HAL
open science

Quotients algébriques par des groupes non réductifs et variétés de modules de complexes

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. Quotients algébriques par des groupes non réductifs et variétés de modules de complexes. International Journal of Mathematics, 1998, 9 (7), pp.769-819. hal-00742368v2

HAL Id: hal-00742368

https://hal.science/hal-00742368v2

Submitted on 19 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUOTIENTS ALGÉBRIQUES PAR DES GROUPES NON RÉDUCTIFS ET VARIÉTÉS DE MODULES DE COMPLEXES

JEAN-MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction 1
2. Quotients algébriques 7
3. Mutations constructives 12
4. Variétés de modules de complexes 22
5. Variétés de modules de morphismes 32

Références 45

1. Introduction

1.1. Le problème des quotients algébriques par des groupes non réductifs

Soit G un groupe algébrique linéaire de radical unipotent H. On suppose qu'il existe un sous-groupe algébrique réductif G_{red} de G dont l'inclusion dans G induit un isomorphisme $G_{red} \simeq G/H$. Soit Y une variété algébrique projective munie d'une action algébrique de G, et L un G-fibré en droites très ample sur Y. On dit qu'un point y de Y est *semi-stable* relativement à L s'il existe un entier $k > 0$ et une section G-invariante s de L^k telle que $s(y) \neq 0$. Soit $Y^{ss}(L)$ l'ouvert G-invariant de Y constitué des points G-semi-stables relativement à L. La construction d'un *bon quotient* $Y^{ss}(L)//G$ est possible dans le cas où $H = \{0\}$, le groupe G étant dans ce cas réductif (cf [9], [10]). Le cas où G n'est pas réductif est plus difficile, et a été abordé par A. Fauntleroy dans [6]. On doit considérer un ouvert G-invariant plus petit de $Y^{ss}(L)$ (en imposant des conditions supplémentaires qui dépendent essentiellement de l'action de H) et les quotients obtenus sont en général seulement des *quotients catégoriques*. De plus, la définition de l'ouvert à quotienter est peu explicite. Ces restrictions s'expliquent sans doute par la grande généralité des problèmes traités dans [6]. On propose ici une définition légèrement différente de la semi-stabilité :

Définition 1. *On dit qu'un point y de Y est G-*semi-stable *(resp. G-*stable*) relativement à L si tout point de l'orbite Hy est G_{red}-semi-stable (resp. G_{red}-stable) relativement à L (vu comme un G_{red}-fibré en droites).*

Il est clair que les points semi-stables relativement à L le sont aussi au sens de la définition 1. Cette définition me semble plus explicite, car les points G_{red}-semi-stables peuvent en général être déterminés à l'aide de critères numériques (cf. [9]).

1.2. Espaces de complexes

On s'intéresse dans cet article à un type particulier d'action. Soient X une variété algébrique projective, $p \geq 1$ un entier, $n_0, \ldots, n_p$ des entiers positifs, et pour $0 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n_i$, $\mathcal{E}_j^{(i)}$ un faisceau cohérent sur X et $M_j^{(i)}$ un espace vectoriel non nul de dimension finie. On pose, pour $0 \leq i \leq p$

$$\mathcal{E}_i \;=\; \bigoplus_{1 \leq j \leq n_i} (\mathcal{E}_j^{(i)} \otimes M_j^{(i)}).$$

On suppose que les faisceaux $\mathcal{E}_j^{(i)}$ sont simples, et que $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_j^{(i)}, \mathcal{E}_{j'}^{(i')}) \;=\; \{0\}$ si $i > i'$, ou $i = i'$, $j > j'$. Soit $\mathcal{W}$ la variété des complexes

$$\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}_p,$$

sur laquelle opère le groupe algébrique

$$G \;=\; \mathrm{Aut}(\mathcal{E}_0) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(\mathcal{E}_p).$$

Le sous-groupe unipotent H est constitué des $(g_0, \ldots, g_p)$ tels que pour tous i, j, la composante

$$\mathcal{E}_j^{(i)} \otimes M_j^{(i)} \longrightarrow \mathcal{E}_j^{(i)} \otimes M_j^{(i)}$$

de g_i soit l'identité. Le sous-groupe réductif G_{red} est constitué des $(g_0, \ldots, g_p)$ tels que pour tous i,j ont ait

$$g_i(\mathcal{E}_j^{(i)} \otimes M_j^{(i)}) \;\subset\; \mathcal{E}_j^{(i)} \otimes M_j^{(i)}.$$

On a un isomorphisme

$$G_{red} \;\simeq\; \prod_{0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_i} GL(M_j^{(i)}).$$

Si on veut retrouver une action sur une variété projective, il convient de considérer plutôt la variété projective $\mathbb{P}(W)$ sur laquelle opère le groupe $G/\mathbb{C}^*$.

L'action de G_{red} sur $\mathcal{W}$ est un cas particulier des actions étudiées par A. King dans [8]. Une linéarisation de l'action de $G/\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{P}(W)$ est définie par une suite $\Lambda = (\lambda_{ij})_{0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_i}$ de nombres rationnels non nuls telle que

$$\sum_{0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_i} \lambda_{ij} \dim(M_j^{(i)}) \;=\; 0.$$

On appelle Λ une *polarisation* de l'action de G sur $\mathcal{W}$. Un complexe

$$\mathcal{E}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{p-1}} \mathcal{E}_p$$

est G_{red}-semi-stable (resp. G_{red}-stable) relativement à Λ si et seulement si pour tous sous-espaces vectoriels

$$M'^{(i)}_j \;\subset M_j^{(i)},$$

avec $(M'^{(i)}_j) \neq (\{0\})$ ou $(M^{(i)}_j)$, tels que

$$f_i(\bigoplus_{1\leq j\leq n_i} (\mathcal{E}^{(i)}_j \otimes M'^{(i)}_j)) \subset \bigoplus_{1\leq j\leq n_{i+1}} (\mathcal{E}^{(i+1)}_j \otimes M'^{(i+1)}_j))$$

pour $0 \leq i < p$, on a

$$\sum_{0\leq i\leq p, 1\leq j\leq n_i} \lambda_{ij} \dim(M'^{(i)}_j) \ \leq \ 0 \quad (\text{resp. } < \ ).$$

Le problème de la construction de quotients par G d'ouverts de $\mathcal{W}$ a été abordé dans [5] et [2], dans le cas $p = 1$ (les complexes sont alors en fait des morphismes). On va donner ici une méthode de construction de quotients par G d'ouverts G-invariants de $\mathcal{W}$, qui est une généralisation de la méthode employée dans [5]. On donnera en particulier des exemples de quotients par G de l'ouvert des points G-semi-stables. On ne peut pas obtenir en général des *bons quotients*, mais ce qu'on appelle des *quasi-bons quotients* (cf. chapitre 2).

1.3. Mutations constructives

Pour construire des bons quotients par G d'ouverts G-invariants de $\mathcal{W}$, on introduit une nouvelle variété de complexes $\mathcal{W}'$, sur laquelle le groupe G' qui agit est réductif. On tente ensuite d'établir une relation entre les quotients par G' d'ouverts G'-invariants de $\mathcal{W}'$ et les quotients par G d'ouverts G-invariants de $\mathcal{W}$.

La méthode est basée sur le résultat suivant (cf. § 3) : soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, Γ des faisceaux cohérents sur X et M un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que le morphisme d'évaluation

$$\Gamma \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$$

est surjectif. Soit $\mathcal{E}'$ son noyau. On suppose aussi que la composition

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Gamma) \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

est surjective. Soit

$$(1) \qquad \mathcal{E} \xrightarrow{A} (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \xrightarrow{B} \mathcal{F}$$

un complexe. Alors on peut associer à (1) un complexe

$$(2) \qquad \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha} \Gamma \otimes N \xrightarrow{\beta} \mathcal{F},$$

avec $N = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \oplus M$ et tel que

$$\ker(\alpha) \simeq \ker(A), \quad \ker(\beta)/\operatorname{Im}(\alpha) \simeq \ker(B)/\operatorname{Im}(A), \quad \operatorname{coker}(\beta) \simeq \operatorname{coker}(\alpha).$$

La réciproque est aussi vraie, si on part d'un complexe (2) tel que α induise une injection

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma) \longrightarrow N,$$

et les deux transformations sont inverses l'une de l'autre (à l'action près des groupes d'automorphismes des complexes). Le passage de (1) à (2) consiste à effectuer une *mutation à gauche* de $\mathcal{G}$. Cette notion a été introduite dans l'étude des *fibrés exceptionnels* (cf. [3], [1], [7]). On notera $\mathcal{W}_0$ (resp. $\mathcal{W}'_0$) l'espace des complexes (1) (resp. (2)), et G_0 (resp. G'_0) le groupe algébrique agissant sur $\mathcal{W}_0$ (resp. $\mathcal{W}'_0$).

La transformation qui fait passer de (1) à (2) est purement formelle (cf. § 3.2). Le complexe (2) associé à (1) n'est pas en général unique, mais sa G_0'-orbite l'est, et ne dépend que de la G_0-orbite de (1). On obtient ainsi (sous certaines hypothèses) une bijection

$$\mathcal{W}_0/G_0 \ \simeq U_0/G_0',$$

U_0 désignant l'ouvert de $\mathcal{W}_0'$ constitué des complexes (2) tels que α induise une injection $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma) \longrightarrow N$. Cette correspondance est *algébrique* dans le sens suivant : si un ouvert invariant d'un des espaces de complexes admet un quasi-bon quotient, l'ouvert correspondant de l'autre côté admet aussi un quasi-bon quotient, et les deux quotients sont isomorphes. La bijection précédente est en fait un *quasi-isomorphisme fort* (cf. chapitre 2). Cela entraîne que certaines propriétés vérifiées par un quasi-bon quotient d'un ouvert invariant d'un des espaces de complexes seront automatiquement vérifiées par le quotient de l'ouvert correspondant de l'autre espace de complexes (cf. § 2.3, concernant la descente sur les quotients de fibrés vectoriels). On a aussi une notion similaire de *mutation à droite*.

Pour appliquer ce qui précède aux variétés de complexes de type

$$\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}_p$$

on procède de la façon suivante : on écrit le dernier terme

$$\mathcal{E}_p \ = (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G},$$

avec

$$\Gamma = \mathcal{E}_1^{(p)}, \quad M = M_1^{(p)}, \quad \mathcal{G} = \bigoplus_{2 \leq j \leq n_p} (\mathcal{E}_j^{(p)} \otimes M_j^{(p)}).$$

Dans ce cas, on a

$$\mathcal{E}' \ = \ \bigoplus_{2 \leq j \leq n_p} ({\mathcal{E}'}_j^{(p)} \otimes M_j^{(p)}),$$

${\mathcal{E}'}_j^{(p)}$ désignant le noyau du morphisme d'évaluation

$$\mathcal{E}_1^{(p)} \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1^{(p)}, \mathcal{E}_j^{(p)}) \longrightarrow \mathcal{E}_j^{(p)}$$

(supposé surjectif). Les complexes obtenus par mutation sont du type

$$\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}'_{p-1} \longrightarrow \mathcal{E}_1^{(p)} \otimes N,$$

avec

$$N \ = \ M_1^{(p)} \oplus \left(\bigoplus_{2 \leq j \leq n_p} (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1^{(p)}, \mathcal{E}_j^{(p)}) \otimes M_j^{(p)}) \right)$$

et

$$\mathcal{E}'_{p-1} \ = \ \mathcal{E}_{p-1} \oplus \left(\bigoplus_{2 \leq j \leq n_p} ({\mathcal{E}'}_j^{(p)} \otimes M_j^{(p)}) \right).$$

On peut continuer en écrivant

$$\mathcal{E}'_{p-1} \ = (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G},$$

avec

$$\Gamma = \mathcal{E}_1^{(p-1)}, \quad M = M_1^{(p-1)}, \quad \mathcal{G} = \left(\bigoplus_{2 \leq j \leq n_{p-1}} (\mathcal{E}_j^{(p-1)} \otimes M_j^{(p-1)}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{2 \leq j \leq n_p} ({\mathcal{E}'}_j^{(p)} \otimes M_j^{(p)}) \right).$$

On peut ainsi procéder à

$$q \;=\; \sum_{0\leq i\leq p} n_i$$

mutations successives, et on obtient finalement un complexe du type

$$\mathcal{F}_0 \otimes N_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_q \otimes N_q,$$

où le groupe G' qui opère est réductif. Il existe un autre chemin possible, en effectuant des mutations à droite en partant du terme de gauche.

Supposons fixée une polarisation Λ de l'action de G sur $\mathcal{W}$. On peut alors définir naturellement une polarisation Λ' de l'action de G' sur l'espace $\mathcal{W}'$ des complexes précédents. Il reste à étudier les relations qu'il y a entre la G-(semi-)stabilité des complexes de $\mathcal{W}$ relativement à Λ, et la G'-(semi-)stabilité des complexes de $\mathcal{W}'$ relativement à Λ'. Il est toujours vrai que si la mutation est G'-(semi-)stable relativement à Λ', le complexe d'origine est G-(semi-)stable relativement à Λ. La réciproque est vraie si on impose des conditions à Λ. Il faut ensuite montrer que tous les complexes G'-semi-stables de $\mathcal{W}'$ sont (à l'action de G' près) des mutations de complexes de $\mathcal{W}$. Cela n'est vrai que si on impose encore d'autres conditions à Λ. On obtient alors l'existence d'un quasi-bon quotient projectif de l'ouvert des points G-semi-stables de $\mathcal{W}$. En considérant les mutations à droite, on obtient généralement d'autres valeurs de Λ pour lesquelles il existe un quasi-bon quotient projectif.

1.4. Variétés de modules de complexes

On considère dans le § 4 des complexes du type

$$\mathcal{E}_1 \otimes L_1 \longrightarrow (\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2) \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes N_1, \tag{3}$$

où $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_1$ sont des faisceaux cohérents simples sur X, et L_1, M_1, M_2, N_1 des espaces vectoriels de dimension finie. Quelques hypothèses doivent être faites, notamment que le morphisme d'évaluation

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

est surjectif. On note $\mathcal{H}_1$ son noyau. En effectuant une première mutation à gauche on associe au complexe (3) un complexe

$$(\mathcal{E}_1 \otimes L_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes M_2) \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes P_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes N_1, \tag{4}$$

avec

$$P_1 \;=\; (\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2) \oplus M_1.$$

On suppose ensuite que le morphisme d'évaluation

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

est surjectif. Soit $\mathcal{K}_1$ son noyau. En effectuant une seconde mutation on obtient un complexe

$$\mathcal{K}_1 \otimes M_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes Q_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes P_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes N_1, \tag{5}$$

avec

$$Q_1 \;=\; (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2) \oplus L_1,$$

et ici le groupe qui opère est réductif.

On en déduit dans le théorème 4.4 l'existence de quasi-bons quotients projectifs d'ouverts de complexes G-semi-stables de type (3) (pour certaines polarisations).

Dans le § 4.5 on étudie le cas des complexes

$$\mathcal{O}(-2) \longrightarrow (\mathcal{O}(-1) \otimes M_1) \oplus \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)$$

sur $\mathbb{P}_n$, M_1 étant un espace vectoriel tel que $0 < \dim(M_1) < n+1$. Dans le cas de $\mathbb{P}_2$ et $\dim(M_1) = 3$, on obtient trois types de quotients distincts, dont deux lisses. Un des quotients lisses peut être obtenu de manière élémentaire. Le second est non trivial.

1.5. Variétés de modules de morphismes

Dans le § 5 on considère des morphismes du type

$$(\mathcal{E}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes M_2) \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes N_1,$$

où $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$ sont des faisceaux cohérents simples sur X, et M_1, M_2, N_1 des espaces vectoriels de dimension finie. On rappelle dans les § 5.1 et 5.2 la construction de variétés de modules de morphismes G-semi-stables de ce type (pour certaines polarisations) effectuée dans [5]. On procède simplement ici à une seule mutation à gauche pour obtenir une action d'un groupe réductif. Les quotients obtenus par cette méthode sont des bons quotients projectifs, et les ouverts correspondant aux morphismes G-stables sont des quotients géométriques.

