $\mathcal{O}_0 = 0$, ce sont des faisceaux cohérents sur $C_n$.

Soient $P \in C$, $z \in \mathcal{O}_{n,P}$ une équation locale de $C$, et $x \in \mathcal{O}_{n,P}$ au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$.

### 4.1. Filtrations canoniques, rang, degré et fonction caractéristique

Soient $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$.

**4.1.1.** *Première filtration canonique* - On définit la *filtration canonique de $M$* : c'est la filtration

$$M_{n+1} = \{0\} \subset M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1 = M$$

telle que pour $1 \leq i \leq n$, $M_{i+1}$ soit le noyau du morphisme canonique surjectif $M_i \to M_i \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}$ . On a donc

$$M_i/M_{i+1} \;=\; M_i \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}, \qquad M/M_{i+1} \;\simeq\; M \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{i,P}, \qquad M_{i+1} \;=\; z^i M.$$

Le gradué

$$\mathrm{Gr}(M) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{n} M_i/M_{i+1} \;=\; \bigoplus_{i=1}^{n} z^{i-1}M/z^iM$$

est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- on a $M_i = \{0\}$ si et seulement si $M$ est un $\mathcal{O}_{i-1,P}$-module,
- $M_i$ est un $\mathcal{O}_{n+1-i,P}$-module, et sa filtration canonique est $\{0\} \subset M_n \subset \cdots \subset M_{i+1} \subset M_i$ ,
- tout morphisme de $\mathcal{O}_{n,P}$-modules envoie la première filtration canonique du premier module sur celle du second.

On définit de même la *première filtration canonique de $\mathcal{E}$* : c'est la filtration

$$\mathcal{E}_{n+1} = 0 \subset \mathcal{E}_n \subset \cdots \subset \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$$

telle que pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{E}_{i+1}$ soit le noyau du morphisme canonique surjectif $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i|C}$. On a donc $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_{i|C}$ , $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_{|C_i}$ . Le gradué $\mathrm{Gr}(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{O}_C$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- on a $\mathcal{E}_i = \mathcal{I}_C^{i-1}\mathcal{E}$, et donc $\mathrm{Gr}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{I}_C^j\mathcal{E}/\mathcal{I}_C^{j+1}\mathcal{E}$ .

- on a $\mathcal{E}_i = 0$ si et seulement si $\mathcal{E}$ est un faisceau sur $C_{i-1}$,
- $\mathcal{E}_i$ est un faisceau sur $C_{n+1-i}$, et sa filtration canonique est $0 \subset \mathcal{E}_n \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{i+1} \subset \mathcal{E}_i$ .
- tout morphisme de faisceaux cohérents sur $C_n$ envoie la première filtration canonique du premier sur celle du second.

**Exemples :** 1 - Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_m$, $1 \leq m \leq n$, on a $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{O}_C \otimes L^{i-1}$ pour $1 \leq i \leq m$, et $\mathcal{E}_i = 0$ si $i > m$.

2 - Si $\mathcal{E}$ est le faisceau d'idéaux du point $P \in C$ on a $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1} = (\mathcal{O}_C(-P) \otimes L^{i-1}) \oplus \mathbb{C}_P$ si $1 \leq i < n$, et $\mathcal{E}_n = \mathcal{O}_C(-P) \otimes L^{n-1}$ .

**4.1.2.** *Seconde filtration canonique* - On définit la *seconde filtration canonique de $M$* : c'est la filtration

$$M^{(n+1)} = \{0\} \subset M^{(n)} \subset \cdots \subset M^{(2)} \subset M^{(1)} = M$$

avec $M^{(i)} = \left\{u \in M; z^{n+1-i}u = 0\right\}$ . Si $M_{n+1} = \{0\} \subset M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1 = M$ est la (première) filtration canonique de $M$ on a $M_i \subset M^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq n$. Le gradué

$$\mathrm{Gr}_2(M) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{n} M^{(i)}/M^{(i+1)}$$

est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- $M^{(i)}$ est un $\mathcal{O}_{n+1-i,P}$-module, et sa filtration canonique est
$\{0\} \subset M^{(n)} \subset \cdots \subset M^{(i+1)} \subset M^{(i)}$ ,
- tout morphisme de $\mathcal{O}_{n,P}$-modules envoie la seconde filtration canonique du premier module sur celle du second.

On définit de même la *seconde filtration canonique de $\mathcal{E}$* :

$$\mathcal{E}^{(n+1)} = \{0\} \subset \mathcal{E}^{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{(2)} \subset \mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}.$$

Le gradué $\mathrm{Gr}_2(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{O}_C$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- $\mathcal{E}^{(i)}$ est un faisceau sur $C_{n+1-i}$, et sa filtration canonique est $0 \subset \mathcal{E}^{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{(i+1)} \subset \mathcal{E}^{(i)}$ ,
- tout morphisme de faisceaux cohérents sur $C_n$ envoie la seconde filtration canonique du premier sur celle du second.

**Exemples :** 1 - Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_m$, $1 \leq m \leq n$, on a $\mathcal{E}^{(i)}/\mathcal{E}^{(i+1)} = \mathcal{O}_C \otimes L^{i+m-n-1}$ pour $n - m + 1 \leq i \leq n$, et $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_m$ si $i \leq n - m + 1$.

2 - Si $\mathcal{E}$ est le faisceau d'idéaux du point $P \in C$ on a $\mathcal{E}^{(i)}/\mathcal{E}^{(i+1)} = L^{i-1}$ si $2 \leq i \leq n$, et $\mathcal{E}^{(1)}/\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{O}_C(-P)$ .

**4.1.3.** *Rang* - L'entier $R(M) = rg(\mathrm{Gr}(M))$ s'appelle le *rang généralisé* de $M$.

L'entier $R(\mathcal{E}) = rg(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appelle le *rang généralisé* de $\mathcal{E}$. On a donc $R(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}_P)$ pour tout $P \in C$.

**Exemple :** Si $\mathcal{E}$ est localement libre, on a $R(\mathcal{E}) = n.rg(\mathcal{E})$ . Si le support de $\mathcal{E}$ est contenu dans $C$ (c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $C$ vu comme faisceau sur $C_n$), on a $R(\mathcal{E}) = rg(\mathcal{E}_{|C})$ .

**4.1.4.** *Degré* - L'entier $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \deg(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appelle le *degré de* $\mathcal{E}$.

Si $R(\mathcal{E}) > 0$ on pose $\mu(\mathcal{E}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E})/R(\mathcal{E})$ et on appelle ce nombre la *pente* de $\mathcal{E}$.

**Exemple :** Si $\mathcal{E}$ est localement libre, on a

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) \;=\; n.\deg(\mathcal{E}_{|C}) + \frac{n(n-1)}{2} rg(\mathcal{E}_{|C})\deg(L).$$

Si le support de $\mathcal{E}$ est contenu dans $C$ (c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $C$ vu comme faisceau sur $C_n$), on a $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{E}_{|C})$ .

**4.1.5.** *Fonctions caractéristiques* - Soit $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini,

$$M_{n+1} = \{0\} \subset M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1 = M$$

sa filtration canonique. On associe à $M$ sa *fonction caractéristique*, c'est la fonction linéaire par morceaux

$$F(M) : [0,n] \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$k \in \{0,\ldots,n\} \longmapsto R(M_{n+1-k}) = \sum_{i=n+1-k}^{n} rg(M_i/M_{i+1})$$

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $C_n$, on définit de même sa fonction caractéristique $F(\mathcal{E})$.

On définit de même la *seconde fonction caractéristique* de $M$ ou de $\mathcal{E}$, à partir de leur seconde filtration canonique.

Plus généralement à toute filtration $\sigma$ de $M$ dont les gradués sont des $\mathcal{O}_{C,P}$-modules est associée de manière évidente une fonction caractéristique $F_M(\sigma)$ .

**4.1.6. Propriétés des filtrations canoniques et des fonctions caractéristiques -** Les démonstrations des résultats suivants sont faciles et laissées au lecteur.

1 - La fonction caractéristique d'un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini ou d'un faisceau cohérent sur $C_n$ est une fonction convexe.

2 - La seconde fonction caractéristique d'un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini ou d'un faisceau cohérent sur $C_n$ est une fonction concave.

3 - *Fonction caractéristique générique.* Soient $N$ un entier positif, $N = pn + m$, avec $0 \leq m < n$, et $M_0 = p\mathcal{O}_{n,P} \oplus \mathcal{O}_{m,P}$ (resp. $\mathcal{E}_0 = p\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_m$), qui est de rang généralisé $N$. Soit $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module (resp. $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$) de rang généralisé $N$. Alors on a $F(M) \leq F(M_0)$ (resp. $F(\mathcal{E}) \leq F(\mathcal{E}_0)$).

4 - Soient $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini et $\sigma$ une filtration de $M$ dont les gradués sont des $\mathcal{O}_{C,P}$-modules. Alors on a $F_M(\sigma) \geq F(M)$ , avec égalité si et seulement si $\sigma$ est la filtration canonique de $M$.

### 4.2. Théorème de Riemann-Roch généralisé

**4.2.1. Théorème :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. Alors on a*

$$\chi(\mathcal{E}) \;=\; \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})(1-g_C).$$

Cela découle évidemment du théorème de Riemann-Roch habituel sur $C$ et des définitions de $R(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Deg}(\mathcal{E})$.

**4.2.2.** *Polynôme de Hilbert* - Soient $\mathcal{O}_n(1)$ un fibré en droites très ample sur $C_n$, $\mathcal{O}_C(1)$ sa restriction à $C$ et $\delta = deg(\mathcal{O}_C(1))$. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $C_n$ et $m$ un entier, on pose comme d'habitude $\mathcal{O}_n(m) = \mathcal{O}_n(1)^{\otimes m}$, $\mathcal{E}(m) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{C_n}} \mathcal{O}_n(m)$, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $C$, $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(m)$. On a un isomorphisme canonique $Gr(\mathcal{E}(m)) \simeq Gr(\mathcal{E})(m)$ , d'où on déduit immédiatement $R(\mathcal{E}(m)) = R(\mathcal{E})$ , $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}(m)) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})\delta m$ . Le polynôme

$$P_{\mathcal{E}}(X) \;=\; \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})(1-g_C) + R(\mathcal{E})\delta \cdot X$$

s'appelle le *polynôme de Hilbert de $\mathcal{E}$*. On a donc $P_{\mathcal{E}}(m) = \chi(\mathcal{E}(m))$ pour tout entier $m$.

### 4.3. Propriétés du rang et du degré généralisés

Soit $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. Si la limite

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\dim_{\mathbb{C}}(M \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{n,P}/(x^p))\right)$$

existe et est finie, on note $R_0(M)$ sa valeur, et on dit que $R_0(M)$ *est défini.*

**4.3.1. Théorème :** *Soit $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. Alors $R_0(M)$ est défini et on a $R_0(M) = R(M)$ .*

*Démonstration.* Traitons d'abord le cas où $M$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module. On a alors $M \simeq T \oplus r\mathcal{O}_{C,P}$, $T$ étant le sous-module de torsion de $M$ et $r = rg(M) = R(M)$. Puisque $T$ est de type fini il existe un entier $p_0 > 0$ tel que $T$ soit annulé par $x^{p_0}$. On a donc si $p \geq p_0$
$\dim_C(M \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{n,P}/(x^p)) \;=\; \dim_C(T) + rp$ , et le théorème en découle immédiatement.

Montrons maintenant que si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_{n,P}$-modules de type fini et si le théorème 4.3.1 est vrai pour deux des modules $M'$, $M$, $M''$, alors il est vrai pour le troisième. Pour tout $p > 0$ on a une suite exacte

$$\mathrm{Tor}^1(M'', \mathcal{O}_{n,P}/(x^p)) \longrightarrow M' \otimes \mathcal{O}_{n,P}/(x^p) \longrightarrow M \otimes \mathcal{O}_{n,P}/(x^p) \longrightarrow M'' \otimes \mathcal{O}_{n,P}/(x^p) \longrightarrow 0.$$

Il existe un entier $N$ tel que pour tout $q > 0$ on ait $\dim_C(\mathrm{Tor}^1(M'', \mathcal{O}_{n,P}/(x^q))) \leq N$. Pour le voir on considère la résolution de $\mathcal{O}_{n,P}/(x^p)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{n,P} \xrightarrow{\times x^p} \mathcal{O}_{n,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{n,P}/(x^p).$$

Il en découle que $\mathrm{Tor}^1(M'', \mathcal{O}_{n,P}/(x^p)))$ est isomorphe au sous-module $M''_p$ de $M''$ des éléments annulés par $x^p$. On a $M''_1 \subset M''_2 \subset \cdots \subset M''_p \subset M''_{p+1} \subset \cdots$ Puisque $M$ est noéthérien, cette suite stationnaire, d'où le résultat.

On a donc

$$0 \ \leq \ \dim_{\mathbb{C}}(M' \otimes \mathcal{O}_{n,P}/(x^p)) + \dim_{\mathbb{C}}(M'' \otimes \mathcal{O}_{n,P}/(x^p)) - \dim_{\mathbb{C}}(M \otimes \mathcal{O}_{n,P}/(x^p)) \ \leq \ N,$$

et l'assertion en découle immédiatement. On en déduit aussi que si $M$ a une filtration finie dont tous les gradués possèdent la propriété du théorème 4.3.1, alors il en est de même de $M$ (démonstration par récurrence sur la longueur de la filtration).

Pour achever la démonstration du théorème 4.3.1, on utilise la filtration canonique de $M$. Ses gradués sont des $\mathcal{O}_{C,P}$-modules, donc le théorème 4.3.1 est vrai pour eux. Il est donc vérifié aussi pour $M$. □

**4.3.2. Corollaire :** *1 - Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_{n,P}$*-modules de type fini. Alors on a* $R(M) = R(M') + R(M'')$ .

*2 - Soit* $0 \to E \to F \to G \to 0$ *une suite exacte de faisceaux cohérents sur* $C_n$*. Alors on a* $R(F) = R(E) + R(G)$ , $\mathrm{Deg}(F) = \mathrm{Deg}(E) + \mathrm{Deg}(G)$ .

*Démonstration.* La démonstration de 1- est contenue dans celle du théorème 4.3.1. On en déduit l'assertion de 2- sur les rangs généralisés. Celle concernant les degrés découle du théorème de Riemann-Roch généralisé et du fait que $\chi(F) = \chi(E) + \chi(G)$ . □

**4.3.3. Proposition :** *1 - Le rang généralisé des* $\mathcal{O}_{n,P}$*-modules de type fini est invariant par déformation.*

*2 - Le rang et le degré généralisés des faisceaux cohérents sur* $C_n$ *sont invariants par déformation.*

La seconde assertion signifie que si $\mathcal{E}$ est une famille plate de faisceaux cohérents sur $C_n$ paramétrée par une variété algébrique $S$, et si $s_0 \in S$ est un point fermé, il existe un ouvert $U \subset S$ contenant $s_0$ tel que pour tout point fermé $s$ de $U$ ont ait $R(\mathcal{E}_s) = R(\mathcal{E}_{s_0})$ et $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}_s) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E}_{s_0})$. Pour démontrer 2- on utilise le fait que le polynôme de Hilbert des faisceaux cohérents (cf. 4.3) est invariant par déformation, et 1- peut se déduire de 2-.

