



HAL
open science

Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux

Aurélien Djament, Christine Vespa

► **To cite this version:**

Aurélien Djament, Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. 2012. hal-00741841v1

HAL Id: hal-00741841

<https://hal.science/hal-00741841v1>

Preprint submitted on 15 Oct 2012 (v1), last revised 9 Sep 2013 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux

Aurélien Djament^{*} et Christine Vespa[†]

15 octobre 2012

Introduction

Tandis que l'étude de la structure des groupes d'automorphismes $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ des groupes libres commença dès les années 1920 (cf. par exemple l'article [20], dans lequel Nielsen en donne une présentation par générateurs et relations), la compréhension de leur homologie s'avéra nettement plus ardue : aucun résultat significatif ne semble avoir été obtenu avant les années 1980. Dans les années 1990, la stabilité homologique a été démontrée pour ces groupes : dans [14] Hatcher établit que pour tout entier i , le morphisme canonique $H_i(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*(n+1)}); \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour n assez grand. Dans [15] Hatcher et Vogtmann améliorent la borne de stabilité obtenue dans [14], montrant qu'il suffit que l'inégalité $n \geq 2i + 3$ soit vérifiée pour avoir un isomorphisme. Quant au calcul de $H_i(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); \mathbb{Z})$, hormis pour i ou n très petit, il demeura très mystérieux jusqu'à ce que Galatius démontre dans [12] le résultat remarquable suivant : l'inclusion évidente du groupe symétrique \mathfrak{S}_n dans $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ induit stablement un isomorphisme en homologie à coefficients entiers — stablement signifiant : lorsqu'on passe à la colimite sur n (ou pour $n \geq 2i + 3$, i désignant le degré homologique). Rappelons que le calcul de l'homologie des groupes symétriques est bien plus ancien ; il est dû à Nakaoka (cf. [19]).

Le théorème de Galatius ne traite que de l'homologie à coefficients *constants* des groupes $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$. Il est également très naturel de s'intéresser à l'homologie (ou à la cohomologie) de ces groupes à coefficients dans des représentations remarquables, comme l'abélianisation $A = \mathbb{Z}^n$ du groupe libre \mathbb{Z}^{*n} ou des représentations obtenues en appliquant à celle-ci un foncteur ou un bifoncteur sur les groupes abéliens libres.

Le résultat principal du présent article est le suivant :

Théorème 1. *Soit F un foncteur polynomial réduit (i.e. nul sur le groupe trivial) de la catégorie \mathbf{gr} des groupes libres de rang fini vers la catégorie \mathbf{Ab} des groupes abéliens. Alors*

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_* (\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) = 0.$$

^{*}CNRS, laboratoire de mathématiques Jean Leray, Nantes ; aurelien.djament@univ-nantes.fr

[†]Institut de Recherche Mathématique Avancée, université de Strasbourg, vespa@math.unistra.fr

Lorsque F est le foncteur d'abélianisation, ce résultat avait déjà été démontré, par des méthodes totalement différentes, par Hatcher et Wahl dans [16] (où ils obtiennent également un résultat de stabilité). Par une approche encore indépendante, Satoh a également étudié de tels groupes d'homologie, rendant certains d'entre eux accessibles au calcul (y compris dans le cas instable) en degré homologique 1 ou 2 — voir [24] et [25].

Alors que le théorème de Galatius affirme que, stablement, l'homologie à coefficients entiers des groupes $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ est la même que celle des groupes symétriques, le théorème 1 nous apprend que ceci n'est plus le cas pour l'homologie à coefficients tordus. En effet, dans [3] Betley montre que l'homologie stable des groupes symétriques à coefficients dans un foncteur polynomial réduit est loin d'être nulle. Néanmoins, le théorème 1 peut être conçu comme un relèvement aux groupes d'automorphismes des groupes libres du théorème dû à Betley (cf. [1]) selon lequel l'homologie des groupes linéaires sur \mathbb{Z} (cela vaut d'ailleurs pour tout anneau) à coefficients tordus par un foncteur polynomial réduit est stablement nulle. Dans cette situation, considérer un foncteur covariant ou contravariant ne change rien, puisque l'involution des groupes linéaires donnée par la transposée de l'inverse permet de passer d'une situation à l'autre (en revanche, considérer des *bifoncteurs* polynomiaux réduits donne lieu à un résultat généralement non nul ; pour cette généralisation remarquable des résultats de Betley, voir [2] ou l'appendice de [8] sur un corps fini et [26] pour le cas général). Pour les groupes d'automorphismes des groupes libres, il n'en est pas de même, l'involution en question ne s'y relevant pas ; de fait, en s'appuyant sur le théorème de Betley susmentionné, on parvient à montrer :

Proposition 1. *Soit F un foncteur polynomial réduit contravariant de la catégorie \mathbf{ab} des groupes abéliens libres de rang fini vers \mathbf{Ab} . Il existe un isomorphisme naturel*

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_1(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^n)) \simeq F \otimes_{\mathbf{ab}} \text{Id}$$

où $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ opère sur $F(\mathbb{Z}^n)$ via la projection sur $GL_n(\mathbb{Z})$ et $\text{Id} : \mathbf{ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ désigne le foncteur d'inclusion.

Ce résultat est déjà essentiellement présent dans le travail [17] de Kawazumi ; il indique donc que, dès le degré homologique 1, la situation diffère profondément entre foncteurs polynomiaux contravariants et covariants pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres. Pour l'instant, nous ne savons pas traiter le cas du grand degré homologique pour les foncteurs contravariants ; à plus forte raison, la situation pour les bifoncteurs demeure très mystérieuse. Notons néanmoins que, dans [17], Kawazumi introduit des familles de classes de cohomologie appartenant à $H^i(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); \text{Hom}(A, A^{\otimes i+1}))$ reliées à la structure fine des groupes d'automorphismes des groupes libres.

Venons-en aux méthodes que nous utilisons pour démontrer nos résultats.

La stratégie de la preuve du théorème 1 est la suivante. On dispose d'une part de la catégorie usuelle \mathbf{gr} , dans laquelle on peut effectuer des calculs d'algèbre homologique, et d'autre part d'une catégorie de groupes libres de rang fini auxiliaire \mathcal{G} dont l'homologie calcule $\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n}))$. Pour obtenir le théorème 1, on compare l'homologie des catégories \mathbf{gr} et \mathcal{G} .

Plus précisément, la démonstration du théorème 1 se décompose en trois étapes :

1. On définit à la section 3 une catégorie \mathcal{G} de groupes libres de rang fini (et un foncteur $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}$ qui est l'identité sur les objets). Cette catégorie entre dans le cadre formel introduit dans l'article [5], dont un des résultats généraux nous permet d'obtenir (dans la proposition 3.4) un isomorphisme naturel

$$\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; F)$$

pour tout foncteur $F \in \operatorname{Ob} \mathbf{Fct}(\mathcal{G}, \mathbb{k}\text{-Mod})$, où le groupe $G_\infty = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ opère trivialement sur F .

Cependant, les groupes d'homologie $H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; F)$ ne sont pas accessibles par un calcul direct.

2. L'étude homologique de la catégorie \mathcal{G} repose sur des investigations préliminaires dans la catégorie \mathbf{gr} , qu'on peut scinder en deux principales étapes :
 - dans la section 4, on observe que le foncteur d'abélianisation $\mathbf{a} : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{Ab}$ possède une résolution projective explicite, que procure la résolution barre sur un groupe libre. On en tire, par la considération d'une homotopie explicite, un critère d'annulation de certains groupes d'homologie du type $\operatorname{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, \mathbf{a})$ (proposition 4.4).
 - Pour déduire de cette propriété du foncteur d'abélianisation des propriétés générales sur les foncteurs polynomiaux depuis la catégorie \mathbf{gr} , nous étudions, dans la section 2, la structure de ces foncteurs polynomiaux. En particulier, nous montrons qu'un tel foncteur s'obtient par extensions successives de foncteurs (polynomiaux) se factorisant par le foncteur d'abélianisation. Ce résultat, dont la démonstration est indépendante des considérations d'homologie des foncteurs précitées, possède également un intérêt intrinsèque.
3. Dans la section 5 nous comparons l'homologie de \mathcal{G} et celle de \mathbf{gr} . Plus précisément, on montre que le foncteur $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}$ induit un isomorphisme

$$H_*(\mathcal{G}; i^*F) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathbf{gr}; F)$$

pour F un foncteur polynomial de $\mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$; l'homologie $H_*(\mathbf{gr}; F)$ est nulle si F est réduit car la catégorie \mathbf{gr} possède un objet nul.