Dans le § 5.3 on emploie des mutations à droite. Il faut alors deux mutations successives pour obtenir une action d'un groupe réductif. On obtient des bons quotients de l'ouvert des morphismes G-semi-stables, pour d'autres polarisations qu'avec la méthode précédente.

Dans la § 5.4 on donne des exemples de constructions de variétés de modules de morphismes au moyen des méthodes de [5], [2] et du § 5.3. On donne un cas où il n'y a pas de quotient géométrique de l'ouvert des points stables.

1.6. Mutations non constructives

D'autres sortes de mutations ont été définies dans [2]. On pourrait les appeler des *mutations non constructives*. Dans [2] elles sont appliquées à des morphismes, mais on peut sans difficulté étendre leur définition aux complexes. Elles peuvent aussi servir à construire des bons quotients d'ouverts de points G-semi-stables, pour d'autres polarisations que celles qui sont accessibles par les méthodes décrites ici. La définition des mutations non constructives est basée sur le résultat suivant : soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, Γ, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents sur X. On suppose que le morphisme canonique

$$\mathcal{E}' \longrightarrow \Gamma \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma)^*$$

est injectif et on note $\mathcal{F}_0$ son conoyau. On suppose aussi que

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \Gamma) = \mathrm{Ext}^1(\Gamma, \mathcal{F}) = \{0\}.$$

Soient M un espace vectoriel de dimension finie et

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \xrightarrow{A} (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{B} \mathcal{G}$$

un complexe tel que l'application linéaire

$$\lambda : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma)^* \longrightarrow M$$

déduite de A soit surjective. Alors il existe un complexe

$$\mathcal{E} \oplus (\Gamma \otimes \ker(\lambda)) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}$$

tel que

$$\ker(\alpha) \simeq \ker(A), \quad \ker(\beta)/\operatorname{Im}(\alpha) \simeq \ker(B)/\operatorname{Im}(A), \quad \operatorname{coker}(\beta) \simeq \operatorname{coker}(B).$$

Ce résultat admet aussi une réciproque.

Le différence essentielle entre les mutations constructives et les mutations non constructives est la suivante : dans le premier cas, on effectue la mutation d'une paire de faisceaux situés dans le même terme du complexe, et dans le second cas on effectue la mutation d'une paire de faisceaux situés dans des termes adjacents du complexe.

2. Quotients algébriques

2.1. Quasi-bons quotients

Soit G un groupe algébrique. On appelle *G-espace* une variété algébrique X munie d'une action algébrique de G. Rappelons qu'on appelle *bon quotient* de X par G un morphisme

$$\pi : X \longrightarrow M$$

(où M est une variété algébrique) tel que :

(i) Le morphisme π est G-invariant, affine et surjectif.

(ii) Si U est un ouvert de M, alors on a $\mathcal{O}(U) \simeq \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^G$.

(iii) Si F_1, F_2 sont des sous-variétés fermées G-invariantes disjointes de X, alors $\pi(F_1)$ et $\pi(F_2)$ sont des sous-variétés disjointes de M.

Cette définition est particulièrement bien adaptée à l'étude des actions de groupes algébriques réductifs, car on sait que dans ce cas il existe toujours un bon quotient si X est affine. On utilisera une notion légèrement différente :

Définition 2. *On appelle* quasi-bon quotient *de X par G un morphisme*

$$\pi : X \longrightarrow M$$

(où M est une variété algébrique) qui est G-invariant, surjectif et tel que les conditions (ii) et (iii) précédentes soient vérifiées.

On dit parfois par abus de language que M est le quasi-bon quotient de X par G. On note comme dans le cas des bons quotients $M = X//G$. Il est clair qu'un bon quotient est un quasi-bon quotient.

2.2. Quasi-isomorphismes

Soient G, G' des groupes algébriques, X un G-espace et X' un G'-espace.

Définition 3. *1 - On appelle* quasi-morphisme *de X vers X' une application*

$$\phi : X/G \longrightarrow X'/G'$$

telle que pour tout point x de X il existe un ouvert de Zariski U de X contenant x et un morphisme $U \longrightarrow X'$ induisant ϕ.

2 - On appelle quasi-morphisme fort *de X vers X' la donnée d'un* quasi-morphisme

$$\phi : X/G \longrightarrow X'/G',$$

d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, et d'une famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de relèvements de ϕ , $\phi_i : U_i \longrightarrow X'$, telle que :

(i) pour tout $j \in I$ et $g \in G$, le morphisme

$$gU_j \longrightarrow X'$$

$$x \longmapsto \phi_j(g^{-1}x)$$

appartient à la famille (ϕ_i).

(ii) Pour tous $i, j \in I$, et tout $x \in U_i \cap U_j$ il existe un voisinage V de x dans $U_i \cap U_j$ et un morphisme $\lambda_{ij} : V \longrightarrow G'$ tel que $\phi_{j|V} = \lambda_{ij}\phi_{i|V}$,

(iii) Pour tout $i \in I$ et $x \in U_i$, il existe un voisinage V de (e, x) dans $G \times U_i$ et un morphisme $\gamma : V \longrightarrow G'$ tel que $\gamma(e, x) = e$ et que pour tous $(g, y) \in V$, on ait $gy \in U_i$ et $\phi_i(gy) = \gamma(g, y)\phi_i(y)$.

On appelle *quasi-isomorphisme* de X vers X' une bijection

$$\phi : X/G \longrightarrow X'/G'$$

qui est un quasi-morphisme ainsi que son inverse.

Définition 4. *Soit $\sigma = (\phi : X/G \longrightarrow X'/G', (\phi_i : U_i \longrightarrow X'))$ un quasi-morphisme fort. On appelle* carte *de σ un relèvement local $f : U \longrightarrow X'$ de ϕ (U étant un ouvert non vide de X) tel que pour tout $x \in U$ les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) Pour tout $i \in I$ il existe un voisinage V de x dans $U \cap U_i$ et un morphisme $\lambda_i : V \longrightarrow G'$ tel que $f_{|V} = \lambda_i\phi_{i|V}$,

(ii) Il existe un voisinage V de (e, x) dans $G \times U$ et un morphisme $\gamma : V \longrightarrow G'$ tel que $\gamma(e, x) = e$ et que pour tous $(g, y) \in V$, on ait $gy \in U$ et $\phi_i(gy) = \gamma(g, y)\phi(y)$.

On dit que deux quasi-morphismes forts de X dans X' sont *équivalents* si les cartes de l'un sont aussi des cartes de l'autre.

Il est clair que la composition de deux quasi-morphismes en est un. On va définir ce qu'on entend par *composition* de deux quasi-morphismes forts. Soient G, G', G'' des groupes algébriques, X un G-espace, X' un G'-espace et X'' un G''-espace. Soient

$$\sigma = (\phi : X/G \longrightarrow X'/G', (\phi_i : U_i \longrightarrow X')_{i\in I}),$$
$$\sigma' = (\phi' : X'/G \longrightarrow X''/G'', (\phi'_j : U'_j \longrightarrow X'')_{j\in J})$$

des quasi-morphismes forts. Soient

$$\psi = \phi' \circ \phi : X/G \longrightarrow X''/G'',$$

et pour $i \in I$, $j \in J$, $V_{ij} = U_i \cap \phi^{-1}(U'_j)$, et

$$\psi_{ij} = \phi'_j \circ \phi_i : V_{ij} \longrightarrow X''.$$

On pose

$$\tau = (\psi : X/G \longrightarrow X''/G'', (\psi_{i,j} : V_{ij} \longrightarrow X'')_{(i,j)\in I\times J}).$$

Lemme 2.1. *τ est un quasi-morphisme fort de X dans X'.*

Démonstration. Soit $x \in V_{ij}$. Pour (g, y) dans un voisinage convenable de (e, x), on a

$$\psi_{ij}(gy) = \phi'_j \circ \phi_i(gy) = \phi'_j(\gamma_i(g, y)\phi_i(y)) = \gamma'_j(\gamma_i(g, y), \phi_i(y))\psi_{ij}(y),$$

γ_i (resp. γ'_j) étant un morphisme à valeurs dans G' (resp. G'') défini sur un voisinage de (e, x) (resp. $(e, \phi_i(x))$). En posant

$$\gamma_{ij}(g, y) = \gamma'_j(\gamma_i(g, y), \phi_i(y))$$

on obtient donc $\psi_{ij}(gy) = \gamma_{ij}(g, y)\psi_{ij}(y)$. D'autre part, soient $i, i' \in I, j, j' \in J$ et $x \in V_{i,j} \cap V_{i',j'}$. Avec des notations évidentes, on a, pour y dans un voisinage de x

$$\phi'_{j'} \circ \phi_{i'}(y) = \phi'_{j'}(\lambda_{ii'}(y)\phi_i(y)).$$

Posons $g'_0 = \lambda_{ii'}(x) \in G'$. Alors on a

$$\phi'_{j'}(\lambda_{ii'}(y)\phi_i(y)) = \gamma'_{j'}(\lambda_{ii'}(y){g'_0}^{-1}, g'_0\phi_i(y))\phi'_{j'}(g_0\phi_i(y)) = \gamma'_{j'}(\lambda_{ii'}(y){g'_0}^{-1}, g'_0\phi_i(y))\phi'_k(\phi_i(y))$$

pour un k convenable dans J. On obtient finalement

$$\phi'_{j'} \circ \phi_{i'}(y) = \gamma'_{j'}(\lambda_{ii'}(y){g'_0}^{-1}, g'_0\phi_i(y))\lambda'_{kj}(\phi_i(y))\phi'_j \circ \phi_i(y),$$

c'est-à-dire

$$\phi'_{j'} \circ \phi_{i'}(y) = \theta_{i'j',ij}(y)\phi'_j \circ \phi_i(y),$$

avec

$$\theta_{i'j',ij}(y) = \gamma'_{j'}(\lambda_{ii'}(y){g'_0}^{-1}, g'_0\phi_i(y))\lambda'_{kj}(\phi_i(y)).$$

□

On définit de manière évidente le quasi-morphisme fort *identité* I_X de X dans X. Il est clair que la composition à droite ou à gauche d'un quasi-morphisme fort avec I_X donne un quasi-morphisme fort équivalent. On définit un *quasi-isomorphisme fort* σ de X dans X' comme étant un quasi-morphisme fort de X dans X' tel qu'il existe un quasi-morphisme fort σ' de X' dans X tel que $\sigma \circ \sigma'$ (resp. $\sigma' \circ \sigma$) soit équivalent à $I_{X'}$ (resp. I_X).

Exemples : 1 - Supposons qu'il existe un morphisme $\phi : X \longrightarrow X'$ compatible avec un morphisme de groupes algébriques $\alpha : G \longrightarrow G'$, c'est-à-dire que pour tous $g \in G$, $x \in X$, on a $\phi(gx) = \alpha(x)\phi(x)$. Soit

$$\overline{\phi} : X/G \longrightarrow X'/G'$$

l'application déduite de ϕ. Alors $(\overline{\phi}, \phi)$ est un quasi-morphisme fort de X dans X'. C'est l'exemple le plus simple.

2 - Supposons qu'il existe un quasi-isomorphisme fort $\sigma : X \longrightarrow X'$, et soit U un ouvert G-invariant de X. Soit U' l'ouvert G'-invariant correspondant de X'. Alors σ induit un quasi-isomorphisme fort $U \longrightarrow U'$.

Il est clair que si

$$\phi : X/G \longrightarrow X'/G'$$

est un quasi-isomorphisme (non nécessairement fort), ϕ induit une bijection entre l'ensemble des ouverts (resp. fermés) G-invariants de X et l'ensemble des ouverts (resp. fermés) G'-invariants de X'. Si U est un ouvert G-invariant de X, et U' l'ouvert G'-invariant correspondant de X', ϕ induit un isomorphisme d'anneaux

$$\mathcal{O}(U)^G \simeq \mathcal{O}(U')^{G'}.$$

Plus généralement, si Y est une variété algébrique, les morphismes G-invariants $X \longrightarrow Y$ s'identifient de manière évidente aux morphismes G'-invariants $X' \longrightarrow Y$.

Proposition 2.2. *Si X et X' sont quasi-isomorphes, il existe un quasi-bon quotient de X par G si et seulement si il existe un quasi-bon quotient de X' par G', et dans ce cas les deux quotients sont isomorphes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un quasi-bon quotient

$$\pi : X \longrightarrow M$$

de X par G. Soit

$$\phi : X/G \longrightarrow X'/G'$$

un quasi-isomorphisme. Puisque π est G-invariant, il définit un morphisme G'-invariant

$$\pi' : X' \longrightarrow M.$$

Il est immédiat que c'est un quasi-bon quotient de X' par G'. □

Remarque : La proposition 2.2 est vraie pour des bons quotients si on suppose en plus que les variétés X et X' sont affines et si tout ouvert affine d'une de ces variétés est le complémentaire d'une hypersurface (c'est le cas par exemple lorsque X et X' sont *factorielles*, c'est-à-dire que leurs anneaux de fonctions régulières sont factoriels). En effet dans ce cas les ouverts affines G-invariants (resp. G'-invariants) de X (resp. X') sont alors les complémentaires des hypersurfaces G-invariantes (resp. G'-invariantes), et il est aisé de voir que via ϕ les hypersurfaces invariantes de X correspondent exactement à celles de X'. C'est ce qui se produit dans [2], où X et X' sont des ouverts d'espaces affines.

2.3. Lemme de descente

On montre ici que la notion de quasi-isomorphisme fort préserve une propriété importante : la possibilité de descendre au quotient des G-fibrés adéquats sur X. Rappelons qu'un *G-fibré vectoriel* sur X est un fibré vectoriel algébrique F sur X muni d'une action algébrique linéaire de G, au dessus de l'action de G sur X. S'il existe un quasi-bon quotient $\pi : X \longrightarrow M$, on dit que F *descend* à M s'il existe un fibré vectoriel algébrique E sur M et un isomorphisme de G-fibrés

$$F \simeq \pi^*(E).$$

Définition 5. *On dit qu'un G-fibré vectoriel F sur X est* admissible *si pour tout point x de X, le stabilisateur de x dans G agit trivialement sur F_x.*

Il est clair que s'il existe un quasi-bon quotient $M = X//G$, et si F descend à M, alors F est admissible. On démontre dans [4] le résultat suivant :

Lemme 2.3. (Lemme de descente) *Si le groupe G est réductif et s'il existe un bon quotient $\pi : X \longrightarrow M$, tout G-fibré admissible sur X descend à M.*

Une justification de la notion de quasi-isomorphisme fort est le résultat suivant :

Proposition 2.4. *On suppose donné un quasi-isomorphisme fort de X dans X'. Soit r un entier. Alors*

1 - Il existe une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-fibrés vectoriels admissibles de rang r sur X et l'ensemble des classes d'isomorphisme de G'-fibrés vectoriels admissibles de rang r sur X'.

2 - On suppose qu'il existe un quasi-bon quotient

$$M = X//G = X'//G'.$$

Alors un G-fibré vectoriel admissible sur X descend à M si et seulement si le G'–fibré vectoriel admissible correspondant sur X' descend à M, et les fibrés vectoriels associés sur M sont les mêmes.

Démonstration. Soit $(\phi : X/G \longrightarrow X'/G', (\phi_i : U_i \longrightarrow X'))$ le quasi-isomorphisme fort. Soit F' un G'-fibré vectoriel admissible sur X'. On va lui associer un G-fibré vectoriel admissible F sur X. On commence par construire F sans sa structure algébrique. Soit $\epsilon : X \longrightarrow X'$ une application au dessus de ϕ. On pose $F_\epsilon = \epsilon^*(F')$. Si $\epsilon' : X \longrightarrow X'$ est une autre application au dessus de ϕ, il existe une application $\theta : X \longrightarrow G'$ telle que $\epsilon' = \theta.\epsilon$. Puisque F' est un G'-fibré on obtient un isomorphisme $F_\epsilon \simeq F_{\epsilon'}$ qui en $x \in X$ est la multiplication par $\theta(x)$ $F'_{\epsilon(x)} \longrightarrow F'_{\epsilon'(x)}$. Puisque F' est admissible, l'isomorphisme précédent est indépendant du choix de ϵ. On peut donc définir sans ambiguité $F = F_\epsilon$.