**4.3.4. Remarque :** Le rang habituel d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $C_n$ est défini de la façon suivante : pour tout point $P$ de $C$, soit $r_P$ le nombre minimal de générateurs du $\mathcal{O}_{n,P}$-module $\mathcal{E}_P$. Alors il existe un ouvert non vide $U$ de $C$ sur lequel $r_P$ prend sa valeur minimale. La valeur de $r_P$ en les points de $U$ est le *rang* de $\mathcal{E}$. Il est noté $rg(\mathcal{E})$. Pour ce rang, on va montrer par un exemple que les propositions 4.3.2 et 4.3.3 sont fausses. Supposons pour simplifier que $C_n$ soit plongée dans une surface. soient $p$, $q$ des entiers positifs tels que $p + q \leq n$. Alors on a une suite exacte canonique $0 \to \mathcal{O}_p(-qC) \to \mathcal{O}_{p+q} \to \mathcal{O}_q \to 0$ . Mais on a $rg(\mathcal{O}_p(-qC)) = rg(\mathcal{O}_{p+q}) = rg(\mathcal{O}_q) = 1$ , ce qui contredit la proposition 4.3.2. D'autre part, l'extension précédente montre que $\mathcal{O}_{p+q}$ est une déformation de $\mathcal{O}_p(-qC) \oplus \mathcal{O}_q$, ce qui contredit la proposition 4.3.3.

## 5. Faisceaux quasi localement libres

On reprend les notations de 4.

### 5.1. Modules quasi libres et faisceaux cohérents quasi localement libres

Soit $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. On dit que $M$ est *quasi libre* s'il existe des entiers $m_1, \ldots, m_n$ non négatifs et un isomorphisme $M \simeq \bigoplus_{i=1}^n m_i \mathcal{O}_{i,P}$ .

**5.1.1. Lemme :** *Les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont uniquement déterminés.*

*Démonstration.* Posons $M = \bigoplus_{i=1}^n m_i \mathcal{O}_{i,P} = \bigoplus_{i=1}^n m_i \mathcal{O}_{n,P}/(z^i)$ . Alors on a, pour $0 \leq i < n$, $\dim_{\mathbb{C}}(z^i M/(z^i, x)M) = m_{i+1} + 2m_{i+2} + \cdots + (n-i)m_n$ , ce qui permet de retrouver les $m_i$ à partir de $M$. □

On dit alors que $M$ est *de type* $(m_1, \ldots, m_n)$. On a $R(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^n i.m_i$ .

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre* en un point $P$ de $C$ s'il existe un ouvert $U$ de $C_n$ contenant $P$ et des entiers non négatifs $m_1, \ldots, m_n$ tels que pour tout point $Q$ de $U$, $\mathcal{E}_{n,Q}$ soit quasi localement libre de type $m_1, \ldots, m_n$. Les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont uniquement déterminés d'après le lemme précédent, ne dépendent que de $\mathcal{E}$, et on dit que $(m_1, \ldots, m_n)$ est le *type de* $\mathcal{E}$.

On dit que $\mathcal{E}$ est quasi localement libre s'il l'est en tout point de $C_n$.

**5.1.2.** *Extensions de modules quasi libres (ou de faisceaux quasi localement libres)* - Il est évident qu'un somme directe finie de modules quasi libres (resp. de faisceaux quasi localement libres) est quasi libre (resp. quasi localement libre). Mais il est faux qu'une extension de modules quasi libres (ou de faisceaux quasi localement libres) le soit. Par exemple soit $\mathcal{I}_P$ l'idéal $(x, z) \subset \mathcal{O}_{n,P}$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{n-1,P} \xrightarrow{i} \mathcal{I}_P \xrightarrow{p} \mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow 0,$$

où $i$ est défini par $i(1) = z$, et $p$ par $p(ax + bz) = \overline{a}$, $\overline{a}$ désignant l'image de $a$ dans $\mathcal{O}_{C,P}$. Cependant $(x, z)$ n'est pas quasi libre, car $\mathcal{I}_P \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P} \simeq \mathcal{O}_{C,P} \oplus \mathbb{C}_P$ n'est pas libre.

**5.1.3. Théorème :** *Soit $M$ un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. Alors $M$ est quasi libre si et seulement si* $\mathrm{Gr}(M)$ *est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module libre.*

*Démonstration.* Il est clair que si $M$ est quasi libre, alors les termes de $\mathrm{Gr}(M)$ sont libres. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Gr}(M)$ soit libre. Alors les termes de $\mathrm{Gr}(M)$ sont libres, car sinon l'un d'entre eux aurait un sous-module de torsion non nul et il en serait de même de $\mathrm{Gr}(M)$. On démontre que $M$ est quasi libre par récurrence sur $n$, le résultat étant trivial si $n = 1$. Supposons donc que $n > 1$ et le résultat vrai pour $n - 1$. Alors $M_2$ est un $\mathcal{O}_{n-1,P}$-module de type fini dont le gradué est $\oplus_{i=2}^n M_i/M_{i+1}$, et ses termes sont donc libres. D'après l'hypothèse de récurrence, $M_2$ est quasi libre, donc il existe des entiers $m_1, \ldots, m_{n-1}$ tels que

$M_2 \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} m_i\mathcal{O}_{i,P}$ . D'autre part, il existe un entier $m$ tel que $M/M_2 = m\mathcal{O}_{C,P}$. On a donc une extension

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} m_i\mathcal{O}_{i,P} \longrightarrow M \longrightarrow m\mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow 0.$$

Posons $M_{2C} = M_2 \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}$.

D'après la construction bien connue des extensions et la résolution canonique de $\mathcal{O}_{C,P}$

$$\cdots \mathcal{O}_{n,P} \xrightarrow{\times z^{n-1}} \mathcal{O}_{n,P} \xrightarrow{\times z} \mathcal{O}_{n,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$$

l'extension précédente provient d'un morphisme $\phi : m\mathcal{O}_{n,P} \to M_2$ s'annulant sur $z^{n-1}(m\mathcal{O}_{n,P})$, ce qui est le cas de tous les morphismes, puisque $M_2$ est un $\mathcal{O}_{n-1,P}$-module. Plus précisément $M$ est isomorphe au conoyau de $\phi \oplus (\times z) : m\mathcal{O}_{n,P}/(z^{n-1}) \to M_2 \oplus m\mathcal{O}_{n,P}$.

Le morphisme $\phi$ est unique à un morphisme $m.z\mathcal{O}_{n,P} \to M_2$ près, c'est-à-dire que l'extension est en fait déterminée par l'élément de $mM_{2C}$ induit par $\phi$.

Montrons que $\phi$ est surjectif. Soit $\eta = (\phi, z) : m\mathcal{O}_{n,P} \to M_2 \oplus m\mathcal{O}_{n,P}$ . Alors on a $M \simeq \mathrm{coker}(\eta)$, la projection $p : M \to m\mathcal{O}_{C,P}$ étant induite par $M_2 \oplus m\mathcal{O}_{n,P} \to m\mathcal{O}_{n,P}$ et l'inclusion $M_2 \subset M$ par $M_2 \subset M_2 \oplus m\mathcal{O}_{n,P}$. Puisque $m\mathcal{O}_{C,P} = M_{|C}$, on a $\ker(p) = zM$. Si $a \in M_2$, $b \in m\mathcal{O}_{n,P}$, on note $\overline{(a,b)}$ l'image de $(a,b)$ dans $M$. Alors on a $p(\overline{(a,b)}) = 0$ si et seulement si $b$ est de la forme $b = z\beta$. La condition $M_2 = zM$ implique que pour tous $a \in M_2$ et $\beta \in M_2$ il existe $\gamma \in M_2$ et $\alpha \in m\mathcal{O}_{n,P}$ tels que $\overline{(a, z\beta)} = \overline{(z\gamma, z\alpha)}$, et donc il existe $v \in m\mathcal{O}_{n,P}$ tel que $(a, z\beta) = (z\gamma + \phi(v), z(\alpha + v))$ . Il en découle que $\mathrm{im}(\phi) + zM_2 = M_2$, donc

$$\mathrm{im}(\phi) + z(\mathrm{im}(\phi) + zM_2) \ = \ \mathrm{im}(\phi) + z^2M_2 \ = \ M_2.$$

On obtient de même $\mathrm{im}(\phi) + z^rM_2 = M_2$ pour tout $r > 0$, et en prenant $r = n-1$, on voit que $\mathrm{im}(\phi) = M_2$, c'est-à-dire que $\phi$ est surjectif.

Puisque l'extension est déterminée par l'élément de $mM_{2C}$ induit par $\phi$, on peut supposer que $\phi$ provient d'applications linéaires $\phi_i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{m_i}$ dont la somme $\mathbb{C}^m \to \oplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{C}^{m_i}$ est surjective. On se ramène donc au cas où on a une décomposition $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^k \oplus \left(\oplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{C}^{m_i}\right)$ , et où $\phi_i$ est la projection. Il en découle que $M$ est isomorphe à la somme directe de $k\mathcal{O}_{C,P}$ et des extensions

$$0 \longrightarrow m_i\mathcal{O}_{i,P} \longrightarrow N_i \longrightarrow m_i\mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow 0$$

définies par l'identité $\mathbb{C}^{m_i} \to \mathbb{C}^{m_i}$. Il est aisé de voir que $N_i = m_i\mathcal{O}_{i+1,P}$. On obtient finalement $M \simeq k\mathcal{O}_{C,P} \oplus \left(\oplus_{i=1}^{n-1} m_i\mathcal{O}_{i+1,P}\right)$ , ce qui démontre le théorème. □

**5.1.4. Corollaire :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. Alors $\mathcal{E}$ est quasi localement libre si et seulement si tous les termes de* $\mathrm{Gr}(\mathcal{E})$ *sont localement libres sur $C$.*

**5.1.5. Remarques :** 1 - Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. Alors $\mathrm{Gr}_2(\mathcal{E})$, le gradué de la seconde filtration canonique de $\mathcal{E}$, est localement libre si $\mathcal{E}$ est quasi localement libre. Mais la réciproque est fausse : le faisceau d'idéaux d'un point de $C$ n'est pas quasi localement libre, mais le gradué de sa seconde filtration canonique est localement libre.

2 - Il découle aisément de la démonstration du théorème 5.1.3 que si $\mathcal{E}$ est de type $(m_1, \ldots, m_n)$ et quasi libre en $P$, alors il existe un ouvert $U$ de $C_n$ contenant $P$ tel que $\mathcal{E}_{|U} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} m_i\mathcal{O}_{i|U}$ .

Du théorème 5.1.3 découle immédiatement le suivant, qui donne la structure générique des faisceaux cohérents sur $C_n$ :

**5.1.6. Théorème :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. Alors il existe un ouvert non vide $U$ tel que $\mathcal{E}$ soit quasi localement libre en tout point de $U$.*

## 5.2. Morphismes de modules quasi libres et morphismes de faisceaux cohérents quasi localement libres

**5.2.1. Théorème :** *1 - Soient $M$, $F$ des $\mathcal{O}_{n,P}$-modules quasi libres et $f : M \to F$ un morphisme surjectif. Alors* $\ker(f)$ *est quasi libre.*

*2 - Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents quasi localement libres sur $C_n$ et $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme surjectif. Alors* $\ker(\phi)$ *est quasi localement libre.*

*Démonstration.* On ne démontrera que 1-, 2- s'en déduisant aisément.

*Étape 1* - On suppose d'abord que $F$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module libre. On va se ramener au cas où $z^{n-1}M = \{0\}$. Soit $N = \ker(f)$. Le morphisme $f$ se factorise par $M_C = M \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}$ (vu comme $\mathcal{O}_{n,P}$-module) :

$$f : M \twoheadrightarrow M_C \xrightarrow{\overline{f}} F$$

On peut donc supposer que $F$ est un quotient libre de $M_C$. Posons

$$M \;=\; \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{i,P}, \qquad F \;=\; F_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,P},$$

où $M_1, \ldots, M_n, F_1$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Les éléments de $M$ sont donc des sommes $w_1 + \cdots + w_n$, avec $w_i \in M_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{i,P}$. On note $\overline{w_i}$ l'image de $w_i$ dans $M_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,P}$. Le morphisme $\overline{f}$ provient d'une application linéaire $\overline{f} : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to F_1$ . Soit $\overline{N}$ son noyau. On a

$$N \;=\; \left\{ w_1 + \cdots + w_n \in M \;;\; \overline{w_1} + \cdots + \overline{w_n} \in \overline{N} \right\}.$$

Soit $N_n \subset M_n$ l'image de la projection $\overline{N} \to M_n$. D'après la description précédente on a

$$z^{n-1}N \;=\; N_n \otimes_{\mathbb{C}} (z^{n-1}\mathcal{O}_{n,P}) \;\subset\; M_n \otimes_{\mathbb{C}} (z^{n-1}\mathcal{O}_{n,P}) = z^{n-1}M.$$

Soit $N'_n \subset M_n$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $N_n$. On a

$$M/z^{n-1}N \;=\; (M_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{1,P}) \oplus \cdots \oplus (M_{n-2} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n-2,P}) \oplus \big((M_{n-1} \oplus N_n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n-1,P})\big) \oplus (N'_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n,P}),$$

donc $M/z^{n-1}N$ est quasi libre. Supposons que l'on puisse prouver le résultat si $z^{n-1}N = \{0\}$. Si $z^{n-1}N \neq \{0\}$, on en déduit que $N/z^{n-1}N$ est quasi libre : on voit aisément que c'est le noyau d'un morphisme surjectif de $M/z^{n-1}N$ dans un $\mathcal{O}_{C_P}$-module libre. Donc d'après le théorème 5.1.3 $Gr(N/z^{n-1}N)$ est libre. On a $Gr(N) = Gr(N/z^{n-1}N) \oplus z^{n-1}N$, donc $Gr(N)$ est libre, et d'après le théorème 5.1.3 $N$ est quasi libre.

*Étape 2* - On suppose toujours que $F$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module libre. D'après l'étape 1 il suffit de traiter le cas où $z^{n-1}N = \{0\}$. On démontre que $N$ est quasi libre par récurrence sur $n$. C'est

évident si $n = 1$. Supposons que $n > 1$ et que ce soit vrai pour $n - 1$. On a $\overline{N} \subset M_1 \oplus \cdots M_{n-1}$, et on peut supposer que $F = \big((M_1 \oplus \cdots M_{n-1})/\overline{N}\big) \oplus M_n$ . Soient

$$f' : (M_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{1,P}) \oplus \cdots \oplus (M_{n-1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n-1,P}) \longrightarrow F' = \big((M_1 \oplus \cdots M_{n-1})/\overline{N}\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,P}$$

et $N' = \ker(f')$. Alors $f'$ est surjectif et $N = N' \oplus (M_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n-1,P})$. D'après l'hypothèse de récurrence $N'$ est quasi libre, donc il en est de même pour $N$. Le théorème 5.2.1 est donc démontré dans les cas où $F$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module.