On établit cet isomorphisme à partir de la suite spectrale de Grothendieck dérivant une extension de Kan associée au foncteur i et des considérations d'algèbre homologique sur \mathbf{gr} susmentionnées.

Quant à la proposition 1, nous la démontrons d'une manière différente, en utilisant la structure de l'abélianisation du noyau IA_n de l'épimorphisme canonique $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$, donnée par exemple dans [17], et les résultats précités sur l'homologie stable des groupes $GL_n(\mathbb{Z})$ à coefficients dans un bifoncteur polynomial. Comme l'homologie des IA_n n'est pas connue au-delà du degré 1 (des résultats partiels en degré 2 ont toutefois été obtenus par Pettet dans [21]), nous ne pouvons pas encore aller plus loin par cette méthode.

1 Notations et rappels

Si \mathcal{C} est une catégorie pointée (i.e. possédant un objet nul) ayant des coproduits finis, pour $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, on note $\langle E \rangle_{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} ayant pour objets les sommes finies de copies de E .

Pour tout anneau A , on désigne par $A\text{-Mod}$ la catégorie des A -modules à gauche et par $A\text{-mod}$ la sous-catégorie pleine des modules projectifs de type fini.

Le symbole \mathbb{k} désigne soit \mathbb{Z} , soit un corps premier.

On note \mathbf{Gr} (respectivement \mathbf{Ab}) la catégorie des groupes (resp. des groupes abéliens) et \mathbf{gr} (resp. \mathbf{ab}) la sous-catégorie pleine des groupes libres de type fini (resp. des groupes abéliens libres de rang fini). Autrement dit, $\mathbf{gr} = \langle \mathbb{Z} \rangle_{\mathbf{Gr}}$ et $\mathbf{ab} = \langle \mathbb{Z} \rangle_{\mathbf{Ab}} = \mathbb{Z}\text{-mod}$.

On désigne par $\mathbf{a} : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$ le foncteur d'abélianisation tensorisée par \mathbb{k} .

1.1 Catégories de foncteurs

Si \mathcal{C} est une catégorie (essentiellement) petite et \mathcal{A} une catégorie, on note $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{A} .

La catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ est une catégorie abélienne avec limites et colimites se calculant au but ; elle possède assez d'objets injectifs et projectifs. Précisément, pour tout objet c de \mathcal{C} , le foncteur $P_c^{\mathcal{C}} := \mathbb{k}[\mathcal{C}(c, -)]$ (on omettra souvent l'exposant \mathcal{C} s'il n'y a pas d'ambiguïté possible) représente l'évaluation en c grâce au lemme de Yoneda, il est donc projectif, et l'ensemble de ces foncteurs lorsque c parcourt $\text{Ob } \mathcal{C}$ engendre la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$. En particulier, tout foncteur G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ possède une résolution par des sommes directes de projectifs $P_c^{\mathcal{C}}$. On peut donc faire de l'algèbre homologique dans cette catégorie comme dans les catégories de modules ; on dispose notamment d'une notion d'homologie de \mathcal{C} à coefficients dans un foncteur $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ — cette homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ n'est autre que l'évaluation en F des foncteurs dérivés à gauche du foncteur $\text{colim}_{\mathcal{C}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$. On dispose également d'une notion de produit tensoriel au-dessus de \mathcal{C} , qui fournit un foncteur $-\otimes_{\mathcal{C}} - : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$ qui en chaque variable commute aux colimites et peut se dériver (à gauche) pour donner des foncteurs $\text{Tor}_n^{\mathcal{C}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$. Le \mathbb{k} -module $H_n(\mathcal{C}; F)$ s'identifie naturellement à $\text{Tor}_n^{\mathcal{C}}(\mathbb{k}, F)$ (où l'on voit \mathbb{k} comme foncteur constant à gauche). On pourra consulter par exemple l'appendice A.1 de [4] pour davantage de rappels à ce sujet.

Si \mathcal{C} est pointée, tout objet F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ possède une décomposition canonique $F \simeq F(0) \oplus \bar{F}$ où $F(0)$ désigne le foncteur constant en l'évaluation de F sur l'objet nul et $\bar{F}(c) = \text{Ker}(F(c) \rightarrow F(0)) (\simeq \text{Coker}(F(0) \rightarrow F(c)))$. Le foncteur \bar{F} est *réduit*, c'est-à-dire nul en 0 ; on l'appelle foncteur réduit associé à F .

1.2 Foncteurs polynomiaux

Soit \mathcal{C} une petite catégorie pointée avec coproduits finis. On dispose d'une notion classique de foncteur polynomial dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$. Celle-ci remonte à Eilenberg et Mac Lane (cf. [6], chap. II), au moins dans le cas où \mathcal{C} est la catégorie des groupes abéliens (la définition générale étant la même). On pourra également se reporter à [13], § 1, pour une exposition générale. Rappelons qu'un foncteur polynomial de degré au plus $n - 1$ est un foncteur F dont le n -ème effet croisé $\text{cr}_n(F)$, qui est un multifoncteur en n variables sur \mathcal{C} , est nul. Les foncteurs

polynomiaux de degré au plus n de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ forment une sous-catégorie épaisse stable par limites et colimites ; on la notera $\mathbf{Pol}_n(\mathcal{C})$.

Fixons un objet E de \mathcal{C} : les foncteurs polynomiaux sur la catégorie $\langle E \rangle_{\mathcal{C}}$ constituent un cas particulièrement important (cf. [13]). Nous utiliserons, dans la section suivante, les notions que voici sur les foncteurs de degré 1.

Tout foncteur $F : \langle E \rangle_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$ possède un plus grand quotient additif (i.e. polynomial de degré au plus 1) et réduit, qu'on notera $\bar{T}_1(F)$. Il est explicitement donné par $\bar{T}_1(F)(V) = \text{Coker}(F(p_1) + F(p_2) - F(s) : F(V + V) \rightarrow F(V))$ où $+$ désigne le coproduit de \mathcal{C} et $p_1, p_2, s : V + V \rightarrow V$ sont respectivement les première projection, deuxième projection et somme. Le \mathbb{k} -module $\Lambda_{\mathcal{C}}(E) := \bar{T}_1(P_E)(E)$ est un quotient de $\mathbb{k}[\text{End}_{\mathcal{C}}(E)]$; on vérifie (cf. [13], §3.2) que la structure de \mathbb{k} -algèbre sur $\mathbb{k}[\text{End}_{\mathcal{C}}(E)]$ définit par passage au quotient une structure de \mathbb{k} -algèbre sur $\Lambda_{\mathcal{C}}(E)$. De plus, l'action naturelle à droite de $\mathbb{k}[\text{End}_{\mathcal{C}}(E)]$ sur le foncteur P_E induit une action (à droite) de $\Lambda_{\mathcal{C}}(E)$ sur le foncteur $\bar{T}_1(P_E)$.

