



HAL
open science

Une variante des cycles micro-caractéristiques pour les D-modules: aspect formel en codimension 1

Jean-Baptiste Teyssier

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Teyssier. Une variante des cycles micro-caractéristiques pour les D-modules: aspect formel en codimension 1. 2012. hal-00740931v1

HAL Id: hal-00740931

<https://hal.science/hal-00740931v1>

Preprint submitted on 11 Oct 2012 (v1), last revised 7 Mar 2015 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNE VARIANTE DES CYCLES
MICRO-CARACTÉRISTIQUES POUR LES \mathcal{D} -MODULES:
ASPECT FORMEL EN CODIMENSION 1**

par

Jean-Baptiste Teyssier

Résumé. — Dans [AS09], Abbes et Saito définissent une mesure géométrique de la ramification sauvage des faisceaux ℓ -adiques sur le point générique d'un trait complet d'égale caractéristique p , avec $p \neq \ell$. En adaptant leur construction aux modules différentiels en égale caractéristique nulle, on démontre pour un tel module \mathcal{M} une formule qui exprime cet invariant géométrique en terme des formes différentielles intervenant dans la décomposition de Levelt-Turrittin de \mathcal{M} . Lorsque le corps de base est algébriquement clos, on obtient ainsi une variante de la construction des cycles micro-caractéristiques de Laurent [Lau87].

Introduction

Inspirés par l'analyse micro-locale de Kashiwara et Schapira [KS90], Abbes et Saito [AS09] associent à tout faisceau ℓ -adique \mathcal{F} sur le point générique d'un trait complet S d'égale caractéristique p , et ce pour tout nombre rationnel $r > 0$, un nombre fini de formes différentielles tordues, généralisant ainsi en rang supérieur la construction du conducteur de Swan raffiné pour les caractères d'Artin-Schreier-Witt développée par Kato [Kat89]. Ces formes sont obtenues comme support d'un faisceau construit à partir de \mathcal{F} via des manipulations de nature géométrique, du foncteur des cycles proches et de la transformation de Fourier ℓ -adique. En particulier, ces ingrédients sont disponibles dans le cadre des \mathcal{D} -modules. Motivé par les analogies entre l'irrégularité des \mathcal{D} -modules complexes et la ramification sauvage des faisceaux ℓ -adiques en caractéristique positive, on peut donc se demander ce que donne cette construction en égale caractéristique nulle lorsqu'on remplace \mathcal{F} par un module différentiel \mathcal{M} .

Lorsque $r > 1$, on démontre dans ce travail une formule explicite 2.2.4 reliant la construction d'Abbes et Saito appliquée à \mathcal{M} aux formes différentielles de degré $\leq r - 1$ intervenant dans la décomposition de Levelt-Turrittin de \mathcal{M} . En particulier, lorsque \mathcal{M} est de pente unique $r' > 0$, le support du \mathcal{D} -module obtenu pour $r = r' + 1$ est ponctuel et correspond à l'ensemble des coefficients dominants (à multiplication par $1 - r$ près) des formes de Levelt-Turrittin attachées à \mathcal{M} . Il s'agit de l'analogie

pour les modules différentiels de [AS09, Conj. 9.3] et [AS09, Th. 9.10].

Si X est une variété complexe lisse, Y une sous-variété lisse de X et \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module, Laurent [Lau04] [Lau87] sait définir pour tout nombre rationnel $r > 0$ un fermé $\sigma_r(\mathcal{M})$ de T_Y^*X qui fournit une mesure géométrique de l'irrégularité de \mathcal{M} le long de Y . C'est la notion de cycle micro-caractéristique. Dans le cas d'un trait, $\sigma_r(\mathcal{M})$ est un diviseur à support l'ensemble des coefficients dominants des formes de Levelt-Turrittin de degré r attachées à \mathcal{M} . La contribution à $\sigma_r(\mathcal{M})$ d'une telle forme ω est la multiplicité du facteur exponentiel \mathcal{E}^ω dans la décomposition de Levelt-Turrittin de \mathcal{M} . Le théorème 2.2.4 montre en particulier que dans le cas d'un trait sur un corps algébriquement clos, la construction d'Abbes et Saito constitue une variante de la théorie de Laurent.

Pour démontrer 2.2.4, on commence en 2.3 par réduire le problème au cas où le corps de base est \mathbb{C} . Il s'agit d'une manifestation du principe de Lefschetz. La stratégie est alors de se ramener via une composée de flèches définies en section 4 à la situation où \mathcal{M} est donné sous forme décomposée tout en contrôlant à chaque étape la façon dont sont affectés les cycles proches qui interviennent dans la construction d'Abbes et Saito. Ce dernier point est l'objet de 3.2.1 et 3.4.2. On conclut alors grâce aux lemmes d'annulation de 3.5 et à un calcul explicite.

Ce texte est une partie de la thèse de l'auteur effectuée sous la direction de Claude Sabbah. Je le remercie pour avoir partagé avec moi son intuition que la construction d'Abbes et Saito devait être reliée à la théorie de Laurent, ainsi que pour m'avoir inculqué avec patience tout ce que je sais des \mathcal{D} -modules. Je remercie enfin Ahmed Abbes et Marco Hien pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail lors de son élaboration.

1. Notations et rappels

1.1. On désigne par \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, par $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de \mathbb{K} , et on note $G_{\mathbb{K}}$ le groupe de Galois de \mathbb{K} . Pour \mathbb{L} une extension de \mathbb{K} , la présence d'un indice \mathbb{L} sera synonyme de changement de base à une situation sur \mathbb{L} . Cet indice sera omis lorsque $\mathbb{L} = \mathbb{K}$.

Si X est une variété sur \mathbb{K} et P un point fermé de X , on désignera par $\mathbb{K}(P)$ le corps résiduel de P . Il s'agit d'une extension finie de \mathbb{K} .

1.2. On notera \mathfrak{F} la transformation de Fourier sur $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, et pour un point fermé P de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, on désignera par δ_P le \mathcal{D} -module Dirac en P . Dans une coordonnée y de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, le point P correspond à l'orbite sous $G_{\mathbb{K}}$ d'un scalaire $c \in \overline{\mathbb{K}}$. Si $\mu_c(y)$ est le polynôme minimal de c sur \mathbb{K} , on a par définition $\delta_P = \mathcal{D}_{\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1} / \mathcal{D}_{\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1} \mu_c(y)$.

1.3. Soit \mathcal{M} un $\mathbb{K}((x))$ -module différentiel. On rappelle que le théorème de Levelt-Turrittin [SV00] assure l'existence d'un entier m et d'une extension galoisienne finie \mathbb{L} de \mathbb{K} tels que

$$(1.3.1) \quad \mathbb{L}((t)) \otimes_{\mathbb{K}((x))} \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\omega \in \mathbb{L}[\frac{1}{t}]^{\frac{1}{t}}} \mathcal{E}^\omega \otimes \mathcal{R}_\omega$$

avec $t = x^{1/m}$, $\mathcal{E}^\omega = (\mathbb{L}((t)), d + d\omega)$ et \mathcal{R}_ω régulier de rang noté n_ω . Le plus petit entier m tel que (1.3.1) ait lieu est l'indice de ramification de \mathcal{M} . On le notera $m_{\mathcal{M}}$.

Pour un nombre rationnel $r > 0$, on note $\Omega_r(\mathcal{M})$ le fermé de $\mathbf{V}(\mathbb{K}(t))$ constitué des polynômes en $1/t$ de degré r par rapport à la variable x apportant une contribution non-nulle dans (1.3.1), et $\Omega_{<r}(\mathcal{M})$ pour $\sqcup_{r' < r} \Omega_{r'}(\mathcal{M})$. On aura à considérer l'application

$$t_r : \mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{K} \frac{1}{x^r})$$

associant à ω son monôme de degré r en la variable x , ainsi que l'application

$$c_r : \mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{K})$$

qui associe à ω le coefficient de $t_r(\omega)$.

1.4. Soit $p : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques lisses sur \mathbb{K} . Soit Z une sous-variété de X et \mathcal{M} une connexion sur X méromorphe le long de Z . Alors, on sait que l'image inverse $p^+ \mathcal{M}$ de \mathcal{M} par p admet $p^* \mathcal{M}$ pour \mathcal{O}_Y -module sous-jacent. Si on suppose que p est étale au-dessus de $U = X \setminus Z$, alors pour une connexion \mathcal{N} méromorphe le long de $f^{-1}(Z)$, le \mathcal{O}_X -module sous-jacent à $p_+ \mathcal{M}$ est $p_* \mathcal{N}$. Dans ces conditions, le morphisme d'adjonction $\mathcal{M} \rightarrow p_+ p^+ \mathcal{M}$ est l'adjonction usuelle des \mathcal{O}_X -modules.

2. La construction d'Abbes et Saito

2.1. Prologue géométrique. — On rappelle ici le nécessaire concernant la notion de dilatation. Pour une exposition plus circonstanciée, on pourra se reporter à [AS09].

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas, D un sous-schéma fermé de X défini par un faisceau d'idéaux \mathcal{I} et E un sous-schéma fermé de $f^{-1}(D)$ défini par un faisceau d'idéaux \mathcal{J} sur Y . Alors $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{J}$, de sorte qu'on dispose d'un morphisme de \mathcal{O}_Y -algèbres graduées

$$(2.1.1) \quad \theta : f^*(\oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{I}^n) \longrightarrow \oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{J}^n.$$

Notons \tilde{Y}_E (resp. \tilde{X}_D) l'éclaté de Y le long de E (resp. D). Si $\mathfrak{p} \in \tilde{Y}_E$, alors $\theta^{-1}(\mathfrak{p})$ détermine un élément de $\tilde{X}_D \times_X Y = \text{Proj } f^*(\oplus_{\mathbb{N}} \mathcal{I}^n)$ si et seulement si \mathfrak{p} est dans l'un des ouverts $D_+(\theta(x))$ de $\tilde{X}_D \times_X Y$, avec $x \in \mathcal{I}$ vu dans l'algèbre source comme élément de degré 1. On en déduit que $\cup_{x \in \mathcal{I}} D_+(\theta(x))$ est le plus grand ouvert de \tilde{Y}_E , noté $Y_{(D)}$ sur lequel θ induit un morphisme de schémas $Y_{(D)} \rightarrow \tilde{X}_D \times_X Y$.

Définition 2.1.2. — On appelle $Y_{(D)}$ la dilatation de Y en E par rapport à D .