Définissons maintenant l'action de G sur F. Soient $g \in G$, $x \in X$. Alors $\epsilon(x)$ et $\epsilon(gx)$ sont dans la même G'-orbite, donc on a un isomorphisme canonique

$$F_x = F'_{\epsilon(x)} \longrightarrow F'_{\epsilon(gx)} = F_{gx},$$

qui ne dépend pas de ϵ. Il est clair qu'on définit ainsi une action de G sur F, et que le stabilisateur de x agit trivialement sur F_x.

On définit maintenant la structure algébrique sur F. Soient $i \in I$ et $x \in U_i$. Soit V un voisinage de $\phi_i(x)$ tel qu'on ait une trivialisation

$$F'_{|V} \simeq \mathcal{O}_V \otimes \mathbb{C}^r.$$

On définit sur $U = U_i \cap \phi_i^{-1}(V)$ une trivialisation locale

$$F_U \simeq \phi^*(F'_{|V}) \simeq \mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}^r.$$

Il faut vérifier que ces trivialisations se recollent algébriquement. Cela découle immédiatement de la condition (ii) de la définition d'un quasi-morphisme fort. Le fait que l'action de G est algébrique découle de la condition (iii).

Les autres assertions sont immédiates et laissées au lecteur. □

Si G est réductif et s'il existe un bon quotient $M = X//G$, on en déduit que tout G'-espace fortement quasi-isomorphe à X vérifie le lemme de descente, c'est-à-dire que tout G'-fibré vectoriel admissible sur X' descend à M.

3. Mutations constructives

3.1. Mutations constructives en termes de faisceaux

3.1.1. *Un exemple simple*

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, Γ des faisceaux cohérents sur une variété projective X, M un espace vectoriel de dimension finie non nul. On suppose que le morphisme d'évaluation

$$\Gamma \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$$

est surjectif. Soit $\mathcal{E}'$ son noyau. On suppose aussi que l'application linéaire canonique

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G})^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma)$$

est bijective, et que la composition

$$c : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Gamma) \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

est surjective.

Proposition 3.1. *Soit*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{A} (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \xrightarrow{B} \mathcal{F}$$

un complexe, avec A injectif et B surjectif. Alors il existe un complexe

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha} \Gamma \otimes N \xrightarrow{\beta} \mathcal{F},$$

avec $N = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \oplus M$, *$\alpha$ étant injectif, β surjectif, et* $\ker(\beta)/\operatorname{Im}(\alpha) \simeq \ker(B)/\operatorname{Im}(A)$.

Démonstration. Le morphisme

$$\alpha : \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \longrightarrow \Gamma \otimes (M \oplus \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}))$$

est la somme d'un morphisme

$$\mathcal{E} \longrightarrow \Gamma \otimes (M \oplus \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}))$$

provenant de A (qui existe car c est surjective), et de l'inclusion $\mathcal{E}' \longrightarrow \Gamma \otimes \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G})$. On a un diagramme commutatif avec colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{E}' \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{E}' \arrow[d] \\
\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \Gamma \otimes (M \oplus \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G})) \arrow[d] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "A"] \arrow[d] & (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit que α est injectif et que $\operatorname{coker}(\alpha) \simeq \operatorname{coker}(A)$. On définit le morphisme β par le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \otimes (M \oplus \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G})) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d, equal] \\
(\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \arrow[r, "B"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

On en déduit que β est surjectif, $\beta \circ \alpha = 0$ et $\ker(\beta)/\operatorname{Im}(\alpha) \simeq \ker(B)/\operatorname{Im}(A)$. $\square$

On a bien sûr une réciproque :

Proposition 3.2. *Soit*

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha} \Gamma \otimes N \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}$$

un complexe, avec α injectif et β surjectif. On suppose que l'application linéaire

$$\lambda : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma) \longrightarrow N$$

déduite de α est injective. Alors il existe un complexe

$$\mathcal{E} \xrightarrow{A} (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \xrightarrow{B} \mathcal{F}$$

avec $M = \mathrm{coker}(\lambda)$, *$A$ étant injectif, B surjectif et* $\ker(B)/\mathrm{Im}(A) \simeq \ker(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha)$.

Démonstration. Analogue à la proposition précédente. □

3.1.2. *Le cas général*

On se place dans la situation du § 3.1. Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}_0$ des faisceaux cohérents sur X. On démontre comme la proposition 3.1 la

Proposition 3.3. *1 - Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{A} (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}_0 \xrightarrow{B} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow 0$$

un complexe, exact en $\mathcal{U}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$. Alors il existe un complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \xrightarrow{\alpha} (\Gamma \otimes N) \oplus \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow 0,$$

avec

$$N = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}) \oplus M,$$

exact sauf au plus en $(\Gamma \otimes N) \oplus \mathcal{G}_0$, *et tel que* $\ker(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha) \simeq \ker(B)/\mathrm{Im}(A)$.

2 - Réciproquement, si N est un espace vectoriel, et si on a un complexe du second type exact en $\mathcal{U}$, $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, tel que que l'application linéaire

$$\lambda : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma) \longrightarrow N$$

déduite de α soit injective. Alors il existe un complexe du premier type, avec $M = \mathrm{coker}(\lambda)$, *exact en $\mathcal{U}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, et tel que* $\ker(B)/\mathrm{Im}(A) \simeq \ker(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha)$.

3.2. Mutations constructives abstraites

On décrit ici de manière abstraite la situation de la proposition 3.1 (sans tenir compte de l'injectivité de A et α et de la surjectivité de B et β). Il est possible de faire la même chose dans le cas plus général de la proposition 3.3. On étudie l'action de certains groupes d'automorphismes sur l'espace de tous les complexes, et on étudie la relation entre les orbites des deux types de complexes. Des hypothèses supplémentaires sont faites dans cette version abstraite, par exemple on suppose que Γ est simple.

3.2.1. *Espaces de complexes de type 1 (version simplifiée)*

3.2.1.1 *Définition*

Soient Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , H, T, M des espaces vectoriels de dimension finie. On pose

$$W_C = (Z_1 \otimes M) \oplus Z_2 \oplus (Z_3 \otimes M^*) \oplus Z_4.$$

Soient

$$\begin{aligned} \sigma &: Z_1 \otimes H \longrightarrow Z_2, \\ \sigma' &: H \otimes Z_4 \longrightarrow Z_3, \\ \tau &: Z_1 \otimes Z_3 \longrightarrow T, \\ \tau' &: Z_2 \otimes Z_4 \longrightarrow T \end{aligned}$$

des applications linéaires. On suppose que σ est surjective, et que σ' induit une inclusion $Z_4 \subset H^* \otimes Z_3$. On suppose aussi que le diagramme suivant est commutatif :

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 \otimes H \otimes Z_4 & \xrightarrow{\sigma \otimes I_{Z_4}} & Z_2 \otimes Z_4 \\ {\scriptstyle I_{Z_1} \otimes \sigma'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \tau'} \\ Z_1 \otimes Z_3 & \xrightarrow[\tau]{} & T \end{array}$$

Soit $Q_C \subset W_C$ l'ensemble des points $(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4)$ tels que

$$\tau(<\phi_1, \phi_3>) + \tau'(z_2 \otimes z_4) = 0,$$

$<\phi_1, \phi_3>$ désignant l'image de $\phi_1 \otimes \phi_3$ par la contraction de M

$$Z_1 \otimes M \otimes Z_3 \otimes M^* \longrightarrow Z_1 \otimes Z_3.$$

Soient G_L, G_R et G_0 des groupes. On suppose que :

G_L opère linéairement à droite sur Z_1, Z_2, T.

G_R opère linéairement à gauche sur Z_3, Z_4, T.

G_0 opère linéairement à gauche sur Z_2, H, et linéairement à droite sur Z_4.

On suppose que ces actions sont compatibles entre elles et avec σ, σ', τ, τ'. Par exemple, on a

$$\sigma(z_1 g_L \otimes h) = \sigma(z_1 \otimes h) g_L, \quad \sigma'(g_0 h \otimes z_4) = \sigma(h \otimes z_4 g_0), \quad (g_R t) g_L = g_R (t g_L),$$

si $z_1 \in Z_1$, $z_4 \in Z_4$, $h \in H$, $t \in T$, $g_L \in G_L$, $g_R \in G_R$ et $g_0 \in G_0$.

Définition 6. *La donnée* Θ *de* Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, H, T, M, σ, σ', τ, τ', *et des actions de* G_L, G_R *et* G_0 *s'appelle un* espace abstrait de complexes de type 1*, et* Q_C *est l'*espace total *de* Θ.

3.2.1.2 *Dictionnaire*

Dans la situation du § 3.1, on a

$$\begin{aligned} Z_1 &= \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Gamma), \quad Z_2 = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{G}), \\ Z_3 &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{F}), \quad Z_4 = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}), \\ T &= \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \quad H = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

les applications σ, σ',τ,τ' sont les compositions, et

$$G_L = \mathrm{Aut}(\mathcal{E}), \quad G_R = \mathrm{Aut}(\mathcal{F}), \quad G_0 = \mathrm{Aut}(\mathcal{G}).$$

3.2.1.3 *Groupes associés*

Les groupes G_L^{op} et G_R agissent à gauche de manière évidente sur W_C, et Q_C est invariant par ces groupes. Soit G_1 le groupe constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} g_M & 0 \\ \phi & g_0 \end{pmatrix}$$

avec $g_M \in GL(M)$, $g_0 \in G_0$, $\phi \in M^* \otimes H$ (la loi de composition est évidente). Le groupe G_1 agit linéairement à gauche sur W_C : cette action provient d'une action à gauche sur $(Z_1 \otimes M) \oplus Z_2$ et d'une action à droite sur $(Z_3 \otimes M^*) \oplus Z_4$: si $(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4) \in W_C$ et $g_1 \in G_1$, on a

$$g_1(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4) = (g_1(\phi_1, z_2), (\phi_3, z_4)g_1^{-1}).$$

L'action à gauche de G_1 sur $(Z_1 \otimes M) \oplus Z_2$ est :

$$\begin{pmatrix} g_M & 0 \\ \phi & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_M\phi_1 \\ \sigma(<\phi, \phi_1>) + g_0 z_2 \end{pmatrix}.$$

L'action à droite de G_1 sur $(Z_3 \otimes M^*) \oplus Z_4$ est :

$$(\phi_3, z_4) \begin{pmatrix} g_M & 0 \\ \phi & g_0 \end{pmatrix} = (\phi_3 g_M + (I_M \otimes \sigma')(\phi \otimes z_4), z_4 g_0).$$

En utilisant la commutativité du diagramme (D), on montre aisément que Q_C est G_1-invariant. Plus généralement, on montre que l'application

$$W_C \longrightarrow T$$
$$(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4) \longmapsto \tau(<\phi_1, \phi_3>) + \tau'(z_2 \otimes z_4)$$

est G_1-invariante. Dans la situation du § 2.2.1.2, on a $G_1 = \mathrm{Aut}((\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G})$.

On pose

$$G = G_L^{op} \times G_1 \times G_R,$$

qui agit à gauche sur W_C et Q_C.

3.2.2. *Espaces de complexes de type 2*

3.2.2.1 *Définition*

Soient Z_1, Y_2, T_2, Z_3, T, K, N des espaces vectoriels de dimension finie, et

$$W'_C = (Z_1 \otimes N) \oplus (Y_2 \otimes N) \oplus (Z_3 \otimes N^*).$$

Soient

$$\nu : K \otimes Y_2 \longrightarrow Z_1,$$
$$\nu' : K \otimes T_2 \longrightarrow T,$$
$$\lambda : Y_2 \otimes Z_3 \longrightarrow T_2,$$
$$\tau : Z_1 \otimes Z_3 \longrightarrow T$$

des applications linéraires. On suppose que ν induit une inclusion $K \subset Z_1 \otimes Y_2^*$ et que λ est surjective. On suppose aussi que le diagramme suivant est commutatif :

$$(D') \qquad \begin{array}{ccc} K \otimes Y_2 \otimes Z_3 & \xrightarrow{\nu \otimes I_{Z_3}} & Z_1 \otimes Z_3 \\ {\scriptstyle I_K \otimes \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ K \otimes T_2 & \xrightarrow[\nu']{} & T \end{array}$$

Soit $Q'_C \subset W'_C$ l'ensemble des points (ψ_1, ψ_2, ψ_3) tels que

$$\tau(<\psi_1, \psi_3>) \ = \lambda(<\psi_2, \psi_3>) \ = \ 0,$$

où $<>$ désigne la contraction de N.

Soient G_L, G_0, G_R des groupes. On suppose que
G_L opère linéairement à droite sur T, Z_1 et K,
G_R opère linéairement à gauche sur T, Z_3 et T_2,
G_0 opère linéairement à gauche sur K et linéairement à droite sur T_2 et Y_2.
On suppose comme pour les complexes de type 1 que les actions des groupes sont compatibles entre elles et avec les applications ν, ν', λ et τ.

Définition 7. *La donnée Θ' de Z_1, Y_2, T_2, Z_3, T, K, N, ν, ν', λ, τ et des actions de G_L, G_0, G_R s'appelle un* espace abstrait de complexes de type 2*, et Q'_C est* l'espace total de Θ'.

3.2.2.2 *Dictionnaire*

Dans la situation du § 3.1, on a

$$Z_1 = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Gamma), \ Y_2 = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma),$$
$$Z_3 = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathcal{F}), \ \ T_2 = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \mathcal{F}),$$
$$T = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \ \ K = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'),$$

les applications ν, ν', λ, τ sont les compositions et

$$G_L = \mathrm{Aut}(\mathcal{E}), \ G_R = \mathrm{Aut}(\mathcal{F}), \ G_0 = \mathrm{Aut}(\mathcal{E}').$$

3.2.2.3 *Groupes associés*

Les groupes G_L^{op} et G_R agissent à gauche de manière évidente sur W'_C, et Q'_C est invariant par ces groupes. Soit G'_1 le groupe constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} g_L & 0 \\ k & g_0 \end{pmatrix}$$

avec $g_L \in G_L$, $g_0 \in G_0$, $k \in K$ (la loi de composition est évidente). Alors G'_1 agit à droite sur $Z_1 \oplus Y_2$:

$$(z_1, y_2) \begin{pmatrix} g_L & 0 \\ k & g_0 \end{pmatrix} \ = \ (z_1 g_L + \nu(k \otimes y_2), y_2 g_0).$$

Dans la situation du § 3.2.2.2, on a $G'_1 = \mathrm{Aut}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}')$.

On en déduit une action à gauche de

$$G' \;=\; GL(N) \times {G'_1}^{op} \times G_R$$

sur W'_C. On vérifie comme dans le cas des complexes de type 1 que Q'_C est G'-invariant.

3.2.3. *Mutations 1 $\Longrightarrow$ 2*

3.2.3.1 *Mutations d'espaces abstraits de complexes*

On considère l'espace abstrait de complexes de type 1 Θ du § 3.2.1. On va en déduire Θ', espace abstrait de complexes de type 2. Les espaces vectoriels Z_1, Z_3, T de Θ' sont les mêmes que ceux de Θ. On prend

$$N = M \oplus H, \quad Y_2 = H^*, \quad T_2 = (H^* \otimes Z_3)/Z_4, \quad K = \ker(\sigma) \subset Z_1 \otimes H.$$

L'application τ de Θ' est la même que celle de Θ.

L'application $\lambda : Y_2 \otimes Z_3 \longrightarrow T_2$ est la projection $H^* \otimes Z_3 \longrightarrow (H^* \otimes Z_3)/Z_4$.