*Étape 3* - On traite maintenant le cas général, par récurrence sur le plus petit entier $m$ tel que $F$ soit un $\mathcal{O}_{m,P}$-module, c'est-à-dire tel que $z^m F = \{0\}$. Le cas $m = 1$ a déjà été traité. Supposons que $m > 1$ et que ce soit vrai pour $m - 1$. Soient $N = \ker(f)$, $X$ le noyau du morphisme canonique $F \to F_C = F \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}$ et $N_0$ le noyau du morphisme composé surjectif

$$M \overset{f}{\twoheadrightarrow} F \twoheadrightarrow F_C.$$

On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & X \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & F_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & X \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

D'après l'étape 2, $N_0$ est quasi libre, et d'après l'hypothèse de récurrence et la suite exacte verticale de gauche, $N$ est quasi libre. Ceci achève la démonstration du théorème 5.2.1. □

### 5.3. Déformations des $\mathcal{O}_{n,P}$-modules quasi libres

**5.3.1. Conjecture :** *Soient $M$, $N$ des $\mathcal{O}_{n,P}$-modules quasi libres. Alors $N$ est une déformation de $M$ si et seulement si on a $R(M) = R(N)$ et $F(M) \leq F(N)$.*

Ce résultat est démontré dans le cas où $n = 2$ (cf. 7.3).

## 6. Faisceaux cohérents sur les courbes doubles

Soient $C_2$ une courbe projective double primitive et $C = C_1 \subset C_2$ sa filtration canonique. Soit $L$ le fibré en droites associé sur $C$, qui n'est autre que $\mathcal{I}_C$, le faisceau d'idéaux de $C$ dans $C_2$. On notera $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_{C_2}$.

Si $P \in C$, on notera $z_P$ (ou $z$ s'il n'y a pas d'ambiguité) une équation locale de $C$ dans $\mathcal{O}_{2,P}$, et $x_P$ (ou $x$ s'il n'y a pas d'ambiguité) un élément de $\mathcal{O}_{2,P}$ au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$.

### 6.1. Structure des faisceaux quasi-localement libres sur $C_2$

**6.1.1. Première filtration canonique -** Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent quasi localement libre sur $C_2$, $0 \subset E \subset \mathcal{F}$ sa filtration canonique, et $F = \mathcal{F}/E$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

et $E$, $F$ sont des fibrés vectoriels sur $C$. Soit $\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{F}$ le morphisme canonique. On a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_C \simeq F \otimes L$ , $\mathrm{im}(\Phi_{\mathcal{F}}) = E$ , donc on peut voir $\Phi_{\mathcal{F}}$ comme un morphisme surjectif $F \otimes L \to E$. On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(F,E)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F,E) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(F,E)) \longrightarrow 0$$

découlant de la suite spectrale des Ext. D'après le théorème 3.1.1 Il existe un faisceau localement libre $\mathbb{F}$ (resp. $\mathbb{L}$) sur $C_2$ extension de $F$ (resp. $L$). On a une résolution localement libre de $F$

$$\cdots \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{F} \otimes \mathbb{L} \xrightarrow{f_1} \mathbb{F} \xrightarrow{f_0} F \longrightarrow 0,$$

qu'on construit en utilisant les suites exactes

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{i+1} \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^i \longrightarrow F \otimes L^i \longrightarrow 0.$$

On en déduit un isomorphisme canonique $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(F,E) \simeq \mathcal{H}om(F \otimes L, E)$. . On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(F^* \otimes E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F,E) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(F \otimes L, E) \longrightarrow 0.$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F,E)$ l'élément associé à la suite exacte $0 \to E \to \mathcal{F} \to F \to 0$ . Alors on a $\delta(\sigma) = \Phi_{\mathcal{F}}$ . Cela se voit aisément en utilisant la résolution localement libre précédente de $F$ ainsi que la construction des extensions de faisceaux déjà utilisée dans le démonstration du théorème 5.1.3.

**6.1.2. Seconde filtration canonique -** Soient $\Gamma$ le noyau de $\Phi_{\mathcal{F}} \otimes I_{L^*} : F \to E \otimes L^*$ et $G$ celui du morphisme composé

$$\mathcal{F} \longrightarrow F \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{F}} \otimes I_{L^*}} E \otimes L^*.$$

On a donc des suites exactes

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow E \otimes L^* \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

Alors le faisceau $G$ est localement libre sur $C$. C'est le plus grand sous-faisceau de $\mathcal{F}$ de support $C$. Autrement dit, $0 \subset G \subset \mathcal{F}$ est la seconde filtration canonique de $\mathcal{F}$.

**6.1.3. Réciproque - Construction de faisceaux quasi localement libres -** Soit $\Phi : F \otimes L \to E$ un morphisme surjectif. Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F, E)$ au dessus de $\Phi$ et

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

l'extension associée à $\sigma$. Alors il est facile de voir que la filtration canonique de $\mathcal{F}$ est $0 \subset E \subset \mathcal{F}$.

**6.1.4. Notations :** $E_{\mathcal{F}} = E$ , $F_{\mathcal{F}} = F$ , $G_{\mathcal{F}} = G$ , $\Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma$ .

**6.1.5. Produits tensoriels -** Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux quasi localement libres sur $C_2$, alors on a $E_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}} = E_{\mathcal{E}} \otimes E_{\mathcal{F}} \otimes L^*$, $F_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}} = F_{\mathcal{E}} \otimes F_{\mathcal{F}}$, $G_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}} = G_{\mathcal{E}} \otimes G_{\mathcal{F}} \otimes L^*$ .

## 6.2. Résolutions localement libres de faisceaux quasi localement libres

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur $C_2$ . Alors on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F_{\mathcal{E}}, F_{\mathcal{E}} \otimes L) \arrow[r, "a"] \arrow[d, two heads, "p"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F_{\mathcal{E}}, F_{\mathcal{E}} \otimes L) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{End}(F_{\mathcal{E}} \otimes L) \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{E}}) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}(F_{\mathcal{E}} \otimes L, E_{\mathcal{E}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant induites par $\Phi_{\mathcal{E}}$ .

**6.2.1. Lemme :** *Soit* $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{E}})$ *correspondant à* $\mathcal{E}$. *Alors on a* $\sigma \in \mathrm{im}(\pi)$ .

*Démonstration.* On a $\beta(\sigma) = \Phi_{\mathcal{E}} = q(I_{F_{\mathcal{E}}\otimes L})$ . Soit $\theta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F_{\mathcal{E}}, F_{\mathcal{E}} \otimes L)$ tel que $b(\theta) = I_{F_{k}e\otimes L}$ . On a $\beta \circ \pi(\theta) = \Phi_{\mathcal{E}}$ , donc $\sigma - \pi(\theta) \in \mathrm{im}(\alpha)$ . Puisque $p$ est surjective, il existe $\lambda \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F_{\mathcal{E}}, F_{\mathcal{E}} \otimes L)$ tel que $\sigma - \pi(\theta) = \alpha \circ p(\lambda)$ . On a donc $\sigma = \pi(\theta + \alpha(\lambda))$ . □

Il existe donc un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{\mathcal{E}} \otimes L \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & F_{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_{\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & F_{\mathcal{E}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les suites exactes horizontales proviennent des premières filtrations canoniques. Le morphisme $f$ est surjectif et on a $\ker(f) = \Gamma_{\mathcal{E}} \otimes L$ . On a d'autre part comme dans 6.1.1 une résolution localement libre de $\Gamma_{\mathcal{E}} \otimes L$ :

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbb{L}^2 \xrightarrow{f_2} \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbb{L} \xrightarrow{f_1} \Gamma_{\mathcal{E}} \otimes L \longrightarrow 0$$

où $\mathbf{\Gamma}$ est un fibré vectoriel sur $C_2$ extension de $\Gamma_{\mathcal{E}}$ . On en déduit une résolution localement libre de $\mathcal{E}$

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbb{L}^2 \xrightarrow{f_2} \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbb{L} \xrightarrow{f_1} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

**6.2.2. Corollaire :** *On a, pour tout* $i \geq 1$ *et tout faisceau quasi localement libre* $\mathcal{G}$ *sur* $C_2$ *un isomorphisme canonique* $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}om(\Gamma_{\mathcal{E}} \otimes L^i, \Gamma_{\mathcal{G}})$ .

### 6.3. Structure des faisceaux sans torsion sur $C_2$

**6.3.1.** *Faisceaux de torsion sur $C$* - Soient $P \in C$ et $N$ un $\mathcal{O}_{C,P}$-module de torsion. Alors il existe des entiers $n_1, \dots, n_p$ uniques, tels que $n_1 \geq \cdots \geq n_p$ et que

$$N \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{C,P}/(x_P^{n_i}).$$

Soit $T$ un faisceau cohérent de torsion sur $C$. On pose $\widetilde{T} = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_C}(T, \mathcal{O}_C)$ . Alors on a $\widetilde{T} \simeq T$ (isomorphisme non canonique), mais on a un isomorphisme canonique $\widetilde{\widetilde{T}} \simeq T$. Soit $E$ est un fibré vectoriel sur $C$. Alors on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_C}(T, E) = \{0\}$ si $i \neq 1$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(T, E) \simeq \mathrm{Hom}(E^*, \widetilde{T})$. D'après la proposition 2.2.1 et le fait que $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_2}(E, \mathcal{O}_C)$ est de torsion, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(T, E) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, E)$ . Si $T$, $T'$ sont des faisceaux cohérents de torsion sur $C$ et $f : T \to T'$ un morphisme, on note $\widetilde{f}$ le morphisme induit $\widetilde{T'} \to \widetilde{T}$.

**6.3.2. Lemme :** *Soient $\mathbb{F}$ un fibré vectoriel sur $C_2$ et $F = \mathbb{F}_{|C}$. Alors*

*1 - Le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, F)$ est nul. On a donc un isomorphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, F \otimes L)$ .*

*2 - Pour tout $j \geq 2$ on a $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F}) = \{0\}$ , et si $j \geq 1$ on a*

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_2}(T, F) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, F \otimes (L^*)^{j-1}) \simeq \mathrm{Hom}(E^* \otimes L^{j-1}, \widetilde{T}) .$$

*Démonstration.* La conclusion de 1- découle de la suite exacte $0 \to F \otimes L \to \mathbb{F} \to F \to 0$ . Puisque $\mathcal{H}om(T, \mathbb{F}) = \mathcal{H}om(T, F) = 0$, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F}) \simeq H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F})), \qquad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, F) \simeq H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(T, F)),$$

et il suffit, pour prouver 1-, de montrer que le morphisme canonique $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F}) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(T, F)$ est nul. On se ramène donc au problème suivant : soient $i > 0$ un entier et $P \in C$, il faut montrer que le morphisme canonique

$$\Phi : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i), \mathcal{O}_{2,P}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i), \mathcal{O}_{C,P})$$

est nul. On utilise la résolution libre suivante de $\mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i)$ (en tant que $\mathcal{O}_{2,P}$-module) :

$$\cdots 2\mathcal{O}_{2,P} \xrightarrow{f} 2\mathcal{O}_{2,P} \xrightarrow{h} \mathcal{O}_{2,P} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i)$$

avec $f = \begin{pmatrix} z_P & -x_P^i \\ 0 & z_P \end{pmatrix}$ , $h = (z_P, x_P^i)$ . On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{2,P} \arrow[r, "{}^t h"] \arrow[d] & 2\mathcal{O}_{2,P} \arrow[r, "{}^t f"] \arrow[d, "\phi"] & 2\mathcal{O}_{2,P} \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{C,P} \arrow[r, "{}^t h \otimes I_{\mathcal{O}_{C,P}}"] & 2\mathcal{O}_{C,P} \arrow[r, "{}^t f \otimes I_{\mathcal{O}_{C,P}}"] & 2\mathcal{O}_{C,P}
\end{tikzcd}$$

On a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i), \mathcal{O}_{2,P}) \simeq \ker({}^t f)/\operatorname{im}({}^t h),$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i), \mathcal{O}_{C,P}) \simeq \ker({}^t f \otimes I_{\mathcal{O}_{C,P}})/\operatorname{im}({}^t h \otimes I_{\mathcal{O}_{C,P}}),$$

et $\Phi$ est induit par $\phi$. Un calcul simple montre que

$$\ker({}^t f)/\operatorname{im}({}^t h) \ \simeq\ ((z_P, x_P^i), (0, z_P))/((z_P, x_P^i)),$$

est donc engendré par la classe de $(0, z_P)$, dont l'image dans $2\mathcal{O}_{C,P}$ est nulle. On a donc $\Phi = 0$. Ceci démontre 1-.

Pour démontrer que $\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{O}_2}(T, \mathbb{F}) = \{0\}$ on utilise encore la résolution précédente de $\mathcal{O}_{C,P}/(x_P^i)$ et les autres assertions de 2- découlent alors de la suite exacte $0 \to F \otimes L \to \mathbb{F} \to F \to 0$ . $\square$

**6.3.3.** *Faisceaux sans torsion sur $C_2$* - Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur $C_2$, $0 \subset E \subset \mathcal{E}$ sa filtration canonique, $F \oplus T = \mathcal{E}/E$, $F$ étant localement libre et $T$ de torsion sur $C$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \oplus T \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathcal{F}$ le noyau du morphisme $\mathcal{E} \to T$. On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$(D1) \qquad \begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & F \oplus T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & T \arrow[r, equal] \arrow[d] & T \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Notons que $\mathcal{F}$ n'est pas uniquement déterminé, mais $E$, $F$ et $T$ le sont. On peut donc noter $E = E_{\mathcal{E}}$, $F = F_{\mathcal{E}}$, $T = T_{\mathcal{E}}$.

**6.3.4. Lemme :** *Le faisceau $\mathcal{F}$ est quasi localement libre et sa filtration canonique est $0 \subset E \subset \mathcal{F}$.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer la seconde assertion, qui entraîne le première d'après le théorème 5.1.3. Soit $P \in C$. Il suffit de montrer que $E_P \subset z_P \mathcal{F}_P$. Soit $e \in E_P$. Alors il existe $\epsilon \in \mathcal{E}_P$ tel que $e = z\epsilon$ (car $0 \subset E \subset \mathcal{E}$ est la filtration canonique de $\mathcal{E}$). Soit $q(\epsilon) = (f, t)$. Il existe $u \in \mathcal{E}_P$ tel que $q(u) = (0, t)$, et un entier $k > 0$ tel que $x_P^k t = 0$. On a donc $q(x_P^k u) = 0$, c'est-à-dire que $x_P^k u \in E_P$. On a donc $z_P x_P^k u = 0$, d'où $zu = 0$, car $\mathcal{E}$ est sans torsion. Soit $\epsilon' = \epsilon - u$. Alors on a $z\epsilon' = e$, et $p(\epsilon') = 0$, c'est-à-dire $\epsilon' \in \mathcal{F}_P$. On a donc $e \in z\mathcal{F}_P$. $\square$

Le morphisme canonique $\Phi_{\mathcal{F}} : F \otimes L \to E$ ne dépend pas de $\mathcal{F}$. En fait il est induit par $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_C \to \mathcal{E}$. On peut donc le noter $\Phi_{\mathcal{E}}$. On notera $\Gamma(\mathcal{E}) = \ker(\Phi_{\mathcal{E}})$.