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas localement noethériens et $g : X \rightarrow Y$ une section de f . Le morphisme g est alors une immersion fermée. Soit D un sous-schéma fermé de X , de complémentaire U et $i : D \rightarrow X$ l'injection canonique. Notons encore

Puisque g est une section de f , f^\sharp fournit un scindage

$$(2.1.6) \quad \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \xrightarrow{\sim} i^* \mathcal{N}_{X/Y}^\vee \oplus \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 .$$

Supposons de plus que g soit une immersion régulière. Alors, $g \circ i$ est aussi régulière et on a suivant [GD67, 16.9.3] une identification canonique $\mathrm{Sym} \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}$, d'où une identification $E_{[D]} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)$. Soit U un ouvert affine de X sur lequel D est défini par une équation $t = 0$, avec t uniquement déterminé à un inversible près du fait que D est un diviseur de Cartier. Avec les notations de 2.1.1, $E_{(D)|U} = E_{[D]|U} \cap D_+(\theta(t)) = D_+([f^\sharp(t)])$, avec $[f^\sharp(t)] \in \mathrm{Sym}(\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)$ de degré 1. Donc à travers l'identification (2.1.6), $\mathfrak{p} \in E_{[D]|U}$ définit un élément de $E_{(D)|U}$ si et seulement si \mathfrak{p} ne contient pas $0 \oplus [t] \in \mathrm{Sym}(i^* \mathcal{N}_{X/Y}^\vee \oplus (t)/(t^2))$ vu en degré 1, soit encore que \mathfrak{p} est d'intersection nulle avec le facteur $(t)/(t^2)$ placé en degré 1. Or $\mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \simeq i^* \mathcal{O}_X(-D) := \mathcal{O}_D(-D)$ est un fibré en droite sur D , donc le morphisme canonique $\mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \otimes \mathcal{O}_D(D)$ est un isomorphisme local. Puisque la construction Proj est locale sur D , on en déduit une identification canonique

$$E_{[D]} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \otimes \mathcal{O}_D(D)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(i^* \mathcal{N}_{X/Y}^\vee \otimes \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_D).$$

A travers cette identification $E_{(D)}$ correspond aux $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}(i^* \mathcal{N}_{X/Y}^\vee \otimes \mathcal{O}_D(D) \oplus \mathcal{O}_D)$ ne rencontrant pas le facteur \mathcal{O}_D placé en degré 1. C'est donc selon [GD61, 8.4.1] le fibré vectoriel $\mathbf{V}(i^* \mathcal{N}_{X/Y}^\vee \otimes \mathcal{O}_D(D))$. Du fait de l'identification $\mathcal{N}_{X/Y}^\vee \simeq g^*(\Omega_{Y/X}^1)$, on a obtenu

Proposition 2.1.7 (interprétation différentielle de la fibre spéciale du dilaté)

Avec les notations de 2.1.4, si on suppose de plus que D est un diviseur de Cartier et que g est une immersion régulière, alors on a une identification canonique

$$E_{(D)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}((g \circ i)^* \Omega_{Y/X}^1 \otimes \mathcal{O}_D(D)) .$$

2.2. Enoncé du théorème. — Soit S un trait complet sur \mathbb{K} . Le choix d'une uniformisante x de S induit une identification $S \simeq \mathrm{Spec} \mathbb{K}[[x]]$. Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers. On pose $r = k/n$, $t = x^{1/n}$ et on note D_k le diviseur de degré k de $S_n = \mathrm{Spec} \mathbb{K}[[t]]$. Soient s_n le point fermé de S_n , η_n son point générique et $\gamma_n : S_n \rightarrow S$ le morphisme canonique d'élevation à la puissance n . Soit $S_{1,n}$ le complété de $S \times S_n$ en l'origine. Le graphe de γ_n induit une immersion fermée $\Gamma_n : S_n \rightarrow S_{1,n}$. Pour la structure de S_n -schéma sur $S_{1,n}$ donnée par la seconde projection, on définit $S_{1,n}(D_k)$ comme le dilaté de $S_{1,n}$ en $\Gamma_n(D_k)$ relativement à D_k . On en déduit suivant 2.1.4 le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} T_{D_k} & \xrightarrow{i_{n,k}} & S_{1,n}(D_k) & \xleftarrow{j_{n,k}} & S \times \eta_n \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \\ D_k & \xrightarrow{i_k} & S_n & \xleftarrow{} & \eta_n \end{array}$$

avec une identification canonique

$$T_{D_k} \xrightarrow{\sim} (\Gamma_n \circ i_k)^* \Omega_{S_{1,n}/S_n}^1 \otimes \mathcal{O}_{D_k}(D_k) .$$

Concrètement, $\Gamma_n(D_k)$ est le sous-ensemble algébrique de $S_{1,n}$ donné par l'idéal $\mathcal{J} = (x - t^n, t^k)$. Le choix des variables $y_0 = x - t^n$ et $y_1 = t^k$ placées en degré 1 fournit une présentation de l'algèbre éclatée de $S_{1,n}$ en \mathcal{J} , soit encore un plongement du schéma associé dans $S_{1,n} \times \mathbb{P}^1$. Suivant 2.1, le dilaté $S_{1,n}(D_k)$ en est l'ouvert affine $y_1 \neq 0$, donné dans $S_{1,n} \times \mathbb{A}^1$ par l'équation $x - t^n - t^k y = 0$, où l'on a posé $y = y_0/y_1$. D'autre part, le choix des coordonnées x et t fournit les identifications

$$\Omega_{S_{1,n}/S_n}^1 \simeq \mathbb{K}[[x, t]] \cdot dx \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{S_n}(D_k) \simeq \mathbb{K} \cdot \frac{1}{t^k} .$$

Donc d'après 2.1.7, on peut identifier le réduit T_r de T_{D_k} à la droite vectorielle sur \mathbb{K} de base le symbole $\frac{dx}{x^r}$ ⁽¹⁾. Relions ce symbole au choix de la coordonnée y sur $S_{1,n}(D_k)$. Dans la situation présente, la suite exacte (2.1.5) s'explique en

$$0 \longrightarrow (x - t^n)/((x - t^n)^2, t^k(x - t^n)) \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow (t^k)/(t^k)^2 \longrightarrow 0 ,$$

de sorte que (2.1.6) devient $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \simeq (y_0) \oplus (y_1)$. Via l'isomorphisme $\mathcal{N}_{S_n/S_{1,n}}^\vee \simeq \Gamma_n^* \Omega_{S_{1,n}/S_n}^1$, la coordonnée y_0 correspond à la classe de la forme différentielle $d(x - t^n)$, soit encore la classe de dx . On en déduit que, vu dans

$$(2.2.2) \quad T_r = \mathbf{V}((\Gamma_n \circ i_k^{\text{red}})^* \Omega_{S_{1,n}/S_n}^1 \otimes \mathcal{O}_{S_n}(D_k)),$$

la coordonnée $y = y_0/y_1$ correspond à la trivialisaton $\frac{dx}{x^r}$. C'est par rapport à cette coordonnée privilégiée du fibré T_r que se feront tous les calculs.

Soit \mathcal{M} un $\mathbb{K}((x))$ -module différentiel. Le protagoniste de cet article est le \mathcal{D} -module sur $S_{1,n}(D_k)$

$$H_{n,k}(\mathcal{M}) := j_{k,n+} \mathcal{H}om(p_2^+ \gamma_n^+ \mathcal{M}, p_1^+ \mathcal{M}),$$

où $p_1 : S \times \eta_n \rightarrow S$ et $p_2 : S \times \eta_n \rightarrow \eta_n$ sont les projections canoniques. Soit $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$. Notons $[\omega]$ l'image de ω par la composée

$$\mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \xrightarrow{c_{r-1}} \mathbf{V}(\mathbb{K}) \xrightarrow{(1-r) \times} \mathbf{V}(\mathbb{K} \cdot y^\vee) \simeq T_r^\vee .$$

Il s'agit d'un point fermé de T_r^\vee .

Lemme 2.2.3. — *Le point $[\omega]$ est indépendant du choix des uniformisantes x et t .*

⁽¹⁾Dans [AS09], le foncteur des cycles proches est considéré comme à valeur dans la catégorie dérivée des faisceaux sur $T_{D_k, \text{ét}}$. Le fibré T_{D_k} est un schéma sur D_k , non réduit en général. Par invariance du site étale par homéomorphisme universel [Gro63, Exp VIII], on peut tout aussi bien se placer sur le réduit $T_{D_k}^{\text{red}}$ qui est un schéma sur le point fermé s_n de S_n . C'est le point de vue qui doit être adopté lorsqu'on considère les cycles proches pour les \mathcal{D} -modules.

Démonstration. — Soit en effet $x' = f(x)x$, $f(0) \neq 0$ et $t' = g(t)t$, $g(0) \neq 0$ un autre choix d'uniformisantes de S et S_n respectivement, avec $g(t)^n = f(t^n)$. D'après (2.2.2), on a les égalités suivantes dans $\overline{\mathbb{K}}[T_r, \overline{\mathbb{K}}]$

$$y' = \frac{dx'}{x'^r} = \frac{f(0)}{g(0)^k} \frac{dx}{x^r} = g(0)^{n-k} y,$$

d'où on déduit que $y^\vee = y^\vee / g(0)^{n-k}$. Soit $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ et soit $\tilde{\omega}$ un $\overline{\mathbb{K}}$ -point de $\Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ au-dessus de ω . La relation

$$t_{r-1}(\tilde{\omega}) = \frac{c_{r-1}(\tilde{\omega})}{x^{r-1}} = \frac{g(t)^{k-n} c_{r-1}(\tilde{\omega})}{x'^{r-1}}$$

assure que $c_{r-1}(\tilde{\omega})' = g(t)^{k-n} c_{r-1}(\tilde{\omega})$. On a donc dans $\overline{\mathbb{K}}[T_r, \overline{\mathbb{K}}]$ les égalités d'idéaux

$$(y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\tilde{\omega})') = g(0)^{k-n} (y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\tilde{\omega})) = (y^\vee + (r-1)c_{r-1}(\tilde{\omega})).$$

□

Notons ψ_π le foncteur des cycles proches par rapport à π pour les modules holonomes sur $S_{1,n}(D_k)$. Le but de ce texte est de démontrer le

Théorème 2.2.4. — *On suppose que $r > 1$. Alors, le \mathcal{D}_{T_r} -module $\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ ne dépend de n et k que par l'intermédiaire de r , et avec les notations de 1.3 on a la formule*

$$(2.2.5) \quad \mathfrak{F}\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) = \delta_0^{n_{<r-1}^2} \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \delta_{[\omega]}^{[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}([\omega])] n_\omega^2},$$

où $n_{<r-1}^2$ est l'entier $\sum_{\omega \in \Omega_{<r-1}(\mathcal{M})} n_\omega^2$.

Remarque 2.2.6. — Soit R un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique p , d'idéal maximal \mathfrak{M} et de corps résiduel F , supposé de type fini sur un corps parfait. On note K le corps de fraction de R . Soit $S = \text{Spec } R$ le trait complet associé à R et η_S son point générique. On se donne un entier n multiple de p , un caractère $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et pour un nombre premier $\ell \neq p$, on fixe une injection $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$. On note encore $\chi : G_K \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ le caractère induit, et \mathcal{F} le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -faisceau étale associé sur η_S .

Si le conducteur de Swan $\text{sw}(\chi)$ de \mathcal{F} vérifie $\text{sw}(\chi) > 1$, Abbes et Saito démontrent [AS09, Th. 9.10] que le support de $\mathfrak{F}\psi H_{1, \text{sw}(\chi)+1}(\mathcal{F})$ est réduit à la forme différentielle tordue

$$\text{rsw}(\chi) : F \longrightarrow \Omega_R^1 \otimes_R (\mathfrak{M}^{-\text{sw}(\chi)-1} / \mathfrak{M}^{-\text{sw}(\chi)})$$

donnée par la théorie de la ramification des caractères d'Artin-Schreier-Witt de Kato [AS09, 10]. Le théorème 2.2.4 pour \mathcal{M} de type exponentiel en est l'exact analogue.

Quant à la finitude du support de $\mathfrak{F}\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ en général (et le fait que celui-ci ne rencontre pas l'origine lorsque \mathcal{M} est purement de pente $r' > 0$ et $r = r' + 1$ dans 2.2.4), il s'agit de l'analogue de [AS09, Conj. 9.3], démontrée dans *loc. it.* lorsque F est parfait.