L'application $\nu : K \otimes Y_2 \longrightarrow Z_1$ est la composée

$$K \otimes Y_2 \subset Z_1 \otimes H \otimes Y_2 = Z_1 \otimes H \otimes H^* \longrightarrow Z_1.$$

Pour définir $\nu' : K \otimes T_2 \longrightarrow T$ on part du diagramme commutatif suivant, déduit de (D')

$$\begin{array}{ccc} Z_1 \otimes H \otimes Z_4 & \xrightarrow{\sigma \otimes I_{Z_4}} & Z_2 \otimes Z_4 \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau'} \\ Z_1 \otimes H \otimes Z_3 \otimes H^* & \xrightarrow[\tau \otimes tr]{} & T \end{array}$$

(tr désignant la trace $H \otimes H^* \longrightarrow \mathbb{C}$ et α provenant de l'inclusion $Z_4 \subset Z_3 \otimes H^*$ déduite de σ'). Il en découle que

$$(\tau \otimes tr) \circ \alpha(\ker(\sigma) \otimes Z_4) \;=\; \{0\}.$$

Donc $\tau \otimes tr$ induit une application linéaire

$$\ker(\sigma) \otimes ((Z_3 \otimes H^*)/Z_4) \;=\; K \otimes T_2 \longrightarrow T$$

qui est par définition ν'.

La commutativité de (D') se vérifie aisément.

Les groupes G_R, G_L, G_0 de Θ' sont les mêmes que ceux de Θ et leurs actions sont évidentes. L'espace abstrait de complexes de type 2 Θ' est ainsi complètement défini. On notera

$$\Theta' \;=\; D_0(\Theta).$$

3.2.3.2 *Mutations de complexes*

Soit $(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4) \in Q_C$. On va en déduire une orbite $G'.(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ de Q'_C.

– Définition de $\psi_1 \in Z_1 \otimes N$: on prend $\psi_0 \in Z_1 \otimes H$ tel que $\sigma(\psi_0) = z_2$, et

$$\psi_1 = \psi_0 + \phi_1 \;\in\; (Z_1 \otimes H) \oplus (Z_1 \otimes M) = Z_1 \otimes N.$$

– Définition de $\psi_2 \in Y_2 \otimes N$: on prend

$$\psi_2 = I_H \ \in \ H^* \otimes H \subset H^* \otimes (M \oplus H) = Y_2 \otimes N.$$

– Définition de $\psi_3 \in Z_3 \otimes N^*$: on prend

$$\psi_3 = \phi_3 + z_4 \ \in \ (Z_3 \otimes M^*) \oplus Z_4 \subset (Z_3 \otimes M^*) \oplus (Z_3 \otimes H^*) = Z_3 \otimes N^*.$$

On vérifie aisément que (ψ_1, ψ_2, ψ_3) est un élément de Q_C défini à l'action près du sous-groupe de G'_1 isomorphe à K, constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in K.$$

On a donc défini une application

$$\overline{D_0} : Q_C \longrightarrow Q'_C/G'.$$

Lemme 3.4. *Si* $x \in Q_C$ *et* $g \in G$, *alors* $\overline{D_0}(gx) = \overline{D_0}(x)$. *Donc* $\overline{D_0}$ *induit une application*

$$D_0 : Q_C/G \longrightarrow Q'_C/G'.$$

Vérification immédiate.

3.2.4. *Mutations 2 $\Longrightarrow$ 1*

3.2.4.1 *Mutations d'espaces abstraits de complexes*

On considère l'espace abstrait de complexes de type 2 Θ' du § 3.2.2. On va en déduire Θ, espace abstrait de complexes de type 1. On doit supposer que $\dim(N) \geq \dim(Y_2)$. On note ${W'}^0_C$ le sous-ensemble G'-invariant de W'_C constitué des (ψ_1, ψ_2, ψ_3) tels que $\psi_2 : Y_2^* \longrightarrow N$ soit injective. Soit ${Q'}^0_C = Q'_C \cap {W'}^0_C$.

On définit maintenant Θ. Les espaces vectoriels Z_1, Z_3, T de Θ sont les mêmes que ceux de Θ'. On prend pour M un espace vectoriel de dimension $\dim(N) - \dim(Y_2)$, et

$$H = Y_2^*, \quad Z_2 = (Z_1 \otimes Y_2^*)/K, \quad Z_4 = \ker(\lambda) \subset Y_2 \otimes Z_3.$$

L'application τ de Θ est la même que celle de Θ'.

L'application $\sigma : Z_1 \otimes H \longrightarrow Z_2$ est la projection $Z_1 \otimes Y_2^* \longrightarrow (Z_1 \otimes Y_2^*)/K$.

L'application $\sigma' : H \otimes Z_4 \longrightarrow Z_3$ est la restriction de

$$tr \otimes I_{Z_3} : H \otimes H^* \otimes Z_3 \longrightarrow Z_3.$$

Pour définir $\tau' : Z_2 \otimes Z_4 \longrightarrow T$ on part du diagramme commutatif suivant déduit de (D')

$$\begin{array}{ccc} K \otimes Y_2 \otimes Z_3 & \xrightarrow{I_K \otimes \lambda} & K \otimes T_2 \\ {\scriptstyle \overline{\nu} \otimes I_{Y_2 \otimes Z_3}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \nu'} \\ Z_1 \otimes Y_2^* \otimes Y_2 \otimes Z_3 & \xrightarrow[\tau \otimes tr]{} & T \end{array}$$

$\overline{\nu}$ désignant l'inclusion $K \subset Z_1 \otimes Y_2^*$ déduite de ν. On a donc

$$(\tau \otimes tr) \circ (\overline{\nu} \otimes I_{Y_2 \otimes Z_3})(K \otimes \ker(\lambda) = \{0\},$$

et $\tau \otimes tr$ induit donc

$$\tau' : ((Z_1 \otimes Y_2^*)/K) \otimes \ker(\lambda) = Z_2 \otimes Z_4 \longrightarrow T.$$

La commutativité du diagramme (D) se vérifie aisément. Les groupes G_0, G_L et G_R de Θ sont les mêmes que ceux de Θ' et leurs actions sont évidentes. L'espace abstrait de complexes de type 1 Θ est ainsi complètement défini. On notera

$$\Theta \ = \ D'_0(\Theta').$$

Proposition 3.5. *On a* $D_0 \circ D'_0(\Theta') = \Theta'$ *et* $D'_0 \circ D_0(\Theta) = \Theta$.

Immédiat.

3.2.4.2 *Mutations de complexes*

Soit $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in Q'^0_C$. On va en déduire une orbite $G.(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4)$ de Q_C.

- Définition de $\phi_1 \in Z_1 \otimes M$: on fixe d'abord un isomorphisme entre M et un supplémentaire de l'image de ψ_2 dans N :

$$N \ = \ Y_2^* \oplus M.$$

  On prend pour ϕ_1 la composante de ψ_1 dans $Z_1 \otimes M$.
- Définition de $z_2 \in Z_2$: on prend la projection sur $(Z_1 \otimes Y_2^*)/K$ de la composante de ψ_2 dans $Z_1 \otimes Y_2^*$.
- Définition de $\phi_3 \in Z_3 \in M^*$: on prend la composante de ψ_3 dans $Z_3 \otimes M^*$.
- Définition de $z_4 \in Z_4$: on prend $z_4 = <\psi_2, \psi_3> \in \ker(\lambda)$.

On vérifie aisément que $(\phi_1, z_2, \phi_3, z_4)$ est un élément de Q_C défini à l'action près du groupe G_1.

On a donc défini une application

$$\overline{D'_0} : Q'^0_C \longrightarrow Q_C/G.$$

Lemme 3.6. *Si* $x \in Q'^0_C$ *et* $g \in G'$, *alors* $\overline{D'_0}(gx) = \overline{D'_0}(x)$. *Donc* $\overline{D'_0}$ *induit une application*

$$D'_0 : Q'^0_C/G' \longrightarrow Q_C/G.$$

Vérification immédiate.

3.2.5. *Théorèmes d'isomorphisme*

Théorème 3.7. *On a* $D'_0 \circ D_0 = I_{Q_C/G}$ *et* $D_0 \circ D'_0 = I_{Q'^0_C/G'}$.

Vérification immédiate.

On a donc obtenu une bijection canonique

$$Q_C/G \ \simeq {Q'}^0_C/G'.$$

On suppose maintenant que les groupes sont algébriques, ainsi que leurs actions sur les espaces vectoriels dont il est question. On a alors :

Théorème 3.8. *Il existe un quasi-isomorphisme fort canonique de Q_C vers ${Q'}^0_C$, au dessus de l'isomorphisme précédent.*

Démonstration. Le quasi-isomorphisme fort $Q_C \longrightarrow {Q'}^0_C$ est défini par une seule carte, obtenue en utilisant une section de σ. Le quasi-isomorphisme inverse est défini par des cartes indéxées sur la grassmannienne Gr_0 des sous-espaces vectoriels de N de dimension égale à celle de M. L'ouvert correspondant à $M_0 \in Gr_0$ est l'ensemble des points (ψ_1, ψ_2, ψ_3) de ${Q'}^0_C$ tels que l'image de $\psi_2 : Y_2^* \longrightarrow N$ ne rencontre pas M_0. Les vérifications (fastidieuses) sont laissées au lecteur. □

On peut donner une version abstraite de la proposition 3.3, et obtenir des résultats analogues aux théorèmes 3.7 et 3.8.

3.3. Application aux espaces de complexes

Soient X une variété algébrique projective, $p \geq 1$ un entier, $n_0, \ldots, n_p$ des entiers positifs, et pour $0 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n_i$, $\mathcal{E}_j^{(i)}$ un faisceau cohérent sur X et $M_j^{(i)}$ un espace vectoriel non nul de dimension finie. On pose, pour $0 \leq i \leq p$

$$\mathcal{E}_i \ = \bigoplus_{1 \leq j \leq n_i} (\mathcal{E}_j^{(i)} \otimes M_j^{(i)}).$$

On suppose que les faisceaux $\mathcal{E}_j^{(i)}$ sont simples, et que

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_j^{(i)}, \mathcal{E}_{j'}^{(i')}) \ = \ \{0\}$$

si $i > i'$, ou $i = i'$, $j > j'$. Soit Q_C la variété des complexes

$$\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}_p.$$

On pose $\mathcal{E}_i = 0$ si $i < 0$ ou $i > p$. Soit i_0 un entier, avec $0 \leq i_0 \leq p$. On pose

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{i_0-1}, \quad \Gamma = \mathcal{E}_1^{(i_0)}, \quad M = M_1^{(i_0)}, \quad \mathcal{G} = \bigoplus_{2 \leq j \leq n_i} (\mathcal{E}_j^{(i_0)} \otimes M_j^{(i_0)}), \quad \mathcal{F} = \mathcal{E}_{i_0+1},$$

de telle sorte que les complexes précédents se mettent sous la forme

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{E}_{i_0-2} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow (\Gamma \otimes M) \oplus \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_{i_0+2} \longrightarrow \cdots$$

On suppose que les conditions du § 3.1.1 sont vérifiées, ce qui définit le faisceau $\mathcal{E}'$. Soit Q'_C la variété des complexes du type

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{E}_{i_0-2} \longrightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \longrightarrow \Gamma \otimes N \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_{i_0+2} \longrightarrow \cdots$$

et Q'^0_C l'ouvert de Q'_C constitué des complexes tels que le morphisme $\mathcal{E}' \longrightarrow \Gamma \otimes N$ induise une inclusion $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \Gamma)^* \subset N$. Le groupe G (resp. G') opérant sur Q_C (resp. Q'_C) est le produit des groupes d'automorphismes des termes des complexes. On généralise sans difficultés les résultats du § 3.2 à ce cas et on définit de manière évidente les mutations de complexes de Q_C ou Q'^0_C (qui sont des complexes de Q'^0_C et Q_C respectivement), et on obtient l'analogue du théorème 3.8 pour les variétés de complexes.

4. Variétés de modules de complexes

La construction des variétés de modules de morphismes de [5] est une application du théorème 3.8. On donne ici une autre application de ce théorème à la construction de variétés de modules de complexes. On travaille dans le language des faisceaux, ce qui donne des démonstrations plus explicites. Il est évidemment possible de faire une version abstraite de la construction des variétés de modules, comme dans [5].

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_1$ des faisceaux cohérents sur une variété projective X, et L_1, M_1, M_2, N_1 des espaces vectoriels de dimension finie. On s'intéresse à des complexes du type

$$\mathcal{E}_1 \otimes L_1 \longrightarrow (\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2) \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes N_1.$$

On fait les hypothèses suivantes :

- Les faisceaux $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{G}_1$ sont simples, et $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1) = \{0\}$.
- Le morphisme canonique
$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{F}_2$$
est surjectif. On note $\mathcal{H}_1$ son noyau.
- Le morphisme canonique
$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{H}_1$$
est surjectif. On note $\mathcal{K}_1$ son noyau.
- On a
$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_2, \mathcal{E}_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \{0\},$$
$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}_1, \mathcal{E}_1) = \{0\}.$$

Cette dernière hypothèse entraîne que les faisceaux $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{K}_1$ sont simples.

On se trouve dans la situation de la proposition 3.1 (avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes L_1$, $\Gamma = \mathcal{F}_1$, $M = M_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_2 \otimes M_2$ et $\mathcal{F} = \mathcal{G}_1 \otimes N_1$). On note Q_C la variété des complexes du type précédent. Elle peut donc être vue comme l'espace total d'un espace abstrait de complexes de type 1. Le groupe G opérant sur Q_C est

$$G \;=\; GL(L_1) \times \mathrm{Aut}((\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2)) \times GL(N_1).$$

On peut voir $\mathrm{Aut}((\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2))$ comme constitué de matrices du type

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ \phi & g_2 \end{pmatrix},$$

avec $g_1 \in GL(M_1)$, $g_2 \in GL(M_2)$ et $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)^* \otimes M_1, M_2)$.

On pose

$$a = \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)), \quad b = \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1)).$$

4.1. Notions de (semi-)stabilité et variétés de modules de complexes

Le groupe G possède deux sous-groupes importants : le premier est le sous-groupe normal unipotent maximal évident H, isomorphe au groupe additif $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)^* \otimes M_1, M_2))$. Le second est le sous-groupe réductif

$$G_{red} \;=\; GL(L_1) \times GL(M_1) \times GL(M_2) \times GL(N_1),$$

dont l'inclusion dans G induit un isomorphisme $G_{red} \simeq G/H$.

L'action de G_{red} est un cas particulier des actions étudiées dans [8]. On considère l'espace vectoriel

$$W \;=\; \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1 \otimes L_1, (\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2)) \times \mathrm{Hom}((\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2), \mathcal{G}_1 \otimes N_1),$$

dont Q_C est une sous-variété fermée. L'action de G sur Q_C sétend de manière évidente à W.

Soient λ_1, μ_1, μ_2, ν_1 des nombres rationnels non nuls tels que

$$\lambda_1 \dim(L_1) + \mu_1 \dim(M_1) + \mu_2 \dim(M_2) + \nu_1 \dim(N_1) = 0.$$

Définition 8. *Un point (ϕ, ψ) de W est dit G_{red}-*semi-stable *(resp. G_{red}-*stable*) relativement à $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$ si pour tous sous-espaces vectoriels $L'_1 \subset L_1$, $M'_1 \subset M_1$, $M'_2 \subset M_2$, $N'_1 \subset N_1$, avec $(L'_1, M'_1, M'_2, N'_1) \neq (L_1, M_1, M_2, N_1)$ ou $(\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\})$, tels que*

$$\phi(\mathcal{E}_1 \otimes L'_1) \subset (\mathcal{F}_1 \otimes M'_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M'_2), \quad \psi((\mathcal{F}_1 \otimes M'_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M'_2)) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1,$$

on a

$$\lambda_1 \dim(L'_1) + \mu_1 \dim(M'_1) + \mu_2 \dim(M'_2) + \nu_1 \dim(N'_1) \leq 0 \quad (\text{resp.} \quad < \;).$$

On dit que $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$ est une *polarisation* de l'action de G sur W (ou Q_C). On note W^{ss}_{red} (resp. W^{s}_{red}) l'ouvert de W constitué des points G_{red}-semi-stables (resp. G_{red}-stables). Soient $Q^{ss}_{C,red} = W^{ss}_{red} \cap Q_C$, $Q^{s}_{C,red} = W^{s}_{red} \cap Q_C$. D'après [8], il existe un bon quotient $W^{ss}_{red}//G$ et un quotient géométrique lisse W^{s}_{red}/G. Par conséquent il existe aussi un bon quotient $Q^{ss}_{C,red}//G$. Mais ce n'est pas le quotient que nous recherchons.

