HAL
open science

Géométrie orthogonale non symétrique et congruences quadratiques

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. Géométrie orthogonale non symétrique et congruences quadratiques. Geometriae Dedicata, 2001, 86, pp.93-128. 10.1023/A:1011992825774 . hal-00742455

HAL Id: hal-00742455

https://hal.science/hal-00742455v1

Submitted on 16 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GÉOMÉTRIE ORTHOGONALE NON SYMÉTRIQUE ET CONGRUENCES QUADRATIQUES

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction 1
2. Isomorphismes, quadriques et translations associées 3
3. Congruences quadratiques (cas général) 7
4. Congruences quadratiques planes 15
5. Congruences quadratiques obtenues par translation d'une quadrique 20
6. Liste des types de congruences quadratiques 30

Références 33

1. Introduction

Le but de cet article est l'étude de certaines structures géométriques rencontrées dans la théorie des fibrés exceptionnels sur les espaces projectifs (cf. [3], [4]). Le point de départ est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel W de dimension finie $n+1$, $n \geq 3$, muni d'une forme bilinéaire non dégénérée. Dans l'étude des fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_n$, on considère $W = \mathrm{K}(\mathbb{P}_n) \otimes \mathbb{C}$ ($\mathrm{K}(\mathbb{P}_n)$ désignant l'*anneau de Grothendieck* des classes de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_n$), muni de la forme bilinéaire définie par

$$\chi([E],[F]) \ = \ \sum_{i=0}^{n} \dim(\mathrm{Ext}^i(E,F))$$

pour tous faisceaux cohérents E, F sur $\mathbb{P}_n$. L'étude de cette forme bilinéaire et des généralisations ont été effectuées dans [8], [17]. Le cas de $\mathbb{P}_3$ est traité avec beaucoup de détails dans [13], [14]. Les articles précédents étaient plutôt consacrés aux propriétés arithmétiques de χ sur $\mathrm{K}(\mathbb{P}_n)$. On s'intéresse ici uniquement à des formes bilinéaires complexes.

Soit $\phi : W \longrightarrow W^*$ un isomorphisme non antisymétrique. On en déduit la forme bilinéaire non dégénérée définie par

$$(u,v) \ = \ u.\phi(v).$$

On note $Q(\phi) \subset \mathbb{P}(W)$ la quadrique des points isotropes. Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(W)$, on note $X^\perp$ (resp. ${}^\perp X$) le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(W)$ constitué des points y tels que $(x,y)=0$ (resp. $(y,x)=0$) pour tout x dans X. Soit $\mathbb{T}(\phi) = {}^t\phi^{-1} \circ \phi \in GL(W)$, appelé ici la *translation* associée à ϕ (dans [8], $\mathbb{T}(\phi)^{-1}$ est appelé l'*opérateur fondamental* associé à la forme bilinéaire précédente). On rappelle au chapitre 2 quelques résultats classiques, et notamment

celui-ci : la $GL(W)$-orbite de ϕ est entièrement déterminée par celle de $\mathbb{T}(\phi)$ (cf. [8], et les ouvrages [12], [11] cités dans cet article). On donne au § 2.2.2 la liste des orbites des $\mathbb{T}(\phi)$ et celle des ϕ correspondants dans le cas où $n = 3$.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que W est un sous-espace vectoriel de $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(2))$. On appelle *congruence quadratique* un morphisme rationnel

$$\sigma : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

tel que $\sigma^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(2)$, que $\sigma^* : W^* \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(2))$ induise un isomorphisme $\sigma^* : W^* \simeq W$ et que pour tout point P de $\mathbb{P}(V)$ où σ est défini on ait $P \in \sigma(P)$ ($\sigma(P)$ étant vu comme une quadrique de $\mathbb{P}(V)$). Soit $\phi = (\sigma^*)^{-1}$. On munit alors W de la forme bilinéaire non dégénérée induite par ϕ. L'étude des congruences quadratiques dans le cas général est faite dans le chapitre 3. Dans le chapitre 4 on s'intéresse au cas $n = 3$ (on parle alors de congruences quadratiques *planes*).

Le cas le plus intéressant est celui où $\mathbb{P}(W)$ est l'espace des quadriques de $\mathbb{P}(V)$ contenant une quadrique fixe $C(\sigma)$ d'un hyperplan $H(\sigma)$ de $\mathbb{P}(V)$. On dit dans ce cas que σ est une congruence quadratique *normale*, et on montre qu'on a alors $rg(C) = rg(Q(\phi)) - 2$, que σ induit un isomorphisme birationnel $\mathbb{P}(V) \simeq \overline{\sigma(\mathbb{P}(V))}$ et que $\overline{\sigma(\mathbb{P}(V))} = Q(\phi)$. On note

$$\mathbb{T}(\sigma) \ = \ \sigma^{-1} \circ \mathbb{T}(\phi) \circ \sigma,$$

qui est un automorphisme birationnel de $\mathbb{P}(V)$, qu'on appelle la *translation* associée à σ.

La restriction de σ à $H(\sigma)$ est constante. C'est une quadrique dégénérée dont l'une des composantes est $H(\sigma)$. On note $L(\sigma)$ l'autre composante. On montre que $\mathbb{T}(\sigma)$ est linéaire si et seulement si on a $L(\sigma) = H(\sigma)$.

On donne au § 3.5 une construction géométrique des congruences quadratiques normales. On part d'un espace vectoriel abstrait W de dimension $n+1$ et d'un isomorphisme non antisymétrique $\phi : W \simeq W^*$ tel que $Q(\phi)$ soit non dégénérée. Soient O un point lisse de $Q(\phi)$, T_O l'hyperplan tangent à $Q(\phi)$ en O et

$$\pi : \mathbb{P}(W) \backslash \{O\} \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$$

la projection de centre O. Soit

$$C \ = \ \pi(T_O \cap Q(\phi))$$

qui est une quadrique de l'hyperplan $\pi(T_O)$ de $\mathbb{P}_{n-1}$. Soit W_0 le sous-espace vectoriel de $H^0(\mathbb{P}_{n-1}, \mathcal{O}(2))$ constitué des équations de quadriques contenant C. On définit alors un isomorphisme $\mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}(W_0)$ en associant à P l'image par π de $Q(\phi) \cap P^{\perp}$. Si Q est un point général de $\mathbb{P}_{n-1}$, on note $\eta(Q)$ l'unique point de $Q(\phi) \cap \pi^{-1}(Q)$. Alors

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{P}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}(W_0) \\ & Q & \longmapsto & \pi(Q(\phi) \cap {}^{\perp}\eta(Q)) \end{array}$$

est une congruence quadratique. On montre (théorème 3.5.5) que toute congruence quadratique normale peut s'obtenir de cette façon (modulo l'action de $PGL(n)$).

Dans le chapitre 4 on suppose que $n = 3$. Dans ce cas C est constitué de deux points distincts de $\mathbb{P}_2$, ou c'est un point double d'une droite de $\mathbb{P}_2$. Soient G_C le sous-groupe de $GL(3)$ cons-

titué des isomorphismes laissant C invariant et $\mathrm{Cong}(C)$ l'ensemble des congruences quadratiques $\sigma : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}(W)$, où W est l'espace des équations de coniques de $\mathbb{P}_2$ contenant C. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cong}(C) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}(W, W^*) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma^*)^{-1} \end{array}$$

est compatible avec un morphisme de groupes $G_C \longrightarrow GL(W)$. On montre (théorème 4.4.1) que l'application quotient

$$G_C/G_C \longrightarrow \mathrm{Isom}(W, W^*)/GL(W)$$

a des fibres finies. On donne au chapitre 6 la liste des G_C-orbites de $\mathrm{Cong}(C)$ correspondant aux $GL(W)$-orbites des $\mathbb{T}(\phi)$ correspondantes.

Dans le chapitre 5 on montre (théorème 5.3.1) que pour toute congruence quadratique normale $\sigma : \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ telle que l'image de σ contienne au moins une quadrique de rang maximal de $\mathbb{P}(W)$ il existe un morphisme rationnel $R : \mathbb{P}(V) \longrightarrow PGL(V)$ et une quadrique C_0 de $\mathbb{P}(V)$ tels que pour un point général P de $\mathbb{P}(V)$ on ait $\sigma(P) = R^{-1}(C_0)$. Cela découle du fait qu'il existe des sections rationnelles de la restriction à $\mathbb{P}(W)$ de la quadrique universelle $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(S^2V^*) \times \mathbb{P}(V)$ (prop. 5.2.5). Dans le cas où $n = 3$, on montre que si $L(\sigma) = H(\sigma)$, on peut définir R par des formes de degré ≤ 2.

2. Isomorphismes, quadriques et translations associées

2.1. Définitions

Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n + 1 \geq 4$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{T} : & \mathrm{Isom}(W, W^*) & \longrightarrow & GL(W) \\ & \phi & \longmapsto & {}^t\phi^{-1} \circ \phi \end{array}$$

Dans [4] on appelle $\mathbb{T}(\phi)$ la *translation* associée à ϕ. Dans [8] on appelle $\mathbb{T}(\phi)^{-1}$ l'*opérateur canonique*. Le groupe $GL(W)$ agit sur lui-même à droite par conjugaison et sur $\mathrm{Isom}(W, W^*)$ par :

$$\phi.g \ = \ {}^tg \circ \phi \circ g$$

pour $g \in GL(W), \phi \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$, et $\mathbb{T}$ est un $GL(W)$-morphisme.

Si $\phi \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$, on note

$$\phi_S = \frac{1}{2}(\phi + {}^t\phi), \quad \phi_A = \frac{1}{2}(\phi - {}^t\phi)$$

qu'on appelle respectivement la *partie symétrique* et la *partie antisymétrique* de ϕ. On utilise les mêmes notations pour les éléments de $\mathrm{Isom}(W^*, W)$.

On notera souvent de la même façon un point de $\mathbb{P}_n$ et un point de W au dessus du précédent, ce qui donne par exemple un sens à la définition suivante : si ϕ est non antisymétrique, on note $Q(\phi)$ la quadrique de $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ d'équation $x.\phi(x) = 0$.

Si $X \subset \mathbb{P}^n$, on note $X^\perp$ (resp. ${}^\perp X$) le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}_n$ constitué des points y tels que $x\phi(y) = 0$ (resp. $y\phi(x) = 0$) pour tout point x de X.

2.1.1. Lemme : *Soit P un point lisse de $Q(\phi)$. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *On a* $\phi(P) = {}^t\phi(P)$ *dans* $\mathbb{P}(W^*)$.
(2) *On a* $P^\perp = {}^\perp P$.
(3) *On a* $\mathbb{T}(\phi)(P) = P$ *dans* $\mathbb{P}(W)$.
(4) *L'espace tangent de $Q(\phi)$ en P est $P^\perp$.*

Immédiat

2.2. Étude de l'action de $GL(W)$

La $GL(W)$-orbite d'un élément ϕ de $\mathrm{Isom}(W, W^*)$ est entièrement déterminée par la $GL(W)$-orbite de $\mathbb{T}(\phi)$:

2.2.1. Proposition : *Pour tout* $\phi \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$, *on a*

$$\mathbb{T}^{-1}(\mathbb{T}(\phi)) \ \subset \ GL(W).\phi.$$

(Proposition 3.1.1 de [8]).

2.2.2. *Le cas où* $\dim(W) = 4$

On donne ci-dessous la liste des orbites des $\mathbb{T}(\phi)$ et la forme des ϕ correspondants dans le cas où $\dim(W) = 4$.

Cas 1.1 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ \lambda X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & \mu Y & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda^2 \neq 1,\ \mu \neq 1,\ \lambda\mu \neq 1,\ \lambda \neq \mu,\ XY \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 4$.