Remarque 2.2.7. — Puisque la construction fait aussi sens lorsque $k \leq n$, on peut se demander ce qu'elle donne dans ce cas. On montre en A.1 qu'il n'y a pas grand chose à en attendre, puisque dans le cas particulier le plus simple où \mathcal{M} est décomposé, on a toujours $\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq 0$.

2.3. Réduction au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. — Il va s'agir d'une application du principe de Lefschetz. Soit \mathbb{L} une extension de \mathbb{K} , $\overline{\mathbb{L}}$ une clôture algébrique de \mathbb{L} et $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de \mathbb{K} dans $\overline{\mathbb{L}}$. Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{K}((x))\text{-mod}$.

Proposition 2.3.1. — *La formule (2.2.5) est vraie pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$ si et seulement si elle est vraie pour \mathcal{M} .*

Démonstration. — On commence par observer que les manipulations géométriques intervenant dans la construction d'Abbes et Saito (2.2.1) commutent à l'extension des scalaires, de même que les foncteurs ψ_π et \mathfrak{F} .

Supposons que (2.2.5) soit vraie pour \mathcal{M} et considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(\mathbb{L}(t)) & \longrightarrow & \mathbf{V}(\mathbb{K}(t)) \\ \downarrow [\]_{\mathbb{L}} & & \downarrow [\] \\ T_{r,\mathbb{L}}^{\vee} & \longrightarrow & T_r^{\vee} \end{array}$$

On a

$$(2.3.2) \quad \mathfrak{F}\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}}) = \delta_0^{n^2 < r-1} \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \bigoplus_{P_\omega \in [\omega] \times_{\mathbb{K}} \mathbb{L}} \delta_{P_\omega}^{[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}([\omega])]n_\omega^2}.$$

Soient $\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})$ et $P_\omega \in [\omega] \times_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. Puisque le degré d'un morphisme fini et plat est préservé par changement de base, le degré de la restriction de $[\]_{\mathbb{L}}$ à $P_\omega \times_{[\omega]} \omega$ est

$$(2.3.3) \quad [\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}([\omega])] = \sum_{\omega' \in P_\omega \times_{[\omega]} \omega} [\mathbb{L}(\omega') : \mathbb{L}([\omega']_{\mathbb{L}})].$$

En développant les termes de (2.3.2) grâce à (2.3.3), on observe que la somme triple que l'on obtient se fait sur l'ensemble d'indice $\Omega_{r-1}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}} = \Omega_{r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})$. Vue de cette façon, elle s'explicite en

$$\mathfrak{F}\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}}) = \delta_0^{n^2 < r-1} \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M}_{\mathbb{L}})} \delta_{[\omega]_{\mathbb{L}}}^{[\mathbb{L}(\omega) : \mathbb{L}([\omega]_{\mathbb{L}})]n_\omega^2},$$

qui est exactement la formule (2.2.5) pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$.

Supposons réciproquement que (2.2.5) est vraie pour $\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$, à savoir

$$(2.3.4) \quad \mathfrak{F}\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}} \simeq \delta_0^{n^2 < r-1} \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})_{\mathbb{L}}} \delta_{[\omega]_{\mathbb{L}}}^{[\mathbb{L}(\omega) : \mathbb{L}([\omega]_{\mathbb{L}})]n_\omega^2}.$$

D'après la preuve du sens direct de 2.3.1, il suffit d'appliquer à $\mathcal{N}_1 = \mathfrak{F}\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$

et $\mathcal{N}_2 = \delta_0^{n^2 < r-1} \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})} \delta_{[\omega]}^{[\mathbb{K}(\omega) : \mathbb{K}([\omega])]n_\omega^2}$ le lemme suivant :

Lemme 2.3.5. — Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, et \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension quelconque de \mathbb{K} . Soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}$. On suppose que $\mathcal{N}_{1,\mathbb{L}} \simeq \mathcal{N}_{2,\mathbb{L}}$. Alors $\mathcal{N}_1 \simeq \mathcal{N}_2$.

Considérons comme point à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ un point non singulier a pour \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 . Ce choix correspond à une coordonnée sur $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \setminus \{a\}$, par rapport à laquelle on considérera la transformation de Fourier \mathfrak{F} . Puisque \mathfrak{F} est une équivalence de catégorie qui commute à l'extension des scalaires, il suffit de démontrer le résultat pour $\mathcal{N}'_1 = \mathfrak{F}\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}'_2 = \mathfrak{F}\mathcal{N}_2$. En particulier, on peut supposer d'après [Mal91, chap. V §1] que les \mathcal{N}'_i ont pour seules singularités 0 et ∞ , avec 0 comme singularité régulière, de sorte que par [Kat87, Th. 2.4.10], il suffit de démontrer 2.3.5 au point générique de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1, a}$.

Soient donc $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathbb{K}(x)\text{-mod}$ et f un isomorphisme entre $\mathcal{N}_{1,\mathbb{L}}$ et $\mathcal{N}_{2,\mathbb{L}}$. En considérant la clôture algébrique de \mathbb{K} dans \mathbb{L} , on se ramène à traiter séparément le cas où \mathbb{L}/\mathbb{K} est purement transcendante, et le cas où \mathbb{L}/\mathbb{K} est algébrique.

Plaçons-nous dans la première situation, et soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de transcendance de \mathbb{L} sur \mathbb{K} . Par hypothèse $\det f \in \mathbb{K}[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ est non nul, donc puisque \mathbb{K} est infini on peut toujours évaluer les x_{i_j} en des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ choisis de telle sorte que $(\det f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit non nul. Alors $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ convient.

On suppose \mathbb{L}/\mathbb{K} algébrique. En considérant l'extension galoisienne engendrée par les coefficients des polynômes de Laurent intervenant dans l'écriture de f dans des bases choisies, on est ramené au cas où \mathbb{L}/\mathbb{K} est galoisienne finie. Alors 2.3.5 est conséquence de la théorie de Galois. \square

Soit \mathcal{N} un modèle algébrique de \mathcal{M} . Un tel modèle existe d'après [Kat87, Th. 2.4.10]. Soit \mathbb{K}'/\mathbb{Q} l'extension de \mathbb{Q} engendrée par les coefficients des polynômes de Laurent intervenant dans la matrice de ∂_x dans une base B choisie de \mathcal{N} . Si on note $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$ le $\mathbb{K}'((x))$ -module différentiel que le choix de base B définit, le lemme 2.3.1 assure qu'il suffit de prouver 2.2.4 pour $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$. Puisque le degré de transcendance de \mathbb{K}'/\mathbb{Q} est fini, on peut se donner un plongement de \mathbb{K}' dans \mathbb{C} . Via ce choix de plongement, on se ramène toujours par 2.3.1 à démontrer 2.2.4 pour le module différentiel complexe qui se déduit de $\mathcal{N}_{\mathbb{K}'}$ par extension des scalaires.

Dans toute la suite, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la coordonnée $y = \frac{dx}{x^r}$ de T_r , il s'agit donc de démontrer

$$(2.3.6) \quad \psi_{\pi} H_{n,k}(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_{T_r}^{n^2 < r-1} \bigoplus_{\omega \in \Omega_{r-1}(\mathcal{M})} (\mathcal{O}^{-(r-1)c_{r-1}(\omega)y})_{\omega}^{n^2}.$$

3. Quelques lemmes sur les cycles proches

3.1. Le cas complexe. Généralités et exemples. — Pour les rudiments concernant les cycles proches pour les \mathcal{D} -modules, on pourra consulter [MM04]. Dans toute cette section X , désigne une variété lisse sur \mathbb{C} , $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme lisse de fibre

spéciale $Y = f^{-1}(0)$, $i : Y \rightarrow X$ l'inclusion de Y dans X et \mathcal{I} l'idéal de définition de Y . Soit

$$V_k(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X, P(\mathcal{I}^l) \subset \mathcal{I}^{l+k} \quad \forall l \in \mathbb{Z}\}$$

la V -filtration de \mathcal{D}_X , et soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module spécialisable le long de Y (par exemple un module holonome). Alors par définition, on dispose pour toute V -filtration U , localement image à décalage près de $V_*(\mathcal{D}_X)^p$ par une surjection locale $\mathcal{D}_X^p \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ (c'est la propriété de bonté d'une V -filtration) d'un unique polynôme unitaire b_U vérifiant pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$b_U(t\partial_t + k)U_k \in U_{k-1},$$

avec t équation locale de Y . On dit que b_U est le *polynôme de Bernstein* de $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Il est indépendant du choix de l'équation locale de Y . Puisqu'un sous-module d'un module spécialisable est encore spécialisable, on peut définir pour $m \in \mathcal{M}$ le polynôme de Bernstein de m comme le polynôme de Bernstein de la bonne V -filtration $V_*(\mathcal{D}_X)m$ sur $\mathcal{D}_X m$. On notera b_m ce polynôme, et $\text{ord}_Y(m)$ l'ensemble de ses racines.

Soit \geq l'ordre l'exicographique sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit

$$V_a(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \text{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \geq -a - 1\}\}$$

et

$$V_{<a}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}, \text{ord}_Y(m) \subset \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha > -a - 1\}\}.$$

D'après [MM04, Prop. 4.3-5], $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k \in \mathbb{Z}}$ (resp. $(V_{<a+k}(\mathcal{M}))_{k \in \mathbb{Z}}$) est l'unique bonne V -filtration de \mathcal{M} dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans l'intervalle $[-a-1, -a[$ (resp. $] -a-1, -a[$). Si $\psi_{f,a}\mathcal{M}$ désigne la quotient $V_a(\mathcal{M})/V_{<a}(\mathcal{M})$, on pose

$$(3.1.1) \quad \psi_f \mathcal{M} := \bigoplus_{-1 \leq a < 0} \psi_{f,a} \mathcal{M}.$$

Exemple 3.1.2. — Soit \mathcal{E} une connexion algébrique sur X . Alors, on a une identification canonique $\psi_f \mathcal{E} \simeq i^+ \mathcal{E}$.

Démonstration. — Soit U un ouvert de trivialisations de \mathcal{E} et (s_i) une trivialisations locale de \mathcal{E} sur U . Par lissité de f , on peut toujours choisir U de telle sorte que Y soit le lieu d'annulation d'une coordonnée t . Alors $V_k := \sum V_k(\mathcal{D}_U)s_i$ est une bonne V -filtration de \mathcal{E} sur U . Or par définition de \mathcal{E} , $t\partial_t s = t \sum f_i s_i \in V_{-1}$, de sorte que le polynôme de Bernstein $b_V = b_V(t\partial_t)$ de V divise $t\partial_t$. Mais b_V ne peut être constant, car sinon les s_i s'annuleraient dans les fibres de \mathcal{E} au-dessus de Y . Ainsi $b_V = t\partial_t$ et on a donc $V_a(\mathcal{E}) = V_0 = \sum V_0(\mathcal{D}_U)s_i = \mathcal{E}$ sur U pour $-1 \leq a < 0$, et $V_{<a}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ sur U pour $-1 < a < 0$. D'autre part, $(V_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$ admet $t\partial_t - 1$ pour polynôme de Bernstein, donc $V_{<-1}(\mathcal{E}) = V_{-1} = t \sum V_0(\mathcal{D}_U)s_i = t\mathcal{E}$. Par définition de ψ_f , on en déduit une identification $\psi_f \mathcal{E} \simeq i^+ \mathcal{E}$ indépendante des choix faits, d'où le résultat. \square

On dispose du résultat plus général

Proposition 3.1.3. — Soit \mathcal{E} une connexion algébrique sur X et \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome. Alors, on a une identification canonique $\psi_f(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) \simeq i^+ \mathcal{E} \otimes \psi_f \mathcal{M}$.