On note $V_{\mathcal{E}}$ le noyau du morphisme surjectif $\mathcal{E} \to F$. Il est concentré sur $C$ et localement libre sur $C$ (pour le voir on remarque qu'il est contenu dans le premier terme de la seconde filtration canonique de $\mathcal{E}$ décrite plus loin).

On note $\sigma_{\mathcal{E}}$ l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T,\mathcal{F})$ associé à la suite exacte $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to T \to 0$ . D'après le diagramme commutatif précédent l'image de $\sigma_{\mathcal{E}}$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T,F)$ est nulle. On peut donc voir $\sigma_{\mathcal{E}}$ comme un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T,E)$, qui est indépendant du choix de $\mathcal{F}$ et défini à un automorphisme de $T$ près. Rappelons qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T,E) \;\simeq\; \mathrm{Hom}(E^*,\widetilde{T}).$$

**6.3.5. Lemme :** *Le morphisme* $\sigma_{\mathcal{E}} : E^* \to \widetilde{T}$ *est surjectif.*

*Démonstration.* On déduit de la suite exacte $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to T \to 0$ une injection $\mathrm{End}(T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T,\mathcal{F})$ . On voit aisément qu'elle associe à un automorphisme $\tau$ de $T$ le morphisme $\widetilde{\tau} \circ \sigma_{\mathcal{E}} : E^* \to \widetilde{T}$. Si $\sigma_{\mathcal{E}}$ n'est pas surjectif, il découle aisément de la description des faisceaux de torsion sur $C$ (cf. 6.3.1) qu'il existe $\tau \in \mathrm{End}(T)$ tel que $\widetilde{\tau} \circ \sigma_{\mathcal{E}} = 0$. □

**6.3.6. Remarques :** 1 - On montre aisément que $\sigma_{\mathcal{E}}$ est l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(T,E)$ associé à la suite exacte $0 \to E \to V_{\mathcal{E}} \to T \to 0$ . Ceci permet de redémontrer le lemme 6.3.5.

2 - *Réciproque* - Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent quasi localement libre sur $C_2$, $0 \subset E \subset \mathcal{F}$ sa filtration canonique, $F = \mathcal{F}/E$, et $\sigma : E^* \to \widetilde{T}$ un morphisme surjectif. On peut voir $\sigma$ comme un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T,E)$. On en déduit un élément $\sigma_0$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{F},T)$ et l'extension associée $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to T \to 0$ . Puisque l'image de $\sigma_0$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F,T)$ est nulle, on obtient le diagramme commutatif de 6.3.3. Soit $P \in C$. Puisque $E_P \subset z_P\mathcal{F}_P \subset z_P\mathcal{E}_P$, $0 \subset E \subset \mathcal{E}$ est la filtration canonique de $\mathcal{E}$. On montre aisément comme dans le lemme 6.3.5 que la surjectivité de $\sigma$ entraîne que $\mathcal{E}$ est sans torsion. Enfin, on a $\sigma_{\mathcal{E}} = \sigma$.

**6.3.7.** *Index d'un faisceau sans torsion* - On pose $i(\mathcal{E}) = h^0(T)$ , qu'on appelle l'*index* de $\mathcal{E}$.

**6.3.8.** *Seconde filtration canonique* - Soit $G_{\mathcal{E}}$ le noyau du morphisme composé

$$\mathcal{E} \longrightarrow F \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}} \otimes I_{L^*}} E \otimes L^*.$$

On a donc un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$(D) \qquad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & G_{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] & 0 \\
 & E \otimes L^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \otimes L^* \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Il est aisé de voir que le faisceau $G_{\mathcal{E}}$ est concentré sur $C$ et localement libre sur $C$. De plus, $0 \subset G_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$ est la seconde filtration canonique de $\mathcal{E}$.

**6.3.9.** *Familles de faisceaux sans torsion* - Soit $S$ une variété algébrique. On appelle *famille de faisceaux sans torsion sur $C_2$ paramétrée par $S$* un faisceau cohérent $\mathcal{K}$ sur $S \times C_2$, plat sur $S$ et tel que pour tout point fermé $s \in S$, $\mathcal{K}_s$ soit sans torsion sur $C_2$.

**6.3.10.** *Exemples* - Soient $P \in C$ $k \geq 1$ un entier et $\beta \in \mathcal{O}_{C,P}$. On pose $x = x_P$, $z = z_P$. On note $\mathcal{L}_{k,P,x,\beta}$ le faisceau d'idéaux sur $C_2$ tel que pour tout $Q \in C\backslash\{P\}$, on ait $(\mathcal{L}_{k,P,x,\beta})_Q = \mathcal{O}_{2,P}$ , et $(\mathcal{L}_{k,P,x,\beta})_P = (x^k + \beta z)$ . C'est un faisceau localement libre, donc un fibré en droites sur $C_2$. On a $\mathcal{L}_{k,P,x,\beta|C} = \mathcal{O}_C(-kP)$ . Pour tout entier $k \geq 1$ on note $\mathcal{I}_{k,P}$ le faisceau d'idéaux du sous-schéma $kP$ de $C$. On a donc $\mathcal{I}_{k,P,x} = (x^k, z)$ . On a un isomorphisme

$$(*) \qquad \mathcal{I}_{k,P|C} \simeq \mathcal{O}_C(-kP) \oplus T_k,$$

où $T_k$ est le faisceau de torsion nul en dehors de $P$ et tel que $T_{k,P} = \mathcal{O}_{C,P}/(x^k)$ . L'isomorphisme $(*)$ au point $P$ est

$$\alpha x^k + \gamma z \longmapsto (\pi(\alpha x^k), p(\gamma))$$

(où $\pi : \mathcal{O}_{C_2,P} \to \mathcal{O}_{C,P}$ et $p : \mathcal{O}_{C_2,P} \to \mathcal{O}_{C,P}/(x^k)$ sont les projections), donc il dépend du choix de $x$.

## 6.4. Plongements dans un faisceau quasi localement libre

On considère le faisceau sans torsion $\mathcal{E}$ de 6.3.3. On conserve les notations de 6.3.

**6.4.1. Proposition :** *Soit $\mu \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(E \otimes L^*, G_{\mathcal{E}})$ l'élément correspondant à la suite exacte $0 \to G_{\mathcal{E}} \to \mathcal{E} \to E \otimes L^* \to 0$ du diagramme $(D)$. Alors*

*1 - Il existe un $\nu \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(V_{\mathcal{E}} \otimes L^*, G_{\mathcal{E}})$ tel que $\mu$ soit l'image de $\nu$ par l'application*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(V_{\mathcal{E}} \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(E \otimes L^*, G_{\mathcal{E}})$$

*induite par l'inclusion $E \subset V_{\mathcal{E}}$.*

*2 - Soit $0 \longrightarrow G_{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow V_{\mathcal{E}} \otimes L^* \longrightarrow 0$ la suite exacte correspondant à $\nu$. Alors $\mathcal{U}$ est quasi localement libre sur $C_2$.*

*Démonstration.* On considère la suite exacte $0 \longrightarrow E \longrightarrow V_{\mathcal{E}} \longrightarrow T \longrightarrow 0$ . On en déduit le morphisme

$$\delta : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(E \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_2}(T \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}).$$

Il suffit, pour obtenir 1-, de prouver que $\delta(\mu) = 0$.

Les définitions de $V_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$ sont *locales* : on peut définir, pour tout $P \in C$ et tout $\mathcal{O}_{2,P}$-module sans torsion de type fini $M$, les $\mathcal{O}_{2,P}$-modules $V_M$, $G_M$, de telle sorte que $V_{\mathcal{E}P} = V_{\mathcal{E}_P}$, $G_{\mathcal{E}P} = G_{\mathcal{E}_P}$. On a $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_2}(T \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}) = H^0(Ext^2_{\mathcal{O}_2}(T \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}))$ , et on a, pour tout $P \in C$ un diagramme commutatif évident

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(E \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{ev} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(E_P \otimes L^*_P, G_{\mathcal{E}_P}) \\
\Big\downarrow \delta & & \Big\downarrow ev_P \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_2}(T \otimes L^*, G_{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{ev} & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{2,P}}(T_P \otimes L^*_P, G_{\mathcal{E}_P})
\end{array}$$

Pour montrer que $\delta(\mu) = 0$, il suffit donc de montrer que pour tout $P \in C$ on a $\delta_P(ev(\mu)) = 0$.

Les constructions de 6.3 sont *additives* : on a $V_{\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}'} = V_{\mathcal{E}} \oplus V_{\mathcal{E}'}$, $G_{\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}'} = G_{\mathcal{E}} \oplus G_{\mathcal{E}'}$, etc... C'est aussi le cas des constructions locales. Il suffit donc, d'après le corollaire 6.5.5, de traiter le cas où $(\mathcal{I}_{k,P})_P$. On est donc ramené au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{I}_{k,P}$. L'assertion 1- découle donc du diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L = G_{\mathcal{I}_{k,P}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{I}_{k,P} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_C(-kP) = E \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \mathcal{O}_2 \arrow[r] & \mathcal{O}_C = V_{\mathcal{I}_{k,P}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et de la proposition 4.3.1 de [9].

L'assertion 2- est aussi locale. On peut donc encore se ramener au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{I}_{k,P}$. Il faut montrer que pour tout diagramme commutatif avec lignes exactes de $\mathcal{O}_{2,P}$-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_P \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathcal{I}_{k,P})_P \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_C(-kP)_P \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_P \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathcal{O}_{C,P} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on a $M \simeq \mathcal{O}_{2,P}$. On a $L_P \simeq \mathcal{O}_C(-kP)_P \simeq \mathcal{O}_{C,P}$, et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}, \mathcal{O}_{C,P}) \simeq \mathcal{O}_{C,P}$ et on vérifie aisément que l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}, \mathcal{O}_{C,P})$ associé à la suite exacte du haut est de la forme $\alpha x_P^k$ (avec $\alpha \in \mathcal{O}_{C,P}$ inversible). D'autre part le morphisme $\mathcal{O}_{C,P} = \mathcal{O}_C(-kP)_P \hookrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ est la multiplication par $x_P^k$. Donc l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2,P}}(\mathcal{O}_{C,P}, \mathcal{O}_{C,P})$ associé à la suite exacte du bas est $\alpha$, d'où $M \simeq \mathcal{O}_{2,P}$. Ceci démontre 2- . $\square$

**6.4.2. Corollaire :** *Il existe un faisceau quasi localement libre $\mathcal{V}$ sur $C_2$ et un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G_{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & E \otimes L^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_{\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{V} \arrow[r] \arrow[d] & V_{\mathcal{E}} \otimes L^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & T \arrow[r, equal] \arrow[d] & T \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

*En particulier, $\mathcal{E}$ est isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif d'un faisceau quasi localement libre dans $T$.*

### 6.5. Dualité

Soient $P \in C$ et $M$ un $\mathcal{O}_{2,P}$-module de type fini. On note $M^\vee$ le *dual* de $M$ : $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{O}_{2,P})$ . Si $N$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module, on note $N^*$ le dual de $N$ : $N^* = \mathrm{Hom}(N, \mathcal{O}_{C,P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_n$. On note $\mathcal{E}^\vee$ le *dual* de $\mathcal{E}$ : $\mathcal{E}^\vee \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_2)$ . Si $E$ est un faisceau cohérent sur $C$, on note $E^*$ le dual de $E$ : $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_C)$. Ces notations sont justifiées par le fait que $E^\vee \neq E^*$ :

**6.5.1. Lemme :** *1 - Soit $N$ un $\mathcal{O}_{C,P}$-module de type fini. Alors on a $N^\vee \simeq N^*$. Si $N$ est libre on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{2,P}}(N, \mathcal{O}_{2,P}) = \{0\}$ si $i \geq 1$.*

*2 - Soit $E$ un faisceau cohérent sur $C$. Alors on a $E^\vee \simeq E^* \otimes L$. Si $E$ est localement libre on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_2}(E, \mathcal{O}_2) = \{0\}$ si $i \geq 1$.*

*Démonstration.* On ne démontrera que la seconde assertion, la première étant analogue. Soient $\mathbb{F}$ un fibré vectoriel sur $C_2$ et $F = \mathbb{F}_{|C}$. On a donc une suite exacte canonique $0 \to F \otimes L \to \mathbb{F} \to F \to 0$ . En examinant ce qui se passe en chaque point de $C$ on en déduit aisément la suite exacte duale $0 \to F^\vee \to \mathbb{F}^\vee \to (F \otimes L)^\vee \to 0$ . On a un morphisme canonique $\mathbb{F}^\vee \longrightarrow F^*$ évident. En examinant ce qui se passe en chaque point de $C$ on voit aisément que ce morphisme est surjectif et que son noyau est exactement $F^\vee$. On a donc $(F \otimes L)^\vee = F^*$, d'où $F^\vee = F^* \otimes L$. Pour démontrer 2- on peut se limiter au cas où $E$ est localement libre. D'après le théorème 3.1.1 il existe un prolongement de $E$ en un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur $C_2$. D'après ce qui précède on a bien $E^\vee = E^* \otimes L$.

Soit $\mathbb{L}$ une extension de $L$ à $C_2$. On a une résolution localement libre de $E$, en tant que faisceau sur $C_2$ :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

obtenue en juxtaposant les suites exactes $0 \to F \otimes L^{i+1} \to \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^i \longrightarrow F \otimes L^i \to 0$ . On en déduit immédiatement que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_2}(E, \mathcal{O}_2) = 0$ si $i \geq 1$. □

**6.5.2. Dualité des faisceaux quasi localement libres -** Les propriétés suivantes se démontrent aisément ce qui se passe en chaque point de $C$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent quasi localement libre, alors on a

$$E_{\mathcal{F}^\vee} \simeq E^*_{\mathcal{F}} \otimes L^2, \quad F_{\mathcal{F}^\vee} \simeq G^*_{\mathcal{F}} \otimes L, \quad G_{\mathcal{F}^\vee} \simeq F^*_{\mathcal{F}} \otimes L.$$

Le morphisme $\Phi_{\mathcal{F}^\vee} : F_{\mathcal{F}^\vee} \otimes L \to E_{\mathcal{F}^\vee}$ est le morphisme $G^*_{\mathcal{F}} \otimes L^2 \to E^*_{\mathcal{F}} \otimes L^2$ provenant de la suite exacte $0 \to E_{\mathcal{F}} \to G_{\mathcal{F}} \to \Gamma_{\mathcal{F}} \to 0$ .

