



**HAL**  
open science

## Flatness calibration of XY translation stages through modal parameterization

Hugues Favreliere, Gaëtan Le Goïc, Serge Samper, Patrice Belin

► **To cite this version:**

Hugues Favreliere, Gaëtan Le Goïc, Serge Samper, Patrice Belin. Flatness calibration of XY translation stages through modal parameterization. 5th international congress of metrology, Oct 2011, Paris, France. p1-7. hal-00740328

**HAL Id: hal-00740328**

**<https://hal.science/hal-00740328>**

Submitted on 10 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CALIBRATION DE LA PLANEITE D'UN MONTAGE XY DE MICRO-POSITIONNEMENT PAR L'APPROCHE DU PARAMETRAGE MODAL FLATNESS CALIBRATION OF XY TRANSLATION STAGES THROUGH MODAL PARAMETERIZATION

Favreliere H. \*, LeGoïc G. \*\*, Samper S. \*\*, Belin P. \*

\* ALTIMET,

1 bis avenue des Tilleuls, F 74200 Thonon les bains

\*\* Université de Savoie,

Laboratoire SYMME, BP 80439, F 74944 Annecy le vieux cedex

## Résumé

L'objectif de cet article est d'améliorer les performances métrologiques d'un montage XY de micro-positionnement d'un profilomètre optique Altisurf©. Nous proposons un protocole de calibration permettant de corriger les variations géométriques systématiques, par exemple de tangage et de roulis, liées au système de guidage. Il s'agit de mesurer un plan de verre de planéité très faible ( $\lambda/10$ , planéité  $\approx 60$  nm) avec un capteur optique de très grande précision ( $u=0.06$   $\mu\text{m}$ ).

La surface de correction est ensuite paramétrée par une méthode de paramétrage original : le paramétrage modal, permettant ainsi de n'extraire que les variations géométriques répétables. Le paramétrage modal d'une surface résulte de la Décomposition Modale Discrète (DMD) de la mesure de la surface. La DMD consiste à décomposer cette mesure dans un ensemble de défauts élémentaires, dérivant de la mécanique vibratoire.

## Abstract

The issue of this document is to improve the metrological performances of XY translation stages of an optical profilometer Altisurf©. We propose a calibration protocol to correct the systematic geometrical errors, for example pitch and roll, related to geometrical errors of guiding system. It consists in measuring a flat glass with  $\lambda/10$  (flatness  $\approx 60$  nm) and a very high precision optical sensor ( $u=0.06$   $\mu\text{m}$ ).

The correction surface is then parameterized by an original method of parameterization: the modal parameterization, to differentiate the systematic and random geometrical errors. The modal parameterization of a surface results from the Discrete Modal Decomposition (DMD) of the measured surface. The DMD consists in decomposing this measurement to a basis of basic errors, derived from vibratory mechanics.

## Introduction

Dans le domaine de la métrologie des surfaces, les performances des moyens de contrôle sont croissantes en terme de précision et de nombre de points mesurés. De plus, l'informatisation et les progrès des méthodes optiques permettent une meilleure observation des surfaces. Par ailleurs, la complexité croissante des technologies nécessite une plus grande performance dans la conception. Par conséquent les exigences géométriques deviennent nombreuses et complexes à gérer. C'est pourquoi nous suggérons d'augmenter les performances de mesure d'un

profilomètre optique Altisurf©, de la société française Altimet ; référence dans l'industrie de la métrologie confocale chromatique des surfaces.

Nous proposons, dans ces travaux, une méthode originale de calibration de la planéité du montage XY de micro-positionnement, permettant de corriger les variations géométriques linéaires et angulaires (par exemple pour le tangage et le roulis), liés à des erreurs géométriques du système mécanique de guidage. Cette calibration non linéaire permet de compenser ces variations géométriques, en temps réel, sur les mesures du profilomètre optique.