Définition 9. *Un point x de W est dit G-*semi-stable *(resp. G-*stable*) relativement à $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$ si tous les points de l'orbite $H.x$ sont G_{red}-semi-stables (resp. G_{red}-stables).*

On note W^{ss} (resp. W^s) l'ouvert de W constitué des points G-semi-stables (resp. G-stables). Soient $Q_C^{ss} = W^{ss} \cap Q_C$, $Q_C^s = W^s \cap Q_C$. On cherche à prouver l'existence de quasi-bons quotients $Q_C^{ss}//G$. De tels quotients seront appelés des *variétés de modules de complexes*.

On montre aisément que si W^s est non vide on doit avoir

$$\lambda_1 > 0, \quad \nu_1 < 0, \quad \mu_1 \dim(M_1) + \nu_1 \dim(N_1) < 0, \quad \mu_2 \dim(M_2) + \nu_1 \dim(N_1) < 0.$$

On supposera par la suite que ces inégalités sont vérifiées.

4.2. Mutations et polarisations associées

4.2.1. *La première mutation*

4.2.1.1 - *Définition*

Soit

$$(*) \qquad \mathcal{E}_1 \otimes L_1 \xrightarrow{(f_1,f_2)} (\mathcal{F}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2) \xrightarrow{(g_1,g_2)} \mathcal{G}_1 \otimes N_1.$$

un complexe. Une première mutation donne un complexe

$$(**) \qquad (\mathcal{E}_1 \otimes L_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes M_2) \xrightarrow{(\phi_1,\phi_2)} \mathcal{F}_1 \otimes P_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}_1 \otimes N_1,$$

avec

$$P_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2) \oplus M_1.$$

Le groupe opérant sur la variété Q'_C de ces complexes est

$$G' = \mathrm{Aut}((\mathcal{E}_1 \otimes L_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes M_2)) \times GL(P_1) \times GL(N_1).$$

Le groupe $\mathrm{Aut}((\mathcal{E}_1 \otimes L_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes M_2))$ est constitué de matrices

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ \phi & g_2 \end{pmatrix},$$

avec $g_1 \in GL(L_1)$, $g_2 \in GL(M_2)$, $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1)^* \otimes L_1, M_2)$ (on a $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{E}_1) = \{0\}$, à cause du fait que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_2, \mathcal{E}_1) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1) = \{0\}$). Le complexe $(**)$ n'est pas unique, mais sa G'-orbite l'est.

Décrivons maintenant une mutation du complexe $(*)$. Le morphisme

$$\phi_1 : \mathcal{E}_1 \otimes L_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes P_1$$

est la somme de

$$f_1 : \mathcal{E}_1 \otimes L_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes M_1$$

et d'un relèvement de $f_2 : \mathcal{E}_1 \otimes L_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \otimes M_2$ en un morphisme $\mathcal{E}_1 \otimes L_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2$. Un tel relèvement est possible car $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) = \{0\}$. Le morphisme

$$\phi_2 : \mathcal{H}_1 \otimes M_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes P_1$$

est égal à $\sigma \otimes I_{M_2}$, où σ est l'inclusion $\mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Le morphisme ϕ est égal à g_1 sur $\mathcal{F}_1 \otimes M_1$, et sur $\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2$, c'est la composée

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \otimes M_2 \xrightarrow{g_2} \mathcal{G}_1 \otimes N_1.$$

4.2.1.2 - *(Semi-)stabilité dans Q'_C*

On définit comme pour les complexes de type $(*)$ une notion de (semi-)stabilité, dépendant d'une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1)$ de nombres rationnels telle que

$$\alpha_1 \dim(L_1) + \alpha_2 \dim(M_2) + \beta_1 \dim(P_1) + \gamma_1 \dim(N_1) = 0.$$

Soient G'_{red} les sous-groupe réductif canonique de G', et H' le sous-groupe normal unipotent maximal isomorphe au groupe additif $\mathrm{Hom}(L_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1), M_2)$. La G'_{red}-(semi-)stabilité relativement à $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1)$ est encore un cas particulier des actions étudiées dans [8] : le complexe $(**)$ est G'_{red}-semi-stable (resp. G'_{red}-stable) si pour tous sous-espaces vectoriels $L'_1 \subset L_1$, $M'_2 \subset M_2$, $P'_1 \subset P_1$, $N'_1 \subset N_1$, avec $(L'_1, M'_2, P'_1, N'_1) \neq (L_1, M_2, P_1, N_1)$ ou $(\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\})$, tels que

$$(\phi_1, \phi_2)((\mathcal{E}_1 \otimes L'_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes M'_2)) \subset \mathcal{F}_1 \otimes P'_1, \quad \phi(\mathcal{F}_1 \otimes P'_1) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1,$$

on a

$$\alpha_1 \dim(M'_1) + \alpha_2 \dim(M'_2) + \beta_1 \dim(P'_1) + \gamma_1 \dim(N'_1) \leq 0 \quad (\text{resp. } <).$$

Le complexe $(**)$ est G'-semi-stable (resp. G'-stable) si tous les points de sa H'-orbite sont G'_{red}-semi-stables (resp. G'_{red}-stables).

Soient $L'_1 \subset L_1$, $M'_1 \subset M_1$, $M'_2 \subset M_2$, $N'_1 \subset N_1$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$(f_1, f_2)(\mathcal{E}_1 \otimes L'_1) \subset (\mathcal{F}_1 \otimes M'_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M'_2), \quad (g_1, g_2)((\mathcal{F}_1 \otimes M'_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M'_2)) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1.$$

On pose

$$P'_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M'_2) \oplus M'_1.$$

Le relèvement de f_2 peut être choisi de telle sorte qu'il envoie $\mathcal{E}_1 \otimes L'_1$ dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M'_2$. On a alors

$$(\phi_1, \phi_2)((\mathcal{E}_1 \otimes L'_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes M'_2)) \subset \mathcal{F}_1 \otimes P'_1, \quad \phi(\mathcal{F}_1 \otimes P'_1) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1.$$

Soit $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$ une polarisation de l'action de G sur Q_C. On pose

$$\alpha_1 = \lambda_1, \quad \alpha_2 = \mu_2 - a\mu_1, \quad \beta_1 = \mu_1, \quad \gamma_1 = \nu_1.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède la

Proposition 4.1. *Si le complexe $(**)$ est G'_{red}-semi-stable (resp. G'_{red}-stable) relativement à $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1)$, alors $(*)$ est G-semi-stable (resp. G-stable) relativement à $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$.*

On voit aisément que si ${Q'}^s_C$ est non vide, alors on a $\mu_2 > a\mu_1$.

4.2.2. *La seconde mutation*

4.2.2.1 - *Définition*

Une seconde mutation donne, partant du complexe $(**)$, un complexe du type

$$(***) \qquad \mathcal{K}_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}_1 \otimes Q_1 \xrightarrow{\psi'} \mathcal{F}_1 \otimes P_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}_1 \otimes N_1,$$

avec

$$Q_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2) \oplus L_1.$$

Le groupe opérant sur la variété Q''_C de ces complexes est

$$G'' = GL(M_2) \times GL(Q_1) \times GL(P_1) \times GL(N_1),$$

qui est réductif. Notons qu'ici la mutation est uniquement déterminée (à partir de $(**)$).

Décrivons maintenant une mutation du complexe $(**)$. Le morphisme ψ est égal à $\sigma' \otimes I_{M_2}$, où σ' est l'inclusion $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{E}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1)$. Posons

$$\psi' \ = \ \begin{pmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} \\ \psi'_{21} & \psi'_{22} \end{pmatrix},$$

relativement aux décompositions

$$P_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2) \oplus M_1, \quad Q_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2) \oplus L_1.$$

On a

$$\begin{pmatrix} \psi'_{12} \\ \psi'_{22} \end{pmatrix} \ = \ \phi_1.$$

Le morphisme ψ'_{11} provient de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2),$$

compte tenu de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)^*$. On a enfin $\psi'_{21} = 0$.

4.2.2.2 - *(Semi-)stabilité dans Q''_C*

On définit comme pour les complexes de type $(*)$ une notion de (semi-)stabilité, dépendant d'une suite $(\delta, \epsilon, \theta, \rho)$ de nombres rationnels telle que

$$\delta \dim(M_2) + \epsilon \dim(Q_1) + \theta \dim(P_1) + \rho \dim(N_1) = 0.$$

La G''-(semi-)stabilité relativement à $(\delta, \epsilon, \theta, \rho)$ est encore un cas particulier des actions étudiées dans [8] : le complexe $(***)$ est G''-semi-stable (resp. G''-stable) si pour tous sous-espaces vectoriels $M'_2 \subset M_2$, $Q'_1 \subset Q_1$, $P'_1 \subset P_1$, $N'_1 \subset N_1$, avec $(M'_2, Q'_1, P'_1, N'_1) \neq (M_2, Q_1, P_1, N_1)$ ou $(\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\})$, tels que

$$\psi(\mathcal{K}_1 \otimes M'_2) \subset \mathcal{E}_1 \otimes Q'_1, \ \psi'(\mathcal{E}_1 \otimes Q'_1) \subset \mathcal{F}_1 \otimes P'_1, \ \phi(\mathcal{F}_1 \otimes P'_1) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1,$$

on a

$$\delta \dim(M'_2) + \epsilon \dim(Q'_1) + \theta \dim(P'_1) + \rho \dim(N'_1) \leq 0 \quad (\text{resp.} \quad < \ ).$$

Soient $L'_1 \subset L_1$, $M'_1 \subset M_1$, $M'_2 \subset M_2$, $N'_1 \subset N_1$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$(f_1, f_2)(\mathcal{E}_1 \otimes L'_1) \subset (\mathcal{F}_1 \otimes M'_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M'_2), \quad (g_1, g_2)((\mathcal{F}_1 \otimes M'_1) \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M'_2)) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1.$$

On pose

$$P'_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M'_2) \oplus M'_1, \quad Q'_1 = (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M'_2) \oplus L'_1.$$

Comme dans le § 3.2.1.2, le relèvement de f_2 peut être choisi de telle sorte qu'il envoie $\mathcal{E}_1 \otimes L'_1$ dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M'_2$. On a alors

$$\psi(\mathcal{K}_1 \otimes M'_2) \subset \mathcal{E}_1 \otimes Q'_1, \ \psi'(\mathcal{E}_1 \otimes Q'_1) \subset \mathcal{F}_1 \otimes P'_1, \ \phi(\mathcal{F}_1 \otimes P'_1) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1.$$

Soit $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$ une polarisation de l'action de G sur Q_C. On pose

$$\delta = \mu_2 - a\mu_1 - b\lambda_1, \quad \epsilon = \lambda_1, \quad \theta = \mu_1, \quad \rho = \nu_1.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède la

Proposition 4.2. *Si le complexe $(***)$ est G''-semi-stable (resp. G''-stable) relativement à $(\delta, \epsilon, \theta, \rho)$, alors $(*)$ est G-semi-stable (resp. G-stable) relativement à $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$.*

On voit aisément que si ${Q''}^s_C$ est non vide, alors on a $\mu_2 > a\mu_1 + b\lambda_1$. Notons que si Q^s_C est non vide, cette condition est plus forte que celle que l'on avait trouvée en supposant que ${Q'}^s_C$ est non vide.

4.3. Cas d'équivalence des (semi-)stabilités et construction des variétés de modules

4.3.1. *Définitions de constantes*

On définit ici des constantes qui interviendront par la suite. Elles ont déjà été définies et utilisées sans [5]. On considère l'application canonique

$$\tau : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1)^*.$$

Pour tout entier positif k, soit

$$\tau_k = \tau \otimes I_{\mathbb{C}^k} : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^* \otimes (\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \mathbb{C}^k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1)^* \otimes \mathbb{C}^k.$$

Soit G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres K de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \mathbb{C}^k$ tels que pour tout sous-espace vectoriel propre $V \subset \mathbb{C}^k$, K ne soit pas contenu dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes V$. On pose

$$c_1(k) = \sup_{K \in G_k} \left(\frac{\mathrm{codim}(\tau_k(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes K))}{\mathrm{codim}(K)}\right).$$

On définit de même $c_2(k)$, qui correspond à l'application canonique

$$\tau' : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2),$$

provenant de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)^*$.

Il est clair qu'on a $c_1(k+1) \geq c_1(k)$, $c_2(k+1) \geq c_2(k)$.

4.3.2. *Equivalence des (semi-)stabilités*

Proposition 4.3. *On suppose que*

$$\mu_2 \geq (b - \frac{a}{c_2(m_2)})\lambda_1 - ac_1(m_2)\nu_1.$$

Alors le complexe $(*)$ est G-semi-stable relativement à $(\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \nu_1)$ si et seulement si $(***)$ est G''-semi-stable relativement à $(\delta, \epsilon, \theta, \rho)$.

Démonstration. D'après la proposition 4.2, il suffit de montrer que si $(***)$ n'est pas G''-semi-stable, $(*)$ n'est pas G-semi-stable.

On suppose que le complexe $(***)$ n'est pas semi-stable. Soient $M'_2 \subset M_2$, $Q'_1 \subset Q_1$, $P'_1 \subset P_1$, $N'_1 \subset N_1$ des sous-espaces vectoriels, de dimensions respectives m'_2, q'_1, p'_1, n'_1, tels que

$$\psi(\mathcal{K}_1 \otimes M'_2) \subset \mathcal{E}_1 \otimes Q'_1, \quad \psi'(\mathcal{E}_1 \otimes Q'_1) \subset \mathcal{F}_1 \otimes P'_1, \quad \phi(\mathcal{F}_1 \otimes P'_1) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N'_1,$$

et

$$s = \delta m'_1 + \epsilon q'_1 + \theta p'_1 + \rho n'_1 > 0.$$

En faisant agir le sous-groupe unipotent H de G on se ramène au cas où $P_1' = X \oplus M_1'$, X étant un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2$. En changeant éventuellement le relèvement de f_2 servant à définir ϕ_1, on se ramène au cas où $Q_1' = Y \oplus L_1'$, Y étant un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2$. Soit M_2'' le plus petit sous-espace vectoriel de M_2 tel que

$$Y \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2''.$$

Montrons qu'on peut aussi supposer que M_2'' est le plus petit sous-espace vectoriel de M_2 tel que

$$X \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2''.$$

D'abord on a $X \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2''$: cela découle du fait que pour toute droite L de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1)$, la restriction de τ' à $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes L$ est non nulle (ceci résultant du fait que $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1)^*$. D'autre part on peut, puisque $\epsilon = \lambda_1 > 0$, remplacer X par ${\psi_{11}'}^{-1}(Y) \cap (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1) \otimes M_2'')$, ce qui assure la minimalité de M_2''.