2 Foncteurs polynomiaux sur gr

Dans cette section, on donne un résultat de classification général sur les foncteurs polynomiaux, avant de l'appliquer à la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$. Ces résultats, qui présentent un intérêt intrinsèque, ne seront utilisés que dans la démonstration de la proposition 5.3 (uniquement via le corollaire 2.3 et la formule (1)). On rappelle la définition suivante :

Définition 2.1. Si R est un anneau muni d'une action (à gauche) d'un groupe G , on définit l'algèbre tordue de G sur R comme le R -module $R[G]$ muni de la multiplication donnée par $r[g].s[h] = (r^g s).[gh]$ pour tout $(r, s, g, h) \in R \times R \times G \times G$ (où $^g s$ désigne l'action de g sur s) ; dans le cas de l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur le produit tensoriel $A^{\otimes n}$ de n copies d'un anneau A par permutation des facteurs, on notera $\mathfrak{S}_n \wr A$ l'anneau obtenu, appelé *produit en couronne de A par \mathfrak{S}_n* .

Ainsi, pour tout entier n , $\bar{T}_1(P_E)^{\otimes n}$ est un foncteur polynomial de degré (au plus) n réduit muni d'une action de $\mathfrak{S}_n \wr \Lambda_{\mathcal{C}}(E)$.

Le résultat suivant est dû à Pirashvili ([22]) dans le cas où \mathcal{C} est une catégorie de modules ; il doit beaucoup à [13] (qui étudie de façon bien plus précise la structure des foncteurs polynomiaux de degré 2) pour le passage au cas général.

Théorème 2.2. *Il existe un diagramme de recollement*

$$\mathbf{Pol}_{n-1}(\langle E \rangle_{\mathcal{C}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{l} \\ \xrightarrow{\text{incl}} \\ \xleftarrow{r} \end{array} \mathbf{Pol}_n(\langle E \rangle_{\mathcal{C}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha_n} \\ \xrightarrow{\text{cr}_n} \\ \xleftarrow{\beta_n} \end{array} \mathfrak{S}_n \wr \Lambda_{\mathcal{C}}(E)\text{-Mod}$$

où *incl* est l'inclusion,

$$\text{cr}_n(F) = \text{cr}_n(F)(E, \dots, E),$$

$$\alpha_n(M) = \bar{T}_1(P_E)^{\otimes n} \otimes_{\mathfrak{S}_n \wr \Lambda_{\mathcal{C}}(E)} M \simeq (\bar{T}_1(P_E)^{\otimes n} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{C}}(E)^{\otimes n}} M)_{\mathfrak{S}_n}$$

et

$$\beta_n(M) = (\bar{T}_1(P_E)^{\otimes n} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{C}}(E)^{\otimes n}} M)^{\mathfrak{S}_n}.$$

Rappelons ce que signifie que le diagramme précédent de foncteurs entre catégories abéliennes est un diagramme de recollement (cf. par exemple [18], § 2, et [11] pour une présentation des diagrammes de recollement dans les catégories abéliennes et une utilisation dans les catégories de foncteurs)

1. le foncteur incl est adjoint à droite (resp. à gauche) au foncteur l (resp. r); de plus, l'unité $Id \rightarrow r.\text{incl}$ et la coïunité $l.\text{incl} \rightarrow Id$ sont des isomorphismes;
2. le foncteur cr_n est adjoint à droite (resp. à gauche) au foncteur α_n (resp. β_n); de plus, l'unité $Id \rightarrow \text{cr}_n.\alpha_n$ et la coïunité $\text{cr}_n.\beta_n \rightarrow Id$ sont des isomorphismes;
3. le foncteur incl est pleinement fidèle et son image essentielle est le noyau du foncteur cr_n .

Rappelons également que ces propriétés impliquent formellement que le foncteur cr_n induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{Pol}_n(\langle E \rangle_{\mathcal{C}}) / \mathbf{Pol}_{n-1}(\langle E \rangle_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{S}_n \wr \Lambda_{\mathcal{C}}(E)\text{-Mod.}$$

Démonstration. Pour le cas crucial du degré 1, voir [13], § 3.2. Pour le cas général, soit multilinéariser (comme [13] pour le degré 2), soit regarder directement : la partie gauche du diagramme est une trivialité ($\mathbf{Pol}_{n-1}(\langle E \rangle_{\mathcal{C}})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Pol}_n(\langle E \rangle_{\mathcal{C}})$ stable par limites et colimites), pour la partie droite les adjonctions sont assez faciles et les conditions sur les (co)unités viennent d'un calcul direct d'effet croisé. \square

Corollaire 2.3. *Soit $F \in \text{Ob } \mathbf{Pol}_n(\langle E \rangle_{\mathcal{C}})$; notons M le $\mathfrak{S}_n \wr \Lambda_{\mathcal{C}}(E)$ -module $\text{cr}_n(F)$. Les noyaux et conoyaux de la coïunité $\alpha_n(M) \rightarrow F$ et de l'unité $F \rightarrow \beta_n(M)$ sont de degré inférieur ou égal à $n - 1$.*

Proposition 2.4. *Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories pointées avec sommes finies qui commute aux sommes finies, E un objet de \mathcal{C} et $E' = F(E)$. On suppose que F est plein et induit un isomorphisme $\mathcal{C}(E, E) \rightarrow \mathcal{D}(E', E')$. Alors F induit un isomorphisme $\Lambda_{\mathcal{C}}(E) \xrightarrow{\simeq} \Lambda_{\mathcal{D}}(E')$ et une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{Pol}_n(\langle E \rangle_{\mathcal{C}}) / \mathbf{Pol}_{n-1}(\langle E \rangle_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Pol}_n(\langle E' \rangle_{\mathcal{D}}) / \mathbf{Pol}_{n-1}(\langle E' \rangle_{\mathcal{D}})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On déduit directement le fait que F induit un isomorphisme d'anneaux $\Lambda_{\mathcal{C}}(E) \xrightarrow{\simeq} \Lambda_{\mathcal{D}}(E')$ de la définition, des hypothèses et du lemme des cinq. Le reste s'en déduit par le théorème précédent. \square

Le critère de comparaison général qui précède s'applique aux groupes libres, abéliens ou non :

Corollaire 2.5. *Le foncteur d'abélianisation $\mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{ab}$ induit des équivalences de catégories :*

$$\mathbf{Pol}_n(\mathbf{gr}) / \mathbf{Pol}_{n-1}(\mathbf{gr}) \simeq \mathbf{Pol}_n(\mathbf{ab}) / \mathbf{Pol}_{n-1}(\mathbf{ab}) \simeq \mathbb{k}[\mathfrak{S}_n]\text{-Mod.}$$

Démonstration. Le foncteur d'abélianisation vérifie les conditions de la proposition précédente. La dernière équivalence est classique et s'obtient à partir du théorème 2.2 et du calcul $\bar{T}_1(P_{\mathbb{Z}}^{ab}) = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{k}$ qui implique $\Lambda_{\mathbf{ab}}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{k}$. \square

En particulier, on voit que les foncteurs α_n et β_n sont donnés, lorsque la catégorie source est \mathbf{gr} , par

$$\alpha_n(M) = \mathfrak{a}^{\otimes n} \otimes_{\mathfrak{S}_n} M \quad (1)$$

et

$$\beta_n(M) = (\mathfrak{a}^{\otimes n} \otimes M)^{\mathfrak{S}_n}. \quad (2)$$

Le corollaire suivant montre que les foncteurs polynomiaux sur \mathbf{gr} ne sont “pas loin” de se factoriser par l’abélianisation $\mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{ab}$: ils peuvent tous s’obtenir par extensions successives de foncteurs possédant une telle factorisation.

Corollaire 2.6. *Tout foncteur $F \in \text{Ob Pol}_n(\mathbf{gr})$ possède une filtration*

$$0 = F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = F$$

telle que chaque foncteur F_i soit de degré au plus i et que chaque sous-quotient F_i/F_{i-1} appartienne à l’image essentielle du foncteur $\mathbf{Fct}(\mathbf{ab}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ de précomposition par l’abélianisation.