Démonstration. — Soit V une bonne filtration sur \mathcal{M} . Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$U_k = \mathcal{E} \otimes V_k.$$

Montrons qu'il s'agit d'une bonne V -filtration de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. On va pour cela utiliser le critère [MM04, Prop. 4.1–9].

Pour $k \in \mathbb{Z}$, il faut commencer par montrer la $V_0(\mathcal{D}_X)$ -cohérence de U_k . Puisque $V_0(\mathcal{D}_X)$ est un faisceau d'anneaux localement nothérien et cohérent [MM04, Prop. 4.1-5], il suffit de montrer la finitude locale de U_k sur $V_0(\mathcal{D}_X)$. Soit m_1, \dots, m_n un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$ -générateurs locaux de V_k et e_1, \dots, e_n un système de \mathcal{O}_X -générateurs locaux de \mathcal{E} . On va montrer que les $e_i \otimes m_j$ forment un système de $V_0(\mathcal{D}_X)$ -générateurs locaux de U_k . On se donne $e \in \mathcal{E}$, f_1, \dots, f_n les coefficients de e dans la base des (e_i) , et $m \in V_k$. Pour $P \in V_0(\mathcal{D}_X)$, on désigne par $d(P)$ l'ordre de P . On pose alors

$$d_m = \text{Min}\{\text{Max}(d(P_j)), m = \sum P_j m_j \text{ avec } P_j \in V_0(\mathcal{D}_X)\}.$$

Il faut montrer que

$$(3.1.4) \quad e \otimes m \in \sum V_0(\mathcal{D}_X) \cdot (e_i \otimes m_j).$$

On raisonne par récurrence sur d_m , le cas $d_m = 0$ découlant du fait que le produit tensoriel envisagé est pris sur \mathcal{O}_X . Si $d_m > 0$, on choisit des opérateurs P_j qui réalisent d_m et on écrit

$$\sum P_j(e \otimes m_j) = e \otimes m + \sum Q_{ij}e \otimes R_{ij}m_j$$

avec $d_{R_{ij}m_j} < d_m$, de sorte que l'hypothèse de récurrence s'applique à $Q_{ij}e \otimes R_{ij}m_j$. Puisque

$$\sum P_j(e \otimes m_j) = \sum P_j f_i(e_i \otimes m_j) \in \sum V_0(\mathcal{D}_X) \cdot (e_i \otimes m_j),$$

on en déduit que (3.1.4) est vraie, d'où la $V_0(\mathcal{D}_X)$ -cohérence de U_k .

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(3.1.5) \quad V_{k_0+k} = V_k(\mathcal{D}_X)V_{k_0} \quad \text{et} \quad V_{-k_0-k} = V_{-k}(\mathcal{D}_X)V_{-k_0}.$$

Montrons que U vérifie les identités analogues. Le cas $k = 0$ étant immédiat puisque $V_0(\mathcal{D}_X)$ contient la fonction unité, on peut supposer $k > 0$. Il suffit alors de démontrer

$$(3.1.6) \quad U_{k_0+k} = U_{k_0+k-1} + \partial_t U_{k_0+k-1} \quad \text{et} \quad U_{-k_0-k} = tU_{-k_0-k+1}.$$

Seules les inclusions directes posent a priori problème. La seconde relation de (3.1.6) découle immédiatement de (3.1.5) du fait que le produit tensoriel envisagé est pris sur \mathcal{O}_X . Prouvons la première relation. Soit $e \in \mathcal{E}$ et $m \in V_{k_0+k}$. On choisit $m_1, m_2 \in V_{k_0+k-1}$ tels que $m = m_1 + \partial_t m_2$. Alors

$$e \otimes m = e \otimes m_1 + \partial_t(e \otimes m_2) - (\partial_t e) \otimes m_2 \in U_{k_0+k-1} + \partial_t U_{k_0+k-1},$$

d'où (3.1.6), et par suite U est une bonne V -filtration.

En particulier pour $a \in \mathbb{C}$, $U_k = \mathcal{E} \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ définit une bonne filtration de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. Pour $e \in \mathcal{E}$ et $m \in V_{a+k}(\mathcal{M})$, on a par lissité de \mathcal{E}

$$b_{V_{a+k}(\mathcal{M})}(t\partial_t + k)(e \otimes m) \in e \otimes b_{V_{a+k}(\mathcal{M})}(t\partial_t + k)m + U_{k-1} \subset U_{k-1}.$$

On en déduit que b_U divise $b_{V_{a+}(\mathcal{M})}$, donc $V_a(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{E} \otimes V_a(\mathcal{M})$. De même $V_{<a}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = \mathcal{E} \otimes V_{<a}(\mathcal{M})$ et 3.1.3 découle alors de la \mathcal{O}_X -platitude de \mathcal{E} . \square

Si Y est non lisse, les résultats de [MM04] ne s'appliquent pas tels quels. On peut néanmoins toujours définir des cycles proches dans ce cas en plongeant X dans $X \times A_{\mathbb{C}}^1$ via l'application graphe de f notée $\Gamma(f)$, puis en prenant les cycles proches suivant la projection par rapport au second facteur. On obtient alors un \mathcal{D} -module à support dans X et dans le cas où Y lisse on retrouve bien la définition initiale. Par exemple, si on se donne $n > 0$, ψ_f est relié à ψ_{f^n} de la façon suivante

Proposition 3.1.7. — *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a une identification canonique*

$$\psi_{f^n, a} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} i_+ \psi_{f, na} \mathcal{M} .$$

Pour une preuve de ce résultat, voir [Sab05, Prop. 3.3.13].

3.2. Compatibilité à la formalisation. — Les cycles proches sont compatibles à la formalisation le long de Y , c'est l'objet de la

Proposition 3.2.1. — *Soit $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{C}$ la formalisation de f le long de Y . Alors, pour tout \mathcal{D}_X -module spécialisable \mathcal{M} , le $\mathcal{D}_{\widehat{X}}$ -module $\widehat{\mathcal{M}}$ est spécialisable et on a une identification canonique $\psi_f \mathcal{M} \simeq \psi_{\widehat{f}} \widehat{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. — Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons $U_k = \widehat{\mathcal{O}}_X \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ et montrons qu'il s'agit de $V_{a+k}(\widehat{\mathcal{M}})$. On commence par établir la bonté de U . Dire que $(V_{a+k}(\mathcal{M}))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une bonne V -filtration de \mathcal{M} sur X , c'est dire qu'on dispose localement d'une surjection $\mathcal{D}_X^p \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ pour laquelle $V_{a+}(\mathcal{M})$ est à décalage près la filtration image de $V_*(\mathcal{D}_X)^p$. Par tensorisation par $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$, il suffit de prouver qu'à travers l'identification canonique $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes \mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_{\widehat{X}}$, l'espace $\mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes V_k(\mathcal{D}_X)$ correspond à $V_k(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$. Ceci découle immédiatement du fait que si (x, t) sont des coordonnées locales avec Y définie par $t = 0$, alors $V_k(\mathcal{D}_X)$ et $V_k(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$ sont les faisceaux localement libres (sur X et \widehat{X} respectivement) engendrés par les $t^{-k} \partial_x^i (t \partial_t)^j$ si $k < 0$ et les $\partial_x^i \partial_t^l (t \partial_t)^j$, $0 \leq l \leq k$ si $k \geq 0$.

Soit b le polynôme de Bernstein de $V_a(\mathcal{M})$, $m \in V_{a+k}(\mathcal{M})$ et $f \in \mathcal{O}_{\widehat{X}}$. On a

$$\begin{aligned} t \partial_t (f \otimes m) &= \partial_t f \otimes tm + f \otimes t \partial_t m \\ &\equiv f \otimes t \partial_t m \quad (U_{k-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b(t \partial_t + k)(f \otimes m) &\equiv f \otimes b(t \partial_t + k)m \quad (U_{k-1}) \\ &\equiv 0 \quad (U_{k-1}), \end{aligned}$$

donc le polynôme de Bernstein de U divise b , et ainsi il vient $V_{a+k}(\widehat{\mathcal{M}}) = \mathcal{O}_{\widehat{X}} \otimes V_{a+k}(\mathcal{M})$ pour tout k . On conclut alors par platitude de $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ sur \mathcal{O}_X . \square

3.3. Une définition générale. — On considère une variété X lisse sur \mathbb{K} et Y une sous-variété lisse de X donnée comme lieu des zéros d'une fonction f . Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonome, et $\sigma : \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$ une section de la projection $\overline{\mathbb{K}} \rightarrow \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z}$ telle que la classe de 0 soit envoyée sur 1.

D'après [Ber], il fait sens de définir $V_k^\sigma(\mathcal{M})$ comme le sous-faisceau de \mathcal{M} constitué des éléments m dont l'image dans $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{K}}}$ admet un polynôme de Bernstein à racines dans $\sigma(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{Z}) + \mathbb{N}$. Comme dans le cas complexe, on dispose d'un second point de vue sur $V_k^\sigma(\mathcal{M})$: en mimant les propositions 4.2-6 et 4.3-5 de [MM04], on obtient en effet le

Lemme 3.3.1. — *La filtration $V_\bullet^\sigma(\mathcal{M})$ est l'unique bonne V -filtration de \mathcal{M} dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans l'image de σ .*

Suivant [MM04, Prop 4.3.9], on est amené à définir

$$\psi_f \mathcal{M} := V_{-1}(\mathcal{M})/V_{-2}(\mathcal{M}).$$

Cette définition est indépendante du choix de σ à isomorphisme non canonique près. Comme application immédiate de 3.3.1, on observe que le foncteur ψ_f commute à l'extension des scalaires.

3.4. Cycles proches et action par un groupe fini. — Dans toute cette section, on se donne une variété lisse complexe Y munie d'une action admissible d'un groupe fini G . Soit $X = Y/G$, $p : Y \rightarrow X$ le morphisme de projection et Z une hypersurface lisse de X donnée comme lieu d'annulation d'une fonction régulière f . On suppose p étale au-dessus de $U = X \setminus Z$, et on se donne un \mathcal{D}_X -module holonome \mathcal{M} localisé le long de Z , à savoir $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(*Z)$.

Pour $g \in G$, le morphisme d'adjonction $p^+ \mathcal{M} \rightarrow g_+ g^+ p^+ \mathcal{M} \simeq g_+ p^+ \mathcal{M}$ induit une action $g_{\mathcal{M}} : p_+ p^+ \mathcal{M} \rightarrow p_+ p^+ \mathcal{M}$ de g sur $p_+ p^+ \mathcal{M}$. D'autre part p est finie, d'où $\mathcal{H}^i p_+ \simeq 0$ pour $i > 0$. Puisque p est étale au-dessus de U , $\mathcal{H}^i p^+ \mathcal{M}$ est à support dans $p^{-1}(Z)$ pour $i > 0$, et ainsi $\mathcal{H}^i p_+ p^+ \mathcal{M} \simeq p_+ \mathcal{H}^i p^+ \mathcal{M}$ est à support dans Z pour $i > 0$. On en déduit que le complexe $(p_+ p^+ \mathcal{M})(*Z)$ est concentré en degré 0 et peut donc être considéré comme un objet de la catégorie des \mathcal{D} -modules, ce qui sera implicitement fait dans la suite.