Cas 1.2 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & T \\ \lambda X & 0 & \lambda Z & 0 \\ 0 & Z & 0 & Y \\ \lambda T & 0 & \mu\lambda Y & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda^2 \neq 1$, $XY - ZT \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 4$.

Cas 1.3 :

$$\mathbb{T}(\phi) = I_W, \quad \phi = \text{ matrice symétrique,}$$

On a $rg(Q(\phi)) = 4$.

Cas 1.4 :

$$\mathbb{T}(\phi) = -I_W, \quad \phi = \text{ matrice antisymétrique,}$$

Cas 1.5 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} \alpha & X & 0 & 0 \\ X & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & \lambda Y & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 1$, $(\alpha\beta - X^2)Y \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 4$ si $\lambda \neq -1$ et sinon $rg(Q(\phi)) = 2$.

Cas 2.1 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & -\frac{\alpha}{2} & \beta \\ -\alpha & \frac{3}{2}\alpha & -\frac{\alpha}{2} - \beta & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 3$.

Cas 2.2 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 & u+v \\ -2\alpha & \alpha & -u-v & v \\ 0 & u+v & 0 & 2\beta \\ -u-v & u & -2\beta & \beta \end{pmatrix}$$

avec $4\alpha\beta - (u+v)^2 \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 2$.

Cas 2.3 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda\alpha & 0 & 0 \\ -\lambda^3\alpha & -\lambda^2\alpha + \lambda\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda^2 \neq 1$, $\alpha \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 4$.

Cas 2.4 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \epsilon & -\alpha & \beta - \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 4$.

Cas 2.5 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ \beta & \gamma & \gamma & \epsilon \end{pmatrix}$$

avec $\alpha\gamma \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 4$.

Cas 2.6 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \lambda\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda^2 \neq 1$, $\alpha\beta \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 3$.

Cas 2.7 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\gamma & -\beta & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha\beta \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 1$.

Cas 2.8 :

$$\mathbb{T}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \phi = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha(ad - c^2) \neq 0$. On a $rg(Q(\phi)) = 3$.

Les cas 1.x sont ceux où $\mathbb{T}(\phi)$ est diagonalisable les cas 2.x sont ceux où elle ne l'est pas. Dans le cas général les résultats de [8] permettent de déterminer toutes les $GL(W)$-orbites des ϕ et $\mathbb{T}(\phi)$ correspondants.

3. Congruences quadratiques (cas général)

3.1. Définition

Soient $n \geq 3$ un entier, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(V)$. Soit W_0 un sous-espace vectoriel de dimension n+1 de $H^0(\mathbb{P}_{n-1}, \mathcal{O}(2))$. On appelle *congruence quadratique* un morphisme rationnel

$$\sigma : \mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(W_0) = \mathbb{P}_n$$

tel que :

(1) $\sigma^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(2)$.
(2) $\sigma^* : W_0^* \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_{n-1}, \mathcal{O}(2))$ induit un isomorphisme $W_0^* \simeq W_0$ aussi noté σ^*, non antisymétrique.
(3) Pour tout point P de $\mathbb{P}_2$ où σ est défini, on a $P \in \sigma(P)$, $\sigma(P)$ étant vu comme une quadrique de $\mathbb{P}_{n-1}$.

Si de plus σ induit un isomorphisme birationnel $\mathbb{P}_{n-1} \simeq \overline{\sigma(\mathbb{P}_{n-1})}$, et si ϕ_S est de rang au moins n on dit que σ est *régulière*. Si $n = 3$ on dit que σ est une *congruence quadratique plane*.

Soit $\phi \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$. On dit que σ est une *réalisation géométrique* de ϕ *par des quadriques de* W_0 s'il existe un isomorphisme $\eta : W \simeq W_0$ tel que ϕ soit la composée

$$W \xrightarrow{\eta} W_0 \xrightarrow{(\sigma^*)^{-1}} W_0^* \xrightarrow{{}^t\eta} W^*$$

On identifie dans ce cas W et W_0, σ^* et ϕ^{-1}.

3.1.1. Lemme : *1 - Le morphisme σ est à valeurs dans $Q(\phi)$, et pour tous points P,Q de $\mathbb{P}_{n-1}$ où σ est défini, on a $Q \in \sigma(P)$ si et seulement si $\phi(\sigma(P)).\sigma(Q) = 0$.*

2 - L'image de σ est dense dans $Q(\phi)$, et ϕ_S est de rang au moins 3.

Démonstration. La démonstration de 1- est la même que celle de [4], lemme 2.5. Puisque l'image de $Q(\phi)$ n'est pas contenue dans un hyperplan, 2- en découle immédiatement. □

3.2. Congruences quadratiques normales

Le cas le plus intéressant est celui où W_0 est l'espace des formes quadratiques s'annulant sur une sous-variété fermée C de $\mathbb{P}_{n-1}$ de codimension 2 en chacun de ses points. Dans ce cas C est nécessairement une quadrique d'un hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$, en vertu de la

3.2.1. Proposition : *Soit C une sous-variété fermée de $\mathbb{P}_{n-1}$ de codimension 2 en chacun de ses points. Alors les 2 assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}_{n-1}$ tel que C soit une quadrique de H.*
(2) *L'idéal de C contient $n+1$ formes quadratiques linéairement indépendantes.*

Démonstration. Je pense que ce résultat est classique. J'en donne cependant une esquisse de démonstration. Il est immédiat que 1- entraîne 2-. Prouvons la réciproque. Supposons que 2- soit vraie.

Soit $W = H^0(\mathcal{I}_C(2))$, qui est de dimension $\geq n+1$. Supposons que $\mathbb{P}(W)$ contienne une quadrique Q de rang $r \geq 5$. Alors C est une hypersurface de Q. D'après le théorème de Klein (cf. [10], Ex. II.6.5), C est l'intersection complète de Q et d'une hypersurface S de $\mathbb{P}_{n-1}$. L'idéal de C est donc engendré par des équations q et ϕ de Q, S respectivement. Il en découle d'après 2- que ϕ doit être de degré 1, ce qui démontre 1-.

On peut donc supposer que toutes les formes quadratiques de W sont de rang ≤ 4. Soit r leur rang maximal. On voit aisément que les quadriques associées ont un $\mathbb{P}_{n-r}$ en commun, et on se ramène ainsi au cas où $r = n$ et $n = 3$ ou 4. Traitons par exemple le cas le plus difficile : $n = 4$. On prend une quadrique lisse $Q \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ de $\mathbb{P}(W)$. Alors C est une section d'un fibré $\mathcal{O}(a,b)$ dans Q, avec $a + b \leq 4$ (car C est contenue dans l'intersection de deux quadriques). On montre ensuite que le seul cas possible est $(a,b) = (1,1)$, en remarquant que dans les autres cas l'idéal de C ne contient pas 5 formes quadratiques linéairement indépendantes. Ceci démontre 1-. □

Les congruences quadratiques $\mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(W_0)$ sont dites *normales*. Ce sont les seuls types de congruences quadratiques que l'on étudiera ici. Il en existe d'autres (cf. 4).

Soient C une quadrique d'un hyperplan H de $\mathbb{P}_{n-1}$, W l'espace vectoriel de dimension $n+1$ des quadriques de $\mathbb{P}_{n-1}$ contenant C. Soient $\sigma : \mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ une congruence quadratique, $\phi : W \simeq W^*$ l'isomorphisme associé, et r le rang de $Q(\phi)$. On notera $H(\sigma) = H$ et $C(\sigma) = C$.

On pose $m = rg(C(\sigma))$. On peut supposer que $\mathbb{P}_{n-1}$ est muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, que $H(\sigma)$ est défini par l'équation $x_n = 0$, et $C(\sigma)$ est défini dans $H(\sigma)$ par l'équation $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 0$. On munit W de la base $(x_1x_n, \ldots, x_n^2, x_1^2 + \cdots + x_m^2)$. On considère la matrice $(n+1) \times (n+1)$

$$J_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

dont les seuls termes non nuls de la diagonale sont les m premiers termes, égaux à 1. Alors on voit aisément qu'il existe une matrice $(n+1) \times (n+1)$ antisymétrique M telle que la matrice de ϕ^{-1} relativement à la base précédente de W soit, à un scalaire multiplicatif près de la forme $M + J_m$. Le rang de ϕ_S^{-1} est alors $m+2$, ainsi donc que celui de ϕ_S. On en déduit immédiatement la

3.2.2. Proposition : *Le rang de $C(\sigma)$ est $r-2$, $(\phi^{-1})_S$ ne dépend que de W et σ induit un isomorphisme birationnel $\mathbb{P}_{n-1} \simeq \overline{\sigma(\mathbb{P}_{n-1})}$.*

On déduit aussi de ce qui précède le

3.2.3. Lemme : *La restriction de σ à $H(\sigma)$ est constante, et $\sigma(H(\sigma))$ est une quadrique dégénérée, dont une des composantes est $H(\sigma)$.*

On notera $L(\sigma)$ l'autre composante de $\sigma(H(\sigma))$. C'est un hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$. Avec les notations précédentes, si $M = (a_{ij})$, l'équation de $L(\sigma)$ est

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n+1,i} X_i \; - \; \frac{1}{2} X_n \quad = \quad 0.$$

3.3. Caractérisation des congruences quadratiques

3.3.1. Proposition : *Soient W_0 un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de $H^0(\mathbb{P}_{n-1}, \mathcal{O}(2))$ et $\sigma : \mathbb{P}_{n-1} \to \mathbb{P}(W_0)$ un morphisme rationnel dont l'image n'est pas contenue dans un hyperplan, et tel que pour tout $P \in \mathbb{P}_{n-1}$ général on ait $P \in \sigma(P)$. Si $P \in \mathbb{P}_{n-1}$, on note $F_\sigma(P)$ l'adhérence du lieu des points Q tels que σ soit défini en Q et $P \in \sigma(Q)$. Alors σ est une congruence quadratique si et seulement si pour tout point général P de $\mathbb{P}_{n-1}$, $F_\sigma(P)$ est un point de de $\mathbb{P}(W_0)$.*

Démonstration. Posons $L = \sigma^*(\mathcal{O}(1))$, et soit $\sigma^* : W_0^* \longrightarrow H^0(L)$ l'application linéaire associée à σ. Soient $x \in V$ au dessus de P, et $\phi_x \in W_0^*$ défini par $\phi_x(q) = q(x)$. Alors $\sigma^*(\phi_x)$ s'annule exactement sur $F_\sigma(P)$. Il en découle d'après la condition 2 de 3.1 que si σ est une congruence quadratique, alors $F_\sigma(P)$ est une quadrique élément de $\mathbb{P}(W_0)$.

Réciproquement, supposons que pour un point général P de $\mathbb{P}_{n-1}$, $F_\sigma(P)$ soit une quadrique appartenant à $\mathbb{P}(W_0)$. Il faut prouver que les propriétés 1- et 2- de 3.1 sont vérifiées. En choisissant $n+1$ points $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de V tels que (ϕ_{x_i}) soit une base de W_0^* on se ramène au cas où relativement à une base convenable de W_0, σ est de la forme

$$\sigma \;=\; (\phi_1^p, \ldots, \phi_{n+1}^p)$$

p étant un entier positif et $\phi_1, \ldots, \phi_{n+1} \in W_0$.