La correction non linéaire calculée est basée sur une méthode originale de paramétrage des variations géométriques, appelée paramétrage modal. Le paramétrage modal, dérivant de la mécanique vibratoire, est un outil mathématique robuste pour caractériser la mesure d'une pièce comme une somme de défauts élémentaires. Cet outil de transformation est appelé Décomposition Modale Discrète (DMD). L'espace de défauts élémentaires est composé des déformées modales (ou modes propres), qui sont calculées à partir de l'élément géométrique nominal. La DMD d'une mesure est unique et il est intéressant de souligner que les déformées modales sont naturellement triées avec une complexité géométrique croissante. Grâce au tri, le paramétrage modal permet de séparer les défauts de forme et d'ondulation de la mesure de planéité.

Les résultats du protocole de calibration sont présentés, dans la seconde partie du document. Tout d'abord, nous montrons les résultats de mesure du plan de verre de très faible planéité ( $1/10$ , planéité  $\approx 60$  nm). Ces mesures sont, ensuite, paramétrées avec notre méthode de paramétrage, via la DMD. Dans ce nouvel espace de paramètres, il est facile d'extraire les défauts de forme et d'ondulation systématique permettant d'aboutir à une correction de planéité robuste du montage XY des tables de micro-positionnement.

## Méthode de paramétrage des variations géométriques des surfaces

### Etat de l'art

Les variations géométriques des surfaces sont, dans le cadre de la spécification géométrique des produits, définies par des limites d'acceptabilité. En effet, les documents normatifs ISO 1101 [1] définissent et caractérisent le défaut de forme par la notion de zone de tolérance, c'est-à-dire un espace limité et caractérisé par une tolérance. Le défaut de forme est alors représenté ou paramétré par une valeur scalaire. Pour ne pas se restreindre à cette définition, qui ne fait pas la distinction

entre un cylindre légèrement conique et un cylindre présentant un défaut trilobe, il existe d'autres types de paramétrage.

Une première approche consiste à décomposer les données mesurées dans une famille de fonctions définie a priori. On peut caractériser les ondulations d'un profil circulaire [2-3] ou linéaire avec la transformée de Fourier. Cette étude démontre l'intérêt d'utiliser les séries de Fourier pour modéliser la relation entre les mouvements de la broche d'usinage et le profil de circularité de la pièce. En traitement d'image, la compression en JPEG s'effectue à l'aide de la transformée discrète en cosinus (DCT). Capello et Semeraro [4-6] utilisent cette décomposition pour interpréter le défaut de forme d'élément géométrique rectangulaire. Dans le domaine de l'optique, Wyant et Creath [7] décrivent les défauts fonctionnels des lentilles avec des polynômes de Zernike, ces travaux ont d'ailleurs fait l'objet d'une norme ISO 10110-5 [8] sur la description des défauts d'aberration des instruments d'optique. Toujours en définissant une famille de fonctions a priori, Henke et al. [9] travaillent sur des éléments géométriques cylindriques et couplent les polynômes de Chebyshev avec les séries de Fourier pour évaluer les défauts systématiques de fabrication. Concernant l'analyse multi-échelle des surfaces, Chen *et al.* [10] démontrent que la décomposition en ondelettes se révèle particulièrement intéressante pour décrire les aspects fonctionnels et la qualité de fabrication des surfaces usinées. Lee *et al.* [11] font le même constat lorsqu'ils appliquent ce paramétrage sur des profils de rugosité et concluent que cette méthode de filtrage est très adaptée au domaine de la tribologie.

Une seconde approche consiste à caractériser les variations géométriques des surfaces uniquement à partir des données brutes issues de la mesure. Dans cette approche, on peut citer la décomposition modale empirique (EMD), introduite par Huang et al. [12] qui va décomposer un signal en une somme d'un nombre fini de composantes, appelées IMFs (pour Intrinsic Mode Function). Boudraa *et al.* [13] utilisent ce type de décomposition pour caractériser les fonds marins. Le résultat de la décomposition des profils bathymétriques simulés montre que les IMFs obtenues caractérisent fidèlement les différents types d'ondulations des fonds marins. L'analyse en composante principale (ACP) est également une méthode qui ne nécessite pas la création d'une base de fonctions. Les travaux de Summerhays et al. [9, 14] proposent un modèle de description des défauts par des formes spécifiques (eigen shapes) issues de l'ACP qui se montre beaucoup plus efficace pour des surfaces ayant des défauts géométriques complexes et des discontinuités.