Soit $N_1'' = \phi((\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2'') \oplus M_1')$. Alors on a

$$(f_1, f_2)(\mathcal{E}_1 \otimes L_1') \subset (\mathcal{F}_1 \otimes M_1') \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2''), \quad (g_1, g_2)((\mathcal{F}_1 \otimes M_1') \oplus (\mathcal{F}_2 \otimes M_2'')) \subset \mathcal{G}_1 \otimes N_1''.$$

Posons $l_1' = \dim(L_1')$, $m_1' = \dim(M_1')$, $n_1'' = \dim(N_1'')$, $m_2'' = \dim(M_2'')$ et

$$t = \lambda_1 l_1' + \mu_1 m_1' + \mu_2 m_2'' + \nu_1 n_1''.$$

Alors on a

$$t = s + \delta(m_2'' - m_2') + \epsilon(bm_2'' - x) + \theta(am_2'' - y) + \rho(n_1'' - n_1').$$

Pour montrer que $(*)$ n'est pas semi-stable, il suffit donc de montrer que

$$u = \delta(m_2'' - m_2') + \epsilon(bm_2'' - x) + \theta(am_2'' - y) + \rho(n_1'' - n_1') \geq 0.$$

C'est évident si $am_2'' - y = 0$, car alors $n_1'' - n_1' = 0$. On peut donc supposer que $am_2'' - y > 0$, ce qui entraîne $c_2(m_2'') > 0$. On a alors

$$m_2'' - m_2' \geq \frac{am_2'' - y}{a}, \quad bm_2'' - x \geq \frac{am_2'' - y}{c_2(m_2'')}, \quad n_1'' - n_1' \leq c_1(m_2'')(am_2'' - y).$$

Donc

$$u \geq (am_2'' - y)(\frac{\delta}{a} + \frac{\epsilon}{c_2(m_2'')} + \theta + \rho c_1(m_2'')),$$

c'est-à-dire

$$u \geq (am_2'' - y)(\frac{\mu_2}{a} - (\frac{b}{a} - \frac{1}{c_2(m_2'')})\lambda_1 + \nu_1 c_1(m_2'')).$$

On en déduit la proposition. □

Remarque : En général, on a

$$b - \frac{a}{c_2(m_2)} \leq 0.$$

C'est le cas par exemple si τ' est stable pour l'action du groupe réductif $SL(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1)) \times SL(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2))$.

4.4. Projectivité des variétés de modules

4.4.1. *Définition d'une constante*

Soient
$$\tau'' : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1)^*$$
l'application linéaire définie par :
$$\tau'' = \tau \circ (\tau' \otimes I_{\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^*}),$$
et pour tout entier positif k,
$$\tau''_k = \tau'' \otimes I_{\mathbb{C}^k}.$$
Soit G''_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres K de $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes \mathbb{C}^k$ tels que pour tout sous-espace vectoriel propre V de $\mathbb{C}^k$, K ne soit pas contenu dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes V$. On pose
$$c(k) = \sup_{K \in G''_k} \left(\frac{\mathrm{codim}(\tau''_k(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^* \otimes K))}{\mathrm{codim}(K)}\right).$$
On montre aisément qu'on a $c(k) \leq c_1(k)c_2(k)$.

4.4.2. *Projectivité*

Théorème 4.4. *Il existe un quasi-bon quotient $Q^{ss}_C//G$, qui est une variété projective, si les conditions suivantes sont réalisées :*

1 - On a
$$\mu_2 - a\nu_1 c_1(m_2) > 0, \quad \mu_2 - a\mu_1 - b\lambda_1 > 0.$$
2 - Si $\mu_1 < 0$ et $\lambda_1 + \nu_1 c_(m_2) + \mu_1 c_2(m_2) < 0$, alors
$$\mu_2 - a\mu_1 + b\nu_1 c(m_2) + b\mu_1 c_2(m_2) \geq 0.$$

Démonstration. Le bon quotient ${Q''}^{ss}_C//G$ existe et est projectif, car G'' est réductif. D'après le théorème 3.8 et la remarque qui suit la proposition 4.3, le quasi-bon quotient $Q^{ss}_C//G$ existe et est projectif si ${Q''}^{ss}_C$ est contenu dans l'ouvert U de Q''_C contenant les orbites des mutations des points de Q_C. Compte tenu des deux étapes de mutations, on va caractériser les complexes
$$\mathcal{K}_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}_1 \otimes Q_1 \xrightarrow{\psi'} \mathcal{F}_1 \otimes P_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}_1 \otimes N_1$$
non contenus dans U. Soit
$$f : \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes M_2 \longrightarrow Q_1$$
l'application linéaire déduite de ψ. L'application linéaire
$$g : \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_2 \longrightarrow P_1$$
déduite de ψ et ψ' se factorise de la façon suivante :
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_2 \xrightarrow{\tau'} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes M_2 \xrightarrow{f'} P_1,$$
compte tenu des isomorphismes
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1), \quad \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)^* \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}_1).$$
Alors, (ψ, ψ', ϕ) n'est pas dans U si et seulement si une des deux propriétés suivantes est vérifiée :
- L'application linéaire f n'est pas injective.

– L'application linéaire f est injective, et f' n'est pas injective.

Supposons que f n'est pas injective. Soit M_2' le plus petit sous-espace vectoriel de M_2 tel que $\ker(f) \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes M_2'$. Soient

$$d = \dim(\ker(f)), \quad p = \dim(\ker(\tau') \otimes M_2' \ + \ \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \ker(f)), \quad m_2' = \dim(M_2').$$

Alors on a

$$bm_2' \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)) - p \ = \ \mathrm{codim}((\tau' \otimes I_{M_2'})(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \ker(f))).$$

Il en découle que

$$bm_2' \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)) - p \ \leq \ c_2(m_2')(bm_2' - d).$$

Soit

$$F : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes Q_1 \longrightarrow P_1$$

l'application linéaire déduite de ψ', et

$$G : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^* \otimes P_1 \longrightarrow N_1$$

l'application linéaire déduite de ϕ. Posons

$$Q_1' = \mathrm{Im}(f), \quad P_1' = F(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes Q_1').$$

Alors on a $\dim(Q_1') = bm_2' \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)) - p$. Il résulte de la factorisation précédente de g qu'on a

$$\dim(P_1') \leq c_2(m_2')(bm_2' - d).$$

De même, l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes M_2 \longrightarrow N_1$$

déduite de ψ, ψ', ϕ se factorise par $\tau'' \otimes I_{M_2}$, et il en découle que

$$\dim(N_1') \leq c(m_2')(bm_2' - d).$$

Posons $x = \delta \dim(M_2') + \epsilon \dim(Q_1') + \theta \dim(P_1') + \rho \dim(N_1')$. Il faut montrer que $x > 0$, ce qui montrera que (ψ, ψ', ϕ) n'est pas semi-stable. On a

$$x \geq (\mu_2 - a\mu_1 - b\lambda_1)m_2' + (\lambda_1 + \nu_1 c(m_2'))(bm_2' - d) + \mu_1 \dim(P_1').$$

Il découle aisément des conditions 2- et 3- du théorème que $x > 0$.

Si f est injective, mais pas f', on déduit de même de la condition 1- du théorème que (ψ, ψ', ϕ) n'est pas semi-stable. □

4.5. Exemple

Soient $n \geq 2$ un entier et V un espace vectoriel de dimension n+1. On va étudier des complexes sur $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, du type

$$\mathcal{O}(-2) \longrightarrow (\mathcal{O}(-1) \otimes M_1) \oplus \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1),$$

où M_1 est un espace vectoriel tel que $0 < \dim(M_1) \leq n + 1$.

On a

$$c_1(1) = 0, \quad c_2(1) = \frac{2}{n+2}, \quad c(1) = 0.$$

Compte tenu du théorème 4.4, en supposant que $\lambda_1 = 1$, on obtient un quasi-bon quotient projectif dès que μ_1, μ_2 sont positifs, ν_1 négatif, et

$$\mu_2 > (n+1)\mu_1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour ces valeurs de la polarisation, les quotients sont tous les mêmes, On n'obtient donc dans ce cas qu'un seul quasi-bon quotient projectif.

Traitons plus précisément le cas de $\mathbb{P}_2$, avec $m_1 = 3$. On montre aisément que Q_C est irréductible. En cas d'existence de points stables, les quotients seront donc des variétés irréductibles de dimension 6.

Un complexe

$$\mathcal{O}(-2) \longrightarrow (\mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^3) \oplus \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)$$

équivaut à une paire

$$((z_1, z_2, z_3, q_0), (q_1, q_2, q_3, z_0)),$$

où $z_i \in V^*$, $q_i \in S^2V^*$, et

$$q_0 z_0 + q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 = 0.$$

L'ouvert de Q_C où z_1, z_2, z_3 sont linéairement indépendants est non vide. Pour un complexe dans cet ouvert, on peut se ramener, en faisant agir le sous-groupe unipotent maximal, au cas où $q_0 = 0$. Il en découle immédiatement que s'il existe des complexes stables, on doit avoir

$$\mu_2 \ > \ 0.$$

Il n'existe en fait que trois quotients projectifs distincts, qui correspondent aux cas où μ_1 est négatif, nul, ou positif. Dans les deux cas où μ_1 est non nul, la semi-stabilité d'un complexe entraîne sa stabilité.

Le cas où $\mu_1 > 0$ est celui qu'on peut traiter en appliquant directement le théorème 4.4. Dans ce cas un complexe x est stable seulement si le morphisme de gauche est non nul, $z_0 \neq 0$, et si pour tout complexe dans la H-orbite de x, défini par la paire

$$((z_1, z_2, z_3, q_0'), (q_1', q_2', q_3', z_0)),$$

q_1', q_2' et q_3' sont linéairement indépendants. Le quotient existe et est projectif. Il est non vide, car si (z_1, z_2, z_3) est une base de V^*, le complexe défini par

$$((z_1, z_2, z_3), (z_3^2, -z_2 z_3, z_2^2 - z_1 z_3, z_1))$$

est stable.

Le cas où $\mu_1 < 0$ ne peut pas être traité directement (mais on peut le faire en considérant les complexes duaux). Dans ce cas, un complexe défini par

$$((z_1, z_2, z_3, q_0), (q_1, q_2, q_3, z_0))$$

est stable si et seulement si (z_1, z_2, z_3) est une base de V^*. On peut donner une description complète du quotient, qui est isomorphe à la variété X suivante : soient (z_1, z_2, z_3) une base de V^*, E le sous-espace vectoriel de $S^2V^* \otimes \mathbb{C}^3$ constitué des triplets (q_1, q_2, q_3) tels que

$$z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 q_3 = 0,$$

H' le sous-espace vectoriel de $V^* \otimes \mathbb{C}^3$ constitué des triplets (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) tels que

$$\phi_1 z_1 + \phi_2 z_2 + \phi_3 z_3 = 0.$$

On a un morphisme injectif de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$:

$$\Phi : \mathcal{O}(-1) \otimes H' \longrightarrow \mathcal{O} \otimes E$$
$$z_0 \otimes (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \longmapsto (z_0\phi_1, z_0\phi_2, z_0\phi_3)$$

On prend alors

$$X \ = \ \mathbb{P}(\mathrm{coker}(\Phi)).$$

5. Variétés de modules de morphismes

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$ des faisceaux cohérents sur une variété projective X, et M_1, M_2, N_1 des espaces vectoriels de dimension finie. On pose

$$a = \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)), \quad m_1 = \dim(M_1), \quad m_2 = \dim(M_2), \ n_1 = \dim(N_1).$$

On s'intéresse à des morphismes du type

$$(*) \qquad (\mathcal{E}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes M_2) \xrightarrow{(f_1,f_2)} \mathcal{F}_1 \otimes N_1.$$

On fait les hypothèses suivantes :

– Les faisceaux $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$ sont simples, et

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_2) = \{0\}.$$

– Le morphisme canonique

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

est surjectif. On note $\mathcal{H}_1$ son noyau.

– On a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) = \{0\}$, ce qui entraîne un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{E}_1) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^*.$$

On se trouve dans la situation de la proposition 3.1, avec $\mathcal{E} = 0$, $\Gamma = \mathcal{E}_1$, $M = M_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{E}_2 \otimes M_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes N_1$. On a dans ce cas

$$Q_C = W_C = \mathrm{Hom}((\mathcal{E}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes M_2), \mathcal{F}_1 \otimes N_1).$$

Le groupe G opérant sur W_C est

$$G \ = \ \mathrm{Aut}((\mathcal{E}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes M_2)) \times GL(N_1).$$

On peut voit $\mathrm{Aut}((\mathcal{E}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes M_2))$ comme constitué de matrices du type

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ \phi & g_2 \end{pmatrix},$$

avec $g_1 \in GL(M_1)$, $g_2 \in GL(M_2)$ et $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes M_1, M_2)$. Les mutations des morphismes $(*)$ sont décrites au § 5.2. On les appelle des *mutations directes* car elles nous ramènent immédiatement à une action d'un groupe réductif, et permettent de construire les variétés de modules de morphismes. C'est la méthode appliquée dans [5] (les résultats sont rappelés dans le § 5.2).

On peut appliquer la proposition 3.1 d'une autre manière. C'est simple à voir si $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{F}_1$ sont localement libres : les complexes de type $(*)$ sont équivalents à des complexes du type

$$\mathcal{F}_1^* \otimes N_1^* \longrightarrow (\mathcal{E}_2^* \otimes M_2^*) \oplus (\mathcal{E}_1^* \otimes M_1^*),$$

et on applique la proposition 2.1 en prenant $\mathcal{E} = \mathcal{F}_1^* \otimes N_1^*$, $\Gamma = \mathcal{E}_2$, $M = M_2^*$, $\mathcal{G} = \mathcal{E}_1^* \otimes M_1^*$, $\mathcal{F} = 0$. Les mutations obtenues sont des morphismes de type (*) (avec d'autres faisceaux et d'autres espaces vectoriels). On peut ensuite appliquer la mutation directe à ces morphismes, et on obtient de nouveaux quotients (cf. § 5.3).

5.1. Notions de (semi-)stabilité et variétés de modules de morphismes

Le groupe G possède deux sous-groupes importants : le premier est le sous-groupe normal unipotent maximal évident H, isomorphe au groupe additif $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes M_1, M_2))$. Le second est le sous-groupe réductif

$$G_{red} \;=\; GL(M_1) \times GL(M_2) \times GL(N_1),$$

dont l'inclusion dans G induit un isomorphisme $G_{red} \simeq G/H$.

L'action de G_{red} est un cas particulier des actions étudiées dans [8]. Soient λ_1, λ_2, μ_1 des nombres rationnels non nuls tels que

$$\lambda_1 \dim(M_1) + \lambda_2 \dim(M_2) - \mu_1 \dim(N_1) = 0.$$

Définition 10. *Un point (f_1, f_2) de W_C est dit G_{red}-*semi-stable *(resp. G_{red}-*stable*) relativement à $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1)$ si pour tous sous-espaces vectoriels $M_1' \subset M_1$, $M_2' \subset M_2$, $N_1' \subset N_1$, avec $(M_1', M_2', N_1') \neq (M_1, M_2, N_1)$ ou $(\{0\}, \{0\}, \{0\})$, tels que*

$$f_1(\mathcal{E}_1 \otimes M_1') \subset \mathcal{F}_1 \otimes N_1', \quad f_2(\mathcal{E}_2 \otimes M_2') \subset \mathcal{F}_1 \otimes N_1',$$

on a

$$\lambda_1 \dim(L_1') + \lambda_2 \dim(M_2') - \mu_1 \dim(N_1') \leq 0 \quad (\text{resp.} \quad < \;).$$

On dit que $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1)$ est une *polarisation* de l'action de G sur W_C. On note $W_{C,red}^{ss}$ (resp. $W_{C,red}^{s}$) l'ouvert de W_C constitué des points G_{red}-semi-stables (resp. G_{red}-stables). D'après [8], il existe un bon quotient $W_{red,C}^{ss}//G$ et un quotient géométrique lisse $W_{C,red}^{s}/G$. Mais ce ne sont pas les quotients que nous recherchons.