Montrons que $p = 1$. Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(W_0^*) \\ \mathbb{C}x & \longmapsto & \mathbb{C}\phi_x \end{array}$$

a pour image une quadrique. Il en découle qu'il existe une quadrique Q de $\mathbb{P}_n$ telle que pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in Q$ il existe un $\phi \in W_0$ tel que

$$\lambda_1 \phi_1^p + \cdots + \lambda_{n+1} \phi_{n+1}^p \;=\; \phi^p.$$

Puisque l'image de σ n'est pas contenue dans un hyperplan, $\phi_1^p, \ldots, \phi_{n+1}^p$ sont linéairement indépendants dans $S^{2p}V^*$. La quadrique Q contient des droites. Cela signifie qu'il existe des éléments linéairements indépendants ψ_1, ψ_2 de W_0 tels que toute combinaison linéaire de ψ_1^p et ψ_2^p soit de la forme ψ^p, avec ψ dans W_0. Ceci est impossible si $p > 1$, comme on peut le voir par exemple en se restreignant à des droites de $\mathbb{P}_{n-1}$. Il est maintenant immédiat que les conditions 1- et 2- de 3.1 sont vérifiées. □

3.3.2. Proposition : *Avec les notations de la proposition 3.3.1, le morphisme rationnel*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}(W) \\ P & \longmapsto & F_\sigma(P) \end{array}$$

est une congruence quadratique.

Démonstration. Notons τ le morphisme précédent. Il suffit de vérifier que les conditions de la proposition 3.3.1 sont vérifiées par τ. Il est immédiat que pour un point général P de $\mathbb{P}_{n-1}$ on a $F_\tau(P) = \sigma(P)$, donc $F_\tau(P)$ est bien une quadrique. D'autre part, si $x \in V$ est au dessus de P on a vu que $\sigma^*(\phi_x)$ est une équation de $F_\sigma(P)$. Comme σ^* est un isomorphisme de W_0^* sur W_0 et que les ϕ_x engendrent W_0^*, on voit que l'image de τ ne peut pas être contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}(W_0)$. □

3.3.3. La congruence quadratique de la proposition 3.3.2 est appelée la *transposée* de σ et est notée ${}^t\sigma$. Notons que l'isomorphisme $W_0 \simeq W_0^*$ associé à ${}^t\sigma$ est le transposé de celui qui est associé à σ. On a ${}^t({}^t\sigma) = \sigma$.

3.4. Translation associée

Soit σ une congruence quadratique induisant un isomorphisme birationnel $\mathbb{P}_{n-1} \simeq \overline{\sigma(\mathbb{P}_{n-1})}$. Soit $\phi = (\sigma^*)^{-1}$. On note

$$\mathbb{T}(\sigma) \;=\; \sigma^{-1} \circ \mathbb{T}(\phi) \circ \sigma,$$

qu'on appelle la *translation* associée à σ.

3.4.1. Lemme : *Soit P est un point de $\mathbb{P}_{n-1}$ où σ est définie. Alors σ est aussi définie en $\mathbb{T}(\sigma)(P)$ et $\mathbb{T}(\sigma)(P) \in \sigma(P)$.*

Démonstration. Immédiat. □

3.4.2. Proposition : *Soient σ une congruence quadratique régulière ou normale, $\phi : W_0 \simeq W_0^*$ l'isomorphisme associé. Alors ${}^t\sigma$ est aussi régulière, et on a*

$$\mathbb{T}({}^t\sigma) \;=\; \mathbb{T}(\sigma)^{-1}.$$

Démonstration. Le cas où σ est normale découle du § 3.5. Supposons donc σ régulière. Soit $\phi = (\sigma^*)^{-1} : W_0 \simeq W_0^*$. Si P est un point de $\mathbb{P}_{n-1}$ où σ est définie, on note $W(P)$ le sous-espace vectoriel de W_0 constitué de u tels que $\phi(u)\sigma(P) = 0$. Puisque ϕ_S est de rang au moins n et l'image de σ dense dans $Q(\phi)$ (d'après le lemme 3.1.1), pour un P générique $W(P)$ est un hyperplan de W_0 et ϕ_S est non dégénérée sur $W(P)$. Il faut montrer que ${}^t\sigma$ est injective sur un ouvert de $\mathbb{P}_{n-1}$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe deux points distincts Q_0, Q_1 de $\mathbb{P}_{n-1}$ où σ est définie, tels que pour $i = 0, 1$ $W(Q_i)$ soit un hyperplan de W_0, que ϕ_S soit non dégénérée sur $W(Q_i)$ et ${}^t\sigma(Q_0) = {}^t\sigma(Q_1)$. Cela entraîne que les quadriques de la forme $\sigma(Q)$ qui passent par Q_0 sont les mêmes que celles qui passent par Q_1. D'après le lemme 3.1.1, ceci équivaut à $Q(\phi) \cap W(Q_0) = Q(\phi) \cap W(Q_1)$. Puisque ϕ_S est non dégénérée sur $W(Q_0)$ et $W(Q_1)$, on en déduit que $W(Q_0) = W(Q_1)$. Puisque ϕ_S est non dégénérée, ceci entraîne que $Q_0 = Q_1$. Donc ${}^t\sigma$ est injective sur un ouvert de $\mathbb{P}_{n-1}$. Le reste de la proposition 3.4.2 est évident. □

3.5. Construction géométrique des congruences quadratiques normales

Soient n un entier tel que $n \geq 3$, W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$, $\phi : W \longrightarrow W^*$ un isomorphisme. On suppose que la quadrique $Q(\phi)$ est non dégénérée. Soit $r \geq 3$ son rang. Si $X \subset \mathbb{P}(W)$, rappelons qu'on note $X^\perp$ (resp. ${}^\perp X$) le sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(W)$ constitué des points $\mathbb{C}y$ tels que $x\phi(y) = 0$ (resp. $y\phi(x) = 0$) pour tout point x de W au dessus d'un point de X.

Soient O un point lisse de $Q(\phi)$ et

$$\pi = \pi_O : \mathbb{P}(W)\backslash\{O\} \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$$

la projection de centre O. Plus concrètement, on peut considérer que $\mathbb{P}_{n-1}$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(W)$ ne contenant pas O et pour tout point P de $\mathbb{P}(W)$ différent de O, $\pi(O)$ est l'intersection de $\mathbb{P}_{n-1}$ et de la droite OP.

3.5.1. Lemme : *Soit T_O l'hyperplan tangent à $Q(\phi)$ en O. L'image par π de $Q(\phi) \cap T_O$ est une quadrique C de l' hyperplan $\pi(T_O)$ de $\mathbb{P}_{n-1}$. Le rang de C est égal à $r-2$.*

Démonstration. On peut choisir des coordonnées indépendantes $x_0, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{P}(W)$ de telle sorte que l'équation de $Q(\phi)$ soit $x_0^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0$, et que O soit le point $(1, i, 0, \ldots, 0)$. L'équation de T_O est alors $x_0 + ix_1 = 0$. On peut aussi supposer que $\mathbb{P}_{n-1}$ est l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$, muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. Dans ce cas, $\pi(T_O)$ est l'hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$ d'équation $x_1 = 0$, et C la quadrique d'équation $x_2^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0$, qui est bien de rang $r-2$. □

Notons que si $P \in Q(\phi) \cap T_O$ et $P \neq O$, alors toute la droite OP est contenue dans $Q(\phi)$. On note W_0 l'espace vectoriel de dimension $n+1$ des quadriques de $\mathbb{P}_{n-1}$ contenant C. Il est immédiat que si H est un hyperplan de $\mathbb{P}(W)$, $\pi(Q(\phi) \cap H)$ est une quadrique de $\mathbb{P}_{n-1}$

contenant C, qu'on notera $S(H)$. On a des isomorphismes

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{P}(W) & \longrightarrow & \mathbb{P}(W_0) \\ & P & \longmapsto & S(P^{\perp}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \tau' : & \mathbb{P}(W) & \longrightarrow & \mathbb{P}(W_0) \\ & P & \longmapsto & S({}^{\perp}P) \end{array}$$

Notations : On notera pour simplifier de la même façon un point P d'un espace projectif, et un point de l'espace vectoriel correspondant au dessus de P. Si u est un élément d'un espace vectoriel et f un élément de son dual, on notera $u.f$ ou $f.u$ le scalaire image de u par f.

Si Q est un point de $\mathbb{P}_{n-1}\backslash C$, on note $\eta(Q)$ le point commun à la droite OQ et à $Q(\phi)$ autre que O. On a

$$\begin{array}{rcl} \eta(Q) & = & (Q.\phi(Q))O - (Q.\phi(O) + O.\phi(Q))Q \\ & = & (Q.\phi_S(Q))O - (Q.\phi_S(O) + O.\phi_S(Q))Q. \end{array}$$

Si $P \in \mathbb{P}(W)$, on a donc $Q \in \tau(P)$ si et seulement si $P.\phi(\eta(Q)) = 0$, et $Q \in \tau'(P)$ si et seulement si $P.{}^t\phi(\eta(Q)) = 0$.

On considère les morphismes rationnels

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{P}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}(W_0) \\ & Q & \longmapsto & S({}^{\perp}\eta(Q)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \sigma' : & \mathbb{P}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}(W_0) \\ & Q & \longmapsto & S(\eta(Q)^{\perp}) \end{array}$$

Si P, Q sont des points généraux de $\mathbb{P}_{n-1}$ on a donc $P \in \sigma(Q)$ (resp. $P \in \sigma'(Q)$) si et seulement si $\eta(P).\phi(\eta(Q)) = 0$ (resp. $\eta(Q).\phi(\eta(P)) = 0$).

3.5.2. Proposition : *Les morphismes σ et σ' sont des congruences quadratiques. On a $\sigma' = {}^t\sigma$ et l'isomorphisme $W_0 \simeq W_0^*$ associé à σ est ϕ.*

Démonstration. Pour tout point P de $\mathbb{P}_{n-1}$, on note Φ_P la forme linéaire $q \longmapsto q(P)$. On commence par évaluer $\sigma^*(\Phi_P)$, pour tout point P de $\mathbb{P}_{n-1}\backslash C$. Soit $Q \in \mathbb{P}_{n-1}$. Alors on a

$$\sigma^*(\Phi_P)(Q) \ = \ \eta(P).\phi(\eta(Q)).$$

Donc $\tau(\eta(P)) = \sigma^*(\Phi_P)$. On a d'autre part, pour tout $w \in W$, ${}^t\tau(\Phi_P)(w) = w.\phi(\eta(P))$. Il en découle, les Φ_P engendrant W_0^*, que σ^* est à valeurs dans W_0 et que ${}^t\tau \circ (\sigma^*)^{-1} \circ \tau = \phi$. La proposition 3.5.2 s'en déduit immédiatement. □

On a donc $H(\sigma) = \pi(T_O)$ et $C(\sigma) = C$.