### Paramétrage modal

Cette méthode de paramétrage est basée sur la Décomposition Modale Discrète (DMD). La DMD consiste à décomposer un signal dans une famille de fonctions discrètes définie a priori, comme la transformée de Fourier discrète ou encore la transformée en ondelettes discrètes. Nous avons initié cette décomposition pour décrire la forme géométrique des pièces mécaniques, Formosa [15]. Ici le signal à décomposer n'est autre que la mesure d'éléments géométriques (surface plane, cylindrique, sphérique et autres) qui composent la pièce mécanique. D'une manière plus précise, nous allons

chercher à décrire la mesure de l'élément géométrique avec une famille de fonctions discrètes, appelées modes ou déformées modales. Cette famille de fonctions est établie à partir de l'élément géométrique précédent. L'opération de décomposition n'est autre qu'une projection vectorielle du vecteur mesure  $V$  dans l'espace des modes  $Q_i$  (équation 1).

$$Q^*.V = ((Q^T.Q)^{-1}.Q^T).V = \lambda \quad (1)$$

où la base  $Q$  est constituée des vecteurs  $Q_i$  et le vecteur  $\lambda$  définit l'ensemble des contributions  $\lambda_i$  de chacun des modes, appelées coordonnées modales ou coefficients modaux. La projection s'effectuant dans la base  $Q$  qui n'est pas orthonormale nous impose d'utiliser la base duale  $Q^*$ . Nous avons fait le choix de normer les vecteurs  $Q_i$  avec la norme infinie ( $\|Q_i\|_\infty = 1$ ), ce qui nous permet d'avoir une contribution  $\lambda_i$  en valeur métrique et homogène à la mesure.

On peut ainsi décrire la mesure de la façon suivante :

$$V = \sum_{i=1}^{N_q} \lambda_i.Q_i + \varepsilon(N_q) \quad (2)$$

avec  $N_q$  le nombre de modes choisis pour représenter le vecteur mesure  $V$  et  $\varepsilon$  le résidu. Les modes  $Q_i$  sont issus de la résolution d'un problème classique de mécanique vibratoire du type :

La résolution de ce problème peut s'effectuer analytiquement [16] ou numériquement par la méthode des éléments finis [17]. Généralement, la résolution est numérique ce qui implique à la décomposition modale d'être discrète.

Avec une approche similaire à la transformée de Fourier mais pouvant s'appliquer à tous les types d'éléments géométriques, la DMD permet de paramétrer la mesure des éléments géométriques dans un espace de fonctions discrètes unique pour chaque type d'élément géométrique. Cet espace peut être enrichi en insérant des formes prédéfinies, communément appelées formes "technologiques".

### Application du paramétrage modal

On illustre dans la suite, le paramétrage modal sur la mesure d'une surface. La mesure est représentée par un ensemble de valeurs discrètes, correspondant aux points de mesure (cf. Figure 1). Dans cet exemple, les points de mesure sont acquis par un profilomètre optique Altisurf© de la société Altimet. Les paramètres choisis pour mesurer cette surface sont :

Axe X	Longueur :	0.8 mm	Points	80000
	Pas :	2 µm	Temps de mesure	4 min
Axe Y	Longueur :	0.4 mm	ΔZ	37 µm
	Pas :	2 µm	Précision axiale (Z)	0.06 µm