Proposition 3.4.1. — *le morphisme canonique $\text{adj}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow (p_+ p^+ \mathcal{M})(*Z)$ identifie \mathcal{M} aux G -invariants de $(p_+ p^+ \mathcal{M})(*Z)$.*

Démonstration. — Par construction, $\text{adj}_{\mathcal{M}}$ se factorise en un morphisme $\mathcal{M} \rightarrow ((p_+ p^+ \mathcal{M})(*Z))^G$. Puisque f agit de façon inversible sur son conoyau, ce morphisme est un isomorphisme dès que sa restriction à U l'est. On est donc ramené au cas où p est étale et $Z = \emptyset$ (en particulier, p est automatiquement galoisien).

Soit $h : X' \rightarrow X$ un revêtement étale de X . Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{h'} & Y \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} h^+ \mathcal{M} & \xrightarrow{h^+ \text{adj}_{\mathcal{M}}} & h^+ p_+ p^+ \mathcal{M} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \\ h^+ \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{adj}_{h^+ \mathcal{M}}} & p'_+ p'^+ h^+ \mathcal{M} \end{array}$$

où la seconde flèche verticale est la composée du morphisme de changement de base $h^+ p_+ p^+ \mathcal{M} \rightarrow p'_+ h'^+ p^+ \mathcal{M}$ avec l'identification canonique $p'_+ h'^+ p^+ \mathcal{M} \simeq p'_+ p'^+ h^+ \mathcal{M}$. D'après [HTT00, Th. 1.7.3], il s'agit d'un isomorphisme. Or le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^+ p_+ p^+ \mathcal{M} & \xrightarrow{h^+ g_{\mathcal{M}}} & h^+ p_+ p^+ \mathcal{M} \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ p'_+ p'^+ h^+ \mathcal{M} & \xrightarrow{g_{h^+ \mathcal{M}}} & p'_+ p'^+ h^+ \mathcal{M} \end{array}$$

commute, donc par exactitude de h^+ et B.1

$$\begin{aligned} h^+(p_+ p^+ \mathcal{M})^G &= h^+ \bigcap_G \ker(g_{\mathcal{M}} - \text{id}) = \bigcap_G \ker(h^+ g_{\mathcal{M}} - \text{id}) \\ &\simeq \bigcap_G \ker(g_{h^+ \mathcal{M}} - \text{id}) = (p'_+ p'^+ h^+ \mathcal{M})^G. \end{aligned}$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} h^+ \mathcal{M} & \longrightarrow & h^+(p_+ p^+ \mathcal{M})^G \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \wr \\ h^+ \mathcal{M} & \longrightarrow & (p'_+ p'^+ h^+ \mathcal{M})^G \end{array}$$

Or h est étale, donc le $\mathcal{O}_{X'}$ -module sous-jacent à $h^+ \mathcal{M}$ est $h^* \mathcal{M}$ et $h^+ \text{adj}_{\mathcal{M}}$ vu comme morphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -module correspond à $h^* \text{adj}_{\mathcal{M}}$. On en déduit par descente pour les faisceaux quasi-cohérents [Gro71, Exp. VIII] que l'énoncé de 3.4.1 est local sur X pour la topologie étale. On est donc ramené au cas où p est un revêtement galoisien trivial, mais alors le résultat est immédiat. \square

Proposition 3.4.2. — $\psi_{f \circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$ est muni d'une action G -équivariante de G , et le morphisme canonique $\psi_f \mathcal{M} \rightarrow p_+ \psi_{f \circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$ induit un isomorphisme de $\psi_f \mathcal{M}$ sur les G -invariants de $p_+ \psi_{f \circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$.

Démonstration. — Pour $g \in G$, la compatibilité des cycles proches avec l'image directe par un morphisme propre [MS89, Th. 4.8.1] fournit une identification naturelle

$$\psi_{f \circ p} g_+ \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} \simeq g_+ \psi_{f \circ p \circ g} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} = g_+ \psi_{f \circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}.$$

Le morphisme de \mathcal{D}_Y -module $\mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} \rightarrow g_+ \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$ induit donc un morphisme $\psi_{f \circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} \rightarrow g_+ \psi_{f \circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$, d'où la première partie de 3.4.2.

Par naturalité de l'identification $p_+\psi_{f\circ p} \simeq \psi_f p_+$, le morphisme $\mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} \rightarrow g_+ \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$ donne aussi le carré commutatif

$$(3.4.3) \quad \begin{array}{ccc} \psi_f \mathcal{H}^0 p_+ p^+ \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi_f \mathcal{H}^0 g_+} & \psi_f \mathcal{H}^0 p_+ p^+ \mathcal{M} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ p_+ \psi_{f\circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} & \longrightarrow & p_+ \psi_{f\circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M} \end{array}$$

Or par invariance des cycles proches par localisation [MM04, Prop. 4.4-3], la flèche supérieure de 3.4.3 est aussi $\psi_f g_+ : \psi_f p_+ p^+ \mathcal{M}(*Z) \rightarrow \psi_f p_+ p^+ \mathcal{M}(*Z)$ et la proposition se déduit alors de 3.4.1 et de l'exactitude de ψ_f . \square

Corollaire 3.4.4. — *Si on suppose de plus que la restriction de p à $p^{-1}(Z)$ est étale triviale de composantes T_g avec $g \in G$, alors $\psi_f \mathcal{M}$ s'identifie à la restriction de $\psi_{f\circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$ à l'une quelconque des T_g .*

Démonstration. — C'est immédiat par G -équivariance de l'action de G sur $\psi_{f\circ p} \mathcal{H}^0 p^+ \mathcal{M}$ et le fait que p est un revêtement galoisien. \square

3.5. Trois lemmes d'annulation. — Les lemmes d'annulation de ce paragraphe apparaissent déjà dans la littérature [Sab12, 14.22, 14.26]. On rappelle ici les preuves de 3.5.1 et 3.5.5 pour la commodité du lecteur, et on donne une autre preuve de 3.5.2 à l'aide de 3.4.2.

Soit U un ouvert de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ contenant l'origine et $f = f(t, y)$ régulière sur U . Soit \mathcal{R} connexion sur U méromorphe à singularité régulière le long de $t = 0$.

Lemme 3.5.1. — *On suppose que $f(0, 0) \neq 0$ ou que $f(0, y)$ admet un zéro simple en l'origine. Alors si $k > 0$ et $a > 0$, on a $\psi_{t^a}(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ au voisinage de 0.*

Démonstration. — Par 3.1.7, il suffit de traiter le cas $a = 1$.

D'après [Sab12, Prop. 14.10], on a une identification canonique

$$\widehat{\mathcal{O}}_{U,0} \otimes_{\mathcal{O}_{U,0}} \psi_t(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \mathcal{R}) \simeq \psi_t(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}}_0).$$

En écrivant $f = y^l g$ avec $l = 0$ ou 1 et $g(0, 0) \neq 0$, il fait sens d'effectuer le changement de variable $t' = t/\sqrt[k]{g}$ dans $\widehat{\mathcal{O}}_{U,0}$, de sorte qu'on est ramené par fidèle platitude de $\widehat{\mathcal{O}}_{U,0}$ sur $\mathcal{O}_{U,0}$ à prouver la nullité de $\psi_t(\mathcal{E}^{y^l/t^k} \otimes \widehat{\mathcal{R}}_0)$, avec $l = 0$ ou 1 . D'après [Sab00, Prop. 2.1.1] ou encore [Ked10, Th. 4.1.4], $\widehat{\mathcal{R}}_0$ admet un réseau sur lequel $t\partial_t$ agit via une matrice à coefficients constants et ∂_y agit par 0. En particulier par trigonalisation, $\widehat{\mathcal{R}}_0$ admet un sous-objet propre dès que son rang est > 1 . Par exactitude de ψ_t , une récurrence permet de se ramener au cas où $\widehat{\mathcal{R}}_0$ est de rang 1. Alors $\widehat{\mathcal{R}}_0$ admet un générateur m satisfaisant à $t\partial_t m = cm$, $c \in \mathbb{C}$ et $\partial_y m = 0$. Dans tous les cas, la section $s = \ll e^{y^l/t^k} \gg \otimes m$ est génératrice et satisfait à $t^k(c - t\partial_t)s = ks$ si $l = 0$ et $t^k\partial_y s = s$ si $l = 1$. Le polynôme de Bernstein de s est donc constant. La trivialité de la V -filtration en découle. \square

Lemme 3.5.2. — On suppose que $f(0,0) \neq 0$ et soit $g = t^a y^b$ avec $(a,b) \neq 0$. Alors si $k, k' > 0$, on a $\psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ au voisinage de 0.

Démonstration. — On se ramène comme en 3.5.1 à montrer la nullité du module $\psi_g(\mathcal{E}^{1/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}}_0)$ avec $\widehat{\mathcal{R}}_0$ de rang 1 admettant un générateur m qui vérifie $t\partial_t m = cm$, $c \in \mathbb{C}$ et $\partial_y m = 0$. La fonction g étant singulière, on a par définition $\psi_{t^a y^b} = \psi_v \circ \Gamma(g)_+$ où $\Gamma(g)$ désigne le graphe de g , et v est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \xrightarrow{\Gamma(g)} & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \\ & \searrow g & \downarrow v \\ & & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

Posons $\mathcal{M}_{k,k',a} = \Gamma(g)_+(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \widehat{\mathcal{R}}_0)$. Alors si on définit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \\ (u, z, v) &\longmapsto (u^b, z^a, v), \end{aligned}$$

on a d'après 3.4.2 une injection canonique $\psi_{t^a y^b} \mathcal{M}_{k,k',a} \longrightarrow h_+ \psi_{(uz)^{ab}} \mathcal{M}_{bk,ak',bc}$, et on se ramène ainsi à étudier le cas où $a = b = 1$. Or $s = \ll e^{1/t^k y^{k'}} \gg \otimes m$ engendre $\mathcal{M}_{k,k',c}$ et vérifie $t^k y^{k'+1} \partial_y s = -k' s$. Donc $s' = s\delta(u-ty)$ engendre $\mathcal{M}_{k,k',c}$. Or

$$u\partial_y \cdot s' = \partial_y u \cdot s' = \partial_y \cdot (tys\delta) = ts' + ty\partial_y s\delta - yt^2 s\partial_u \delta \in V_{-1}s'.$$

A l'aide de

$$(3.5.3) \quad u\partial_u s' = tys\partial_u \delta - s',$$

on obtient $ty\partial_y s\delta - tu\partial_u s' \in V_{-1}s'$, et par multiplication par $t^{k-1}y^{k'}$, il vient

$$(3.5.4) \quad k's' + t^k y^{k'} u\partial_u s' \in V_{-1}s'.$$

Puisque $k > 0$ et $k' > 0$, l'identité $\partial_u u^2 s' = 2us' + u^2 \partial_u s' = t^2 y^2 s\partial_u \delta \in V_{-1}s'$ et 3.5.3 donnent la relation

$$t^k y^{k'} u\partial_u s' = (t^{k-1} y^{k'-1}) \cdot t^2 y^2 s\partial_u \delta - ut^{k-1} y^{k'-1} s' \in V_{-1}s'.$$

Donc d'après 3.5.4, $s' \in V_{-1}s'$ est de polynôme de Bernstein constant, d'où 3.5.2. \square

Lemme 3.5.5. — Supposons $f = t^l g(t,y) + y^m h(t,y)$ avec $g(0,0) \neq 0$, $h(0,0) \neq 0$, $(l,m) \neq (0,0)$. Soit $g = t^a y^b$ avec $(a,b) \neq 0$. Alors si $k > l$ et $k' > 0$, on a $\psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq 0$ au voisinage de 0.