3.5.3. Proposition : *On a $L(\sigma) = \pi(O^{\perp})$.*

Démonstration. Si P est un point général de $H(\sigma)$, on a $\eta(P) = O$, donc $\pi(O^\perp) \subset \sigma(P)$. Si $T_0 \neq O^\perp$ on a donc $L(\sigma) = \pi(O^\perp)$. Le cas $T_0 = O^\perp$ s'en déduit par continuité. □

La translation $\mathbb{T}(\sigma)$ s'interprète de la façon suivante : si $P \in \mathbb{P}_{n-1}$, on a

$$\mathbb{T}(\sigma)(P) \;=\; \pi(\mathbb{T}(\phi)(\eta(P))).$$

On en déduit la

3.5.4. Proposition : *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *On a* $T_0 = O^\perp$.
(2) *On a* $L(\sigma) = H(\sigma)$.
(3) *La translation* $T(\sigma)$ *est linéaire.*

Démonstration. L'équivalence des deux premières propriétés précédentes découle du lemme 3.5.3. Supposons que 1- soit vérifiée. Soit K un hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$. Alors les points $\eta(Q)$, $Q \in K$ sont dans $K' \cap Q(\phi)$, où $K' = \pi^{-1}(K)$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(W)$ passant par O. On a $\mathbb{T}(\sigma)(K) \;=\; \pi(\mathbb{T}(\phi)(K' \cap Q(\phi))$, et $\mathbb{T}(\phi)(K' \cap Q(\phi))$ est contenu dans $\mathbb{T}(\phi)(K')$, qui est un hyperplan de $\mathbb{P}(W)$. Son image par π est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$ car puisque $T_0 = O^\perp$, on a d'après le lemme 2.1.1, $\mathbb{T}(\phi)(O) = O$, d'où $O \in \mathbb{T}(\phi)(K')$. Il en découle que $\mathbb{T}(\sigma)$ est linéaire. Réciproquement, si $\mathbb{T}(\sigma)$ est linéaire, le raisonnement précédent montre que pour tout hyperplan K' de $\mathbb{P}(W)$ passant par O général, $\mathbb{T}(\phi)(K')$ passe aussi par O, d'òu il découle que $\mathbb{T}(\phi)(O) = O$ dans $\mathbb{P}(W)$ et $T_0 = O^\perp$ d'après le lemme 2.1.1. □

3.5.5. Thèorème : *Toute congruence quadratique normale peut s'obtenir par la méthode précédente.*

Démonstration. On emploie des notations légèrement différentes de celles de 3.2. On munit $\mathbb{P}_n$ de coordonnées indépendantes $x_1, \ldots, x_{n+1}$. On suppose que $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ est l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$, muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, que $Q(\phi)$ est la quadrique d'équation

$$x_{n-m+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \;=\; 0,$$

et que $O = (0, \ldots, i, 1)$. Alors T_O est l'hyperplan d'équation $ix_n + x_{n+1} = 0$. L'hyperplan $\pi(T_O)$ de $\mathbb{P}_{n-1}$ est défini par l'équation $x_n = 0$ et C est la quadrique de $\pi(T_O)$ d'équation

$$x_{n-m+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \;=\; 0.$$

L'isomorphisme ϕ a une matrice du type

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m+1} \end{pmatrix} \;+\; A,$$

où I_{m+1} est la matrice identité $(m+1)\times(m+1)$ et $A=(\alpha_{ij})$ une matrice antisymétrique. Si $P=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{P}_n$, on calcule aisément qu'on a, en posant $s(P)=x_{n-m+1}^2+\cdots+x_{n-1}^2$,

$$\eta(P) \;=\; \begin{pmatrix} -2ix_1x_n \\ . \\ . \\ . \\ -2ix_{n-1}x_n \\ is(P)-ix_n^2 \\ s(P)+x_n^2 \end{pmatrix}.$$

On va montrer que toute congruence quadratique $\sigma:\mathbb{P}_{n-1}\longrightarrow\mathbb{P}(W_0)$ peut s'obtenir par la construction géométrique décrite précédemment en utilisant un ϕ convenable (c'est-à-dire une matrice antisymétrique A convenable). On munit W_0 de la base

$$(p_1,\dots,p_{n+1}) \;=\; (x_1x_n,\dots,x_{n-1}x_n,x_n^2,x_{n-m+1}^2+\cdots+x_{n-1}^2).$$

Soit

$$N \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors σ est définie par une matrice $(n+1)\times(n+1)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4I_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \;+\; (b_{ij})$$

où (b_{ij}) est antisymétrique. C'est-à-dire que si P et Q sont des points de $\mathbb{P}_{n-1}$, on a $P\in\sigma(Q)$ si et seulement si

$$\sum_{1\le k,j\le n+1} b_{jk}p_k(P)p_j(Q) \;=\; 0.$$

En utilisant le fait que $P\in\sigma(Q)$ si et seulement si $\eta(Q).\phi(\eta(P))=0$, on voit qu'on doit avoir

$$b_{ij}=-4\alpha_{kj} \quad \text{si} \quad 1\le k,j\le n-1,$$

$$b_{kn}=-2\alpha_{kn}-2i\alpha_{k,n+1} \quad \text{si} \quad 1\le k\le n-1,$$

$$b_{k,n+1}=2\alpha_{kn}-2i\alpha_{k,n+1} \quad \text{si} \quad 1\le k\le n-1,$$

$$b_{n,n+1}=2i\alpha_{n,n+1}.$$

Il est donc clair qu'on peut bien choisir une matrice antisymétrique A adéquate. □

3.6. Équivalence de congruences quadratiques

Soit $\sigma:\mathbb{P}_{n-1}=\mathbb{P}(V)\longrightarrow\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(W_0)$ une congruence quadratique. Donc W_0 est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de $H^0(\mathbb{P}_{n-1},\mathcal{O}(2))$. On note G_{W_0} le sous-groupe de $GL(V)$ constitué des éléments qui laissent W_0 invariant. On note $\mathrm{Cong}(W_0)$ l'ensemble des congruences quadratiques à valeurs dans $\mathbb{P}(W_0)$. On a une action de G_{W_0} sur $\mathrm{Cong}(W_0)$ définie par :

$$(\alpha.\sigma)(P) \;=\; \alpha^{-1}(\sigma(\alpha(P)))$$

pour $P\in\mathbb{P}_{n-1}$ et $\alpha\in G_{W_0}$.

Le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{W_0} : \mathrm{Cong}(W_0) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}(W_0, W_0^*) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma^*)^{-1} = \phi \end{array}$$

est compatible avec le morphisme de groupes évident $G_{W_0} \longrightarrow GL(W_0)$.

Si W_0 est l'espace des équations de quadriques contenant une quadrique C d'un hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$ (autrement dit si on s'intéresse à des congruences quadratiques normales), G_{W_0} est le groupe des éléments de $GL(V)$ laissant C invariante. On notera alors

$$G_C = G_{W_0}, \quad \mathrm{Cong}(C) = \mathrm{Cong}(W_0), \quad \Phi_C = \Phi_{W_0}.$$

On montre au § 4.4 que si $n = 3$, les fibres du morphisme quotient

$$\mathrm{Cong}(C)/G_C \longrightarrow \mathrm{Isom}(W_0, W_0^*)/GL(W_0)$$

sont finies. J'ignore si c'est le cas si $n > 3$. Il est vraisemblable que non car si $n > 3$, et $\phi \in \mathrm{Isom}(W_0, W_0^*)$, on a en général $\dim(G_\phi) < \dim(Q(\phi))$ (cf. [8], 3.5.2), G_ϕ désignant le stabilisateur de ϕ dans $GL(W_0)$, c'est-à-dire le groupe des *isométries* de la forme bilinéaire induite par ϕ.

4. Congruences quadratiques planes

On reprend les notations de 3.

4.1. Classification des congruences quadratiques

4.1.1. Proposition : *Soit* $\sigma : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ *une congruence quadratique. Alors on est dans l'un des trois cas suivants :*

1) $\mathbb{P}(W)$ *est l'espace des coniques passant par deux points fixes distincts de* $\mathbb{P}_2$.

2) $\mathbb{P}(W)$ *est l'espace des coniques passant par un point fixe de* $\mathbb{P}_2$ *et tangentes à une droite fixe de* $\mathbb{P}_2$ *en ce point.*

3) $\mathbb{P}(W)$ *est l'espace des coniques invariantes par une involution non triviale de* $\mathbb{P}_2$.

Dans les cas 1 et 2, σ *induit un isomorphisme birationnel* $\mathbb{P}_2 \simeq Q(\phi)$.

(cf. [4], prop. 2.6).

Dans le cas 1 (resp. 2,3) on dit que σ est une *congruence quadratique de type* 1 (resp. 2,3). Dans les cas 1 et 2 on est en présence de congruences quadratiques *normales* (cf. 3.2). Il est facile de trouver des exemples du cas 3, qui montrent qu'il existe des congruences quadratiques non normales.

Dans ce qui suit on s'intéresse exclusivement aux cas 1 et 2.

Soit
$$\pi : S^2W \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(4))$$
la restriction du morphisme canonique $S^2(H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(2))) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(4))$. Dans les 3 cas de la proposition précédente, $\ker(\phi)$ est de dimension 1. Un générateur ψ de $\ker(\phi)$ est une équation de l'image de $Q(\phi)$ par l'isomorphisme $\mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}(W^*)$ déduit de ϕ (c'est la quadrique de $\mathbb{P}(W^*)$ d'équation $x.\phi^{-1}(x) = 0$). On a aussi
$$\psi \ = \ (\phi^{-1})_S.$$
On en déduit le résultat suivant, qui découle aussi du théorème 3.5.5 :

4.1.2. Proposition : *Soit* $\phi \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$. *Alors*

1 - ϕ admet une réalisation géométrique par des coniques de type 1 si et seulement si $Q(\phi)$ est de rang 4.

2 - ϕ admet une réalisation géométrique par des coniques de type 2 si et seulement si $Q(\phi)$ est de rang 3.

Démonstration. Soit $\sigma : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ un congruence quadratique de type 1 ou 2. On peut donc trouver des coordonnées indépendantes X, Y, Z dans V de telle sorte qu'on ait la base suivante (e_0, e_1, e_2, e_3) dans W :

Cas 1 : $e_0 = XY$, $e_1 = YZ$, $e_2 = XZ$, $e_3 = Z^2$, $\ker(\pi) =<e_0e_3 - e_1e_2>$.

Cas 2 : $e_0 = XZ$, $e_1 = Y^2$, $e_2 = YZ$, $e_3 = Z^2$, $\ker(\pi) =<e_2^2 - e_1e_3>$.

On en déduit immédiatement que si ϕ admet une réalisation géométrique par des coniques de type 2, alors $Q(\phi)$ est de rang 3 et si ϕ admet une réalisation géométrique par des coniques de type 1, alors $Q(\phi)$ est de rang 4.