Démonstration. Par le corollaire 2.3, le noyau de l’unité :

$$F = F_n \rightarrow \beta_n(\text{cr}_n(F))$$

est un foncteur F_{n-1} de degré au plus $n - 1$. Le foncteur F_n/F_{n-1} est donc isomorphe à un sous-foncteur de $\beta_n(\text{cr}_n(F))$. Comme $\beta_n(\text{cr}_n(F))$ se factorise par l’abélianisation d’après (2), on en déduit que F_n/F_{n-1} est dans l’image essentielle du foncteur $\mathbf{Fct}(\mathbf{ab}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ de précomposition par l’abélianisation. La conclusion s’ensuit par récurrence sur n . \square

3 La catégorie de groupes libres auxiliaire \mathcal{G}

Dans [5], nous avons introduit des axiomes sur une petite catégorie \mathcal{C} permettant de relier, d’une part, l’homologie de groupes d’automorphismes d’objets de \mathcal{C} , à coefficients tordus par un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbb{k}\text{-Mod})$, d’autre part l’homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ de la catégorie à coefficients dans F (supposant connue l’homologie des mêmes groupes à coefficients constants dans \mathbb{k}). La catégorie \mathbf{gr} ne satisfait toutefois pas à ces axiomes. Pour y remédier, nous introduisons une autre catégorie de groupes libres \mathcal{G} et tirons dans cette section les conclusions de [5] pour celle-ci, avant d’étudier son lien homologique avec la catégorie \mathbf{gr} .

Définition 3.1. On note \mathcal{G} la catégorie dont les objets sont les groupes libres de type fini et dans laquelle un morphisme $A \rightarrow B$ est un couple (u, H) formé d’un monomorphisme de groupes $u : A \rightarrow B$ et d’un sous-groupe H de B tels que B soit le produit libre de l’image de u et de H . La composée $A \xrightarrow{(u, H)} B \xrightarrow{(v, K)} C$ est par définition $(v \circ u, v(H) * K)$.

Cette catégorie est reliée à la catégorie usuelle \mathbf{gr} par les deux foncteurs fondamentaux suivants.

Définition 3.2. 1. On note $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}$ le foncteur égal à l’identité sur les objets et associant à un morphisme $(u, H) : A \rightarrow B$ de \mathcal{G} le morphisme de groupes $u : A \rightarrow B$.

2. On note $\iota : \mathcal{G}^{op} \rightarrow \mathbf{gr}$ le foncteur égal à l'identité sur les objets et associant à un morphisme $(u, H) : A \rightarrow B$ de \mathcal{G} le morphisme de groupes $B = u(A) * H \rightarrow u(A) \xrightarrow{u^{-1}} A$ composé de la projection canonique et de l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme qu'induit u entre A et son image.

Noter que ces foncteurs ne sont ni pleins ni fidèles, mais qu'ils induisent des isomorphismes entre les groupes d'automorphismes des objets.

Remarque 3.3. La catégorie \mathcal{G} constitue un analogue non abélien de la catégorie $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens libres de rang fini avec pour morphismes les monomorphismes scindés, le scindage étant donné. Les foncteurs i et ι sont alors similaires aux foncteurs covariant et contravariant tautologiques de $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ vers \mathbf{ab} .

La catégorie $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ est utilisée dans [4] pour montrer les résultats de Scoričenko ([26]) sur l'homologie stable des groupes linéaires sur \mathbb{Z} à coefficients polynomiaux, en simplifiant légèrement la méthode de cet auteur (qui consiste à considérer la catégorie des groupes abéliens libres de rang fini avec pour morphismes les monomorphismes scindés, le scindage ne faisant pas partie de la structure).

Ici, contrairement à la situation pour les groupes linéaires, les foncteurs i et ι ne jouent pas du tout le même rôle ; on en verra une illustration spectaculaire à la fin de cet article.

Le produit libre $*$ munit la catégorie \mathcal{G} d'une structure de catégorie monoïdale symétrique tout comme la catégorie \mathbf{gr} , et les foncteurs i et ι sont monoïdaux. Le groupe trivial 0 , unité de cette structure, est également objet initial de \mathcal{G} . En particulier, pour tous objets A et B de \mathcal{G} , on dispose d'un morphisme canonique $A = A * 0 \rightarrow A * B$, qui est équivariant relativement aux actions tautologiques de $\text{Aut}(A)$ et $\text{Aut}(A * B)$ et au monomorphisme de groupes canonique $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(A * B)$. Par conséquent, si F est un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{G}, \mathbb{k}\text{-Mod})$, on dispose de morphismes naturels

$$H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \rightarrow H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*m}); F(\mathbb{Z}^{*m}))$$

pour $n \leq m$ (plonger \mathbb{Z}^{*n} dans \mathbb{Z}^{*m} par l'inclusion des n premiers facteurs) ; la colimite de ces groupes lorsque n parcourt \mathbb{N} est appelée *homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus par F* . On dispose par ailleurs de l'homologie $H_*(\mathcal{G}; F)$ de la catégorie \mathcal{G} à coefficients dans F ; les inclusions des sous-catégories pleines réduites à l'objet \mathbb{Z}^{*n} dans \mathcal{G} permettent de définir un morphisme naturel de l'homologie stable définie précédemment vers $H_*(\mathcal{G}; F)$. Pour pallier la trivialité de cette homologie pour F constant, on peut aussi considérer plutôt l'homologie $H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; F)$, où $G_\infty := \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$, qui constitue en fait un abus de notation pour $H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; \Pi^* F)$ où $\Pi : \mathcal{G} \times G_\infty \rightarrow \mathcal{G}$ est le foncteur de projection (autrement dit, on fait agir le groupe trivialement sur le foncteur) : il existe également un morphisme naturel de l'homologie stable de groupes à coefficients dans F vers $H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; \Pi^* F)$, obtenu cette fois-ci en prenant la colimite des morphismes induits par les foncteurs $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \rightarrow \mathcal{G} \times G_\infty$ dont la composante vers \mathcal{G} est la même que précédemment (inclusion pleinement fidèle d'image \mathbb{Z}^{*n}) et la composante $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}) \rightarrow G_\infty$ est le morphisme canonique.

Des résultats généraux des deux premières sections de [5] on tire la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Pour tout foncteur $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{G}, \mathbb{k}\text{-Mod})$, le morphisme naturel*

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \rightarrow H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; F)$$

*de \mathbb{k} -modules gradués, où le groupe $G_\infty = \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ opère trivialement sur F , est un isomorphisme.*

Démonstration. On note les trois propriétés suivantes :

1. tout objet de \mathcal{G} est isomorphe au produit libre d'un nombre fini de copies de \mathbb{Z} ;
2. pour tous objets A et B de \mathcal{G} , le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(B)$ opère transitivement sur $\mathcal{G}(A, B)$. En effet, si (u, H) et (v, K) sont deux morphismes $A \rightarrow B$ de \mathcal{G} , les isomorphismes de groupes $B \simeq A * H \simeq A * K$ entraînent $H \simeq K$ et procurent donc un automorphisme φ de B tel que $\varphi(H) = K$ et $\varphi \circ u = v$, de sorte que $\varphi \circ (u, H) = (v, K)$.
3. Pour tous objets A et B de \mathcal{G} , le morphisme canonique du groupe $\text{Aut}(B)$ vers le stabilisateur du morphisme canonique $A \rightarrow A * B$ de \mathcal{G} sous l'action de $\text{Aut}(A * B)$ est un isomorphisme. Cela découle de ce que ce stabilisateur est l'ensemble des automorphismes φ du groupe $A * B$ qui coïncident avec l'identité sur A et tels que $\varphi(B) = B$.

Ces conditions impliquent formellement, d'après [5] (ou la proposition 1.4 de [4], qui en reprend les résultats), la proposition. \square

En utilisant les résultats remarquables de Galatius (cf. [12]) sur l'homologie de G_∞ et la formule de Künneth, on en déduit par exemple, dans le cas où \mathbb{k} est un corps :

Corollaire 3.5. *Lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, le morphisme naturel*

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \rightarrow H_*(\mathcal{G}; F)$$

est un isomorphisme.