Plus généralement, si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont des faisceaux quasi localement libres sur $C_2$, et si $\mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ , alors on a $E_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}om(E_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{F}} \otimes L)$ , $G_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}om(F_{\mathcal{E}}, G_{\mathcal{F}})$ , et des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{H}om(E_{\mathcal{E}}, \Gamma_{\mathcal{F}} \otimes L) \longrightarrow F_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma_{\mathcal{E}}, \Gamma_{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{H}om(E_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma_{\mathcal{E}}, E_{\mathcal{F}}) \oplus \mathcal{H}om(E_{\mathcal{E}}, \Gamma_{\mathcal{F}} \otimes L) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}om(\Gamma_{\mathcal{E}}, \Gamma_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0.$$

Il découle du lemme 6.5.1 que si $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux quasi localement libres sur $C_2$, alors la suite transposée $0 \to \mathcal{E}'^\vee \to \mathcal{E}^\vee \to \mathcal{E}''^\vee \to 0$ est aussi exacte.

Si $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ sont des faisceaux quasi localement libres sur $C_2$, le morphisme canonique $\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{F}' \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ n'est pas en général un isomorphisme (par exemple $\mathcal{O}_C^\vee \otimes \mathcal{O}_C = L$, $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_C$). On a en fait une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})^* \otimes \Gamma(\mathcal{F}') \otimes L \longrightarrow \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})^* \otimes \Gamma(\mathcal{F}') \longrightarrow 0.$$

**6.5.3. Dualité des faisceaux sans torsion -** Si $M$ est un $\mathcal{O}_{2,P}$-module de type fini et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion dur $C_2$, on a des morphismes canoniques $i_M : M \to M^{\vee\vee}$ , $i_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}$ .

On dit que $M$ (resp. $\mathcal{E}$) est *réflexif* si $i_M$ (resp. $i_{\mathcal{E}}$) est un isomorphisme.

**6.5.4. Proposition :** *1 - Un $\mathcal{O}_{2,P}$-module de type fini est réflexif si et seulement si il est sans torsion.*

*2 - Un faisceau cohérent sur $C_2$ est réflexif si et seulement si il est sans torsion.*

*Démonstration.* Il est clair que 2- découle de 1-. Soit $M$ un $\mathcal{O}_{2,P}$-module de type fini. Il est clair que si $M$ est réflexif, il est sans torsion. Pour démontrer la réciproque on peut utiliser une étude de la structure des $\mathcal{O}_{2,P}$-modules sans torsion analogue à 6.3.3. On trouve qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_{2,P}$-module quasi libre $N$ de $M$ tel que $T = M/N$ soit de torsion. On en déduit une suite exacte $0 \to M^\vee \to N^\vee \longrightarrow \widetilde{T} \to 0$ . Il est immédiat que $M^\vee$ est sans torsion. Montrons que $M \subset M^{\vee\vee}$ . Il faut prouver que pour tout $m \in M$ il existe $\phi \in M^\vee$ tel que $\phi(m) \neq 0$. C'est immédiat si $M$ est quasi libre. En général, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $x_P^k m \in N$. Puisque $N$ est quasi libre, il existe $\psi \in N^\vee$ tel que $\psi(x_P^k m) \neq 0$. D'autre part il existe un entier $p \geq 0$ tel que $x_P^p \psi \in M^\vee$. Il suffit donc de prendre $\phi = x_P^{k+p}\psi$. On a maintenant un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & T \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[u, hook] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement que $M^{\vee\vee} = M$. □

Soit $m \geq 1$ un entier. On note $I_{m,P} = (x^m, z)$ .

**6.5.5. Corollaire :** *Soit $M$ un $\mathcal{O}_{2,P}$-module sans torsion. Alors il existe des entiers $m$, $q$ et une suite d'entiers $n_1, \ldots, n_p$ tels que*

$$M \simeq \left( \bigoplus_{i=1}^{p} I_{n_i,P} \right) \oplus m\mathcal{O}_{2,P} \oplus q\mathcal{O}_{C,P}.$$

*Démonstration.* Comme dans la démonstration de la proposition 6.5.4 on montre qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_{2,P}$-module quasi libre $N$ de $M^\vee$ tel que $M^\vee/N$ soit un $\mathcal{O}_{C,P}$-module de torsion. Il en découle que $M^{\vee\vee} = M \subset N^\vee$ et que $N^\vee/M$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module de torsion. Le résultat découle alors du lemme suivant. □

**6.5.6. lemme :** *Soient $M$ un $\mathcal{O}_{2,P}$-module quasi libre, $T$ un $\mathcal{O}_{C,P}$-module de torsion et $\pi : M \to T$ un morphisme. Alors il des entiers $p$, $m$, $q$ et une suite d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p \geq 1$ tels que*

$$\ker(\pi) \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{p} I_{n_i,P}\right) \oplus m\mathcal{O}_{2,P} \oplus q\mathcal{O}_{C,P}.$$

*Démonstration.* Soient $N = \ker(\pi)$, $M_C = M \otimes_{\mathcal{O}_{2,P}} \mathcal{O}_{C,P}$, et $E$ le noyau de la restriction $M \to M_C$. Le morphisme $\pi$ se factorise par $M_C$ :

$$M \longrightarrow M_C \xrightarrow{\overline{\pi}} T$$

Soit $F = \ker(\overline{\pi})$ . Alors $E$ et $F$ sont des $\mathcal{O}_{C,P}$-modules libres. On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & M_C \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Posons $E = r\mathcal{O}_{C,P}$, $F = s\mathcal{O}_{C,P}$. On a donc une suite exacte $0 \to r\mathcal{O}_{C,P} \to N \to s\mathcal{O}_{C,P} \to 0$ . On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_P}(s\mathcal{O}_{C,P}, r\mathcal{O}_{C,P}) = L(\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^r) \otimes \mathcal{O}_{C,P}$ . La suite exacte précédente est donc associée à une matrice $A = (\phi_{ij})_{1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s}$ déléments de $\mathcal{O}_{C,P}$. On peut supposer que tous les $\phi_{ij}$ ne sont pas nuls. Si $\phi_{ij} \neq 0$, on pose $\phi_{ij} = x^{m_{ij}}\eta_{ij}$ , avec $\eta_{ij}$ inversible. On peut supposer que $\phi_{11} \neq 0$ et que $m_{11}$ est minimal. Dans ce cas en ajoutant des multiples de la première colonne de $A$ aux autres colonnes et en manipulant aussi les lignes, on se ramène au cas où $\phi_{1j} = 0$ si $j \neq 1$ et $\phi_{i1} = 0$ si $i \neq 1$. On fait la même chose avec la sous-matrice $A' = (\phi_{ij})_{2\leq i\leq r, 2\leq j\leq s}$, et se ramène au cas suivant : $A$ possède une sous-matrice carrée $B$ diagonale, et tous ses autres termes sont nuls. Le résultat découle alors immédiatement du fait que si $\beta \in \mathcal{O}_{C,P}$ est de la forme $\beta = x^m\alpha$, avec $\alpha$ inversible, et si $0 \to \mathcal{O}_{C,P} \to E \to \mathcal{O}_{C,P} \to 0$ l'extension correspondant à $\beta$, alors on a $E \simeq I_{m,P}$ . □

Le résultat suivant découle de 6.4. On en donne une autre démonstration.

**6.5.7. Corollaire :** *1 - Soit $M$ un $\mathcal{O}_{2,P}$-module de type fini et sans torsion. Alors il existe un module quasi libre $N$, un $\mathcal{O}_{C,P}$-module de torsion $T$ et un morphisme surjectif $\phi : N \to T$ tels que $M \simeq \ker(\phi)$.*

*2 - Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur $C_2$. Alors il existe un faisceau quasi localement libre $\mathcal{G}$ sur $C_2$, un faisceau de torsion $T$ sur $C$ et un morphisme surjectif $\phi : \mathcal{G} \to T$ tels que $\mathcal{E} \simeq \ker(\phi)$.*

*Démonstration.* On ne démontrera que 2-, 1- étant analogue. Le faisceau $\mathcal{E}^\vee$ est sans torsion. On a vu dans 6.3 qu'il existait un faisceau quasi localement libre $\mathcal{F}$ sur $C_2$, un faisceau de torsion $T_0$ sur $C$ et une suite exacte $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}^\vee \to T_0 \to 0$ . En dualisant cette suite exacte on obtient la suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(T_0, \mathcal{O}_2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^\vee, \mathcal{O}_2) \longrightarrow 0 \ .$$

On a $\mathcal{E}^{\vee\vee} = \mathcal{E}$ d'après la proposition 6.5.4, et $\mathcal{E}xt^1(T_0, \mathcal{O}_2) = L \otimes \widetilde{T_0}$ . Il suffit donc de prendre $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\vee$ et $T = \ker(\phi)$. On a en fait $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}^\vee, \mathcal{O}_2) = 0$ : cela se démontre en utilisant le corollaire 6.5.5 et des résolutions libres des modules $I_{n,P}$ (cf. la démonstration de la proposition 7.1.1). □

## 7. Déformations des faisceaux cohérents sur les courbes multiples

### 7.1. Schémas de Hilbert ponctuels sur $C_n$

Soit $d \geq 1$ un entier. Soit $U \subset C_n$ un ouvert affine tel qu'il existe un plongement de $U$ dans une surface affine lisse $S$. On note $\mathrm{Hilb}^d(C_n)_{|U}$ la sous-variété de $\mathrm{Hilb}^d(S)$ constituée des sous-schémas finis de longueur $d$ contenus dans $U$, et $\mathcal{T}$ la restriction à $\mathrm{Hilb}^d(C_n)_{|U} \times U$ du schéma universel $\mathcal{T}_0$ sur $\mathrm{Hilb}^d(S) \times S$. La structure de variété de $\mathrm{Hilb}^d(C_n)_{|U}$ est définie de la façon suivante : soit $p_0 : \mathrm{Hilb}^d(S) \times S \to \mathrm{Hilb}^d(S)$ la projection et $V = p_{0*}(\mathcal{T}_0)$, qui est un fibré vectoriel de rang $d$. Tout élément de l'idéal de $U$ dans $S$ induit une section de $V$, et $\mathrm{Hilb}^d(C_n)_{|U}$ est précisément le lieu des zéros de ces sections. Le schéma $\mathrm{Hilb}^q(C_n)_{|U}$ muni de $\mathcal{T}$ est le *schéma de Hilbert* des sous-schémas finis de longueur $q$ de $U$.

**7.1.1. Proposition :** *Soit $Z \subset U$ un sous-schéma fini de longueur $d > 0$ de support $P$, $T = \mathcal{O}_Z$. Alors si $Z$ est contenu dans $C$ le morphisme canonique* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(T,T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(T,T)$ *est un isomorphisme. Autrement dit l'inclusion* $\mathrm{Hilb}^d(C_n)_{|U} \subset \mathrm{Hilb}^d(S)$ *induit un isomorphisme entre les espaces tangents en $Z$.*

*Démonstration.* Cela découle du fait que l'équation de $U$ dans $S$ est une puissance $n$-ième de celle de $C$. □

Le résultat précédent implique que toute déformation infinitésimale (c'est-à-dire paramétrée par $\mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))$) de $T$ en tant que faisceau sur $S$ en est une de $T$ en tant que faisceau sur $C_n$, c'est-à-dire que c'est une famille de faisceaux dont le support est contenu dans $C_n$.

Les déformations de $Z$ en tant que sous-schéma de $C$ induisent des déformations de $T$ : elles correspondent au sous-espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(T,T) \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(T,T)$ de codimension $d$.

Quand $n = 2$ on peut décrire entièrement les sous-schémas $T$ de $C_2$ de support $P$ : Soit $Z$ un sous-schéma fini de longueur $d > 0$ de support $P$, $T = \mathcal{O}_Z$. Alors le schéma $Z$ est une intersection complète dans $U$. Deux cas peuvent se produire :

- $I = (x^{p+q}, zx^q)$, avec $p, q \geq 0$, $p + q > 0$, $d = p + 2q$ .
- $I = (x^{q+m+p} + zx^q\alpha, zx^{q+m})$, avec $m > 0$, $p, q \geq 0$, $p + 2q + 2m = d$, $\alpha \in \mathcal{O}_{C,P}$ inversible.

## 7.2. Déformations des faisceaux localement libres sur $C$

**7.2.1. Proposition :** *On suppose que $C_2$ est plongée dans une surface lisse $S$. Soit $E$ un fibré vectoriel sur $C$. Alors le morphisme canonique* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(E,E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(E,E)$ *est un isomorphisme.*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.1.1 il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ (resp. un fibré en droites $\mathbb{L}$) sur $C_2$ dont la restriction à $C$ est $E$ (resp. $L$). On a alors une résolution canonique de $E$ sur $C_2$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{E}\otimes\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow E\ .$$

On en déduit un isomorphisme $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(E,E) \simeq \mathcal{H}om(E\otimes L, E)$. D'autre part, en utilisant la résolution localement libre de $\mathcal{O}_C$ sur $S$ : $0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0$ on obtient $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_S}(E,\mathcal{O}_C) \simeq E\otimes L$. On en déduit, en utilisant la suite spectrale des Ext et la proposition 2.2.1 le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E,E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(E,E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(E\otimes L, E) \arrow[d, "\alpha"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_2}}(E,E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(E,E) \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_S}(E,\mathcal{O}_{C_2}), E) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Hom}(E\otimes L, E) \arrow[d] & & 0 \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\ker(\alpha) \simeq \mathrm{Hom}(E\otimes L, E)$, d'où $\alpha = 0$ et $\phi = 0$. □

**7.2.2. Remarque :** Ce résultat se généralise aisément de la façon suivante : soient $n$, $k$ des entiers avec $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$, $Y$ une courbe multiple plongée dans une surface lisse $S$, $C_1 = C \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = Y$ sa filtration canonique, et $E$ un fibré vectoriel sur $C_k$. Alors, si $2k \leq n$, le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(E,E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(E,E)$ est un isomorphisme.

**7.2.3. Théorème :** *Soient $p \geq 0$, $d$ des entiers et $E$ un fibré vectoriel de rang 2 et de degré $d$ sur $C$. Alors*

*1 - Si $E$ se déforme en faisceaux sans torsion sur $C_2$, non concentrés sur $C$ et d'index $p$, alors il existe un fibré en droites $V$ sur $C$ de degré $\frac{1}{2}(d+\deg(L)+p)$ et un morphisme non nul $\alpha : V \to E$ tels que* $\mathrm{Hom}((E/\mathrm{im}(\alpha))\otimes L, V) \neq \{0\}$ .