Réciproquement, on munit V de la base duale de (X, Y, Z). On considère les matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
Soit $\phi \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$. Si $rg(Q(\phi)) = 4$, relativement à une base convenable de V, la matrice de ϕ^{-1} s'exprime sous la forme de la somme de A_1 et d'une matrice antisymétrique :
$$\phi^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c+1 \\ -a & 0 & d-1 & e \\ -b & -d-1 & 0 & f \\ -c+1 & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$
On définit alors σ par
$$\begin{aligned} \sigma(<x, y, z>) \ &= \ <(-ayz - bxz + (1-c)z^2)XY + (axy - (d+1)xz - ez^2)YZ \\ &\quad +(bxy + (d-1)yz - fz^2)XZ + ((c+1)xy + eyz + fxz)Z^2> . \end{aligned}$$
et on obtient ainsi une réalisation géométrique de ϕ par des coniques de type 1. L'autre cas est analogue, en utilisant la matrice A_2. □

4.2. Translation associée

Supposons que $rg(Q(\phi)) = 4$, et que la matrice de ϕ^{-1} relativement à XY, YZ, XZ, Z^2 soit

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c+1 \\ -a & 0 & d-1 & e \\ -b & -d-1 & 0 & f \\ -c+1 & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\theta = af + cd - be$. On a alors

$$\mathbb{T}(\sigma)(x,y,z) = (L_1L_4, L_2L_3, L_2L_4),$$

avec

$$L_1 = (\theta + c + d + 1)x + 2ez, \quad L_2 = -2bx + (\theta - c - d + 1)z,$$
$$L_3 = (\theta - c + d - 1)y - 2fz, \quad L_4 = 2ay + (\theta - d + c - 1)z.$$

Supposons que $rg(Q(\phi)) = 3$, et que la matrice de ϕ^{-1} relativement à XZ, Y^2, YZ, Z^2 soit

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e-1 \\ -b & -d & 2 & f \\ -c & -e-1 & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $\theta = af + cd - be$, $\Delta = \det(\phi^{-1})$. On a alors

$$\mathbb{T}(\sigma)(x,y,z) = (V_1, L_1L_2, L_2^2),$$

avec

$$L_1 = (\theta + b)y + 2cz, \quad L_2 = -2ay + (\theta - b)z,$$
$$V_1 = \Delta xz - 2(\theta d - 2ae + 2a + bd)y^2 - 4(\theta e - af + cd + b)yz - 2(\theta f - 2ec - bf + 2c)z^2.$$

On en déduit après quelques calculs le cas particulier suivant de la proposition 3.5.4 :

4.2.1. Lemme : *La translation $\mathbb{T}(\sigma)$ est linéaire si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :*

(1) *On a* $rg(Q(\phi)) = 4$, $a = b = 0$ *et*

$$T(x,y,z) = ((d+1)((c+1)(d+1)x + 2ez), (d-1)((c+1)(d-1)y - 2fx), (c-1)(d^2-1)z).$$

(2) *On a* $rg(Q(\phi)) = 3$, $a = d = 0$ *et*

$$T(x,y,z) = (ex - 4(e^2-1)y - 2(f(e+1) + \frac{2ec}{b})z, (e-1)y - \frac{2c}{b}z, (e+1)z).$$

4.3. Lieu des coniques dégénérées

Soit $\sigma : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ une congruence quadratique de type 1 ou 2. L'espace de coniques W contient des coniques dégénérées. On munit W de la base décrite dans la proposition 4.1.2. Pour le type 1, une conique d'équation $uXY + vYZ + wXZ + tZ^2 = 0$ est dégénérée si et seulement si on a $u(vw - ut) = 0$. Dans ce cas le lieu des coniques dégénérées est donc la réunion d'un plan et d'une quadrique de $\mathbb{P}(W)$. Pour le type 2, une conique d'équation $uXZ + vY^2 + wYZ + tZ^2 = 0$ est dégénérée si et seulement si on a $uv = 0$. Dans ce cas le lieu des coniques dégénérées est la réunion de deux plans de $\mathbb{P}(W)$.

On note $D(\sigma)$ le lieu des points P de $P(V)$ tels que $\sigma(P)$ soit dégénérée.

Supposons que σ soit de type 1. Alors en général $D(\sigma)$ est la réunion de 6 droites de $\mathbb{P}(V)$. On choisit des coordonnées indépendantes x,y,z sur $\mathbb{P}(V)$ de telle sorte que $P_0 = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$. Supposons que pour ces coordonnées σ soit définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c+1 \\ -a & 0 & d-1 & e \\ -b & -d-1 & 0 & f \\ 1-c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors en général $D(\sigma)$ est constitué de $L(\sigma)$ et des 5 droites définies par l'équation

$$(-ay - bx + (1-c)z)(ay^2 + (c-d)yz + fz^2)(bx^2 + (c+d)xz + ez^2) \ = \ 0.$$

Supposons que σ soit de type 2. Alors en général $D(\sigma)$ est la réunion de 4 droites de $\mathbb{P}(V)$. On choisit des coordonnées indépendantes x,y,z sur $\mathbb{P}(V)$ de telle sorte que $P_0 = (1, 0, 0)$ et que ℓ soit la droite d'équation $z = 0$. Supposons que pour ces coordonnées σ soit définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e-1 \\ -b & -d & 2 & f \\ -c & -e-1 & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors en général $D(\sigma)$ est constitué de $L(\sigma)$ et des 3 droites définies par l'équation

$$(ax - dy - (e+1)z)(ay^2 + byz + cz^2) \ = \ 0.$$

Il existe néanmoins des cas où toutes les coniques de l'image de σ sont dégénérées.

4.4. Équivalence de congruences quadratiques planes

Soit C une quadrique d'un hyperplan ℓ de $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_2$, c'est-à-dire que C est constituée de deux points distincts, ou est donné par un seul point double P_0 de ℓ. Soit W_0 l'espace des équations de coniques de $\mathbb{P}_2$ contenant C.

4.4.1. Théorème : *Les fibres du morphisme quotient déduit de* Φ_C

$$\mathrm{Cong}(C)/G_C \longrightarrow \mathrm{Isom}(W_0, W_0^*)/GL(W_0)$$

sont finies.

Démonstration. Pour $j = 3, 4$ soit $I_j(W_0)$ la sous-variété localement fermée de $\mathrm{Isom}(W_0, W_0^*)$ constituée des ϕ tels que $Q(\phi)$ soit de rang j. Ces sous-variétés sont $GL(W_0)$-invariantes. On utilise les descriptions de $I_4(W_0))/GL(W_0)$ et $I_3(W_0))/GL(W_0)$ découlant du théorème 2.2.1, dans les deux cas possibles pour C. Par exemple dans le premier cas, on considère des matrices

$$\phi^{-1} \;=\; M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a & b & c+1 \\ -a & 0 & d-1 & e \\ -b & -d-1 & 0 & f \\ -c+1 & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(cf. la démonstration de la proposition 4.1.2). Tout élément de $I_4(W_0)$ est dans l'orbite d'une telle matrice, relativement à la base indiquée dans la démonstration de la proposition 4.1.2. Le groupe G_C est constitué des matrices $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u \\ 0 & \beta & v \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Alors on a

$$gM \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1+\delta \\ -a_1 & 0 & d_1-\delta & e_1 \\ -b_1 & -d_1-\delta & 0 & f_1 \\ -c_1+\delta & -e_1 & -f_1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\delta = \alpha\beta\gamma$. On peut supposer que $\delta = 1$ pour que gM soit du même type que M, c'est-à-dire qu'on considère l'action du sous-groupe G_0 constitué des g tels que $\alpha\beta\gamma = 1$. On a

$$a_1 = \alpha\gamma^2 a, \quad b_1 = \beta\gamma^2 b, \quad c_1 = c - \alpha\gamma a v - \beta\gamma b u, \quad d_1 = -\beta\gamma b u + \alpha\gamma a v + d,$$
$$e_1 = -\alpha\beta c u - \alpha\beta d u + \alpha^2\beta e + \beta b u^2, \quad f_1 = \alpha\beta^2 f + \alpha a v^2 - \alpha\beta c v + \alpha\beta d v.$$

On est alors amené à considérer quatre ensembles G_0-invariants de matrices M :

$$\mathcal{M}_1 = \{M; a \neq 0, b \neq 0\}, \quad \mathcal{M}_2 = \{M; a = 0, b \neq 0\},$$
$$\mathcal{M}_3 = \{M; a \neq 0, b = 0\}, \quad \mathcal{M}_4 = \{M; a = 0, b = 0\}.$$

Supposons que M appartienne au premier ensemble. En faisant agir G_0 on se ramène au cas où $a = b = 1$, $e = f = 0$. On obtient donc

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & c+1 \\ -1 & 0 & d-1 & 0 \\ -1 & -d-1 & 0 & 0 \\ -c+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On montre alors (en utilisant éventuellement un programme de calcul formel de type Maple) que sauf si $c = d = 0$, $\mathbb{T}(\phi)$ est diagonalisable, et si $c = d = 0$, on est dans le cas 2.5 de 2.2.2. Dans tous les cas on peut mettre c et d de manière unique sous la forme

$$c = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad d = \frac{\mu-1}{1+\mu}.$$

(cela découle du fait que c et d sont différents de 1 et -1 car M est non singulière). On montre alors que λ, $\dfrac{1}{\lambda}$, μ et $\dfrac{1}{\mu}$ sont des valeurs propres de $\mathbb{T}(\phi)$. Ceci montre que l'application quotient $\mathcal{M}_1/G_0 \to I_4(W_0(P_0, P_1))/GL(W_0(P_0, P_1))$ a des fibres finies. Les autres cas se traitent de la même manière. $\square$

5. Congruences quadratiques obtenues par translation d'une quadrique

5.1. Exemples

5.1.1. *Exemple 1*

Cet exemple apparaît dans l'étude des fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ (cf. [15], [16]). Au point P de coordonnées x, y, z de $\mathbb{P}_2$ on associe la conique $\sigma(x, y, z)$ d'équation

$$(zX - (x - z)Z)(zY - (y - z)Z) - z^2Z^2 \ = \ 0.$$

On obtient alors une congruence quadratique de type 1. Si on se limite au plan réel $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_2$, on associe au point $P = (x, y)$ la translation de vecteur $(x - 1, y - 1)$ de l'hyperbole d'équation $XY = 1$ (voir la figure 1 ci-dessous).

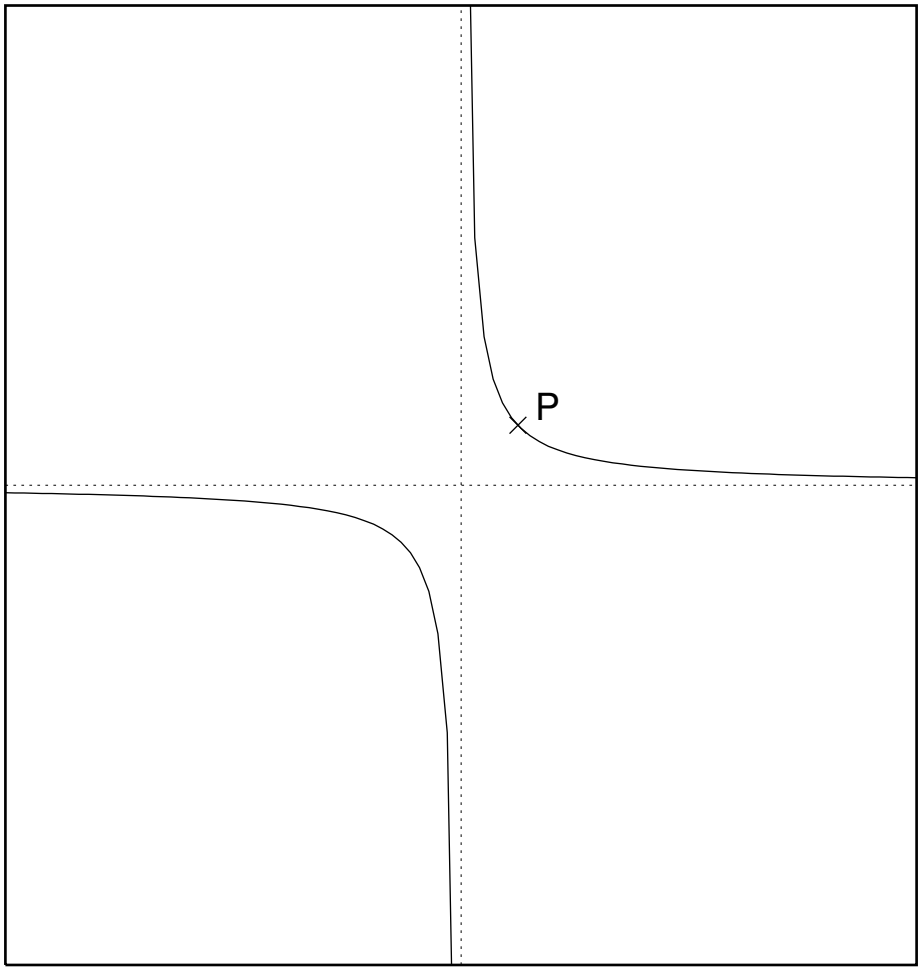

Figure 1

5.1.2. *Exemple 2*

Cet exemple apparaît dans l'étude des fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_3$ (cf. [4]). Au point P de coordonnées x, y, z de $\mathbb{P}_2$ on associe la conique $\sigma(x,y,z)$ d'équation

$$-z^2XZ + (z^2 + \frac{yz}{2})Y^2 + (-\frac{y^2}{2} - 2yz - \frac{4}{3}z^2)YZ + (xz + y^2 + \frac{4}{3}yz)Z^2 \ = \ 0.$$

La congruence quadratique de type 2 ainsi obtenue devient plus explicite si on fait le changement de coordonnées (non linéaire) suivant :

$$\theta : (X,Y,Z) \longrightarrow (YZ^2 + \frac{1}{6}X^3, XZ^2, Z^3).$$

Alors $\theta^{-1}(\sigma(\theta(x,y,z)))$ est la cubique d'équation

$$-z^3YZ^2 - \frac{1}{6}(zX - (x+2z)Z)^3 + \frac{2}{3}z^2Z^2(zX - (x+2z)Z) + yz^2Z^3 \ = \ 0.$$

Si on se limite au plan réel $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_2$, on associe au point $P = (x,y)$ la translation de vecteur $(x+2, y)$ de la cubique d'équation $Y \ = \ -\frac{1}{6}X^3 - \frac{2}{3}X$ (voir la figure 2 ci-dessous).