Démonstration. — Les cas $l = 0$ ou $m = 0$ étant traités par 3.5.2, on peut raisonner par récurrence sur (l,m) et supposer $l \neq 0$ et $m \neq 0$. Soit $p : \widetilde{U} \rightarrow U$ l'éclaté de U en l'origine. Par compatibilité des cycles proches avec les modifications propres [Sab12, Prop. 14.12], on a

$$\psi_g(\mathcal{E}^{f(t,y)/t^k y^{k'}} \otimes \mathcal{R}) \simeq p_+ \psi_{g \circ p}(\mathcal{E}^{f(p_t, p_y)/p_t^k p_y^{k'}} \otimes p^+ \mathcal{R}).$$

Démontrons que $\psi_{g \circ p}(\mathcal{E}^{f(p_t, p_y)/p_t^k p_y^{k'}} \otimes p^+ \mathcal{R}) \simeq 0$ sur le diviseur exceptionnel E .

Dans la carte U_0 de \tilde{U} donnée par $t = u$ et $y = uv$, on a $p(u, v) = (u, uv)$, de sorte que la trace de E sur U_0 est donnée par $u = 0$, et

$$f(p_t, p_y)/p_t^k p_y^{k'} = (u^l g(u, uv) + (uv)^m h(u, uv))/u^{k+k'} v^{k'}.$$

Au voisinage d'un point $v_0 \neq 0$ de U_0 , 3.5.1 s'applique immédiatement si $l \neq m$. Dans le cas $l = m$, on observe que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, v_0) = m v_0^{m-1} h(0, 0) \neq 0$ de sorte que 3.5.1 s'applique encore. Au voisinage de l'origine de U_0 , 3.5.2 s'applique si $l < m$, et sinon $m > 0$ permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

Dans la carte U_1 donnée par les coordonnées $t = u'v'$ et $y = v'$, $p(u', v') = (u'v', v')$, donc $E \cap U_1$ est défini par $u'v' = 0$, et on a

$$f(p_t, p_y)/p_t^k p_y^{k'} = ((u'v')^l g(u'v', v') + v'^m h(u'v', v'))/u'^k v'^{k+k'}.$$

On se place au voisinage de l'origine. Si $l \leq m$, la condition $l > 0$ assure que l'hypothèse de récurrence s'applique, et sinon la situation est justiciable de 3.5.2. \square

4. Preuve du théorème

Décrivons les différentes étapes de la démonstration. Une première réduction reposant sur 3.4.1 et la semi-simplicité du membre de droite de (2.2.5) permet d'identifier $\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ et $\psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M})$ pour m entier dès que (2.2.5) est connue pour $\psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M})$, de sorte qu'on est ramené au cas où n est un multiple de $m_{\mathcal{M}}$. Dans ce cas, l'idée est de se ramener à un calcul avec \mathcal{M} décomposé. On ramifie donc en 4.2.1 la variable x en $v = x^{1/n}$ pour obtenir un schéma singulier à partir duquel on construit une dilatation bien choisie $S_{1,n}(D_k)^\circ$, finie sur $S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]$ et munie d'une action du groupe U_n des racines n -ième de l'unité. On montre alors en 4.2.2 que 3.4.4 s'applique, de sorte qu'on est ramené à un calcul de cycle proche sur $S_{1,n}(D_k)^\circ$. Enfin, on formalise la situation à l'aide de 3.2.1 pour se ramener à un calcul explicite.

4.1. Réduction au cas où n est un multiple de $m_{\mathcal{M}}$. — Soit m un entier naturel. On suppose que le théorème 2.2.4 est acquis lorsque n est un multiple de m et on le déduit dans le cas général. Il suffit pour cela de montrer que pour tout couple (n, k) avec $n < k$, si le théorème est montré pour $H_{mn,mk}(\mathcal{M})$, alors il est vrai pour $H_{n,k}(\mathcal{M})$.

Le morphisme $\nu_m : S_{mn} \rightarrow S_n$ donne un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} S_{1,n}(D_{mk}) & \xrightarrow{p} & S_{1,n}(D_k) \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_{mn} & \longrightarrow & S_n \end{array}$$

avec p satisfaisant aux conditions de 3.4.1 pour $G = U_m$. Puisque le cube

$$\begin{array}{ccccc}
S \times \eta_{mn} & \xrightarrow{\text{id} \times \nu_m} & S \times \eta_n & & \\
\downarrow & \searrow^{j_{mn, mk}} & \downarrow & \searrow^{j_{n, k}} & \\
& S_{1, n}(D_{mk}) & \xrightarrow{p} & S_{1, n}(D_k) & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\eta_{mn} & \xrightarrow{\quad} & \eta_n & \xrightarrow{\quad} & \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
& S_{mn} & \xrightarrow{\quad} & S_n &
\end{array}$$

est à faces commutatives et cartésiennes, on a

$$\begin{aligned}
(4.1.1) \quad p_+ p^+ H_{n, k}(\mathcal{M}) &\simeq p_+ j_{mn, mk} + (\text{id} \times \nu_m)^+ \mathcal{H}om(p_2^+ \gamma_n^+ \mathcal{M}, p_1^+ \mathcal{M}) \\
&\simeq p_+ j_{mn, mk} + \mathcal{H}om(p_2^+ \gamma_{mn}^+ \mathcal{M}, p_1^+ \mathcal{M}) \\
&= p_+ H_{mn, mk}(\mathcal{M}).
\end{aligned}$$

D'après 1.4, l'adjonction $H_{n, k}(\mathcal{M}) \rightarrow p_+ p^+ H_{n, k}(\mathcal{M})$ est donnée par

$$(4.1.2) \quad H_{n, k}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{O}_{S_{1, n}(D_{mk})} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{1, n}(D_k)}} H_{n, k}(\mathcal{M}).$$

Soient u une uniformisante de S_{mn} et $\zeta \in U_m$ une racine primitive. De (4.1.2), on déduit que la décomposition en sous-espaces propres de l'action de ζ sur $p_+ H_{mn, mk}(\mathcal{M})$ est

$$(4.1.3) \quad p_+ H_{mn, mk}(\mathcal{M}) = H_{n, k}(\mathcal{M}) \oplus u H_{n, k}(\mathcal{M}) \oplus \dots \oplus u^{m-1} H_{n, k}(\mathcal{M}).$$

Du fait de la formule $\partial_t u^l w = \frac{l}{m} \frac{u^l}{t} w + u^l \partial_t w$, l'opérateur ∂_t stabilise chacun des facteurs de (4.1.3), donc il s'agit d'une décomposition dans la catégorie des \mathcal{D} -modules sur $S_{1, n}(D_k)$. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $w \in H_{n, k}(\mathcal{M})$, la relation

$$(t\partial_t - \frac{l}{m} - a)u^l w = u^l (t\partial_t - a)w$$

montre que si $P \in V_0(\mathcal{D})$ est tel que $b_w(t\partial_t)w = tP(t\partial_t, y, \partial_y)w$, alors

$$b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})u^l w = u^l b_w(t\partial_t)w = tu^l P(t\partial_t, y, \partial_y)w = tP(t\partial_t - \frac{l}{m}, y, \partial_y)u^l w,$$

de sorte que $b_{u^l w} = b_{u^l w}(t\partial_t)$ divise $b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})$. En utilisant le fait que u agit de façon inversible sur $p_+ H_{mn, mk}(\mathcal{M})$, on montre de même que $b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})$ divise $b_{u^l w}$. On a donc $b_{u^l w} = b_w(t\partial_t - \frac{l}{m})$, d'où pour $a \in \mathbb{C}$ un isomorphisme d'espaces vectoriels « multiplication par u^l » bien défini

$$\psi_{\pi, a + \frac{l}{m}} H_{n, k}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \psi_{\pi, a} u^l H_{n, k}(\mathcal{M})$$

et compatible aux actions de y et ∂_y . D'après (4.1.3) et le fait que l'action de t induit un isomorphisme $\psi_{\pi, a} H_{n, k}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \psi_{\pi, a-1} H_{n, k}(\mathcal{M})$ pour tout a , on obtient donc

$$\psi_{\pi, a} p_+ H_{mn, mk}(\mathcal{M}) \simeq (\psi_{\pi, a} H_{n, k}(\mathcal{M}))^m.$$

Or en combinant 3.1.7 et la compatibilité des cycles proches avec l'image directe par un morphisme propre [MS89, Th. 4.8.1], on a des identifications canoniques

$$\psi_{\pi, a} p_+ H_{mn, mk}(\mathcal{M}) \simeq \psi_{\pi^m, a} H_{mn, mk}(\mathcal{M}) \simeq (\psi_{\pi, a} H_{mn, mk}(\mathcal{M}))^m.$$

Il vient ainsi

$$(\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}))^m \simeq (\psi_\pi H_{mn,mk}(\mathcal{M}))^m.$$

On en déduit suivant (2.3.6) que

$$(4.1.4) \quad (\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}))^m \simeq \mathcal{O}_{T_r}^{mn^2 \leq r-1} \bigoplus_{\Omega_{r-1}(\mathcal{M})} (\mathcal{E}^{dt_{r-1}(\omega)})^{mn^2}.$$

et le théorème 2.2.4 pour $H_{n,k}(\mathcal{M})$ découle de la semi-simplicité du membre de droite de (4.1.4).

4.2. Le cas où n est un multiple de $m_{\mathcal{M}}$. — On rappelle qu'on a fait l'hypothèse que $k > n$, de sorte que $s_1 \times \eta_n$ est le fermé de $S_{1,n}(D_k)$ donné par l'équation $p(t, y) = 1 + yt^{k-n} = 0$. En particulier, $s_1 \times \eta_n$ ne rencontre pas la fibre spéciale de π , et il suffit donc de calculer les cycles proches sur son complémentaire noté $S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]$. Soit X le schéma défini par le diagramme cartésien

$$(4.2.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S_{1,n}(D_k)[p^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n & \longrightarrow & S \end{array}$$

où la seconde flèche verticale est donnée par la composée du morphisme canonique $S_{1,n}(D_k)[p^{-1}] \rightarrow S_{1,n}$ avec la première projection. D'après le diagramme (2.2.1), X est muni de deux morphismes vers S_n . On dispose donc d'un morphisme $X \rightarrow S_n \times S_n$ où dans $S_n \times S_n$, le premier facteur désigne la copie de S_n qui apparaît dans (2.2.1) et le second facteur correspond à la copie de S_n figurant dans (4.2.1) et munie d'une uniformisante v . Notons $g : X \rightarrow S_{n,n}$ la flèche qui s'en déduit par changement de base et soit $X_{(s_n \times S_n)}$ le dilaté de X en $g^{-1}(s_n \times s_n)$ par rapport à $s_n \times S_n$. Si $S_{1,n}(D_k)^\circ$ désigne l'adhérence dans $X_{(s_n \times S_n)}$ de la fibre générique de $p_1 \circ g : X_{(s_n \times S_n)} \rightarrow S_n$, alors le morphisme composé f donné par

$$S_{1,n}(D_k)^\circ \longrightarrow X_{(s_n \times S_n)} \longrightarrow X \longrightarrow S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]$$

s'explique algébriquement en

$$S_{1,n}[y, p^{-1}]/(x - t^n p) \xrightarrow{f^\sharp} S_{n,n}[y, z, p^{-1}]/(v - zt, z^n - p),$$

avec x envoyé sur v^n .