Définition 11. *Un point x de W_C est dit G-*semi-stable *(resp. G-*stable*) relativement à $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1)$ si tous les points de l'orbite $H.x$ sont G_{red}-semi-stables (resp. G_{red}-stables).*

On note W_C^{ss} (resp. W_C^{s}) l'ouvert de W_C constitué des points G-semi-stables (resp. G-stables). On cherche à prouver l'existence de bons quotients $W_C^{ss}//G$. De tels quotients seront appelés des *variétés de modules de complexes.*

On montre aisément que si W^s est non vide on doit avoir $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mu_1 > 0$. On supposera par la suite que ces inégalités sont vérifiées. On peut alors *normaliser* la polarisation, c'est-à-dire supposer que

$$\lambda_1 \dim(M_1) + \lambda_2 \dim(M_2) = 1, \quad \mu_1 = \frac{1}{\dim(M_1)}.$$

5.2. Construction des variétés de modules par les mutations directes

La mutation de $(*)$ est un complexe

$$(**) \qquad \mathcal{H}_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{E}_1 \otimes P_1 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{F}_1 \otimes N_1,$$

avec

$$P_1 \ = \ (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes M_2) \oplus M_1.$$

Le morphisme ϕ_1 est défini par l'inclusion

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{E}_1)^* \otimes M_2 = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes M_2 \ \subset \ P_1.$$

Le morphisme ϕ_2 provient d'une application linéaire

$$F : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes P_1 \longrightarrow N_1,$$

qui est égale à celle déduite de f_1 sur $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_1$. Sur l'autre facteur, F est la composée

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes M_2 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_2 \longrightarrow N_1,$$

la première application provenant de la composition

$$\sigma : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1),$$

et la seconde de f_2.

Le groupe opérant sur la variété Q'_C des complexes $(**)$ est

$$G' \ = \ GL(M_2) \times GL(P_1) \times GL(N_1),$$

qui est réductif. Une notion de (semi-)stabilité pour les points de Q'_C est définie par une suite (α, β, γ) de nombres rationnels non nuls telle que

$$\alpha \dim(M_2) + \beta \dim(P_1) + \gamma \dim(N_1) = 0.$$

Un complexe (ϕ'_1, ϕ'_2) de type $(**)$ est semi-stable (resp.stable) relativement à (α, β, γ) si et seulement si pour tous sous-espaces vectoriels

$$M'_2 \subset M_2, \quad P'_1 \subset P_1, \quad N'_1 \subset N_1,$$

avec $(M'_2, P'_1, N'_1) \neq (M_2, P_1, N_1)$ ou $(\{0\}, \{0\}, \{0\})$, tels que

$$\phi'_1(\mathcal{H}_1 \otimes M'_2) \subset \mathcal{E}_1 \otimes P'_1, \quad \phi'_2(\mathcal{E}_1 \otimes P'_1) \subset \mathcal{F}_1 \otimes N'_1,$$

on a

$$\alpha \dim(M'_2) + \beta \dim(P'_1) + \gamma \dim(N'_1) \leq 0 \qquad (\text{resp. } < \ ).$$

S'il existe des complexes stables on doit avoir $\alpha > 0$, $\gamma > 0$.

Soient $M'_1 \subset M_1$, $M'_2 \subset M_2$, $N'_1 \subset N_1$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$f_1(\mathcal{E}_1 \otimes M'_1) \subset \mathcal{F}_1 \otimes N'_1, \quad f_2(\mathcal{E}_2 \otimes M'_2) \subset \mathcal{F}_1 \otimes N'_1.$$

On pose

$$P_1' \;=\; (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\otimes M_2')\oplus M_1'.$$

On a alors

$$\phi_1(\mathcal{H}_1\otimes M_2')\subset \mathcal{E}_1\otimes P_1',\quad \phi_2(\mathcal{E}_1\otimes P_1')\subset \mathcal{F}_1\otimes N_1'.$$

On suppose que

$$\alpha=\lambda_2-a\lambda_1,\ \beta=\lambda_1,\ \gamma=-\mu_1.$$

On a alors

$$\alpha\dim(M_2')+\beta\dim(P_1')+\gamma\dim(N_1') \;=\; \lambda_1\dim(M_1')+\lambda_2\dim(M_2')-\mu_1\dim(N_1').$$

On en déduit immédiatement la

Proposition 5.1. *Si le complexe* $(**)$ *est semi-stable (resp. stable) relativement à* (α,β,γ)*, le complexe (*) est G-semi-stable (resp. G-stable) relativement à* $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1)$*.*

Pour continuer on utilise une constante analogue à celles qui ont été définies au § 4.3.1. On considère l'application canonique

$$\tau:\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1)^*\otimes\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2,\mathcal{F}_1)^*.$$

Pour tout entier positif k, soit

$$\tau_k=\tau\otimes I_{\mathbb{C}^k}:\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1)^*\otimes(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\otimes\mathbb{C}^k)\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2,\mathcal{F}_1)^*\otimes\mathbb{C}^k.$$

Soit G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres K de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\otimes\mathbb{C}^k$ tels que pour tout sous-espace vectoriel propre $V\subset\mathbb{C}^k$, K ne soit pas contenu dans

$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\otimes V$. On pose

$$c_0(k)=\sup_{K\in G_k}\Big(\frac{\mathrm{codim}(\tau_k(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1)^*\otimes K))}{\mathrm{codim}(K)}\Big).$$

On démontre dans [5] le

Théorème 5.2. *Si*

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}>a,\quad \lambda_2>\frac{a}{n_1}c_0(m_2),$$

il existe un bon quotient projectif $W_C^{ss}//G$*, et un quotient géométrique* W_C^s/G*, qui est un ouvert de* $W_C^{ss}//G$*.*

On montre en fait que sous les hypothèses du théorème, la réciproque de la proposition 5.1 est vraie. On peut conclure en utilisant le théorème 3.8.

5.3. Mutations indirectes

5.3.1. *Définition et premières propriétés*

On utilise maintenant la deuxième manière d'effectuer des mutations constructives. Comme indiqué au début du § 5, c'est plus facile à voir si $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{F}_1$ sont localement libres. Mais les constructions étant purement formelles, il n'est pas nécessaire de faire cette supposition. On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

– Le morphisme canonique
$$\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^*$$
est injectif. Soit $\mathcal{G}_1$ son conoyau.

— La composition
$$\sigma : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$$
est surjective.

– On a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1) = \{0\}$.

Cette dernière hypothèse n'est pas strictement indispensable, on le verra plus loin. On a, puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) = \{0\}$, un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{G}_1) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^*$.

Une mutation d'un morphisme $(*)$ est un morphisme
$$(***) \qquad \mathcal{E}_2 \otimes Q_1 \xrightarrow{(\psi_1, \psi_2)} (\mathcal{G}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_1 \otimes N_1),$$
avec
$$Q_1 \;=\; (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes M_1) \oplus M_2.$$
Le morphisme ψ_1 est nul sur $\mathcal{E}_2 \otimes M_2$, et sur l'autre facteur c'est
$$ev \otimes I_{M_1} : \mathcal{E}_2 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes M_1 = \mathcal{E}_2 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{G}_1) \otimes M_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \otimes M_1,$$
ev désignant le morphisme d'évaluation. Le morphisme ψ_2 est égal à f_2 sur

$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_2$, et sur l'autre facteur c'est un relèvement de f_1, qui existe à cause de la seconde hypothèse supplémentaire. Remarquons que ψ_2 est défini à un élément près de $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1 \otimes M_1, \mathcal{F}_1 \otimes N_1)$.

Soit W'_C l'espace vectoriel des morphismes de type $(***)$, G' le groupe opérant sur W'_C :
$$G' \;=\; GL(Q_1) \times \mathrm{Aut}((\mathcal{G}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{F}_1 \otimes N_1)).$$
Si on omet la dernière hypothèse supplémentaire, il faut remplacer G' par un groupe plus petit. Soient H' le sous-groupe normal unipotent maximal de G', isomorphe au groupe additif $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1 \otimes M_1, \mathcal{F}_1 \otimes N_1)$, et G'_{red} le sous-groupe réductif :
$$G'_{red} \;=\; GL(Q_1) \times GL(M_1) \times GL(N_1).$$

Soient ν_1, ν_2 des nombres rationnels positifs tels que
$$\nu_1 \dim(N_1) + \nu_2 \dim(M_1) = 1.$$
Alors $(1/\dim(Q_1), \nu_2, \nu_1)$ définit une notion de semi-stabilité pour l'action de G' sur W'_C. Rappelons qu'un point (ψ'_1, ψ'_2) de W'_C est G'_{red}-*semi-stable* (resp. G'_{red}-*stable*) relativement à $(1/\dim(Q_1), \nu_2, \nu_1)$ si et seulement si pour tous sous-espaces vectoriels
$$Q'_1 \subset Q_1, \quad M'_1 \subset M_1, \quad N'_1 \subset N_1,$$

avec $(Q_1', M_1', N_1') \neq (Q_1, M_1, N_1)$ ou $(\{0\}, \{0\}, \{0\})$, tels que

$$\psi_1'(\mathcal{E}_2 \otimes Q_1') \subset \mathcal{G}_1 \otimes M_1', \quad \psi_2'(\mathcal{E}_2 \otimes Q_1') \subset \mathcal{F}_1 \otimes N_1',$$

on a

$$\frac{\dim(Q_1')}{\dim(Q_1)} - \nu_2 \dim(M_1') - \nu_1 \dim(N_1') \leq 0, \qquad (\text{resp.} \quad < \ ).$$

On dit que (ψ_1', ψ_2') est *G'-semi-stable* (resp. *G'-stable*) si tous les points de sa H'-orbite sont G_{red}'-semi-stables (resp. G_{red}'-stables).

Soient $M_1' \subset M_1$, $M_2' \subset M_2$, $N_1' \subset N_1$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$f_1(\mathcal{E}_1 \otimes M_1') \subset \mathcal{F}_1 \otimes N_1', \quad f_2(\mathcal{E}_2 \otimes M_2') \subset \mathcal{F}_1 \otimes N_1'.$$

On pose

$$Q_1' \ = \ (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes M_1') \oplus M_2'.$$

Il est clair qu'on peut choisir la mutation $(***)$ de telle sorte que

$$\psi_1(\mathcal{E}_2 \otimes Q_1') \subset \mathcal{G}_1 \otimes M_1', \quad \psi_2(\mathcal{E}_2 \otimes Q_1') \subset \mathcal{F}_1 \otimes N_1'.$$

Posons

$$\nu_1 = \frac{1}{\dim(Q_1) n_1 \lambda_2}, \quad \nu_2 = \frac{a\lambda_2 - \lambda_1}{\dim(Q_1)\lambda_2},$$

de telle sorte qu'on a

$$\frac{\dim(Q_1')}{\dim(Q_1)} - \nu_2 \dim(M_1') - \nu_1 \dim(N_1') = \frac{\lambda_1 \dim(M_1') + \lambda_2 \dim(M_2') - \dim(N_1')/n_1}{\lambda_2 \dim(Q_1)}.$$

Alors on a d'après ce qui précède la

Proposition 5.3. *Si le morphisme $(***)$ est G'-semi-stable (resp. G'-stable) relativement à $(1/\dim(Q_1), \nu_2, \nu_1)$, alors le morphisme $(*)$ est G-semi-stable (resp. G-stable) relativement à $(\lambda_1, \lambda_2, 1/\dim(N_1))$.*

S'il existe des morphismes G'-stables dans W_C', on a $\nu_1 > 0$, c'est-à-dire $a\lambda_2 - \lambda_1 > 0$. On supposera que c'est le cas dans toute la suite.

5.3.2. *Cas d'équivalence des (semi-)stabilités*

Soit

$$\sigma : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^*$$

une application linéaire dont la composition avec la transposée de la composition

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$$

est l'identité de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^*$. On définit ici des constantes analogues à celles du § 4.3.1. Pour tout entier positif k, soit

$$\sigma_k = \sigma \otimes I_{\mathbb{C}^k} : \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^* \otimes (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes \mathbb{C}^k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes \mathbb{C}^k.$$

Soit G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres K de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes \mathbb{C}^k$ tels que pour tout sous-espace vectoriel propre $V \subset \mathbb{C}^k$, K ne soit pas contenu dans

$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)^*\otimes V$. On pose

$$c_0'(k)=\sup_{K\in G_k}(\frac{\mathrm{codim}(\sigma_k(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)^*\otimes K))}{\mathrm{codim}(K)}).$$

Il est clair qu'on a $c_0'(k+1)\geq c_0'(k)$.

Remarque : les constantes précédentes dépendent aussi a priori du choix de σ.

Proposition 5.4. *On suppose que*

$$\lambda_2\geq\frac{c_0'(m_1)}{n_1}.$$

Si le morphisme $(*)$ *est* G*-semi-stable relativement à* $(\lambda_1,\lambda_2,1/\dim(N_1))$*, alors le morphisme* $(***)$ *est* G'*-semi-stable relativement à* $(1/\dim(Q_1),\nu_2,\nu_1)$*.*

Démonstration. Soient $Q_1'\subset Q_1$, $M_1'\subset M_1$, $N_1'\subset N_1$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$\psi_1(\mathcal{E}_2\otimes Q_1')\subset\mathcal{G}_1\otimes M_1',\quad \psi_2(\mathcal{E}_2\otimes Q_1')\subset\mathcal{F}_1\otimes N_1'$$

et

$$X=\frac{\dim(Q_1')}{\dim(Q_1)}-\nu_2\dim(M_1')-\nu_1\dim(N_1')>0.$$

En faisant agir le sous-groupe unipotent H de G, on peut supposer que Q_1' est de la forme $Q_1'=K\oplus M_2'$, avec $K\subset\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)^*\otimes M_1$ et $M_2'\subset M_2$. On peut supposer que M_1' est le plus petit sous-espace vectoriel de M_1 tel que $K\subset\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)^*\otimes M_1'$. Soit N_1'' l'image de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1)^*\otimes M_1'$ par l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_1)^*\otimes M_1\longrightarrow N_1$$

déduite de f_1. Alors on a

$$\dim(N_1'')-\dim(N_1')\leq c_0'(m_1)(a\dim(M_1')-\dim(K)).$$

On a

$$f_1(\mathcal{E}_1\otimes M_1')\subset\mathcal{F}_1\otimes N_1'',\quad f_2(\mathcal{E}_2\otimes M_2')\subset\mathcal{F}_1\otimes N_1''.$$

On va montrer que

$$X'=\lambda_1\dim(M_1')+\lambda_2\dim(M_2')-\frac{\dim(N_1'')}{n_1}>0,$$

ce qui prouvera que $(*)$ n'est pas semi-stable. On a

$$\frac{X'}{\dim(Q_1)\lambda_2}\ =\ X+\frac{a\dim(M_1')-\dim(K)}{\dim(Q_1)}-\nu_1(\dim(N_1'')-\dim(N_1')),$$

donc

$$\frac{X'}{\dim(Q_1)\lambda_2}\ >\ (\frac{1}{\dim(Q_1)}-\nu_1c_0'(m_1))(a\dim(M_1')-\dim(K)),$$

c'est-à-dire

$$X'\ >\ (\lambda_2-\frac{c_0'(m_1)}{n_1})(a\dim(M_1')-\dim(K))\geq 0.$$

□

5.3.3. *Egalité des quotients et projectivité*

On se place dans l'hypothèse du théorème 5.5. On peut se poser la question de l'égalité des quotients ${W'_C}^{ss}//G'$ et $W_C^{ss}//G$. Soit W'_0 l'ouvert de W'_C constitué des morphismes (ψ'_1, ψ'_2) tels que ψ'_1 induise une surjection

$$F : Q_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^* \otimes M_1.$$

Cet ouvert est donc constitué des morphismes dont un élément de la G'-orbite peut être obtenu comme mutation d'un élément de W_C. Si $(\psi'_1, \psi'_2) \in W'_C \backslash W'_0$, il existe un sous-espace vectoriel $Q'_1 \subset Q_1$ de dimension $m_2 + 1$ contenu dans $\ker(F)$. On a

$$\psi'_1(\mathcal{E}_2 \otimes Q'_1) = 0.$$

Il en découle que si (ψ'_1, ψ'_2) est G'-semi-stable relativement à $(1/\dim(Q_1,), \nu_2, \nu_1)$, on doit avoir

$$\frac{m_2 + 1}{\dim(Q_1)} - \nu_1 n_1 \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_2 \ \leq \frac{1}{m_2 + 1}.$$

On en déduit le

Théorème 5.5. *On suppose que*

$$\lambda_2 \geq \frac{c'_0(m_1)}{n_1} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 > \frac{1}{m_2 + 1}.$$

S'il existe un quasi-bon quotient ${W'_C}^{ss}//G'$ *pour la polarisation* $(1/\dim(Q_1,), \nu_2, \nu_1)$*, il existe un quasi-bon quotient* $W_C^{ss}//G$ *pour la polarisation* $(\lambda_1, \lambda_2, 1/n_1)$*, et il est isomorphe à* ${W'_C}^{ss}//G'$*.*

5.3.4. *Cas d'existence d'un quasi-bon quotient projectif*

On fait ici la synthèse du théorème 5.2, du théorème 7.6 de [2] et des résultats précédents.