Pour $\mathbb{k} = \mathbb{F}_p$, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \simeq H_*(\mathcal{G}; F) \otimes H_*(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{k}).$$

4 Algèbre homologique dans la catégorie \mathbf{gr}

La catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ se prête à des calculs d'algèbre homologique, et ce de façon beaucoup plus aisée que les catégories $\mathbf{Fct}(A\text{-mod}, A\text{-Mod})$, même lorsque A est l'anneau des entiers ou un corps fini, où les premiers calculs non triviaux s'avèrent déjà délicats (cf. [10] et [9] respectivement). Cela tient au fait remarquable, clef de voûte du présent travail, que le foncteur d'abélianisation $\mathbf{a} \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ possède une résolution projective explicite, donnée par la résolution barre. Avant de la donner explicitement dans sa version fonctorielle, introduisons une simplification de notation. Pour tout entier naturel n , on désigne par P_n le foncteur projectif $P_{\mathbb{Z}^{*n}}^{\mathbf{gr}}$. Ainsi, $P_n(G) \simeq \mathbb{k}[G^n]$ canoniquement. Comme la catégorie \mathbf{gr} possède des sommes finies, on dispose d'isomorphismes $P_i \otimes P_j \simeq P_{i+j}$, d'où $P_n \simeq P^{\otimes n}$ où $P = P_1$.

Proposition 4.1. *Le foncteur \mathbf{a} possède une résolution projective :*

$$\dots P_{n+1} \xrightarrow{d_n} P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_1} P_1$$

où la transformation naturelle $d_n : P_{n+1} \rightarrow P_n$ est donnée sur le groupe G par l'application linéaire $\mathbb{k}[G^{n+1}] \rightarrow \mathbb{k}[G^n]$ telle que

$$d_n([g_1, \dots, g_{n+1}]) = [g_2, \dots, g_{n+1}] + \sum_{i=1}^n (-1)^i [g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1}] + (-1)^{n+1} [g_1, \dots, g_n]$$

pour tout $(g_1, \dots, g_{n+1}) \in G^{n+1}$.

Démonstration. La suite de foncteurs de l'énoncé, évaluée sur un groupe G , n'est autre que la résolution barre sur ce groupe (dont on a tronqué le degré 0). Elle calcule donc fonctoriellement l'homologie réduite de G à coefficients dans \mathbb{k} . La conclusion résulte donc de ce que l'homologie réduite à coefficients dans \mathbb{k} d'un groupe libre est naturellement isomorphe à son abélianisation tensorisée par \mathbb{k} concentrée en degré 1. \square

En tensorisant cette résolution par un projectif P_r , on en déduit :

Corollaire 4.2. *Soient $X \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ et $r \in \mathbb{N}$. Les groupes de torsion $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \mathbf{a} \otimes P_r)$ sont isomorphes à l'homologie du complexe :*

$$\dots \rightarrow X(n+r+1) \xrightarrow{\delta_n} X(n+r) \rightarrow \dots \rightarrow X(r+2) \xrightarrow{\delta_1} X(r+1)$$

(on s'autorise à noter $X(i)$ pour $X(\mathbb{Z}^{*i})$) où

$$\delta_n = X(a^{n,r}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i X(b_i^{n,r}) + (-1)^{n+1} X(c^{n,r}),$$

les morphismes $a^{n,r}, b_i^{n,r}, c^{n,r} : \mathbb{Z}^{*r+n} \rightarrow \mathbb{Z}^{*r+n+1}$ étant donnés, via l'identification $\mathbf{gr}(\mathbb{Z}^{*r+n}, \mathbb{Z}^{*r+n+1}) \simeq (\mathbb{Z}^{*r+n+1})^{n+r}$, par :

$$a^{n,r} = (e_2, \dots, e_{n+r+1})$$

$$b_i^{n,r} = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_i e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_{n+r+1})$$

$$c^{n,r} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, \dots, e_{n+r+1})$$

où (e_1, \dots, e_{n+r+1}) désigne la "base" tautologique de \mathbb{Z}^{*r+n+1} .

Remarque 4.3. Au lieu de la construction barre, on peut utiliser la construction barre réduite (ou normalisée). Cela fournit une résolution projective de \mathbf{a} de la forme suivante :

$$\dots \bar{P}^{\otimes n+1} \rightarrow \bar{P}^{\otimes n} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{P}.$$

On en déduit en particulier $\text{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(X, \mathbf{a}) = 0$ lorsque X est un foncteur polynomial de degré inférieur ou égal à i . Une propriété analogue vaut pour les groupes d'extensions; notamment, on voit que $\text{Ext}_{\mathbf{gr}}^*(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ est réduit à \mathbb{k} concentré en degré 0. Ces groupes d'extensions sont des analogues pour la catégorie \mathbf{gr} des auto-extensions du foncteur d'inclusion de $\mathbf{Fct}(A\text{-mod}, A\text{-Mod})$, qui s'identifie à l'homologie de Mac Lane de A . Celle-ci est difficile à calculer (cf. les références [9] et [10] précitées), même pour les corps, hormis dans le cas de la caractéristique nulle, où l'on peut également s'appuyer sur la résolution barre.

Néanmoins, cette variante réduite n'est pas très adaptée à nos considérations ultérieures sur la catégorie \mathbf{gr} .

Le corollaire 4.2 constitue la base du critère d'annulation homologique abstrait suivant.

Proposition 4.4. *Soit $X \in \text{Ob Fct}(\mathbf{gr}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ un foncteur tel qu'existe, pour tous objets A et T de \mathbf{gr} , une application linéaire $\xi(A, T) : X(A) \rightarrow X(T * A)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tous $\varphi : A \rightarrow B$ et T dans \mathbf{gr} , les composées*

$$X(B) \xrightarrow{X(\varphi)} X(A) \xrightarrow{\xi(A, T)} X(T * A)$$

et

$$X(B) \xrightarrow{\xi(B, T)} X(T * B) \xrightarrow{X(T * \varphi)} X(T * A)$$

coïncident ;

2. *la composée*

$$X(A) \xrightarrow{\xi(A, T)} X(T * A) \xrightarrow{X(u(A, T))} X(A)$$

*est l'identité, où $u(A, T) : A \rightarrow T * A$ est l'inclusion canonique ;*

3. *étant donnés $\varphi : A \rightarrow B$, T et $\tau : T \rightarrow T * B$ dans \mathbf{gr} de sorte que le morphisme $\theta : T * B \rightarrow T * B$ égal à l'identité sur B et à τ sur T soit un isomorphisme, si l'on note $\psi : T * A \rightarrow T * B$ le morphisme de composantes $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{u(B, T)} T * B$ et $T \xrightarrow{\tau} T * B$, alors les composées*

$$X(B) \xrightarrow{X(\varphi)} X(A) \xrightarrow{\xi(A, T)} X(T * A)$$

et

$$X(B) \xrightarrow{\xi(B, T)} X(T * B) \xrightarrow{X(\psi)} X(T * A)$$

coïncident.

Alors $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \mathfrak{a} \otimes P_r) = 0$ pour tout entier r .

(Remarquer que la première propriété est un cas particulier de la troisième, mais il nous est plus commode pour la suite de les différencier.)

Démonstration. Pour tout entier $n > 0$, posons

$$h_n = \xi(\mathbb{Z}^{*n+r}, \mathbb{Z}) : X(n+r) \rightarrow X(n+r+1).$$

Grâce au corollaire 4.2, il suffit de prouver la relation d'homotopie $\delta_n h_n + h_{n-1} \delta_{n-1} = \text{Id}_{X(n+r)}$ pour tout entier $n > 0$ (à lire $\delta_1 h_1 = \text{Id}$ pour $n = 1$). Celle-ci découle des identités suivantes :

1. $X(a^{n,r})h_n = \text{Id}_{X(n+r)}$;
2. $X(b_1^{n,r})h_n = h_{n-1}X(a^{n-1,r})$;
3. $X(b_{i+1}^{n,r})h_n = h_{n-1}X(b_i^{n-1,r})$ pour $1 \leq i \leq n-1$;
4. $X(c^{n,r})h_n = h_{n-1}X(c^{n-1,r})$

qu'on montre maintenant.