*2 - Si $E$ possède un sous-fibré en droites $V$ de degré $\frac{1}{2}(d+\deg(L)+p)$ tel que* $\mathrm{Hom}((E/V)\otimes L, V) \neq \{0\}$, *alors $E$ se déforme en faisceaux sans torsion sur $C_2$, non concentrés sur $C$ et d'index $p$.*

*Démonstration.* Démontrons d'abord 2- . Soit $D = E/V$. On peut supposer que $D \otimes L \subset V$, et il existe un unique sous-schéma $Z \subset C$ de dimension 0 tel que $V/(D \otimes L) \simeq \mathcal{O}_Z$. Alors il existe des faisceaux $\mathcal{E}$ sans torsion sur $C_2$, non concentrés sur $C$, d'index $p$, de première filtration canonique $0 \subset D \otimes L \subset \mathcal{E}$, tels que $V_{\mathcal{E}} = V$ et que le morphisme canonique $D \otimes L \to V_{\mathcal{E}}$ soit l'inclusion $D \otimes L \subset V$. On a donc une suite exacte $0 \to V \to \mathcal{E} \to D \to 0$ . On a aussi une suite exacte $0 \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow 0$. La famille des extensions de $D$ par $V$ (paramétrée par $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(D, V)$) est donc une déformation de $E$ dont le faisceau générique est sans torsion, non concentré sur $C$ et d'index $p$.

On démontre maintenant 1-. Supposons que $E$ soit une déformation de faisceaux sans torsion non concentrés sur $C$ et d'index $p$. Il existe donc un germe de courbe lisse $(Y, 0)$, une famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur $C_2$ paramétrée par $Y$ telle que si $y \neq 0$, $\mathcal{F}_y$ soit de rang généralisé 2, sans torsion, non concentré sur $C$, d'index $p$, et que $\mathcal{F}_0 \simeq E$. La famille de fibrés en droites sur $C$ $(V_{\mathcal{F}_y})_{y \in Y \setminus \{0\}}$ se prolonge en 0 et la restriction $\mathrm{Pic}(C_2) \to \mathrm{Pic}(C)$ admet des sections locales. Il existe donc un fibré en droites $\mathcal{V}$ sur $C_2 \times Y$ tel que pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$ on ait $\mathcal{V}_{y|C} \simeq V_{\mathcal{F}_y}$. En remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} \otimes \mathcal{V}^{-1}$ on se ramène au cas où pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$ on a $V_{\mathcal{F}_y} = \mathcal{O}_C$.

On va démontrer 1-, avec $V = \mathcal{O}_C$. Soient $t$ un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,0}$ et $p_2 : C_2 \times Y \to C_2$ la projection. Il existe un morphisme

$$\pi : p_2^*(\mathcal{O}_C)_{|Y \setminus \{0\}} \longrightarrow \mathcal{F}_{|Y \setminus \{0\}}$$

tel que pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$ on ait $\mathrm{im}(\pi_y) = V_{\mathcal{F}_y}$. On va montrer qu'il existe un entier $k$ tel que $t^k \pi$ se prolonge en un morphisme $\gamma : p_2^*(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{F}$ non nul en 0. Il suffit de montrer que c'est vrai au voisinage de tout point de $C$. Soient $P \in C$, et $\sigma : \mathcal{O}_{C_2 \times (Y \setminus \{0\})} \longrightarrow \mathcal{F}_{|Y \setminus \{0\}}$ le composé de $\pi$ et de la projection $\mathcal{O}_{C_2 \times (Y \setminus \{0\})} \to p_2^*(\mathcal{O}_C)_{|Y \setminus \{0\}}$, qui est donc une section de $\mathcal{F}_{|Y \setminus \{0\}}$. Alors $\mathcal{F}_{(P,0)}$ est un $(\mathcal{O}_{2,P} \otimes \mathcal{O}_{Y,0})$-module, et on déduit de $\sigma$ un élément $\sigma_P$ du localisé $\mathcal{F}_{(P,0),(t)}$. Il existe un entier $p$ tel que $t^p \sigma_P$ se prolonge en un élément $\gamma_P$ de $\mathcal{F}_{(P,0)}$. On peut supposer que $p$ est minimal. Il reste à montrer que $(\gamma_P)_0$, l'image de $\gamma_P$ dans le $\mathcal{O}_{2,P}$-module $(\mathcal{F}_0)_P$, est non nul. Si $(\gamma_P)_0 = 0$, on a $\gamma_P \in t\mathcal{F}_{(P,0)}$. On a donc $\gamma_P = t\nu$, avec $\nu \in \mathcal{F}_{(P,0)}$, d'où $t^p \sigma_P = t\nu$. Mais, puisque $\mathcal{F}$ est plat sur $Y$, la multiplication par $t$ est injective. Donc $t^{p-1}\sigma_P = \nu$, ce qui contredit la minimalité de $p$. On a donc $(\gamma_P)_0 \neq 0$.

Il en découle que $\mathcal{O}_C \subset E$ et $\mathcal{D} = \mathrm{coker}(\gamma)$ est une famille plate de faisceaux de rang 1 sur $C$. Pour tout $y \in Y \setminus \{0\}$, on a $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}_y \otimes L, \mathcal{O}_C) \neq \{0\}$ (car $\mathcal{D}_y = E_{\mathcal{F}_y}$ et $\mathcal{O}_C = V_{\mathcal{F}_y}$). Donc par semi-continuité on a $\mathrm{Hom}((E/\mathcal{O}_C) \otimes L, \mathcal{O}_C) \neq \{0\}$. □

### 7.3. Déformations des faisceaux quasi localement libres sur les courbes doubles

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau quasi localement libre sur $C_2$ et $0 \subset E \subset \mathcal{F}$ sa première filtration canonique. On pose $r_0(\mathcal{F}) = rg(E)$ . On a toujours $R(\mathcal{F}) \geq 2r_0(\mathcal{F})$ , avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est localement libre.

Si $P \in C$, on défini de même l'entier $r_0(M)$ pour tout $\mathcal{O}_{2,P}$-module quasi libre $M$.

**7.3.1. Proposition :** *Soient $P \in C$, $M$ un $\mathcal{O}_{2,P}$-module quasi libre, et $r_0$ un entier tel que $0 < 2r_0 \leq R(M)$. Alors $M$ se déforme en $\mathcal{O}_{2,P}$-modules quasi libres $N$ tels que $r_0(N) = r_0$ si et seulement si on a $r_0 \geq r_0(M)$.*

*Démonstration.* On a $rg(M) = R(M) - r_0(M)$. Les modules $N$ déformations de $M$ sont de rang généralisé $R(M)$ et de rang au plus $rg(M)$, donc $r_0(N) \geq r_0(M)$. Réciproquement, supposons que $0 < 2r_0 \leq R(M)$ et $r_0 > r_0(M)$. Soit $s = R(M) - 2r_0(M)$, donc $M \simeq r_0(M)\mathcal{O}_{2,P} \oplus s\mathcal{O}_{C,P}$ . On doit montrer que $M$ se déforme en modules isomorphes à $r_0\mathcal{O}_{2,P} \oplus (s - 2(r_0 - r_0(M)))\mathcal{O}_{C,P}$ . Il suffit de montrer que $2(r_0 - r0(M))\mathcal{O}_{C,P}$ se déforme en modules isomorphes à $(r_0 - r_0(M))\mathcal{O}_{2,P}$. Cela revient à montrer que $2\mathcal{O}_{C,P}$ se déforme en modules isomorphes à $\mathcal{O}_{2,P}$. Cela se voit aisément en considérant des extensions de $\mathcal{O}_{2,P}$-modules $0 \to \mathcal{O}_{C,P} \to A \to \mathcal{O}_{C,P} \to 0$ . □

Il en découle que si un faisceau quasi localement libre $\mathcal{E}$ sur $C_2$ se déforme en faisceaux quasi localement libres de rang $r_0$, alors on a $r_0 \geq r_0(\mathcal{E})$. La réciproque est fausse : si par exemple $R(\mathcal{E})$ est pair, et si $\mathcal{E}$ se déforme en faisceaux localement libres, on doit avoir $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) \equiv \frac{R(\mathcal{E})}{2}\deg(L) \pmod 2$. J'ignore si cette condition est suffisante pour que $\mathcal{E}$ se déforme en faisceaux localement libres.

**7.3.2. Déformations de modules -** Soit $z \in \mathcal{O}_{2P}$ un générateur de l'idéal de $C$. On a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{2P}}(\mathcal{O}_{CP}, \mathcal{O}_{CP}) \simeq \mathcal{O}_{CP}$ si $i \geq 1$. Cela se démontre en utilisant la résolution libre de $\mathcal{O}_{CP}$ :

$$(K^\bullet) \qquad \cdots \mathcal{O}_{2P} \xrightarrow{\times z} \mathcal{O}_{2P} \xrightarrow{\times z} \mathcal{O}_{2P} \xrightarrow{\times z} \mathcal{O}_{2P}$$

Si $i, j \leq 1$, le produit $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{2P}}(\mathcal{O}_{CP}, \mathcal{O}_{CP}) \times \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_{2P}}(\mathcal{O}_{CP}, \mathcal{O}_{CP}) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_{2P}}(\mathcal{O}_{CP}, \mathcal{O}_{CP})$ est la multiplication $\mathcal{O}_{CP} \times \mathcal{O}_{CP} \to \mathcal{O}_{CP}$ . Cela se voit en interprétant les éléments de $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{O}_{2P}}(\mathcal{O}_{CP}, \mathcal{O}_{CP})$ comme des morphismes de degré $-k$ de $(K^\bullet)$ dans lui-même.

Soient $k$ un entier positif et $A_k = \mathbb{C}[t]/(t^k)$ . On appelle *déformation d'ordre k* d'un $\mathcal{O}_{2,P}$-module $M$ un $(\mathcal{O}_{2P} \otimes_{\mathbb{C}} A_k)$-module $\mathbf{M}$ plat sur $A_k$ tel que $\mathbf{M}/t\mathbf{M} = M$ . On appelle *déformation d'ordre infini* de $M$ un $(\mathcal{O}_{2P} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t])$-module $\mathbf{M}$ plat sur $\mathbb{C}[t]$ tel que $\mathbf{M}/t\mathbf{M} = M$ . Les déformations d'ordre 2 de $M$ sont paramétrées naturellement par $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2P}}(M, M)$ . Si $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2P}}(M, M)$ et si $M_\sigma$ est le $(\mathcal{O}_{2P} \otimes_{\mathbb{C}} A_2)$-module correspondant, alors $M_\sigma$ s'étend en une déformation d'ordre 3 si et seulement si $\sigma^2 = 0$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2P}}(M, M)$ (cf. [9], 3) . Soient $r$ un entier positif, $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2P}}(r\mathcal{O}_{CP}, r\mathcal{O}_{CP}) \simeq \mathrm{End}(r\mathcal{O}_{CP})$, et $M_\sigma$ le $(\mathcal{O}_{2P} \otimes_{\mathbb{C}} A_2)$-module correspondant. Alors $M_\sigma$ s'étend en une déformation d'ordre 3 si et seulement si $\sigma \circ \sigma \in \mathrm{End}(r\mathcal{O}_{CP})$ est nul.

Soit $\phi \in \mathrm{End}(r\mathcal{O}_{CP})$ tel que $\phi^2 = 0$ . On montre aisément qu'il existe une base de $r\mathcal{O}_{CP}$ dans laquelle la matrice de $\phi$ est une matrice diagonale de matrices du type 0 ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il en découle d'abord qu'une déformation d'ordre 2 de $r\mathcal{O}_{CP}$ pouvant s'étendre en une déformation d'ordre 3 se décompose en une somme directe de déformations de $2\mathcal{O}_{CP}$ et de déformations triviales de $\mathcal{O}_{CP}$.

Soit $x \in \mathcal{O}_{CP}$ un générateur de l'idéal maximal. Soit $\phi \in \mathrm{End}(2\mathcal{O}_{CP})$ tel que $\phi^2 = 0$. On peut supposer que la matrice de $\phi$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^k \end{pmatrix}$ , $k \geq 0$. Une telle déformation s'obtient en considérant le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{kP}$ de $kP$. On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{I}_{kP} \longrightarrow \mathcal{O}_C(kP) \longrightarrow 0.$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{O}_C(kP), L)$ correspondant à l'extension précédente. On considère la famille d'extensions paramétrée par $\mathbb{C}$

$$0 \longrightarrow p^*_{\mathcal{O}_2}(L) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow p^*_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{O}_C(kP)) \longrightarrow 0$$

(où $p_{\mathcal{O}_2}$ est la projection $C_2 \times \mathbb{C} \to C_2$) telle qu'en tout $t \in \mathbb{C}$ l'extension $0 \to L \to \mathcal{E}_t \to \mathcal{O}_C(kP) \to 0$ correspond à $t\sigma$. Alors $(\mathcal{E}_{tP})_{t\in\mathbb{C}}$ est une déformation d'ordre infini de $2\mathcal{O}_{CP}$ qui est une extension de l'extension d'ordre 2 définie par $\phi$. Les déformations en modules libres sont celles pour lesquelles $k = 0$ .

Il découle de ce qui précède qu'une extension d'ordre 2 de $r\mathcal{O}_{CP}$ s'étend en une déformation d'ordre 3 si et seulement si elle s'étend en une déformation d'ordre infini.

Soit $M = a\mathcal{O}_{2P} \oplus b\mathcal{O}_{CP}$ un $\mathcal{O}_{2P}$-module quasi libre. Alors on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2P}}(M, M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{2P}}(b\mathcal{O}_{CP}, b\mathcal{O}_{CP})$ . Les déformations d'ordre 2 de $M$ se réduisent donc à celles de $b\mathcal{O}_{CP}$ .

**7.3.3. Déformations de faisceaux -** Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent quasi localement libre sur $C_2$. Alors on a d'après la suite spectrale des Ext et 6.2.2 une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) = \mathcal{H}om(\Gamma_{\mathcal{E}} \otimes L, \Gamma_{\mathcal{E}}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Soit $\mathcal{F}$ une déformation d'ordre 2 de $\mathcal{E}$ correspondant à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ . Il découle de 7.3.2 que $\mathcal{F}$ s'étend en une déformation d'ordre 3 si et seulement si le morphisme $\pi(\sigma)^2 : \Gamma_{\mathcal{E}} \otimes L^2 \to \Gamma_{\mathcal{E}}$ est nul.

**Conjecture :** $\mathcal{F}$ s'étend en une déformation paramétrée par une courbe lisse si et seulement si $\pi(\sigma)^2 = 0$ .

## 8. Faisceaux d'idéaux de points

Soient $C_n$ une courbe projective multiple primitive de multiplicité $n > 1$, plongée dans une surface projective lisse $S$, $C = C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n$ la filtration canonique et $L$ le fibré en droites sur $C$ associé (cf. 2.1). On pose, pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$ . Soient $\mathbb{L}$ le faisceau d'idéaux de $C$ dans $C_n$ (qui est un fibré en droites sur $C_{n-1}$ et $L = \mathbb{L}_{|C}$ .