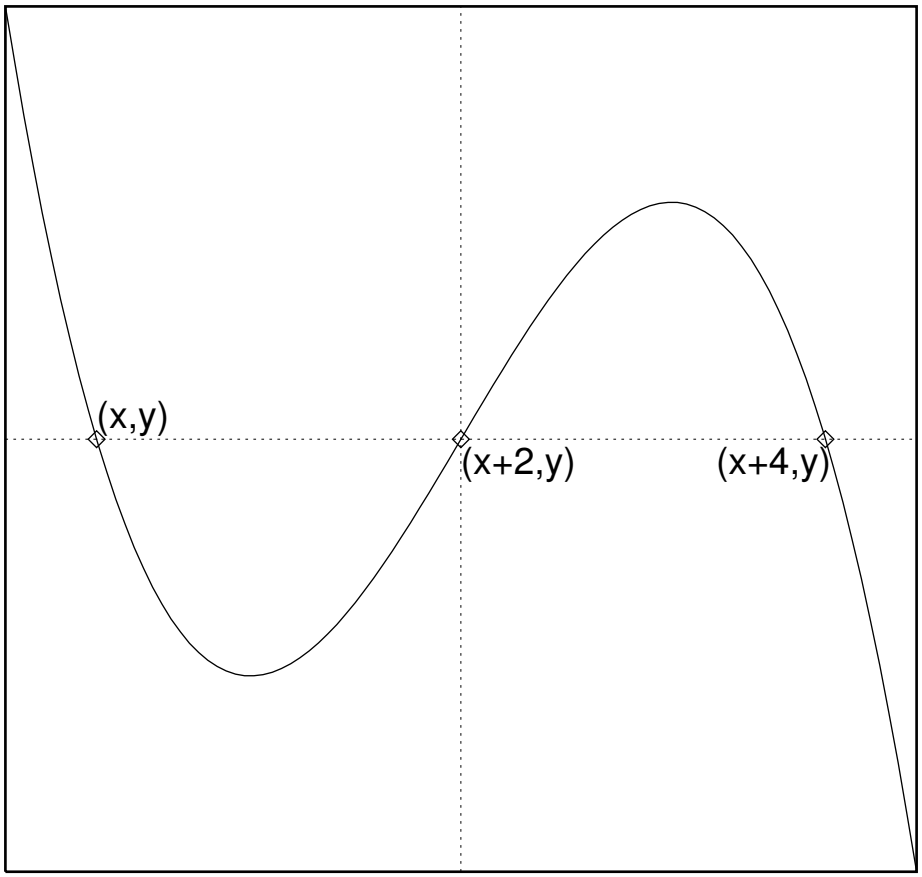

Figure 2

Dans ce système de coordonnées, $\mathbb{T}(\sigma)$ est la translation de vecteur $(4,0)$: dans la figure précédente, $(x+4,y)=\mathbb{T}(\sigma)(x,y)$.

5.1.3. *Exemple 3*

Soient a, b des nombres complexes non nuls tels que $a+b\neq 1$. Au point P de coordonnées x, y, z de $\mathbb{P}_2$ on associe la conique $\sigma(x,y,z)$ d'équation

$$z^2XY-axzYZ-byzXZ+(a+b-1)xyZ^2 \;=\; 0.$$

Si x, y et z sont non nuls, c'est l'image inverse de la conique d'équation

$$(X-aZ)(Y-bZ)-(1-a)(1-b)Z^2 \;=\; 0$$

(qui ne dépend pas de (x,y,z)) par l'automorphisme de $\mathbb{P}_2$

$$(X,Y,Z)\longmapsto(yzX,xzY,xyZ).$$

Si on se limite au plan réel $\mathbb{R}^2\subset\mathbb{P}_2$ et si a et b sont réels, on associe à (x,y) (x et y étant non nuls) l'image de l'hyperbole d'équation $(X-a)(Y-b)=(1-a)(1-b)$ par l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$

$$(X,Y)\longmapsto(\frac{X}{x},\frac{Y}{y}).$$

5.2. Sections de la quadrique universelle

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n\geq 3$. Soit $\mathcal{Q}\subset\mathbb{P}(S^2V^*)\times\mathbb{P}(V)$ la *quadrique universelle*. Il est bien connu qu'il n'existe pas de section rationnelle $\mathbb{P}(S^2V^*)\to\mathcal{Q}$. Si $W\subset S^2V^*$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$, on note $\mathcal{Q}_W$ la restriction de $\mathcal{Q}$ à $\mathbb{P}(W)$. On va s'intéresser à l'existence de sections rationnelles $\mathbb{P}(W)\to\mathcal{Q}_W$. On commencera par traiter le cas $n=3$, où on sait caractériser les sous-espaces vectoriels W tels qu'il existe une telle section rationnelle. On traitera ensuite les cas où $n>3$ et où W est l'espace des équations de quadriques contenant une quadrique fixe d'un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$. On prouvera (par récurrence sur n) l'existence d'une section rationnelle de $\mathcal{Q}_W$.

On suppose maintenant que $n=3$.

5.2.1. Lemme : *Soient U,S,T des coordonnées indépendantes sur V. On considère le sous-espace vectoriel H de S^2V^* constitué des coniques d'équation $aU^2+bS^2+cT^2=0$. Alors il n'existe pas de section rationnelle $P(H)\longrightarrow\mathcal{Q}$.*

Démonstration. Il faut montrer qu'il n'existe pas de polynômes non nuls homogènes P,Q et R en a, b, c, de mêmes degrés tels que $aP^2+bQ^2+cR^2=0$. Supposons qu'il en existe. On peut supposer qu'ils sont premiers entre eux. En se restreignant à l'hyperplan $a=0$ on obtient l'équation $bQ^2=-cR^2$ qui est impossible si Q et R sont non nuls sur $a=0$, car dans le terme de gauche le facteur premier c apparait avec un exposant pair et dans le terme de droite il

apparait avec un exposant impair. Il en découle que Q et R sont divisibles par a, et de même b divise P et R, et c divise P et Q. On peut donc écrire

$$P = bcP', \quad Q = acQ', \quad R = abR'$$

et on obtient l'équation

$$bcP'^2 + acQ'^2 + abR'^2 \ = \ 0.$$

En se restreignant à l'hyperplan $a = 0$ on voit encore que P' est divisible par a, et de même Q' est divisible par b et R' par c. Finalement P, Q et R sont divisibles par abc, contrairement à l'hypothèse. □

Il existe 6 orbites distinctes de l'action de $PGL(V)$ sur la grassmannienne $Gr(4, S^2V^*)$ des sous-espaces vectoriels de dimension 4 se S^2V^*. On le voit plus facilement en considérant la grassmannienne $Gr(2, S^2V)$ des sous-espaces vectoriels de dimension 2 se S^2V. On trouve alors la liste suivante, V étant muni d'une base (x, y, z) :

Cas 1 : $<x^2, y^2>$ – espace des coniques de $\mathbb{P}(V^*)$ qui sont des paires de droites contenant le point $(0, 0, 1)$, l'une étant l'image de l'autre par l'involution de l'orthogonal de ce point $(x, y) \longrightarrow (x, -y)$. Le sous-espace de S^2V^* de dimension 4 correspondant est un espace de coniques de type 1.

Cas 2 : $<x^2, xy>$ – espace des coniques de $\mathbb{P}(V^*)$ qui sont des paires de droites contenant le point $(0, 0, 1)$ et dont l'une est la droite $x = 0$. Le sous-espace de S^2V^* de dimension 4 correspondant est un espace de coniques de type 2.

Cas 3 : $<xy, xz>$ – espace des coniques de $\mathbb{P}(V^*)$ qui sont des paires de droites dont l'une est la droite $x = 0$ et l'autre passe par le point $(0, 0, 1)$. Le sous-espace de S^2V^* de dimension 4 correspondant est un espace de coniques de type 3.

Cas 4 : $<xy, x(x + y + z)>$ – espace des coniques de $\mathbb{P}(V^*)$ passant par les points $(0, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 0, 0)$ et $(1, 0, -1)$. C'est le cas générique.

Cas 5 : $<xy, z(x + y)>$ – espace des coniques de $\mathbb{P}(V^*)$ passant par $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et dont la tangente en $(0, 0, 1)$ est la droite d'équation $x + y = 0$.

Cas 6 : $<xy, z^2>$ – espace des coniques de $\mathbb{P}(V^*)$ contenant les points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, dont la tangente en $(1, 0, 0)$ est la droite d'équation $y = 0$ et la tangente en $(0, 1, 0)$ la droite d'équation $x = 0$.

5.2.2. Proposition : *Dans les cas 1,2 et 6 ci-dessus il existe des sections rationnelles $\mathbb{P}(W) \to \mathbb{Q}_W$ de la conique universelle, et dans les autres cas il n'en existe pas.*

Démonstration. Les cas 1 et 2 sont immédiats. Dans le cas 6, on considère la base (XZ, YZ, X^2, Y^2) de W ((X, Y, Z) étant la base de V^* duale de (x, y, z)). Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(W) & \longrightarrow & P(V) \\ aXZ + bYZ + cX^2 + dY^2 & \longmapsto & (a + b, a + b, -c - d) \end{array}$$

définit une section rationnelle $\mathbb{P}(W) \to \mathcal{Q}_W$.

Il reste à montrer que dans les cas 3,4 et 5 il n'existe pas de section rationnelle. Une telle section induirait une section rationnelle de la conique universelle sur tout hyperplan de $\mathbb{P}(W)$.

Notons que dans les cas 3,4 et 5 il existe toujours des coordonnées U, S, T sur V telles que $P(W)$ contienne toutes les coniques d'équation $aU^2 + bS^2 + cT^2 = 0$ (a, b et c parcourant $\mathbb{C}$). Le résultat est donc une conséquence du lemme 5.2.1. □

Soit $W \subset S^2V$ un espace de coniques de type 1 ou 2, de dimension 4. Rappelons (cf. chapitre 4) qu'on dit que W est un espace de coniques de type 1 (resp. 2) s'il existe deux points distincts P_0, P_1 de $\mathbb{P}(V)$ (resp. un point P_0 et une droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ passant par P_0) tels que W soit l'espace des équations de coniques passant par P_0 et P_1 (resp. passant par P_0 et tangentes à ℓ en P_0). On note W^0 l'ouvert de W constitué des coniques lisses.