La première égalité provient de la deuxième hypothèse sur les morphismes ξ , du fait que $a^{n,r} = u(\mathbb{Z}^{*n+r}, \mathbb{Z})$.

La troisième (resp. quatrième) égalité provient de la première hypothèse sur les morphismes ξ , puisque $b_{i+1}^{n,r} = \mathbb{Z} * b_i^{n-1,r}$ (resp. $c^{n,r} = \mathbb{Z} * c^{n-1,r}$).

Pour la deuxième égalité, on applique la troisième hypothèse sur les ξ avec $\varphi = a^{n-1,r} = u(\mathbb{Z}^{*n+r-1}, \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}^{*n+r-1} \rightarrow \mathbb{Z}^{*n+r}$ et $T = \mathbb{Z}$, en prenant pour $\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^{*n+r} = \mathbb{Z}^{*n+r+1}$ le morphisme donné par l'élément $e_1 e_2$ du but. La condition d'inversibilité de θ est clairement vérifiée (c'est un générateur canonique du groupe des automorphismes de \mathbb{Z}^{*n+r+1}), et ψ n'est autre que $b_1^{n,r}$. Cela termine la démonstration. \square

5 Comportement homologique du foncteur $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}$ sur les foncteurs polynomiaux

La proposition 3.4 et le corollaire 3.5 montrent l'intérêt de savoir calculer des groupes d'homologie $H_*(\mathcal{G}; F)$, mais ceux-ci ne sont pas accessibles directement. La section précédente suggère de transiter par la catégorie plus usuelle \mathbf{gr} pour mener à bien certains de ces calculs.

D'un point de vue formel, le foncteur $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}$ induit, pour tout $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$, un morphisme naturel $H_*(\mathcal{G}; i^*F) \rightarrow H_*(\mathbf{gr}; F)$. Ce dernier groupe est réduit à $F(0)$ concentré en degré nul, puisque le foncteur constant \mathbb{k} sur \mathbf{gr}^{op} , égal à $P_0^{\mathbf{gr}^{op}}$ (puisque 0 est objet final de \mathbf{gr}), est projectif et représente l'évaluation en 0. On va voir que ce morphisme est en fait un isomorphisme lorsque F est polynomial. Pour cela, on commence par introduire la définition suivante.

Définition 5.1. Soit $A \in \text{Ob } \mathbf{gr}$. On note $\mathcal{G}[A]$ la catégorie dont les objets sont les couples (B, X) formés d'un objet B de \mathcal{G} et d'un élément X de $\mathbf{gr}(A, i(B))$.

On part de la suite spectrale de Grothendieck associée à la composée

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{G}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \xrightarrow{i_!} \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod}) \xrightarrow{\mathbf{gr}} \mathbb{k}\text{-Mod} \xrightarrow{- \otimes F}$$

où $i_!$ est l'extension de Kan du foncteur i , qui prend la forme suivante :

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{\mathbf{gr}}(L_q, F) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{G}; i^*F) \quad (3)$$

où $L_q : \mathbf{gr}^{op} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$ est le foncteur associant à l'objet A de \mathbf{gr} le q -ème groupe d'homologie de la catégorie $\mathcal{G}[A]$ (cf. par exemple [4], appendice A.1, Remarque A.2).

Nous montrons, dans la suite de cette section, que la deuxième page de cette suite spectrale est nulle.

Soit $T \in \text{Ob } \mathbf{gr}$, i étant monoïdal, on a un foncteur $T * - : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ qui induit un foncteur $\mathcal{G}[A] \rightarrow \mathcal{G}[T * A]$.

Lemme 5.2. Pour tout entier naturel r , on a :

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(L_\bullet, \mathfrak{a} \otimes P_r) = 0.$$

Démonstration. Par la proposition 4.4, il suffit de vérifier que les applications linéaires

$$\xi(A, T) : L_\bullet(A) \rightarrow L_\bullet(T * A)$$

induites en homologie par les foncteurs $\mathcal{G}[A] \rightarrow \mathcal{G}[T * A]$ satisfont les trois propriétés de l'énoncé sus-cité.

La première propriété provient de ce que les morphismes

$$L_{\bullet}(B) \xrightarrow{L_{\bullet}(\varphi)} L_{\bullet}(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} L_{\bullet}(T * A)$$

et

$$L_{\bullet}(B) \xrightarrow{\xi(B,T)} L_{\bullet}(T * B) \xrightarrow{L_{\bullet}(T*\varphi)} L_{\bullet}(T * A)$$

sont induits par les foncteurs $\mathcal{G}[B] \rightarrow \mathcal{G}[T * A]$

$$(G \in \text{Ob } \mathcal{G}, f \in \mathbf{gr}(B, iG)) \mapsto (T * G, T * (A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{f} iG))$$

et

$$(G \in \text{Ob } \mathcal{G}, f \in \mathbf{gr}(B, iG)) \mapsto (T * G, T * A \xrightarrow{T*\varphi} T * B \xrightarrow{T*f} T * iG)$$

respectivement, qui sont égaux.

Pour la deuxième, on note que la composée

$$L_{\bullet}(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} L_{\bullet}(T * A) \xrightarrow{L_{\bullet}(u(A,T))} L_{\bullet}(A)$$

est induite par l'endofoncteur

$$(G \in \text{Ob } \mathcal{G}, f \in \mathbf{gr}(A, iG)) \mapsto (T * G, A \xrightarrow{u(A,T)} T * A \xrightarrow{T*f} T * iG)$$

de $\mathcal{G}[A]$. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u(A,T)} & T * A \\ f \downarrow & & \downarrow T*f \\ iG & \xrightarrow{u(iG,T)} & T * iG \end{array}$$

commute, le morphisme naturel $G \rightarrow T * G$ de \mathcal{G} induit une transformation naturelle de l'identité de $\mathcal{G}[A]$ vers ce foncteur. Par conséquent (cf. [23]), celui-ci induit l'identité en homologie.

Venons-en à la dernière propriété. Les composées

$$L_{\bullet}(B) \xrightarrow{X(\varphi)} L_{\bullet}(A) \xrightarrow{\xi(A,T)} L_{\bullet}(T * A)$$

et

$$L_{\bullet}(B) \xrightarrow{\xi(B,T)} L_{\bullet}(T * B) \xrightarrow{L_{\bullet}(\psi)} L_{\bullet}(T * A)$$

qui nous intéressent sont induites par les foncteurs $\mathcal{G}[B] \rightarrow \mathcal{G}[T * A]$

$$(G \in \text{Ob } \mathcal{G}, f \in \mathbf{gr}(B, iG)) \mapsto (T * G, T * A \xrightarrow{T*\varphi} T * B \xrightarrow{T*f} T * iG)$$

et

$$(G \in \text{Ob } \mathcal{G}, f \in \mathbf{gr}(B, iG)) \mapsto (T * G, T * A \xrightarrow{\psi} T * B \xrightarrow{T*f} T * iG)$$

respectivement. Le morphisme de groupes $T * G \rightarrow T * G$ dont les composantes sont $T \xrightarrow{\tau} T * B \xrightarrow{T*f} T * G$ et $G \xrightarrow{u(G,T)} T * G$ est un isomorphisme (son inverse est le morphisme de composantes $T \xrightarrow{\tau'} T * B \xrightarrow{T*f} T * G$, où τ' est la composante $T \rightarrow T * B$ de l'inverse de l'automorphisme θ , et $u(G, T)$), c'est donc aussi un automorphisme de $T * G$ dans la catégorie \mathcal{G} , automorphisme que nous noterons γ_G . La conclusion provient alors des deux observations suivantes :

1. le morphisme γ_G est naturel en $G \in \text{Ob } \mathcal{G}$ (il suffit pour le voir d'écrire ce que sont les morphismes dans $\mathcal{G}[B]$);
2. il fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
T * A & \xrightarrow{T*\varphi} & T * B & \xrightarrow{T*f} & T * G \\
& \searrow \psi & \downarrow \theta & & \downarrow \gamma_G \\
& & T * B & \xrightarrow{T*f} & T * G
\end{array}$$

de \mathbf{gr} , de sorte qu'il définit une transformation naturelle entre nos deux foncteurs $\mathcal{G}[B] \rightarrow \mathcal{G}[T * A]$, qui induisent donc la même application en homologie.