Si $P \in C$, on note $x_P$ un élément de $\mathcal{O}_{n,P}$ au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$, et $z_P$ un générateur de l'idéal de $C$ dans $\mathcal{O}_{n,P}$. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{n,P}$ est donc $(x_P, z_P)$. On note $\mathcal{L}_P$ le faisceau d'idéaux sur $C_n$ égal à $(x_P)$ en $P$ et à $\mathcal{O}_{n,P'}$ en $P' \neq P$ . C'est un faisceau inversible. Notons que contrairement à ce qu'indique la notation, $\mathcal{L}_P$ dépend du choix de $x_P$. Soit $\mathcal{J}_{n,P}$ le faisceau d'idéaux sur $C_n$ égal à $(x_P, z^{n-1})$ en $P$ et à $\mathcal{O}_{n,P'}$ en $P' \neq P$ . Il dépend de $x_P$ mais pas de $z_P$ .

### 8.1. Déformations des faisceaux d'idéaux de points

Soit $Z$ un ensemble fini non vide de $p$ points de $C$. On note $\mathcal{I}_{n,Z}$ le faisceau d'idéaux de $Z$ sur $C_n$. On note $\mathcal{L}_Z = \bigotimes_{P\in Z} \mathcal{L}_P$ , $\mathcal{J}_{n,Z} = \bigotimes_{P\in Z} \mathcal{J}_{n,P}$ .

**8.1.1. Proposition :** *Soient $\mathcal{D}$ un fibré en droites sur $C_n$, $\mathcal{D}_{n-1} = \mathcal{D}_{|C_{n-1}}$, $D = \mathcal{D}_{|C}$. On suppose que la restriction $H^0(\mathcal{D}) \to H^0(\mathcal{D}_{n-1})$ est surjective. Alors on a une suite exacte canonique $0 \to H^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1} \otimes D) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z} \otimes \mathcal{D}) \to H^0(\mathcal{D}_{n-1}) \to 0$ .*

*Démonstration.* On a $\mathbb{L} \subset \mathcal{I}_{n,Z}$ car $Z \subset C$, et $\mathcal{I}_{n,Z}/\mathbb{L} \simeq \mathcal{O}_C(-Z)$ . Soit $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z} \otimes \mathcal{D})$ . Alors on a $\phi(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L} \otimes \mathcal{D}$ : pour le voir on utilise la caractérisation suivante de $\mathbb{L}$ : en $P \in C$, si $z \in \mathcal{O}_{nP}$ engendre l'idéal de $C$, $\mathbb{L}_P \subset \mathcal{I}_{n,Z,P}$ est l'annulateur de $z^{n-1}$. Le morphisme $\phi : \mathbb{L} \to \mathbb{L} \otimes \mathcal{D}$ équivaut à une section $s$ de $\mathcal{D}_{n-1}$ . Soit $\sigma$ le morphisme $\mathcal{I}_{n,Z} \to \mathcal{I}_{n,Z} \otimes \mathcal{D}$ induit par une section de $\mathcal{D}$ au dessus de $s$. Alors on a $(\phi - s)(\mathbb{L}) = 0$ , donc $\phi - \sigma$ est induit par un morphisme $\mathcal{O}_C(-Z) \to \mathcal{I}_{n,Z} \otimes \mathcal{D}$ . L'image de ce morphisme est contenue dans le sous-faisceau constitué en $P$ de l'annulateur de $z$, ce sous-faisceau est isomorphe à $L^{n-1} \otimes D$. La proposition 8.1.1 en découle immédiatement. □

En particulier, si $\mathcal{D} = \mathcal{O}_n$, on obtient $\mathrm{End}(\mathcal{I}_{n,Z}) \simeq \mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1})$ , et si $H^0(D) = H^0(L) = \{0\}$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z} \otimes \mathcal{D}) \simeq H^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1} \otimes D)$ .

**8.1.2. Proposition :** *On a $\mathcal{E}nd(\mathcal{I}_{n,Z}) \simeq \mathcal{J}_{n,Z} \otimes \mathcal{L}_Z^{-1}$ .*

*Démonstration.* Cela découle aisément du fait que pour tout $P \in Z$, les endomorphismes de $\mathcal{I}_{n,P}$ sont du type

$$ax_P + bz_P \longmapsto \alpha(ax_P + bz_P) + \beta a z^{n-1},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{n,P}$ . □

**8.1.3. Proposition :** *On suppose que $h^0(L) = 0$ et que $h^0(K_{S|C}) = 0$ ou $K_{S|C_n} \simeq \mathcal{O}_n$ . Alors on a*

$$\dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z})) \;=\; 1 + \frac{n^2}{2}C^2 + \frac{n}{2}K_S C + p + h^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1}),$$

$$\dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z})) \;=\; 1 + n^2C^2 + h^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1}) + h^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1} \otimes K_S) + h^0(K_{S|C_n}).$$

*Démonstration.* Démontrons d'abord la première égalité. Soit $T = \mathcal{O}_n/\mathcal{J}_{n,Z}$ . C'est un faisceau de support $Z$ tel que $h^0(T) = (n-1)p$ . On a une suite exacte, d'après la proposition 8.1.2

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{I}_{n,Z}) \longrightarrow \mathcal{L}_Z^{-1} \longrightarrow T \otimes \mathcal{L}_Z^{-1} \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{I}_{n,Z}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_Z^{-1}) \longrightarrow H^0(T) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{I}_{n,Z})) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_Z^{-1}) \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition 8.1.1 on a $\mathrm{End}(\mathcal{I}_{n,Z}) \simeq \mathbb{C} \oplus H^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1})$ , donc

$$h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{I}_{n,Z})) \;=\; -\chi(\mathcal{L}_Z^{-1}) + (n-1)p + h^0(\mathcal{O}_C(Z) \otimes L^{n-1}) + 1.$$

On a $h^0(\mathcal{L}_Z^{-1}/\mathcal{O}_n) = np$ , donc $\chi(\mathcal{L}_Z^{-1}) = np - \frac{n^2}{2}C^2 - \frac{n}{2}K_S C$ . D'après la suite spectrale des Ext on a $\dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z})) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{I}_{n,Z})) + h^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z}, \mathcal{I}_{n,Z}))$ . On

a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})) \simeq 2\mathcal{O}_Z$ . Cela se démontre aisément en utilisant en chaque point $P$ de $Z$ la résolution suivante de $(\mathcal{I}_{n,Z})_P$ :

$$\mathcal{O}^2_{n,P} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & z_P^{n-1} \\ z_P & -x_P \end{pmatrix}} \mathcal{O}^2_{n,P} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_P & z_P^{n-1} \\ z_P & 0 \end{pmatrix}} \mathcal{O}^2_{n,P} \xrightarrow{(z_P,x_P)} \mathcal{O}_{n,P}$$

On en déduit immédiatement la première égalité.

Démontrons maintenant la seconde. On a, sur $S$, $\chi(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z}) = -n^2C^2$ . D'autre part, d'après la proposition 8.1.1 et la dualité de Serre

$\dim(\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})) \;=\; \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z}\otimes K_S)) \;=\; h^0(\mathcal{O}_C(Z)\otimes L^{n-1}\otimes K_S)+h^0(K_{S|C_n})$,

d'où le résultat. □

**8.1.4.** Sous les hypothèses de la proposition 8.1.3 on a donc

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})/\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})) \;&=\; \frac{(n-1)^2}{2}C^2-\frac{n-1}{2}K_SC \\ &\quad + h^0(\mathcal{O}_C(-Z)\otimes L^{-n})+h^0(K_{S|C_n}).\end{aligned}$$

**8.1.5. Les cas du plan projectif et des surfaces K3 -** Si $S$ est $\mathbb{P}_2$ ou une surface K3, on a $H^0(\mathcal{N}_{C_n}) = H^0(\mathcal{O}_S(nC))/\langle\sigma^n\rangle$ , où $\mathcal{N}_C$ désigne le fibré normal de $C$ dans $S$ et $\sigma \in H^0(\mathcal{O}_S(C))$ une équation de $C$.

Soit $\mathcal{F}$ une déformation plate de $\mathcal{I}_{n,Z}$ (en tant que faisceau sur $S$) paramétrée par une variété algébrique (ou analytique) connexe $U$, $x \in U$ un point fermé tel que $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{I}_{n,Z}$ . On en déduit une déformation de $C_n$, d'où l'application canonique

$$\Theta^{\mathcal{F}}_x : T_xU \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_S(nC))/\langle\sigma^n\rangle.$$

Soit $\mathcal{E}_0$ une déformation semi-universelle de $\mathcal{I}_{n,Z}$ (en tant que faisceau sur $S$) paramétrée par un germe de variété analytique $(X_0,x_0)$. Alors $\Theta^{\mathcal{F}}_x$ se factorise à travers

$$\Theta^{\mathcal{E}_0}_{x_0} : T_{x_0}X_0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_S(nC))/\langle\sigma^n\rangle.$$

En particulier, l'image de $\Theta^{\mathcal{F}}_x$ est contenue dans celle de $\Theta^{\mathcal{E}_0}_{x_0}$ .

**8.1.6. Théorème :** *L'application $\Theta^{\mathcal{E}_0}_{x_0}$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})/\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z}) \;\simeq\; V/\langle\sigma^n\rangle,$$

*où $V \subset H^0(\mathcal{O}_S(nC))$ est l'espace des courbes passant par tous les points de $Z$.*

*Démonstration.* Le noyau de $\Theta^{\mathcal{E}_0}_{x_0}$ contient $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})$, qui correspond aux faisceaux de support $C_n$. On a d'après 8.1.4

$$\dim(V/\langle\sigma^n\rangle) \;=\; \dim(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})/\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{I}_{n,Z},\mathcal{I}_{n,Z})),$$

donc il suffit de prouver que $V/\langle\sigma^n\rangle \subset \mathrm{im}(\Theta^{\mathcal{E}_0}_{x_0})$ . Pour cela il suffit de construire une déformation $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}_{n,Z}$ comme précédemment telle que $V/\langle\sigma^n\rangle \subset \mathrm{im}(\Theta^{\mathcal{F}}_x)$ . On prend $U = V$ et $\mathcal{F}$ est la famille des faisceaux d'idéaux de $Z$. □

**8.1.7. Exemple :** Soient $x$, $y$, $z$ des coordonnées de $\mathbb{P}_2$. Supposons que $C$ soit la droite d'équation $z=0$, et que $Z=\{(x_i,y_i,0);1\leq i\leq p\}$ . Pour $1\leq i\leq p$, soit $z_i$ un nombre complexe tel que $z_i^n=x_i^n+y_i^n$. Pour $\alpha\in\mathbb{C}$, soit $\mathcal{C}_\alpha$ la courbe d'équation $z^n=\alpha^n x^n+\alpha^n y^n$ , qui est lisse si $\alpha\neq 0$. Notons que $C_n=\mathcal{C}_0$. On a $Z_\alpha=\{(x_i,y_i,\alpha z_i);1\leq i\leq p\}\subset\mathcal{C}_\alpha$ . Soit $\mathcal{I}_\alpha$ le faisceau d'idéaux de $Z_\alpha$ dans $\mathcal{C}_\alpha$, vu comme faisceau sur $\mathbb{P}_2$. Alors $\mathcal{A}=(\mathcal{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est une déformation de $\mathcal{I}_{n,Z}$ . L'ensemble $\Gamma$ des courbes $\mathcal{C}_\alpha$ est une courbe de $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n)))$ passant par $\langle z^n\rangle$. La tangente à cette courbe en $\langle z^n\rangle$ n'est pas contenue dans $V/\langle z^n\rangle$ . Ceci n'est pas contradictoire avec le théorème 8.1.6 car on voit aisément que $d\Theta^{\mathcal{E}}_{\langle z^n\rangle}=0$ .

## 8.2. Faisceaux de rang généralisé 2 sur les courbes doubles

On s'intéresse ici aux faisceaux sans torsion de rang généralisé 2 sur $C_2$. Les plus simples sont les fibrés en droites sur $C_2$ et les fibrés vectoriels de rang 2 sur $C$. Il reste à étudier les faisceaux sans torsion de rang généralisé 2, non concentrés sur $C$ et d'index positif.

Soient $\mathcal{D}$ un fibré en droites sur $C_2$ de degré $d$, et $D=\mathcal{D}_{|C}$. On a donc une suite exacte $0\to D\otimes L\to\mathcal{D}\to D\to 0$ , et $\deg(D)\ =\ (d-\deg(L))/2$ . Si maintenant $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sans torsion de rang généralisé 2 et de degré $d$ sur $C_2$, non concentré sur $C$, et si $0\subset E\otimes L\subset\mathcal{E}$ est sa filtration canonique, alors $E$ est un fibré en droites sur $C$. On a donc une suite exacte

$$0\longrightarrow E\otimes L\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow E\oplus T\longrightarrow 0,$$

$T$ étant un faisceau de torsion sur $C$. On a donc

$$\deg(E)\ =\ \frac{d-\deg(L)-i(\mathcal{E})}{2}.$$

Les seuls autres faisceaux de rang généralisé 2, de degré $d$ et sans torsion sur $C_2$ sont les fibrés vectoriels de rang 2 et de degré $d$ sur $C$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang généralisé 2 sur $C_2$, non concentré sur $C$. Alors il existe d'après le corollaire 6.5.7 un fibré en droites $\mathcal{F}$ sur $C_2$, un faisceau de torsion $T$ sur $C$ et une suite exacte $0\to\mathcal{E}\to\mathcal{F}\to T\to 0$ . On en déduit immédiatement la

**8.2.1. Proposition :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang généralisé 2 sur $C_2$, non concentré sur $C$. Alors il existe un fibré en droites $\mathcal{F}$ sur $C_2$ et un unique sous-schéma fini $Z\subset C$ tels que $\mathcal{E}\simeq\mathcal{I}_Z\otimes\mathcal{F}$ , $\mathcal{I}_Z$ désignant le faisceau d'idéaux de $Z$ dans $C_2$.*

Le fibré en droites $\mathcal{F}$ n'est pas en général unique.

**8.2.2.** *Dualité* - On utilise les notations de 6. On utilise les notations de 6. Si $n\geq 1$ est un entier, on note $\mathcal{L}(n,P,x_P)$ le faisceau d'idéaux du sous-schéma de $C_2$ de support $P$ engendré par $x_P^n$ en $P$. Comme la notation le suggère il dépend du choix de $x_P$. C'est un fibré en droites sur $C_2$. Soit $Z$ un un sous-schéma fini $Z\subset C$. On va décrire le faisceau dual de $\mathcal{I}_Z$. Posons

$$Z\ =\ \sum_i n_iP_i,$$

avec $n_i \geq 1$, les $P_i$ étant des points distincts de $C$. Alors on a

$$\mathcal{I}_Z^\vee \simeq \mathcal{I}_Z \otimes \left( \bigotimes_i \mathcal{L}(n_i, P_i, x_{P_i}) \right)^{-1} .$$

**8.2.3.** *Déformations infinitésimales des faisceaux de rang généralisé 2* - On rappelle maintenant et on précise les constructions de 6.3. Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion de rang généralisé 2 sur $C_2$, non concentré sur $C$, et $D \otimes L \subset \mathcal{E}$ sa première filtration canonique, $D$ étant un fibré en droites sur $C$. Alors on a $\mathcal{E}_{|C} \simeq D \oplus T$, $T$ étant un faisceau de torsion sur $C$. Fixons un isomorphisme

$$\eta : \mathcal{E}_{|C} \simeq D \oplus T.$$

On en déduit la suite exacte $0 \to D \otimes L \to \mathcal{E} \to D \oplus T \to 0$ . Soit $(\nu_\eta, \sigma_\eta) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(D, D \otimes L) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, D \otimes L)$ l'élément associé. Le noyau $\mathcal{F}_\eta$ du morphisme composé $\mathcal{E} \to D \oplus T \to T$ est un fibré en droites sur $C_2$, et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow D \otimes L \longrightarrow \mathcal{F}_\eta \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

qui est associée à $\nu_\eta$.