5.2.3. Proposition : *La restriction $\mathcal{Q}_{W^0}$ de $\mathcal{Q}$ à $\mathbb{P}(W^0)$ est un fibré en espaces projectifs trivial.*

Démonstration. Pour le type 1 on considère une conique d'équation

$$uXY + vYZ + wXZ + tZ^2 \ = \ 0.$$

La condition de lissité pour cette conique est $u(vw - ut) \neq 0$. La matrice

$$\begin{pmatrix} u(vw-ut) & 0 & v(vw-ut) \\ 0 & u & w \\ 0 & 0 & vw-ut \end{pmatrix}$$

définit un automorphisme de $\mathbb{P}(V)$ qui induit un isomorphisme entre la conique précédente et la conique d'équation $XY - Z^2 = 0$. La proposition 5.2.3 en découle immédiatement. Le cas du type 2 est analogue. □

5.2.4. Le cas $n > 3$. On suppose ici que V est de dimension $n > 3$. Le résultat suivant généralise une partie des propositions 5.2.2 et 5.2.3 :

5.2.5. : Proposition : *Soient C une quadrique d'un hyperplan de $\mathbb{P}_{n-1}$, W le sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de S^2V^* constitué des équations des quadriques contenant C, et W^0 l'ouvert de W correspondant aux quadriques de rang maximal. Alors il existe des sections de $\mathcal{Q}_{W^0}$. Ce dernier est un fibré en quadriques trivial sur $\mathbb{P}(W^0)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un morphisme

$$\Phi : \mathbb{P}(W^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_{n-1})$$

et une quadrique Q_0 de $\mathbb{P}_{n-1}$ tels que pour tout $Q \in \mathbb{P}(W^0)$, Q (vu comme quadrique) soit l'image réciproque de Q_0 par $\Phi(Q)$. On se ramème aisément au cas où les quadriques de $\mathbb{P}(W_0)$ sont de rang n.

Si $n = 3$, en modifiant la proposition 5.2.3 on voit que la quadrique d'équation

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2(aX_0 + bX_1 + cX_2) \ = \ 0$$

est de rang 3 si et seulement si $\delta = a^2 + b^2 - 4c$ est non nul, et que dans ce cas cette quadrique est l'image réciproque de la quadrique d'équation $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$ par l'automorphisme de $\mathbb{P}_2$ donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\delta+1) & \frac{1}{2}\,i\,(\delta-1) & \frac{1}{4}(\delta(a-ib)+a+ib) \\ \frac{1}{2}\,i\,(\delta-1) & -\frac{1}{2}(\delta+1) & \frac{1}{4}\,i\,(\delta(a-ib)-a-ib) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\,\delta \end{pmatrix}.$$

Cette matrice permet aisément de construire Φ dans ce cas.

Supposons le résultat prouvé pout $n-1$. La quadrique d'équation

$$X_0^2 + \cdots + X_{n-2}^2 + X_{n-1}(\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-1} X_{n-1}) \;=\; 0$$

est de rang n si et seulement si $\alpha_0^2 + \cdots + \alpha_{n-2}^2 - 4\alpha_{n-1} \neq 0$. Supposons que ce soit le cas. Soit γ un nombre complexe tel que $\alpha_0^2 + \cdots + \alpha_{n-3}^2 - 4\gamma \neq 0$. Ceci implique que la quadrique d'équation $X_0^2 + \cdots + X_{n-3}^2 + X_{n-1}(\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-3} X_{n-3} + \gamma X_{n-1}) = 0$ est de rang $n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice $M = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n-3}$ non singulière, et des scalaires $\mu_0, \ldots, \mu_{n-3}, \beta$, dépendant algébriquement de $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-3}, \gamma$ et tels que

$$\sum_{i=0}^{n-3}(\sum_{j=0}^{n-3} a_{ij} X_j + \mu_i X_{n-1})^2 \;-\beta^2 X_{n-1}^2 \;=$$

$$X_0^2 + \cdots + X_{n-3}^2 + X_{n-1}(\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-3} X_{n-3} + \gamma X_{n-1}).$$

Soient μ_{n-2}, μ_{n-1} des nombres complexes. Alors on a

$$\sum_{i=0}^{n-3}(\sum_{j=0}^{n-3} a_{ij} X_j + \mu_i X_{n-1})^2 \;+(X_{n-2} + \mu_{n-2} X_{n-1})^2 - \mu_{n-1}^2 X_{n-1}^2 \;=$$

$$X_0^2 + \cdots + X_{n-2}^2 + (\beta^2 - \mu_{n-1}^2 + \mu_{n-2}^2 + \gamma) X_{n-1}^2 +$$
$$X_{n-1}(\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-3} X_{n-3} + 2\mu_{n-2} X_{n-2}).$$

On prend maintenant

$$\gamma \;= \alpha_{n-1} - \frac{\alpha_{n-2}^2}{4}.$$

Remarquons qu'on a bien $\alpha_0^2 + \cdots + \alpha_{n-3}^2 - 4\gamma \neq 0$. On prend ensuite $\mu_{n-1} = \beta$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{n-3}(\sum_{j=0}^{n-3} a_{ij} X_j + \mu_i X_{n-1})^2 \;+(X_{n-2} + \mu_{n-2} X_{n-1})^2 - \mu_{n-1}^2 X_{n-1}^2 \;=$$

$$X_0^2 + \cdots + X_{n-2}^2 + X_{n-1}(\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_{n-1} X_{n-1}),$$

ce qui définit le morphisme voulu Φ. □

5.3. Congruences quadratiques obtenues par translations d'une quadrique

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

5.3.1. Théorème : *Soient C une quadrique d'un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$, W le sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de S^2V^* constitué des équations des quadriques contenant C et*

$$\sigma : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

une congruence quadratique dont l'image contient au moins une quadrique de rang maximal de $\mathbb{P}(W)$. Alors il existe un morphisme rationnel

$$R : \mathbb{P}(V) \longrightarrow PGL(V)$$

et une quadrique C_0 de $\mathbb{P}(V)$ tels que pour un point général P de $\mathbb{P}_{n-1}$, on ait

$$R(P)^{-1}(C_0) \ = \ \sigma(P).$$

Démonstration. Découle immédiatement de la proposition 5.2.5. □

5.3.2. Remarque : L'image de σ contient toujours une quadrique de $\mathbb{P}(W)$ de rang maximal si le rang de C n'est pas maximal. Dans le cas contraire il se peut que toute quadrique de l'image de σ ne soit pas de rang maximal.

5.3.3. Cas des congruences quadratiques planes. On va donner une formule explicite pour R dans le cas $n = 3$. Soit σ une congruence quadratique de type 1. On choisit des coordonnées indépendantes X,Y,Z sur $\mathbb{P}(V)$ de telle sorte que $P_0 = (1,0,0)$, $P_1 = (0,1,0)$. Supposons que pour ces coordonnées σ soit définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c+1 \\ -a & 0 & d-1 & e \\ -b & -d-1 & 0 & f \\ 1-c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\phi_{XY}(x,y,z) = -ayz - bxz + (1-c)z^2, \quad \phi_{YZ}(x,y,z) = axy - (d+1)xz - ez^2,$$
$$\phi_{XZ}(x,y,z) = bxy + (d-1)yz - fz^2, \quad \phi_{Z^2}(x,y,z) = (c+1)xy + eyz + fxz.$$

On a alors

$$\sigma(x,y,z) \ = \ \phi_{XY}(x,y,z)XY + \phi_{YZ}(x,y,z)YZ + \phi_{XZ}(x,y,z)XZ + \phi_{Z^2}(x,y,z)Z^2.$$

Soit

$$\Delta \ = \ \phi_{YZ}\phi_{XZ} - \phi_{XY}\phi_{Z^2}.$$

Soit R le morphisme rationnel $\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{End}(V))$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_{XY}\Delta & 0 & \phi_{YZ}\Delta \\ 0 & z^4\phi_{XY} & z^4\phi_{XZ} \\ 0 & 0 & z^2\Delta \end{pmatrix}.$$

Alors on vérifie immédiatement que R possède la propriété du théorème 5.3.1.

Le cas des congruences quadratiques de type 2 est beaucoup plus simple. On choisit des coordonnées indépendantes X,Y,Z sur $\mathbb{P}(V)$ de telle sorte que $P_0 = (1,0,0)$ et que l'équation de ℓ soit $Z = 0$. Supposons que pour ces coordonnées σ soit définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e-1 \\ -b & -d & 2 & f \\ -c & -e-1 & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\begin{array}{ll} \phi_{XZ}(x,y,z) = -ay^2 - byz - cz^2, & \phi_{Y^2}(x,y,z) = axz - dyz - (e+1)z^2, \\ \phi_{YZ}(x,y,z) = bxz + dy^2 + 2yz - fz^2, & \phi_{Z^2}(x,y,z) = cxz + (e-1)y^2 + fyz. \end{array}$$

On a alors

$$\sigma(x,y,z) \;=\; \phi_{XZ}(x,y,z)XZ + \phi_{Y^2}(x,y,z)Y^2 + \phi_{YZ}(x,y,z)YZ + \phi_{Z^2}(x,y,z)Z^2.$$

On définit alors R par la matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_{XZ} & \phi_{YZ} & \phi_{Z^2} \\ 0 & 0 & -\phi_{Y^2} \\ 0 & \phi_{Y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

(1) Dans ce qui précède les polynômes définissant R pour les congruences quadratiques de type 1 sont de degré 6 (cf. 5.3.4).
(2) Le lieu des points de $\mathbb{P}(V)$ où les morphismes R précédents ne sont pas définis est exactement $D(\sigma)$ (cf. § 4.3).

5.3.4. Proposition : *Soit*

$$\sigma : \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W)$$

une congruence quadratique plane telle que $L(\sigma) = H(\sigma)$. *Alors il existe un morphisme rationnel*

$$R : \mathbb{P}(V) \longrightarrow PGL(V)$$

défini par des formes quadratiques et une conique C_0 *de* $\mathbb{P}(V)$, *tels que pour un point général* P *de* $\mathbb{P}(V)$ *on ait* $\sigma(P) = R^{-1}(Q)$.