Lemme 4.2.2. — $S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]$ est le quotient de $S_{1,n}(D_k)^\circ$ par l'action de U_n héritée par transport de structure de $S_n \rightarrow S$ dans (4.2.1).

Démonstration. — Par surjectivité de $X \rightarrow S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]$ et $X_{(s_n \times S_n)} \rightarrow X$, la restriction de f à sa fibre générique dans $S_{1,n}(D_k)^\circ$ est surjective. Or on observe que f est fini, donc fermé. Ainsi f est surjective, et alors f^\sharp est injective. En complétant $S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]$ le long de la fibre spéciale de π , définie par l'idéal $(t) = (t, x)$, on obtient d'après [Eis95, Ex. 7.11] le schéma $\widehat{S_{1,n}(D_k)[p^{-1}]}$ d'anneau de fonctions

$$\mathbb{C}[y, p^{-1}][[x, t]]/(x - t^n p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[y][[t]].$$

En faisant de même avec $S_{1,n}(D_k)^\circ$, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_{n,n}[y, z, p^{-1}]/(v - zt, z^n - p) & \longrightarrow & \mathbb{C}[y, z][[t]]/(z^n - p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_{1,n}[y, p^{-1}]/(x - t^n p) & \longrightarrow & \mathbb{C}[y][[t]] \end{array}$$

On observe alors que $\mathbb{C}[y][[t]]$ est le quotient de $\mathbb{C}[y, z][[t]]/(z^n - p)$ par l'action de U_n . Le lemme 4.2.2 se ramène donc à B.2. \square

Comme changement de base d'un morphisme étale, le morphisme $X[x^{-1}] \rightarrow S_{1,n}(D_k)[p^{-1}, x^{-1}]$ est étale. Or $S_{1,n}(D_k)_{\eta_n}^\circ := S_{1,n}(D_k)^\circ[t^{-1}] = X_{(S_n \times S_n)}[t^{-1}] \rightarrow X[t^{-1}]$ est un isomorphisme. Mais du fait de $x^n = t^n p$ et p inversible, on a $X[t^{-1}] = X[x^{-1}]$. On en déduit que f_{η_n} est étale. Mais f_{s_n} est étale galoisien de groupe U_n , avec U_n agissant par permutation circulaire des composantes connexes de $S_{1,n}(D_k)_{s_n}^\circ$, qui sont des droites T_ζ , $\zeta \in U_n$. D'après 4.2.2, la situation est donc justiciable de 3.4.4, de sorte que $\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M})$ s'identifie à la restriction de $\psi_{f \circ \pi} f^+ H_{n,k}(\mathcal{M})$ à l'une quelconque des T_ζ .

D'après 3.2.1, on ne change pas les cycles proches de $f^+ H_{n,k}(\mathcal{M})$ en restreignant la situation à $\widehat{S_{1,n}(D_k)^\circ}$. Donc si

$$\gamma_n^+ \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\Omega(\mathcal{M})} \mathcal{E}^{\omega(t)} \otimes \mathcal{R}_{\omega(t)}$$

est la décomposition de Levelt-Turrittin (1.3.1) de \mathcal{M} , on a

$$\psi_{f \circ \pi} f^+ H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{\omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathcal{M})} \psi_t(\mathcal{E}^{\omega_1(zt) - \omega_2(t)} \otimes \mathcal{R}_{\omega_1, \omega_2}),$$

avec $\mathcal{R}_{\omega_1, \omega_2}$ régulier le long de la fibre spéciale. Désignons par $H_{n,k}(\omega_1, \omega_2)(\mathcal{R}_{\omega_1, \omega_2})$ ou même $H_{n,k}(\omega_1, \omega_2)$ quand aucune confusion n'est possible, le terme de cette somme correspondant aux formes ω_1 et ω_2 , et écrivons $\omega_i = P_i(t)/t^{q_i}$ avec $\deg P_i < q_i$. $P_i(0) = c_{r-1}(\omega_i)$ est le coefficient dominant de ω_i pour la variable $1/t$. Soit n_ω le rang de \mathcal{R}_ω . La formule (2.3.6) (et par suite le théorème 2.2.4) se déduit des calculs suivants :

Lemme 4.2.3. — Si $\omega \neq 0$, $\psi_t H_{n,k}(\omega, 0) \simeq \psi_t H_{n,k}(0, \omega) \simeq 0$.

Par définition, $H_{n,k}(\omega, 0) \simeq \mathcal{E}^{\omega(zt)} \otimes \mathcal{R}$ et $H_{n,k}(\omega, 0) \simeq \mathcal{E}^{\omega(t)} \otimes \mathcal{R}'$, avec \mathcal{R} et \mathcal{R}' réguliers, donc 4.2.3 est une application immédiate de 3.5.1.

Lemme 4.2.4. — Si $\omega_1 \neq \omega_2$ sont non nulles, alors $\psi_t H_{n,k}(\omega_1, \omega_2) \simeq 0$.

Démonstration. — Soit $c \in \mathbb{C}$, et notons encore c le point fermé de la fibre spéciale de $\widehat{S_{1,n}(D_k)}[p^{-1}]$ correspondant. D'après [Sab12, Prop. 14.10], il suffit pour prouver 4.2.3 de se placer sur le formalisé $\widehat{\mathcal{O}}_c$ de l'anneau local \mathcal{O}_c de $\widehat{S_{1,n}(D_k)}[p^{-1}]$ en c . Puisque $1 + ct^{k-n}$ admet une racine n -ième sur S_n , on tire de $p = 1 + yt^{k-n} = 1 + ct^{k-n} + (y-c)t^{k-n}$ l'existence d'une racine n -ième pour p sur $\widehat{\mathcal{O}}_c$. Autrement dit, le spectre de $\widehat{\mathcal{O}}_c$ est la réunion disjointe de n copies de $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}_{S_n}^1, c}$. D'après 3.4.4, on

peut fixer le choix d'une telle racine (soit encore géométriquement se restreindre à une composante connexe de $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_c$), et supposer ainsi que $z \equiv 1 + yt^{k-n}/n \pmod{(t^{k-n+1})}$. Si $q_1 < q_2$,

$$\begin{aligned} t^{q_2}(\omega_1(zt) - \omega_2(t)) &= t^{q_2-q_1} z^{-q_1} P_1(zt) - P_2(t) \\ &\equiv -P_2(0) \pmod{(t)}, \end{aligned}$$

de sorte que le lemme 3.5.1 s'applique, et de même si $q_1 > q_2$.

Si $q_1 = q_2 = q$,

$$\begin{aligned} t^q(\omega_1(zt) - \omega_2(t)) &= z^{-q} P_1(zt) - P_2(t) \\ &\equiv P_1(t) - P_2(t) - qP_1(0)yt^{k-n}/n \pmod{(t^{k-n+1})}. \end{aligned}$$

La valuation t -adique de $P_1 - P_2$ est finie et plus petite que $q - 1$, donc quelle que soit la façon dont elle se compare à $k - n$, le lemme 3.5.1 s'applique. \square

Dans les deux lemmes qui suivent, on exploitera le fait que puisque $U = \bigcap_{\zeta \in U_n \setminus \{1\}} D(z - \zeta)$ est un voisinage de Zariski de T_1 dans $S_{1,n}(\widehat{D}_k)[p^{-1}]$, il suffit d'après 3.4.4 de calculer $\psi_t H_{n,k}(\omega, \omega)$ sur U . Cette restriction sera faite tacitement dans toute la suite, et on notera encore $H_{n,k}(\omega, \omega)$ pour $H_{n,k}(\omega, \omega)|_U$ et T pour T_1 . Sur l'ouvert U on a $z - 1 = yt^{k-n}/r_n$ avec par définition $r_n = \prod_{\zeta \in U_n \setminus \{1\}} (z - \zeta)$ une unité.

Lemme 4.2.5. — $\psi_t H_{n,k}(0, 0) \simeq \mathcal{O}_T^{n_0^2}$.

Démonstration. — On se donne une base de \mathcal{B}_0 dans laquelle la matrice de ∂_t est de la forme A/t avec $A \in GL_{n_0}(\mathbb{C})$. Alors

$$H_{n,k}(0, 0) \simeq (\mathcal{O}(*T)^{n_0^2}, d + (A \otimes 1 - 1 \otimes A)dt/t + A \otimes 1dz/z),$$

et il suffit donc de démontrer que si $B, C \in GL_l(\mathbb{C})$ commutent, alors si on pose

$$\mathcal{H}_{B,C} := (\mathcal{O}(*T)^l, d + Bdt/t + Cdz/z),$$

on a

$$\psi_t \mathcal{H}_{B,C} \simeq \mathcal{O}_T^l.$$

On raisonne par récurrence sur l .

Supposons $l = 1$ et notons β et γ pour B et C . Si $\beta = 0$, le calcul 3.1.2 et l'insensibilité des cycles proches à la localisation [MM04, Prop. 4.4-3] montrent que

$$\psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \simeq \psi_t(\mathcal{O}, d + \gamma dz/z) \simeq i_{n,k}^+(\mathcal{O}, d + \gamma dz/z) \simeq \mathcal{O}_T,$$

où la dernière égalité provient de ce que $z \equiv 1$ sur T . Si $l = 1$ et $\beta \neq 0$, la section $s = 1$ est génératrice, et on a $t\partial_t s = \beta s + (n-k)\gamma yt^{n-k}s/(nz^n) = \beta s \pmod{(V_{-1}(\mathcal{D})s)}$. On en déduit que $b_s(t\partial_t)$ divise $t\partial_t - \beta$. Or b_s ne peut être constant car dans le cas contraire t serait inversible, d'où $b_s(t\partial_t) = t\partial_t - \beta$. Ainsi $V_*(\mathcal{D})s$ est une bonne filtration dont les racines du polynôme de Bernstein sont dans $[-(-\beta-1) - 1, -(-\beta-1)]$, donc $V_m(\mathcal{D})s = V_{-\beta-1+m}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$ pour tout entier m . En particulier, tout élément de $\mathcal{H}_{\beta,\gamma}$ est dans l'un des $V_{-\beta-1+m}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$, donc si $a \in \mathbb{C} \setminus \{-\beta-1 + \mathbb{Z}\}$, $V_a(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) = V_{<a}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$

et sinon $V_{<a}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) = V_{a-1}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) = tV_a(\mathcal{H}_{\beta,\gamma})$. Soit β' l'unique élément de $\beta + \mathbb{Z}$ dans l'intervalle $[-1, 0[$. On obtient

$$\begin{aligned} \psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma} &\simeq \psi_{t,\beta'} \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \simeq \psi_{t,-\beta-1} \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \\ &\simeq V_{-\beta-1}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) / tV_{-\beta-2}(\mathcal{H}_{\beta,\gamma}) \\ &= V_0(\mathcal{D})s / V_{-1}(\mathcal{D})s. \end{aligned}$$

Du fait de

$$(4.2.6) \quad \partial_y s = t^{n-k} s / (nz^n) \in V_{-1}(\mathcal{D})s,$$

∂_y agit par 0 sur $\psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma}$, et on a donc un morphisme bien défini $\mathcal{O}_T \rightarrow \psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma}$ associant à « 1 » la classe de s . Puisque $[P(t\partial_t, y, \partial_y)s] = [P(\beta, y, 0)s]$ dans $\psi_t \mathcal{H}_{\beta,\gamma}$, ce morphisme est surjectif. Il est aussi injectif, car si $[f(y)s] = 0$, avec $f \neq 0$, alors par application successive de ∂_y , on obtient $[s] = 0$, contradiction. D'où le cas $l = 1$.