Les automorphismes de $D \oplus T$ sont représentés par des matrices $\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \phi & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathrm{Aut}(T)$ et $\phi : D \to T$. On a $v_{\tau \circ \eta} = \alpha v_\eta + \phi \sigma_\eta$ , $\sigma_{\tau \circ \eta} = \beta \sigma_\eta$ .
Puisque $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, D \otimes L) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(T, D \otimes L)$, la multiplication par $\sigma_\eta : \mathrm{Hom}(D, T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(D, D \otimes L)$ est à valeurs dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(D, D \otimes L) = H^1(L)$. On a $H^1(L) \subset H^1(\mathcal{O}_2)$. On peut donc voir la multiplication par $\sigma_\eta$ comme une application

$$\beta_\eta : \mathrm{Hom}(D, T) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_2).$$

Le rang de cette application ne dépend pas du choix de $\eta$.

Un calcul élémentaire mais fastidieux permet de démontrer la

**8.2.4. Proposition :** *On a des suites exactes canoniques*

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_2) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{E}) \longrightarrow \ker(\beta_\eta) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(T, T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{coker}(\beta_\eta) \longrightarrow 0.$$

*La seconde suite exacte est scindée.*

**Conséquences :** On peut montrer en utilisant la proposition 8.2.4 que les seules déformations de $\mathcal{E}$ proviennent de déformations de $T$ et de $\mathcal{F}_\eta$. Les déformations de $T$ sont décrites en 7.1.

## 9. Faisceaux de rang généralisé 3 sur les courbes doubles

Soient $S$ une surface projective lisse irréductible et $C \subset S$ une courbe projective lisse irréductible. Soient $C_2 \subset S$ la courbe double associée, $L = \mathcal{O}_C(-C)$ et $l = -\deg(L)$. On suppose que $l = C^2 \geq 1$. Le genre de $C$ est $g = \frac{1}{2}(C^2 + K_S C) + 1$ .

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de rang généralisé 3 sur $C_2$, non concentré sur $C$. Il est donc localement du type $\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_C$. Pour fixer les idées, rappelons qu'on a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \Gamma_{\mathcal{E}} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E_{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] & E_{\mathcal{E}} \otimes L^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \Gamma_{\mathcal{E}} \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

la première ligne exacte provenant de la première filtration canonique de $\mathcal{E}$ et la seconde ligne exacte de la seconde filtration canonique de $\mathcal{E}$. On a $rg(E_{\mathcal{E}}) = rg(\Gamma_{\mathcal{E}}) = 1$, $rg(F_{\mathcal{E}}) = rg(G_{\mathcal{E}}) = 2$.

Le rang et le degré des fibrés vectoriels $E_{\mathcal{E}}$, $F_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$, $\Gamma_{\mathcal{E}}$ sont invariants par déformation. Cette propriété se généralise aux faisceaux quasi localement libres de type $(m-1, m)$ ou $(m, m)$.

### 9.1. Faisceaux (semi-)stables

**9.1.1. Définition :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur $C_2$ pur de dimension 1. On dit que $\mathcal{E}$ est* semi-stable *(resp. stable) s'il est sans torsion et si pour tous sous-faisceau propre $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ (resp. $<$).*

Il découle du théorème de Riemann-Roch 4.2.1 et du calcul de polynômes de Hilbert effectué dans 4.2.2 que cette notion de (semi-)stabilité est équivalente à celle de Simpson (cf. [31]). Il existe donc des variétés de modules de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert donné.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de rang généralisé 3 sur $C_2$, non concentré sur $C$. On pose $\epsilon = \deg(E_{\mathcal{E}})$, $\gamma = \deg(\Gamma_{\mathcal{E}})$ . Si $\mathcal{E}$ est semi-stable (resp. stable) on obtient, en considérant les sous-faisceaux $E_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$, que $\gamma - 2l \leq \epsilon \leq l + \gamma$ (resp $<$). Le résultat suivant montre que la (semi-)stabilité de $\mathcal{E}$ dépend uniquement des propriétés des fibrés de rang 2 $F_{\mathcal{E}}$ et $G_{\mathcal{E}}$ :

**9.1.2. Lemme :** *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de rang généralisé 3 sur $C_2$, non concentré sur $C$. Alors $\mathcal{E}$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *Pour tout sous-fibré en droites $D'$ de $G_{\mathcal{E}}$ on a* $\deg(D') \leq \mu(\mathcal{E})$ *(resp. $<$).*
(ii) *Pour tout fibré en droites quotient $D''$ de $F_{\mathcal{E}}$ on a* $\mu(\mathcal{E}) \leq \deg(D'')$ *(resp. $<$).*

*Démonstration.* On ne traitera que le cas de la semi-stabilité, l'autre cas étant analogue. Les conditions sont évidemment nécessaires. Supposons les vérifiées. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-faisceau de rang 1 ou 2. Il faut montrer que $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ . Si $\mathcal{F}$ est de rang 1, $E_{\mathcal{F}} \subset E_{\mathcal{E}}$ est sans torsion, donc $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $C$, c'est donc un sous-faisceau de $G_{\mathcal{E}}$, et il est localement libre de rang 1. Soit $F \subset G_{\mathcal{E}}$ l'image inverse du sous-faisceau de torsion de $G_{\mathcal{E}}/\mathcal{F}$, c'est un sous-fibré de $G_{\mathcal{E}}$. On a $\mu(F) \leq \mu(\mathcal{E})$ d'après (i), et $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(F)$, donc $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$. Supposons $\mathcal{F}$ de rang 2. Alors $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ est de rang 1, donc $E_{\mathcal{E}/\mathcal{F}}$ est de torsion. Soit $\mathcal{G}$ son image inverse dans $\mathcal{E}$. Alors on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{G})$ et il suffit de prouver que $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{E})$ . Cela découle du fait que $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ est un quotient de $F_{\mathcal{E}}$, car $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ est un faisceau sur $C$, et de (ii). □

On en déduit que si $G_{\mathcal{E}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ sont semi-stables (resp. stables) il en est de même de $\mathcal{E}$.

### 9.2. Variétés de modules

On suppose que $\gamma - l < \epsilon < \gamma$, ce qui équivaut à $\mu(E_{\mathcal{E}}) < \mu(G_{\mathcal{E}})$ et $\mu(\Gamma_{\mathcal{E}}) < \mu(F_{\mathcal{E}})$ .

On note $\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ la variété de modules des faisceaux quasi localement $\mathcal{E}$ libres stables de rang généralisé 3 tels que $\deg(E_{\mathcal{E}}) = \epsilon$, $\deg(\Gamma_{\mathcal{E}}) = \gamma$ et que $F_{\mathcal{E}}$, $G_{\mathcal{E}}$ soient stables. C'est un ouvert de la variété de modules $M(3, 2\epsilon + \gamma + l)$ des faisceaux semi-stables de rang généralisé 3 et de degré généralisé $2\epsilon + \gamma + l$.

**9.2.1. Proposition :** *La variété $\mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ est irréductible de dimension $5g + 2l - 4$ . La sous-variété réduite associée est lisse.*

*Démonstration.* Soient $\iota \in W_0^{2,\epsilon-\gamma+l}$ (cf. 2.3), correspondant à un morphisme $\mathcal{O} \to F_0$. Soient $\Gamma \in J^{\gamma}$, $F = F_0 \otimes \Gamma$, $E = (F/\Gamma) \otimes L \in J^{\epsilon}$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \gamma \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} E \otimes L^* \longrightarrow 0 \ .$$

Rappelons qu'on aune suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F, E) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hom}(F \otimes L, E) \longrightarrow 0 \ .$$

Soit $\sigma \in \pi^{-1}(p)$ . Soit $0 \to E \to \mathcal{E}_\sigma \to F \to 0$ l'extension associée, où $\mathcal{E}_\sigma$ est quasi localement libre de rang généralisé 3, $E_{\mathcal{E}_\sigma} = E$, $\Gamma_{\mathcal{E}_\sigma} = \Gamma$, $F_{\mathcal{E}_\sigma} = F$ .

**9.2.2. Lemme :** *Soit $\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma, E) \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\Gamma, E)$ correspondant à la suite exacte $0 \longrightarrow E \longrightarrow G_{\mathcal{E}_\sigma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0$ . Alors $\eta$ est l'image de $\sigma$ par l'application $\theta : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(F, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\Gamma, E)$ déduite de l'inclusion $\Gamma \subset F$.*

*Démonstration.* Cela se démontre en utilisant des résolutions libres adéquates de $\Gamma$, $E$. On en déduit des résolutions libres de $F$, $\mathcal{E}_\sigma$, $G_{\mathcal{E}_\sigma}$ permettant de représenter les $\mathrm{Ext}^1$ et de prouver le lemme. □

**9.2.3. Lemme :** *Pour tout $\eta_0 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma, E)$ il existe $\sigma_0 \in \pi^{-1}(p)$ tel que $\theta(\sigma_0) = \eta_0$ .*

*Démonstration.* Soit $\theta_C : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma, E)$ l'application déduite de l'inclusion $\Gamma \subset F$. Alors $\theta_C$ est surjective. Soit $\alpha \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E)$ tel que $\theta_C(\alpha) = \eta_0 - \eta$ . Il suffit de prendre $\sigma_0 = \sigma + \alpha$ . □

*Fin de la démonstration de la proposition 9.2.1* - D'après le lemme 9.2.3 on peut choisir $\sigma$ de telle sorte que $G_{\mathcal{E}_\sigma}$ soit stable. Dans ce cas $\mathcal{E}_\sigma \in \mathcal{M}_s(\epsilon, \gamma)$ . Le reste de la proposition 9.2.1 se démontre aisément. □

## Références


[1] Artin, M. *On deformations of singularities.* Tata Institute of Fundamental Research Lect. Notes. 54 (1976).
[2] Bănică, C., Forster, O. *Multiple structures on plane curves.* In Contemporary Mathematics 58, Proc. of Lefschetz Centennial Conf. (1986), AMS, 47-64.
[3] Beorchia, V., Franco, D. *On the Moduli Space of 't Hooft Bundles.* Ann. Univ. Ferrara, sez. VII, Sc. Mat. Vol. XLVII (2001), 253-268.
[4] Bhosle Usha N. *Generalized parabolic bundles and applications to torsion free sheaves on nodal curves.* Arkiv for Matematik 30 (1992), 187-215.
[5] Bhosle Usha N. *Picard groups of the moduli spaces of vector bundles.* Math. Ann. 314 (1999) 245-263.
[6] Boratynski, M., *Locally complete intersection multiple structures on smooth algebraic curves.* Proc. of the Amer. Math. Soc. 115 (1992), 877-879.
[7] Brambila-Paz, L., Mercat, V., Newstead, P.E., Ongay, F. *Nonemptiness of Brill-Noether loci.* Intern. J. Math. 11 (2000), 737-760.
[8] Drézet, J.-M. *Variétés de modules alternatives.* Ann. de l'Inst. Fourier 49 (1999), 57-139.
[9] Drézet, J.-M. *Déformations des extensions larges de faisceaux* . Preprint (2002), math.AG/0201125.
[10] Godement, R. *Théorie des faisceaux.* Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann, Paris (1964).
[11] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer-Verlag (1977).
[12] Huybrechts, D., Lehn, M. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves.* Aspect of Math. E31, Vieweg (1997).
[13] Inaba, M.-A. *On the moduli of stable sheaves on some nonreduced projective schemes.* Journ. of Alg. Geom. 13 (2004), 1-27.
[14] Inaba, M.-A. *On the moduli of stable sheaves on a reducible projective scheme and examples on a reducible quadric surface.* Nagoya Math. J. (2002), 135-181.
[15] Le Potier, J. *Systèmes cohérents et structures de niveau.* Astérisque 214 (1993).
[16] Le Potier, J. *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif.* Revue roumaine de math. pures et appliquées 38 (1993), 635-678.
[17] Manolache, N. *Cohen-Macaulay Nilpotent Structures.* Revue Roumaine Math. pures et appl. 31 (1986), 563-575.
[18] Manolache, N. *Multiple Structures on Smooth Support.* Math. Nachr. 167 (1994), 157-202.
[19] Manolache, N. *Double rational normal curves with linear syzygies.* Manusc. Math. 104 (2001), 503-517.
[20] Manolache, N. *Cohen-Macaulay Nilpotent Schemes.* Preprint (2003), math.AG/0312514.
[21] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves I.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 91-126.
[22] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 577-614.
[23] Maruyama, M., Trautmann, G. *Limits of instantons.* Intern. Journ. of Math. 3 (1992), 213-276.
[24] Narasimhan, M.S., Ramanan, S. *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface.* Ann. of Math. 89 (1969), 14-51.
[25] Nüssler, T., Trautmann, G. *Multiple Koszul structures on lines and instanton bundles.* Intern. Journ. of Math. 5 (1994), 373-388.
[26] Raghavendra, N., Vishwanath, P.A. *Moduli of pairs and generalized theta divisors.* Tohoku Math. J. 46 (1994), 321-340.
[27] Rego, C.J. *Deformation of modules on curves and surfaces.* Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles, Proceedings Lambrecht 1985, Lect. Notes in Math. 1273, Springer-Verlag (1987), 157-167.
[28] Rosenlicht, M. *Generalized Jacobian varieties.* Ann. of Math. 59 (1954), 505-530.
[29] Serre, J.-P. *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann, Paris (1959).
[30] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[31] Simpson, C.T. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I.* Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.
[32] Siu Y., Trautmann, G. *Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports.* Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. 29, N. 238 (1981).
[33] Sun, X. *Degeneration of moduli spaces and generalized theta functions.* Journ. of Alg. Geom. 9 (2000), 459-527.
[34] Sun X., *Degeneration of SL(n)-bundles on a reducible curve.* Proc. of Algebraic Geometry in East Asia (Japan, 2001) and math.AG/0112072.
[35] Sundaram, N. *Special divisors and vector bundles.* Tohoku Math. J. 39 (1987), 175-213.
[36] Vatne, J.E. *Multiple structures.* Thesis. Preprint (2002), math.AG/0210042.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

*E-mail address*: drezet@math.jussieu.fr

*URL*: http://www.math.jussieu.fr/~drezet