□

Nous avons également besoin du résultat suivant, totalement indépendant des considérations précédentes (il n'utilise que les résultats de structure de la première section sur les foncteurs polynomiaux).

Proposition 5.3. *Soit $X \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}^{op}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ tel que*

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \mathfrak{a} \otimes P_n) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, F \otimes G) = 0$$

pour tout $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ polynomial réduit (i.e. tel que $F(0) = 0$) et tout $G \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$.

Démonstration. La formule des coefficients universels (cf. par exemple [27], th. 3.6.1) montre qu'il suffit de traiter le cas où \mathbb{k} est un corps, ce qu'on suppose désormais. Ainsi, le produit tensoriel est exact en chaque variable.

On commence par montrer que

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \mathfrak{a} \otimes G) = 0 \tag{4}$$

pour tout $G \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$. Cela découle de l'hypothèse, de ce que G possède une résolution par des sommes directes de projectifs P_n et de la suite spectrale d'hyperhomologie associée (on renvoie à [27], § 5.7 pour ce qui concerne l'hyperhomologie).

On établit maintenant par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ l'assertion suivante : *pour tout $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$ polynomial réduit de degré inférieur ou égal à d et tout $G \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$, on a $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, F \otimes G) = 0$.*

Pour $d = 0$ l'assertion est vide, on suppose donc $d > 0$ et le résultat démontré jusqu'en degré $d - 1$. Soit F polynomial réduit de degré au plus d , notons M le $\mathbb{k}[\mathfrak{S}_d]$ -module $\text{cr}_d(F)$: d'après le corollaire 2.3, le noyau N et le conoyau C du morphisme naturel $\alpha_d(M) = \mathfrak{a}^{\otimes d} \otimes_{\mathfrak{S}_d} M \rightarrow F$ sont de degré au plus $d - 1$. Ainsi,

$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, N \otimes G)$ et $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, C \otimes G)$ sont nuls pour tout G , par l'hypothèse de récurrence. Il s'ensuit que la nullité de $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, F \otimes G)$ est équivalente à celle de $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \alpha_d(M) \otimes G)$.

Celle-ci est acquise lorsque M est un $\mathbb{k}[\mathfrak{S}_d]$ -module *libre*, car alors $\alpha_d(M)$ est somme directe de copies de $\mathfrak{a}^{\otimes d}$, et

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \mathfrak{a}^{\otimes d} \otimes G) = \text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \mathfrak{a} \otimes (\mathfrak{a}^{\otimes d-1} \otimes G)) = 0$$

par (4).

Considérons, dans le cas général, une résolution libre $L_\bullet \rightarrow M$ du $\mathbb{k}[\mathfrak{S}_d]$ -module M et notons H_\bullet l'homologie du complexe $\alpha_d(L_\bullet) \rightarrow \alpha_d(M)$ de $\mathbf{Pol}_d(\mathbf{gr})$. Comme le foncteur canonique $\pi_d : \mathbf{Pol}_d(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{Pol}_d(\mathbf{gr})/\mathbf{Pol}_{d-1}(\mathbf{gr})$ est exact, l'homologie de l'image par π_d de ce complexe s'identifie à $\pi_d(H_\bullet)$. Mais comme le foncteur

$$\mathbb{k}[\mathfrak{S}_d]\text{-Mod} \xrightarrow{\alpha_d} \mathbf{Pol}_d(\mathbf{gr}) \xrightarrow{\pi_d} \mathbf{Pol}_d(\mathbf{gr})/\mathbf{Pol}_{d-1}(\mathbf{gr})$$

est une équivalence de catégories d'après le théorème 2.2, donc en particulier un foncteur exact, cela implique que $\pi_d(H_\bullet) = 0$. Autrement dit, le foncteur gradué H_\bullet est de degré au plus $d - 1$. Comme il est également réduit, l'hypothèse de récurrence montre que

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, H_\bullet \otimes G) = 0$$

pour tout G .

On en déduit que l'hyperhomologie $X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{gr}} (\alpha_d(L_\bullet) \otimes G)$ est isomorphe à $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \alpha_d(M) \otimes G)$, par l'une des suites spectrales d'hyperhomologie associées. L'autre suite spectrale d'hyperhomologie associée a pour première page $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \alpha_d(L_\bullet) \otimes G)$, qui est identiquement nul par ce qu'on a vu plus haut, parce que les L_i sont libres.

Par conséquent, $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, \alpha_d(M) \otimes G)$ et donc $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, F \otimes G)$ sont nuls, ce qui achève la démonstration. \square

Nous pouvons désormais démontrer le résultat principal de ce travail.

Théorème 5.4. *Soient F et G des foncteurs de $\mathbf{Fct}(\mathbf{gr}, \mathbb{k}\text{-Mod})$; on suppose F polynomial et réduit. Alors*

$$\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); (F \otimes G)(\mathbb{Z}^{*n})) = 0.$$

Démonstration. Le lemme 5.2 et la proposition 5.3 montrent que

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(L_\bullet, F \otimes G) = 0.$$

La suite spectrale (3) permet d'en déduire la nullité de $H_*(\mathcal{G}; i^*(F \otimes G))$. On conclut alors par la proposition 3.4. \square

Rappelons que, dans le cas crucial où les coefficients sont tordus par le foncteur d'abélianisation \mathfrak{a} , ce résultat (c'est à dire $\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); \mathfrak{a}(\mathbb{Z}^{*n})) = 0$) a été antérieurement obtenu par Hatcher-Wahl dans [16] par des méthodes complètement différentes qui permettent également d'obtenir une borne de stabilité homologique explicite. Dans le cas des degrés homologiques 1 et 2, ce résultat a également été obtenu par Satoh dans [24] et [25], suivant une approche différente de celles d'Hatcher-Wahl et du présent article.

6 Comportement homologique en degré 1 du foncteur $\iota : \mathcal{G}^{op} \rightarrow \mathbf{gr}$ sur les foncteurs polynomiaux

La comparaison de l'homologie de \mathcal{G} et de \mathbf{gr}^{op} via le foncteur ι , à coefficients dans un foncteur (même polynomial) F sur \mathbf{gr}^{op} , ne fonctionne pas de la même façon qu'avec le foncteur $i : H_*(\mathbf{gr}^{op}; F)$ est toujours réduit à $F(0)$ concentré en degré nul (puisque 0 est objet initial de \mathbf{gr}), mais l'annulation ne subsiste plus pour l'homologie de $H_*(\mathcal{G}; \iota^*F)$. Pour l'instant, les auteurs ne savent pas comment calculer ces groupes d'homologie des foncteurs. Toutefois, on peut résoudre le problème d'une manière différente, plus directe, pour le degré homologique 1 (en degré homologique nul, le morphisme qu'induit ι est toujours un isomorphisme), au moins pour un foncteur polynomial se factorisant par le foncteur d'abélianisation $\mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{ab}$.

Le résultat qui suit est essentiellement présent dans [17] (voir la fin de sa section 6), avec l'hypothèse que les coefficients sont des \mathbb{Q} -espaces vectoriels (et sans le langage des catégories de foncteurs). Notre démonstration suit celle de Kawazumi, hormis pour les arguments d'annulation pour lesquels nous invoquons des résultats sur l'homologie des foncteurs.

Proposition 6.1. *Soit $F : \mathbf{ab}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un foncteur polynomial réduit. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_1(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^n)) \simeq F \otimes_{\mathbf{ab}} \operatorname{Id}$$

où $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$ opère sur $F(\mathbb{Z}^n)$ via la projection sur $GL_n(\mathbb{Z})$ et $\operatorname{Id} : \mathbf{ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ désigne le foncteur d'inclusion.