Supposons $l > 1$. Puisque B et C commutent, le choix d'un vecteur propre commun permet de définir une suite exacte du type

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{\beta,\gamma} \longrightarrow \mathcal{H}_{B,C} \longrightarrow \mathcal{H}_{B',C'} \longrightarrow 0,$$

avec B' et C' qui commutent. Donc par passage aux cycles proches, l'hypothèse de récurrence donne la suite exacte

$$(4.2.7) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_T \longrightarrow \psi_t \mathcal{H}_{B,C} \longrightarrow \mathcal{O}_T^{l-1} \longrightarrow 0.$$

Or pour toute section s de $\mathcal{H}_{B',C'}$, la formule (4.2.6) reste valable de sorte que ∂_y agit par 0 sur $\psi_t \mathcal{H}_{B,C}$. On en déduit que la suite exacte (4.2.7) est scindée, et on a le résultat voulu. \square

Lemme 4.2.8. — *On suppose $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ de degré q . Alors,*

- (1) Si $k - n < q$, $\psi_t H_{n,k}(\omega, \omega) \simeq 0$.
- (2) Si $k - n > q$, $\psi_t H_{n,k}(\omega, \omega) \simeq \mathcal{O}_T^{n^2}$.
- (3) Si $k - n = q$, $\psi_t H_{n,k}(\omega, \omega) \simeq (\mathcal{E}^{-(k/n-1)P(0)y})^{n^2}$.

Démonstration. — On a

$$(4.2.9) \quad \begin{aligned} t^q(\omega(zt) - \omega(t)) &= z^{-q}P(zt) - P(t) \\ &\equiv (z^{-q} - 1)P(t) \quad (t^{k-n+1}) \\ &\equiv -r_q y t^{k-n} P(t) / r_n \quad (t^{k-n+1}) \\ &\equiv -r_q y t^{k-n} P(0) / r_n \quad (t^{k-n+1}), \end{aligned}$$

de sorte que 3.5.1 assure la nullité de $\psi_t H_{n,k}(\omega, \omega)$ dans le cas $k - n < q$. Si $k - n \geq q$, $\omega_1(zt) - \omega_2(t)$ est polynomiale, donc (2) et (3) se déduisent de la combinaison de 3.1.3 et du calcul 4.2.5 de $\psi_t H_{n,k}(0, 0)(\mathcal{R}_{\omega,\omega})$. \square

Ceci achève la preuve de la formule (2.3.6).

Appendice A

Nullité des cycles proches pour $r \leq 1$ et \mathcal{M} décomposé

Proposition A.1. — *On suppose $k \leq n$ et $\mathcal{M} \simeq \bigoplus \mathcal{E}^\omega \otimes \mathcal{R}_\omega$ sans partie régulière. Alors $\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq 0$.*

Démonstration. — On a

$$\psi_\pi H_{n,k}(\mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{\omega_1, \omega_2} \psi_t(\mathcal{E}^{\omega_1(x) - \omega_2(t^n)} \otimes \mathcal{R}_{\omega_1, \omega_2}),$$

avec $\mathcal{R}_{\omega_1, \omega_2}$ régulier le long de la fibre spéciale. Désignons par $H_{n,k}(\omega_1, \omega_2)$ le terme de cette somme correspondant aux formes ω_1 et ω_2 , et écrivons $\omega_i = P_i(x)/x^{q_i}$ avec $\deg P_i < q_i$. $P_i(0)$ est le coefficient dominant de ω_i pour la variable $1/x$. \mathcal{M} étant supposé sans partie régulière, $P_i(0) \neq 0$. Alors en effectuant le changement de variable $u = t$ et $v = t^{n-k} + y$, on a

$$(A.2) \quad \begin{aligned} \omega_1(x) - \omega_2(t^n) &= \frac{P(t^n + yt^k)}{t^{kq_1}(t^{n-k} + y)^{q_1}} - \frac{P_2(t^n)}{t^{nq_2}} = \frac{P_1(u^k v)}{u^{kq_1} v^{q_1}} - \frac{P_2(u^n)}{u^{nq_2}} \\ &= \frac{u^{nq_2} P_1(u^k v) - u^{kq_1} v^{q_1} P_2(u^n)}{u^{kq_1 + nq_2} v^{q_1}}. \end{aligned}$$

On se place au voisinage de $v_0 \neq 0$. Si on suppose $nq_2 > kq_1$, (A.2) s'écrit $(u^{nq_2 - kq_1} P_1(u^k v) - v^{q_1} P_2(u^n))/u^{nq_2} v^{q_1}$. Si $f(u, v)$ désigne la partie non polaire de cette expression, $f(0, v_0) = -P_2(0)/v_0^{q_1}$ est non nul, donc 3.5.1 s'applique. On raisonne de même avec le cas $nq_2 < kq_1$ en utilisant $P_1(0) \neq 0$. Si $nq_2 = kq_1$, la partie non polaire de (A.2) est $f(u, v) = (P_1(u^k v) - v^{q_1} P_2(u^n))/v^{q_1}$ et en évaluant en $(0, v)$ on constate que la situation satisfait les hypothèses de 3.5.1.

On se place au voisinage de $v_0 = 0$. Si on suppose $nq_2 \leq kq_1$, (A.2) devient $(P_1(u^k v) - u^{kq_1 - nq_2} v^{q_1} P_2(u^n))/u^{kq_1} v^{q_1}$. Le numérateur de cette expression vaut $P_1(0) \neq 0$, donc 3.5.2 s'applique. Dans le cas contraire, (A.2) est exactement $(u^{nq_2 - kq_1} P_1(u^k v) - v^{q_1} P_2(u^n))/u^{nq_2} v^{q_1}$ et on est dans le cadre de 3.5.5. \square

Appendice B

Un soupçon d'algèbre commutative

Lemme B.1. — *Soit \mathcal{A} un catégorie abélienne, M un objet de \mathcal{A} et N_1 et N_2 deux sous-objets de M . Soit \mathcal{B} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exact à gauche. Alors on a une identification canonique $F(N_1 \cap N_2) \simeq F(N_1) \cap F(N_2)$.*

Démonstration. — On commence par observer que $N_1 \cap N_2$ fait bien sens, comme noyau de

$$\begin{aligned} I_{N_1, N_2} : N_1 \oplus N_2 &\longrightarrow M \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Alors, $F(N_1)$ et $F(N_2)$ sont des sous-objets de $F(M)$, et par additivité $F(I_{N_1, N_2}) \simeq I_{F(N_1), F(N_2)}$. Mais F commute au noyau, donc

$$F(N_1 \cap N_2) = F(\text{Ker } I_{N_1, N_2}) \simeq \text{Ker } F(I_{N_1, N_2}) \simeq \text{Ker } I_{F(N_1), F(N_2)} = F(N_1) \cap F(N_2)$$

□

Corollaire B.2. — Soit B un anneau noethérien muni d'une action d'un groupe fini G et A un sous-anneau de B^G . On suppose que B est fini sur A . Soit I idéal de A , et $J = IB$. Alors, l'action de G est continue pour la topologie J -adique donc induit une action sur \widehat{B}_J . Par finitude de B sur A , on a une identification canonique $\widehat{B}_J \simeq B \otimes \widehat{A}_I$ [Eis95, Th. 7.2]. En particulier le digramme

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \widehat{B}_J \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & \widehat{A}_I \end{array}$$

est cartésien. On suppose que $\widehat{A}_I = \widehat{B}_J^G$. Alors $A = B^G$.

Démonstration. — A travers l'identification $\widehat{B}_J \simeq B \otimes \widehat{A}_I$, l'action de $g \in G$ sur le membre de gauche correspond à $g \otimes \text{id}$. On en déduit par platitude de \widehat{A}_I sur A

$$\widehat{B}_J^G = \bigcap_G \text{Ker}((g - \text{id}) \otimes \text{id}) = \bigcap_G (\text{Ker}(g - \text{id}) \otimes \widehat{A}_I) = B^G \otimes \widehat{A}_I.$$

où la dernière égalité provient de B.1. On en déduit $\text{Coker}(A \rightarrow B^G) \otimes \widehat{A}_I = \text{Coker}(\widehat{A}_I \rightarrow \widehat{B}_J^G) = 0$ par hypothèse. Donc par fidèle platitude de \widehat{A}_I [Eis95], il vient $\text{Coker}(A \rightarrow B^G) = 0$, à savoir $A = B^G$. □

Références

- [AS09] A. Abbes and T. Saito, *Analyse micro-locale ℓ -adique en caractéristique $p > 0$: le cas d'un trait*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **45** (2009).
- [Ber] J. Bernstein, *Lectures on Algebraic \mathcal{D} -modules*.
- [Eis95] D. Eisenbud, *Commutative Algebra, with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics, vol. 150, Springer-verlag, 1995.
- [GD61] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique II*, vol. 8, Publications Mathématiques de l'IHES, 1961.
- [GD67] ———, *Eléments de Géométrie Algébrique IV*, vol. 32, Publications Mathématiques de l'IHES, 1967.
- [Gro63] A. Grothendieck, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer-Verlag, 1963.
- [Gro71] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 263, Springer-Verlag, 1971.
- [HTT00] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *\mathcal{D} -Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*, vol. 236, Birkhauser, 2000.
- [Kat87] N. Katz, *On the calculation of some differential Galois groups*, Invent. Math. **87** (1987).
- [Kat89] K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Algebraic K-theory and algebraic number theory, Contemp.Math, vol. 83, Amer. Math. Soc., 1989.

- [Ked10] K. Kedlaya, *Good formal structures for flat meromorphic connections, I : Surfaces*, Duke Math.J. **154** (2010).
- [KS90] M. Kashiwara and P. Shapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, 1990.
- [Lau87] Y. Laurent, *Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules micro-différentiels*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **20** (1987).
- [Lau04] ———, *Geometric irregularity and \mathcal{D} -modules*, Eléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques, vol. 8, Soc.Math. France, 2004.
- [Mal91] B. Malgrange, *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, 1991.
- [MM04] P. Maisonobe and Z. Mebkhout, *Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents*, Séminaire et Congrès, vol. 8, SMF, 2004.
- [MS89] Z. Mebkhout and C. Sabbah, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D} -modules cohérents*, vol. 35, Hermann, 1989.
- [Sab00] C. Sabbah, *Equations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*, Astérisque, vol. 263, Société Mathématique de France, 2000.
- [Sab05] ———, *Polarizable twistor \mathcal{D} -modules*, Astérisque, vol. 300, Société Mathématique de France, 2005.
- [Sab12] ———, *Introduction to Stokes Structures*, Lecture notes in Mathematics, vol. 2060, Springer, 2012.
- [SV00] M.T Singer and M. Van Der Put, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 328, Springer, 2000.