Pour pouvoir employer le théorème 7.6 de [2], il faut faire les hypothèses supplémentaires suivantes :

– Les morphismes

$$\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^*, \quad \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^*$$

sont injectifs. On note $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ leurs conoyaux respectifs.

– On a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_2) = \{0\}$.

Soit

$$(\mathcal{E}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes M_2) \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes N_1$$

un morphisme tel que l'application linéaire associée

$$\phi : (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_1) \oplus (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^* \otimes M_2) \longrightarrow N_1$$

soit surjective. On définit dans [2] un autre type de mutation associant au morphisme précédent un morphisme

$$\mathcal{F}_1 \otimes \ker(\phi) \longrightarrow (\mathcal{H}_1 \otimes M_1) \oplus (\mathcal{H}_2 \otimes M_2).$$

En appliquant le théorème 5.2 à ces nouveaux morphismes, on obtient de nouveaux cas d'existence de quasi-bons quotients.

On aura besoin de deux types de constantes supplémentaires. Soit k un entier positif. On note $c_1(k)$ la constante analogue à $c_0(k)$, obtenue en considérant l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1) \otimes (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes \mathbb{C}^k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1) \otimes \mathbb{C}^k$$

au lieu de τ_k (cf. § 5.2). On note $c_2(k)$ la constante analogue à $c_0(k)$, obtenue en considérant l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)^* \otimes (\ker(\sigma) \otimes \mathbb{C}^k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \otimes \mathbb{C}^k.$$

On pose

$$h_{11} = \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)), \quad h_{12} = \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1)), \quad a' = ah_{12} - h_{11}.$$

Toutes méthodes confondues, on obtient le

Théorème 5.6. *Il existe un quasi-bon quotient projectif* $W_C^{ss}//G$ *dans les cas suivants :*

1 - On a

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > a, \qquad \lambda_2 > \frac{a}{n_1} c_0(m_2).$$

2 - On a

$$\lambda_1 < \frac{h_{11}}{n_1}, \qquad \lambda_2 < \frac{h_{12}}{n_1}, \qquad a\lambda_2 - \lambda_1 > \frac{a'}{n_1}, \quad h_{11} - \lambda_1 n_1 \geq c_1(m_1)a.$$

3 - On a

$$\lambda_2 \geq \frac{c_0'(m_1)}{n_1}, \qquad \lambda_2 > \frac{1}{m_2+1}, \qquad a\lambda_2 - \lambda_1 \ > \ a'.\mathrm{Max}(c_2(m_1)\lambda_2, \frac{1}{n_1}).$$

On peut montrer que dans la situation du théorème 5.6, l'ouvert du quotient correspondant aux points stables est lisse.

5.4. Exemples

Si $(\lambda_1, \lambda_2, 1/n_1)$ est une polarisation de l'action de G sur W_C, on notera

$$\rho \ = \ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Notons que la polarisation est entièrement déterminée par ρ, ou par un des nombres λ_1, λ_2.

Dans les exemples qui vont suivre, on utilise implicitement des calculs de constantes $c_0(k)$ ou $c_0'(k)$ qui proviennent de [5],

5.4.1. *Exemple 1*

Soit n un entier, avec $n \geq 2$. On considère des morphismes

$$(\mathcal{O}(-2) \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n+1}$$

sur $\mathbb{P}_n$. Cet exemple a déjà été traité dans [5], pour $n = 2$. L'application directe du théorème 5.2 montre qu'il existe un bon quotient projectif $W_C^{ss}//G$ si

$$\rho \ > \ n+1.$$

En utilisant des mutations indirectes on se ramène à des morphismes

$$\mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^{2n+3} \longrightarrow (Q(-1) \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n+1}).$$

L'application des théorèmes 5.2 et 5.5 permet de montrer qu'il existe un quasi-bon quotient projectif $W_C^{ss}//G$ dès que

$$\rho \ > \ 2 + \frac{2}{n}.$$

Si $n \geq 4$, on obtient ainsi des variétés de modules de morphismes supplémentaires.

5.4.2. *Exemple 2*

On considère les morphismes

$$(f_1, f_2) : \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n+2}$$

sur $\mathbb{P}_n$. C'est un exemple déjà donné dans [2]. On sait construire des bons quotients (en utilisant le théorème 5.2)) dès que

$$\rho > n+1.$$

Mais dans ce cas le quotient est vide. En effet, il existe toujours un sous-espace vectoriel $H \subset \mathbb{C}^{n+2}$ de dimension $n+1$ tel que $\mathrm{Im}(f_2) \subset \mathcal{O} \otimes H$. On doit donc avoir, si (f_1, f_2) est G-semi-stable relativement à $(\lambda_1, \lambda_2, 1/(n+2))$,

$$\lambda_2 - \frac{n+1}{n+2} \leq 0,$$

c'est-à-dire $\rho \leq n+1$. L'application des théorèmes 5.5 et 5.2 permet de construire un quasi-bon quotient projectif $W_C^{ss}//G$ dès que

$$\rho \ > 1.$$

On améliore légèrement le résultat de [2] dans le cas où n est impair. Les valeurs *singulières* de ρ sont par définition celles pour lesquelles la G-semi-stabilité n'implique pas la G-stabilité. Ces valeurs sont exactement les nombres

$$\rho_k = \frac{k}{n+2-k}$$

pour $1 \leq k \leq n+1$. Dans ce cas un morphisme (ϕ_1, ϕ_2) G-semi-stable non G-stable est construit de la façon suivante : on considère un sous-espace vectoriel $H \subset \mathbb{C}^{n+2}$ de dimension k, et on prend pour ϕ_2 un morphisme tel que $\mathrm{Im}(\phi_2) \subset \mathcal{O} \otimes H$ et que H soit le plus petit sous-espace vectoriel ayant cette propriété. On prend pour ϕ_1 un morphisme tel que l'application linéaire induite

$$H^0(\mathcal{O}(2))^* \longrightarrow \mathbb{C}^{n+2}$$

soit surjective. Toutes le polarisations telles que ρ soit situé entre ρ_k et ρ_{k+1} donnent la même notion de (semi-)stabilité.

Notons M_k le quotient obtenu pour $\rho = \rho_k$, et M_k^0 celui obtenu pour $\rho_{k-1} < \rho < \rho_k$. On sait donc construire M_k et M_k^0 pour $[\frac{n}{2}] + 2 \leq k \leq n+1$. Les quotients M_k^0 construits dans [2], c'est-à-dire pour $[\frac{n+3}{2}] + 1 \leq k \leq n+1$, sont des quotients géométriques.

5.4.3. *Exemple 3*

C'est une généralisation de l'exemple précédent. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère sur $\mathbb{P}_n$ les morphismes

$$(f_1, f_2) : \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes N_1.$$

5.4.3.1 *Conditions d'existence de points stables*

Pour qu'il existe des points stables (pour au moins une polarisation), on doit avoir

$$n_1 = \dim(N_1) \ \leq \ \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n.$$

Si $n_1 \geq n+1$, il existe toujours un sous-espace vectoriel N_1' de N_1 de dimension $n+1$ tel que l'image de f_2 soit contenue dans $\mathcal{O} \otimes N_1'$. Il en découle que s'il existe des points stables relativement à la polarisation définie par λ_2, on doit avoir

$$\lambda_2 \ < \ \frac{n+1}{n_1}.$$

Si c'est le cas on montre aisément qu'il existe toujours des morphismes stables.

Les valeurs de λ_2 pour lesquelles il existe des morphismes semi-stables non stables, ainsi que des morphismes stables, sont les

$$\alpha_k = \frac{k}{n_1}, \quad 1 \leq k \leq \ \mathrm{Inf}(n, n_1 - 1).$$

Posons $m = 1 + \mathrm{Inf}(n, n_1 - 1)$ et

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_m = \ \mathrm{Inf}(1, \frac{n+1}{n_1}).$$

Si $1 \leq k \leq \ \mathrm{Inf}(n, n_1 - 1)$, et $\alpha_{k-1} < \lambda_2 < \alpha_k$, le morphisme (f_1, f_2) est stable si et seulement si

- 1 - Si l'image de f_2 est contenue dans $\mathcal{O} \otimes N_1' \subset \mathcal{O} \otimes N_1$, on a $\dim(N_1') \geq k$.
- Pour tout $(f_1', f_2') \in H.(f_1, f_2)$, si l'image de f_1' est contenue dans $\mathcal{O} \otimes N_1' \subset \mathcal{O} \otimes N_1$, on a $\dim(N_1') \geq n_1 - k + 1$.

5.4.3.2 *Les constantes*

Pour appliquer le théorème 5.6 on a besoin des constantes $c_0(1)$, $c_0'(1)$, $c_1(1)$ et $c_2(1)$. On calcule aisément que

$$c_0(1) = 0, \quad c_0'(1) = c_1(1) = \frac{n+1}{2}, \quad c_2(1) = \frac{2n}{n^2 + n - 2}.$$

5.4.3.3 *Application du théorème 5.6, 1-*

On obtient un quotient si

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ > \ n+1,$$

c'est-à-dire si

$$\lambda_2 \ > \ \frac{n+1}{n+2}.$$

On obtient la seule variété de modules M_{n_1} si $n_1 \leq n+1$, et aucune si $n_1 > n+1$.

5.4.3.4 *Application du théorème 5.6, 2-*

On doit avoir

$$\lambda_2 \ > \ \frac{1}{n+2} + \frac{n(n+1)}{2n_1(n+2)} \qquad \text{si } n_1 \leq n+1,$$

$$\lambda_2 \ > \ 1 - \frac{n+1}{2n_1} \qquad \text{si } n_1 > n+1.$$

Dans le premier cas, on obtient la construction de M_k si

$$k \ > \frac{n_1}{n+2} + \frac{n(n+1)}{2(n+2)}.$$

Ceci donne des variétés de modules supplémentaires si

$$n_1 \ \geq \ [\frac{n}{2}] + 2.$$

Dans le second cas, puisque $\lambda_2 < \frac{n+1}{n_1}$, on doit avoir

$$n_1 < \frac{3}{2}(n+1).$$

On obtient alors les variétés de modules M_k pour

$$n_1 - \frac{n+1}{2} \ < \ k \ \leq \ n+1.$$

5.4.3.5 *Application du théorème 5.6, 3-*

On obtient les mêmes variétés de modules que précédemment si $n_1 \leq n+1$.

Si $n_1 > n+1$, on sait construire le quotient si

$$\lambda_2 \ > \ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n^2-4}.$$

On sait dans ce cas construire M_k pour

$$n_1(\frac{1}{2} + \frac{n}{2n^2-4}) \ < \ k \ \leq n+1.$$

On obtient donc d'autres variétés de modules de morphismes si $n+3 \leq n_1 < 2n$ et si n est assez grand.

5.4.3.6 *Polarisations pathologiques. Cas où* $\lambda_2 < 1/2$

On suppose que n_1 est pair : $n_1 = 2p$, et que $n_1 \leq 2n+2$. Soit $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ une base de $H^0(\mathcal{O}(1))$. On considère le morphisme

$$(f_1, f_2) : \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{2p}$$

où f_2, f_1 sont définis respectivement par les matrices

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ . \\ . \\ . \\ z_p \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_2^2 \\ . \\ . \\ . \\ z_{p+1}^2 \\ z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_1 z_p \end{pmatrix}.$$

Alors, si $\lambda_2 < 1/2$, il est aisé de voir que (f_1, f_2) est stable. Cependant son stabilisateur dans G n'est pas réduit à $\mathbb{C}^*$. Il ne peut donc pas y avoir de quotient géométrique de W_C^s par G dans ce cas.

5.4.3.7 *Polarisations pathologiques. Cas où* $\lambda_2 = 1/2$

On suppose que n est pair et $n_1 = n+2$. Soient K_1, K_2 des sous-espaces vectoriels de $H^0(\mathcal{O}(1))$ de dimension $\frac{n+2}{2}$, et D une droite de $H^0(\mathcal{O}(1))$. Soient

$$(z_1, \ldots, z_{\frac{n+2}{2}}), \quad (z'_1, \ldots, z'_{\frac{n+2}{2}}), \quad z$$

des bases de K_1, K_2 et D respectivement. Alors l'élément de W_C défini par les matrices

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ . \\ . \\ . \\ z_{\frac{n+2}{2}} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ zz'_1 \\ . \\ . \\ . \\ zz'_{\frac{n+2}{2}} \end{pmatrix}$$

est semi-stable et sa G-orbite est fermée et ne dépend que de K_1, K_2 et D. On la note $\phi(K_1, K_2, D)$. Remarquons que si $(K'_1, K'_2, D') \neq (K_1, K_2, D)$, on a

$$\phi(K'_1, K'_2, D') \neq \phi(K_1, K_2, D).$$

Une mutation de $\phi(K_1, K_2, D)$ dans W'_C est un morphisme

$$\psi : \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^{n+2} \longrightarrow Q(-1) \oplus (\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n+2}).$$

L'adhérence de sa G'-orbite contient le morphisme somme directe des morphismes

$$\psi_1 : \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n+2}, \quad \psi_2 : \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n+2}, \ \psi_3 : \mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow Q(-1)$$

définis respectivement par K_1, K_2, D. La G'-orbite de ce morphisme est notée $\psi(K_1, K_2, D)$. Notons qu'elle est contenue dans le complémentaire dans ${W'}_C^{ss}$ de l'ouvert contitué des orbites des morphismes mutations de morphismes de W_C^{ss}. On a

$$\psi(K_1, K_2, D) = \psi(K_2, K_1, D).$$

Ceci prouve qu'on ne peut pas obtenir par des mutations indirectes un quotient séparant les orbites de $\phi(K_1, K_2, D)$ et $\phi(K_2, K_1, D)$.

Références

[1] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 25-48.

[2] Drézet, J.-M. *Espaces abstraits de morphismes et mutations.* Preprint Paris VII (1996).

[3] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Ec. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[4] Drézet, J.-M., Narasimhan, M.S. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.* Invent. Math. 97 (1989), 53-94.

[5] Drézet, J.-M., Trautmann, G. *Moduli spaces of decomposable morphisms of sheaves and quotients by non-reductive groups.* Preprint (1998), e-print service at http ://xxx.lanl.gov/list/math/9805.

[6] Fauntleroy, A. *Geometric invariant theory for general algebraic groups.* Comp. Math. 55 (1985), 63-87.

[7] Gorodentsev, A.L., Rudakov, A.N. *Exceptional vector bundles on projective spaces* . Duke Math. Journ. 54 (1987), 115-130.

[8] King, A., *Moduli of representations of finite dimensional algebras* . Quart. Journ. of Math. Oxford 45 (1994),515-530.

[9] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric invariant theory.* Ergeb. Math. Grenzgeb. Bd. 34. Berlin Heidelberg New-York : Springer (1982)

[10] Newstead, P.E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes. Math. vol. 51. Berlin Heidelberg New-York : Springer (1978)

Notes : Ce texte reproduit l'article

Quotients algébriques par des groupes non réductifs et variétés de modules de complexes. International Journal of Mathematics Vol. 9 No 7 (1998) , 769-819.

avec quelques améliorations dans la rédaction et la bibliographie. Les définitions de quotients dans 2.1 ont aussi été modifiées.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr

URL: http://www.math.jussieu.fr/∼drezet