Démonstration. Notons $IA(G)$, pour G un groupe libre, le noyau de l'épimorphisme $\operatorname{Aut}_{\mathbf{gr}}(G) \rightarrow \operatorname{Aut}_{\mathbf{ab}}(G_{ab})$ induit par l'abélianisation. Le théorème 6.1 de [17] procure un isomorphisme $H_1(IA(G)) \simeq \mathbf{Ab}(G_{ab}, \Lambda^2(G_{ab}))$ (dont Kawazumi attribue la primeur à Andreadakis) $\operatorname{Aut}_{\mathbf{ab}}(G_{ab})$ -équivariant.

La suite exacte à cinq termes (cf. par exemple [27], §6.8.3) associée à l'extension de groupes

$$1 \rightarrow IA(G) \rightarrow \operatorname{Aut}_{\mathbf{gr}}(G) \rightarrow \operatorname{Aut}_{\mathbf{ab}}(G_{ab}) \rightarrow 1$$

fournit donc une suite exacte

$$\begin{aligned} \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_2(GL_n(\mathbb{Z}); F(\mathbb{Z}^n)) &\rightarrow \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_0(GL_n(\mathbb{Z}); F(\mathbb{Z}^n) \otimes \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}^n, \Lambda^2(\mathbb{Z}^n))) \rightarrow \\ &\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_1(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^n)) \rightarrow \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_1(GL_n(\mathbb{Z}); F(\mathbb{Z}^n)). \end{aligned}$$

Un théorème de Betley (cf. [1], théorème 4.2)

montre que $\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(GL_n(\mathbb{Z}); F(\mathbb{Z}^n)) = 0$ quand F est polynomial réduit.

Par ailleurs, un cas particulier facile du théorème de Scorichenko¹ étendant le résultat de Betley aux bifoncteurs (auquel cas on n'obtient plus d'annulation !)

1. Cf. [26], ou [4] pour une reprise publiée de ce résultat. Mais le cas de degré nul dont on a seul besoin ici est beaucoup plus simple : sa démonstration ne nécessite aucun résultat subtil d'annulation en homologie des foncteurs.

montre que $\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_0(GL_n(\mathbb{Z}); F(\mathbb{Z}^n) \otimes \mathbf{Ab}(\mathbb{Z}^n, \Lambda^2(\mathbb{Z}^n)))$ est naturellement isomorphe à

$$(F \otimes \operatorname{Id}^\vee) \otimes_{\mathbf{ab}} \Lambda^2$$

(l'exposant \vee désignant la dualité des groupes abéliens libres) ; il s'agit donc de montrer que ce groupe est isomorphe à $F \otimes_{\mathbf{ab}} \operatorname{Id}$. Mais cela découle de la propriété exponentielle des puissances extérieures (i.e. du fait qu'elles transforment sommes directes en produits tensoriels, au sens gradué) — cf. par exemple [7], proposition 1.4.2². \square

Remarque 6.2. Alors qu'elle ne fournit qu'un résultat très partiel, la démonstration de la proposition précédente utilise beaucoup plus de résultats de théorie des groupes que celle du théorème 5.4 : l'identification de l'abélianisation des sous-groupes IA des automorphismes des groupes libres nécessite par exemple (cf. [17]) la connaissance d'un “bon” ensemble de générateurs de ces groupes. Celle-ci est ancienne (elle remonte aux travaux de Magnus des années 1930), mais absolument pas immédiate ; notre démonstration du théorème 5.4 ne nécessite même pas la connaissance d'un ensemble de générateurs des automorphismes des groupes libres. Cela illustre la puissance des méthodes d'homologie des foncteurs.

Satoh (cf. [24] et [25]) a utilisé la structure fine des groupes d'automorphismes des groupes libres à des fins homologiques ; il obtient notamment l'annulation de $H_i(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); \mathbb{Z}^n)$ pour $i = 1$ et $n \geq 4$ ou $i = 2$ et $n \geq 6$. L'avantage de ces méthodes est d'obtenir également une borne de stabilité et certains calculs instables (pour n petit), mais il semble très difficile d'obtenir l'annulation homologique stable en *tout* degré homologique, même en se cantonnant aux coefficients tordus par le foncteur d'abélianisation — annulation démontrée d'abord par Hatcher et Wahl dans [13] (avec en plus une borne de stabilité — toutefois moins bonne que celle de Satoh pour $i = 1$ ou 2) par des méthodes encore indépendantes (reposant sur des considérations de topologie et de géométrie différentielle) — par ces méthodes. Pour les coefficients tordus par la représentation duale de l'abélianisation, Satoh obtient également l'annulation de $H_2(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); (\mathbb{Z}^n)^\vee)$ pour $n \geq 6$.

Outre étendre la proposition 6.1 au cas du degré homologique supérieur à 1 en trouvant un cadre fonctoriel approprié, une question très naturelle est de comprendre la situation plus générale des *bifoncteurs* sur \mathbf{gr} , i.e. d'étudier le comportement homologique du foncteur $\mathcal{G} \xrightarrow{(i^{op}, i)} \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$ à coefficients polynomiaux. En effet, d'une part, la situation connue pour les groupes linéaires (cf. les travaux de Scorichenko susmentionnés) conduit à cette question ; d'autre part, Kawazumi a introduit dans [17] (section 4) des classes de cohomologie tordues par des bifoncteurs — provenant en fait de bifoncteurs sur \mathbf{ab} via l'abélianisation.

2. Cet article parle de groupes d'extensions ; la propriété analogue en termes de groupes de torsion est encore plus facile, a fortiori le seul degré nul dont on a ici besoin.

Références

- [1] Stanislaw Betley. Homology of $\mathrm{Gl}(R)$ with coefficients in a functor of finite degree. *J. Algebra*, 150(1) :73–86, 1992.
- [2] Stanislaw Betley. Stable K -theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.
- [3] Stanislaw Betley. Twisted homology of symmetric groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(12) :3439–3445 (electronic), 2002.
- [4] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. à paraître au *Journal of K-theory*, version prépublication disponible en ligne.
- [5] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.
- [6] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [7] Vincent Franjou. Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques. *J. Algebra*, 179(2) :501–522, 1996.
- [8] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.
- [9] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.
- [10] Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili. On the Mac Lane cohomology for the ring of integers. *Topology*, 37(1) :109–114, 1998.
- [11] Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili. Comparison of abelian categories recollements. *Doc. Math.*, 9 :41–56 (electronic), 2004.
- [12] Søren Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 173(2) :705–768, 2011.
- [13] Manfred Hartl and Christine Vespa. Quadratic functors on pointed categories. *Adv. Math.*, 226(5) :3927–4010, 2011.
- [14] Allen Hatcher. Homological stability for automorphism groups of free groups. *Comment. Math. Helv.*, 70(1) :39–62, 1995.
- [15] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Cerf theory for graphs. *J. London Math. Soc. (2)*, 58(3) :633–655, 1998.
- [16] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries. *Geom. Topol.*, 9 :1295–1336 (electronic), 2005.
- [17] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of magnus expansions. disponible sur arXiv : math.GT/0505497, 2006.
- [18] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.
- [19] Minoru Nakaoka. Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups. *Ann. of Math. (2)*, 71 :16–42, 1960.
- [20] Jakob Nielsen. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.*, 91(3-4) :169–209, 1924.

- [21] Alexandra Pettet. The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n . *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :725–740, 2005.
- [22] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :55–66, 1988.
- [23] Daniel Quillen. Higher algebraic K -theory. I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.
- [24] Takao Satoh. Twisted first homology groups of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 204(2) :334–348, 2006.
- [25] Takao Satoh. Twisted second homology groups of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 211(2) :547–565, 2007.
- [26] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring*. PhD thesis, Evanston, 2000.
- [27] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.