Démonstration. Soient α_0, α_1, β_0, β_1, e,f des nombres complexes tels que

$$\alpha_0 \neq \alpha_1, \quad \alpha_0^2 - 4\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2 - \beta_0 - \beta_1 = 2.$$

Soient

$$\begin{aligned} q_0 \;&=\; Z((\beta_0 + \alpha_1^2)Y - fZ), \quad q_1 \;=\; Z((\beta_1 + \alpha_0^2)X - eZ), \\ s_0 \;&=\; (\beta_0\beta_1 - \alpha_0^2\alpha_1^2)XY - \beta_0 eYZ - \beta_1 fXZ + efZ^2, \\ s_1 &= (-\beta_0 - \beta_1 - \alpha_0^2 - \alpha_1^2)XY + eYZ + fXZ, \\ s_2 \;&=\; -(\alpha_0\alpha_1^2 + \alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1)XY + \alpha_1 eYZ + \alpha_0 fXZ. \end{aligned}$$

On définit R par

$$R(X,Y,Z) \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_0^2 q_0 & \alpha_1^2 q_1 & s_0 \\ q_0 & q_1 & s_1 \\ \alpha_0 q_0 & \alpha_1 q_1 & s_2 \end{pmatrix}.$$

se C_0 est la conique déquation $XY - Z^2 = 0$. Dans ce cas σ est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c+1 \\ 0 & 0 & d-1 & e \\ 0 & -d-1 & 0 & f \\ -c+1 & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$c \;=\; 1-(\alpha_0-\alpha_1)^2, \quad d \;=\; 1+\beta_0-\alpha_0^2+2\alpha_0\alpha_1.$$

Pour le voir on calcule le produit

$$R(X,Y,Z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}.$$

L'équation de $\sigma(X,Y,Z)$ n'est pas exactement $X_0Y_0 - Z_0^2 = 0$. On constate en fait que $\psi(x,y,z) = X_0Y_0 - Z_0^2$ est divisible par $(\beta_0+\alpha_1^2)Y - fZ$ et $(\beta_1+\alpha_0^2)X - eZ$:

$$\psi(x,y,z) \;=\; ((\beta_0+\alpha_1^2)Y - fZ)((\beta_1+\alpha_0^2)X - eZ)q(x,y,z),$$

et l'équation de $\sigma(X,Y,Z)$ est $q(x,y,z) = 0$. □

5.3.5. Remarque : Dans certains cas il est possible que R puisse être défini par des formes linéaires. Soient ν, α_0, α_1,w des nombres complexes tels que

$$\alpha_0 \neq \alpha_1, \quad \nu = \frac{1}{(\alpha_0-\alpha_1)^2}, \quad w \neq 0.$$

On définit R par

$$R(X,Y,Z) \;=\; \begin{pmatrix} \nu\alpha_0^2 Z & \alpha_1^2 Z & -\nu\alpha_0^2 X - \alpha_1^2 Y + wZ \\ \nu Z & Z & -\nu X - Y \\ \nu\alpha_0 Z & \alpha_1 Z & -\nu\alpha_0 X - \alpha_1 Y \end{pmatrix}$$

(C_0 étant la conique déquation $XY - Z^2 = 0$). Dans ce cas σ est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -w \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{w}{(\alpha_0-\alpha_1)^2} \\ 1 & w & \frac{w}{(\alpha_0-\alpha_1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

5.3.6. Conjecture : *Dans le cas général, une congruence quadratique normale $\sigma : \mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ provient d'un morphisme $R : \mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow PGL(n)$ défini par des formes quadratiques si et seulement si on a $L(\sigma) = H(\sigma)$.*

5.4. Congruences quadratiques planes obtenues par fixation d'une tangente

5.4.1. *Exemple*

Au point P de coordonnées x, y, z de $\mathbb{P}_2$ on associe la conique $\sigma(x,y,z)$ d'équation

$$yzXZ - \frac{z^2}{2}Y^2 + (yz - xz)YZ - \frac{y^2}{2}Z^2 \;=\; 0.$$

On obtient ainsi une congruence quadratique de type 2. On a

$$\mathbb{T}(\sigma)(x,y,z) \;=\; (x-2z, y, -z).$$

Cette congruence quadratique peut s'interpréter de la façon suivante : $\sigma(x,y,z)$ est l'unique conique passant par les points $(1,0,0)$, (x,y,z), $\mathbb{T}(\sigma)(x,y,z)$, dont la tangente en $(1,0,0)$ est la droite $Z=0$, et la tangente en (x,y,z) la droite d'équation $Xy-(x+y)Y=0$. Plus concrètement, on se limite à $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_2$, les coordonnées réelles étant X et Z. Au point P de $\mathbb{R}^2$ de coordonnèes x, z on associe l'unique hyperbole dont l'une des asymptotes est la droite d'équation $Z=0$, qui contient P et $(x-2,-z)$, et dont la tangente en P est la droite d'équation $X=x$ (cf. figure 3 ci-dessous).

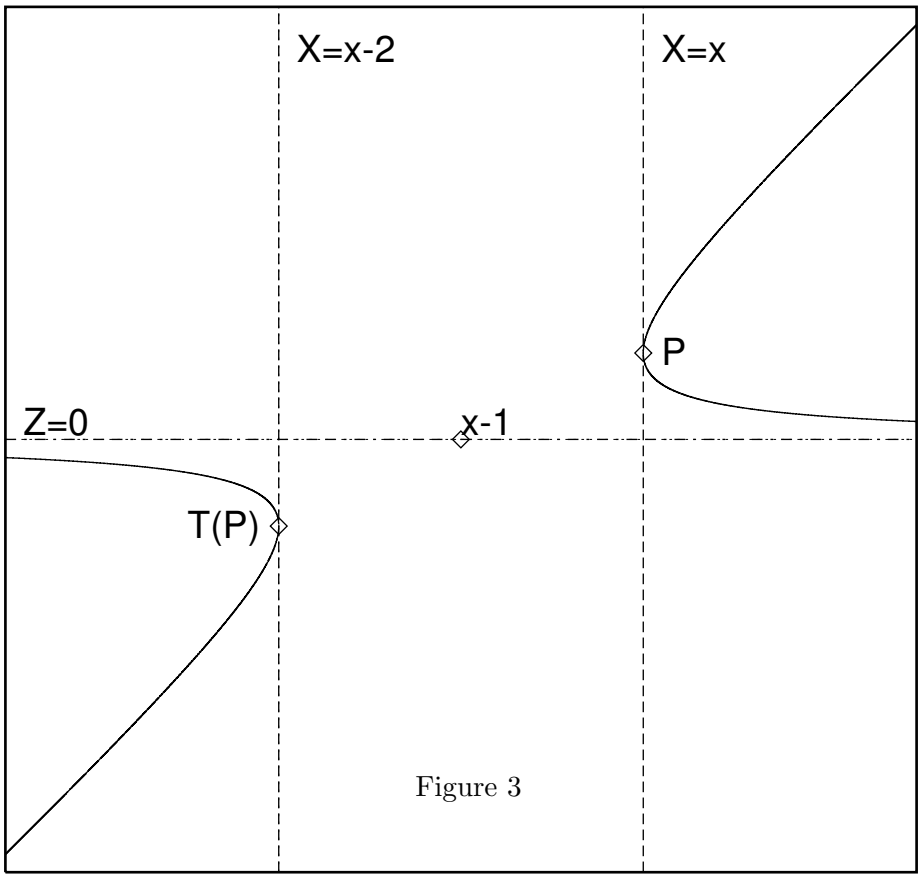

Figure 3

5.4.2. *Cas général*

On ne s'étendra pas sur le sujet. On peut complètement décrire une congruence quadratique σ en spécifiant pour tout point P de $\mathbb{P}_2$, un point de $\sigma(P)$ autre que P (par exemple $\mathbb{T}(\sigma)(P)$) et la tangente à $\sigma(P)$ en P. On peut obtenir de telles descriptions en utilisant le théorème 5.3.1.

6. Liste des types de congruences quadratiques

On donne ci-dessous la liste des valeurs possibles des orbites de σ correspondant aux translations énoncées en 2.2.1, pour les deux premières situations de la proposition 4.1.1. Pour les réalisations géométriques par des coniques de type 1, on considère les orbites par le groupe laissant $\{P_0, P_1\}$ invariant.

6.1. Réalisation géométrique par des coniques de type 1

Cas 1.1. On obtient 3 orbites principales. On obtient d'autres orbites en remplaçant λ par $1/\lambda$ ou μ par $1/\mu$. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{1.1a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{2}{\lambda+1} \\ -1 & 0 & -\frac{2}{\mu+1} & 0 \\ -1 & -\frac{2\mu}{\mu+1} & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1.1b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\mu}{\mu+1} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\mu+1} & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1.1c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -\frac{2(\lambda+\mu+2)}{(\lambda+1)(\mu+1)} & 0 \\ 0 & -\frac{2(\lambda\mu-1)}{(\lambda+1)(\mu+1)} & 0 & \frac{4}{(\lambda+1)(\mu+1)} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{(\lambda+1)(\mu+1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 1.2. On obtient 3 orbites principales. On obtient d'autres orbites en remplaçant λ par $1/\lambda$. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{1.2a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-4\lambda}{(1+\lambda)^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1.2c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 1.5. On obtient 9 orbites principales. On obtient d'autres orbites en remplaçant λ par $1/\lambda$. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{1.5a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 \\ -1 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1.5b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{2}{\lambda+1} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1.5c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -\frac{\lambda+3}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda-1}{\lambda+1} & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1.5d}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1.5e}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1.5f}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1.5g}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{1.5h}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1.5i}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 2.3. On obtient 5 orbites principales. On obtient d'autres orbites en remplaçant λ par $1/\lambda$. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{2.3a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{2}{\lambda+1} \\ -1 & 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 \\ -1 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.3b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -\frac{4}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & -\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} & 0 & \frac{4}{(1+\lambda)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{(1+\lambda)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{2.3c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.3d}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{2.3e}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 2.4. On obtient 2 orbites. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{2.4a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.4b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 2.5. On obtient 3 orbites. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{2.5a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.5b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{2.5c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. Réalisation géométrique par des coniques de type 2

Cas 2.1. On obtient 2 orbites. La matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{2.1a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.1b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 2.6. On obtient 3 orbites principales. On obtient d'autres orbites en remplaçant λ par $1/\lambda$. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{2.6a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2i(1-\lambda)}{\lambda+1} \\ -1 & -1 & -\frac{2i(1-\lambda)}{\lambda+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.6b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\phi_{2.6c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\lambda}{\lambda+1} \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 2.8. On obtient 3 orbites. Les matrices $\sigma^* = \phi^{-1}$ sont les suivantes :

$$\phi_{2.8a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{2.8b}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{2.8c}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Références

[1] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 25-48.

[2] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[3] Drézet, J.-M., *Exceptional bundles and moduli spaces of stables sheaves on* $\mathbb{P}_n$, In Vector Bundles in Algebraic Geometry, Proceedings Durham 1993, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 208, Cambridge 1995

[4] Drézet, J.-M. *Sur les équations vérifiées par les invariants des fibrés exceptionnels.* Forum Math. 8 (1996), 237-265

[5] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Ec. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[6] Gorodentsev, A.L. *Exceptional bundles on surfaces with a moving anticanonical class.* Math. Izvestiya AMS transl. 33 (1989), 67-83.

[7] Gorodentsev, A.L. *Helix theory and non-symmetric bilinear forms.* Proc. of the 8th Alg. Geom. Conf., Yaroslav 1992. Aspects of Math. (1994).

[8] Gorodentsev, A.L. *Non-symmetric orthogonal geometry of Grothendieck rings of coherent sheaves on projective spaces.* Preprint (1994), eprint service at xxx.lanl.gov/list/alg-geom/9409#alg-geom/9409005.

[9] Gorodentsev, A.L., Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on projective spaces.* Duke Math. Journ. 54 (1987), 115-130.

[10] Hartshorne, R. *Algebraic geometry.* (Grad. Texts in Math., Vol. 52). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977.

[11] Hodge, W.V.D., Pedoe, D. *Methods of Algebraic Geometry.* Vol. 1, Cambridge Univ. Press, 1953.

[12] Mal'zev, A.I. *Foundations of Linear Algebra.*(in russian) OGIZ, Moskva-Leningrad, 1948

[13] Nogin, D.Y. *Helices of period 4 and Markov type equations.* Izv. AN SSSR Ser. Matem. 54 (1990), 862-878.

[14] Nogin, D.Y. *Helices on some Fano threefolds : constructivity of semi-orthogonal bases of* K_0. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 27 (1994), 1-44.

[15] Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on a quadric.* Math. USSR Izvestiya. AMS transl. 33 (1989), 115-138.
[16] Rudakov, A.N. *A description of Chern classes of semi-stable sheaves on a quadric surface.* J. reine angew. Math. 453 (1994), 113-135.
[17] Rudakov, A.N. *Integer-valued bilinear forms and vector bundles.* Math. USSR Sbornik. AMS transl. 66 (1990), 189-197.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr

URL: http://www.math.jussieu.fr/∼drezet