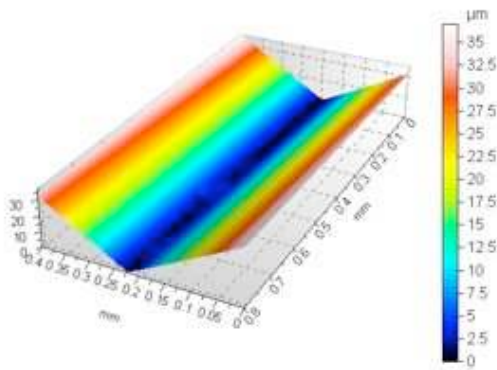


Figure 1 : Représentation 3D de la surface mesurée

### Décomposition modale

Pour réaliser le paramétrage modal de cette surface nous appliquons la DMD (cf. § Paramétrage modal). La mesure  $V_{mes}$  est ainsi décomposée dans l'espace des modes (cf. Figure 3). Les modes composants cet espace correspondent aux modes propres naturels de vibrations d'un élément géométrique plan. Ces modes sont triés par ordre de complexité géométrique croissante dans l'espace : les modes  $Q_i$  d'indice faible correspondent aux composantes de basse fréquence et respectivement les modes d'indice élevé aux composantes haute fréquence.

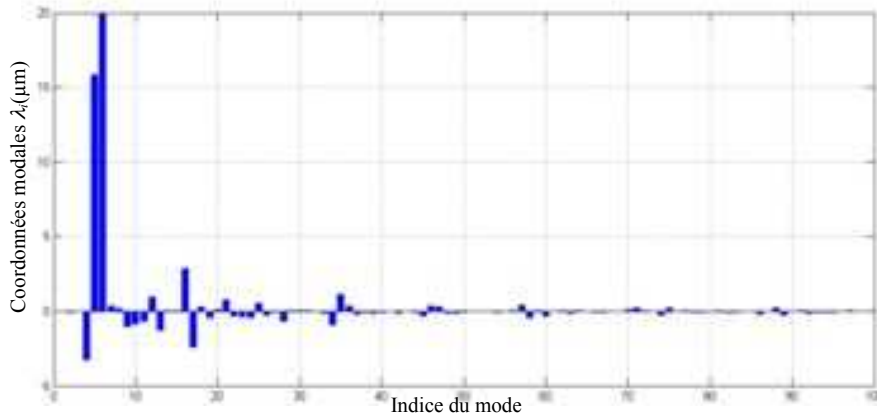


Figure 2 : Spectre modal

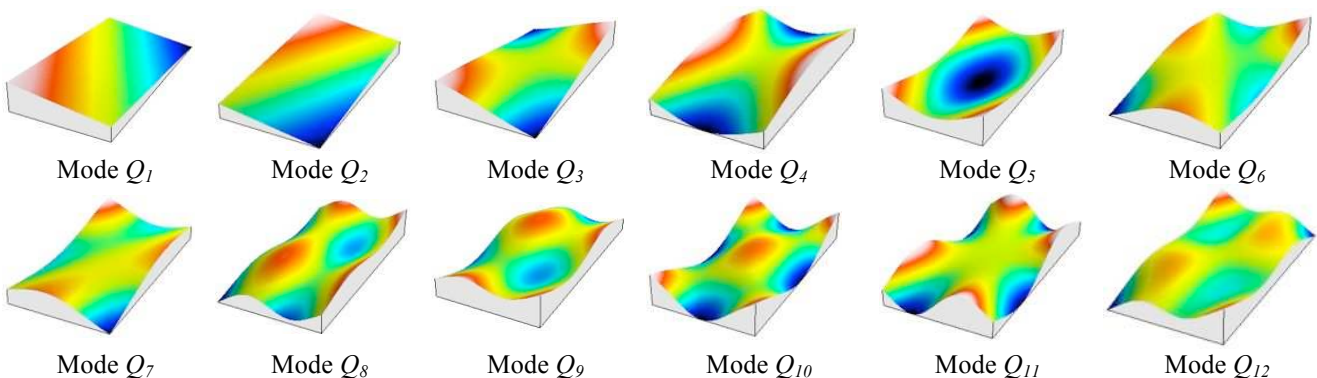


Figure 3 : Espace des modes  $Q_i$  (pour un élément géométrique plan)

### Reconstruction

Pour évaluer la pertinence de la DMD, il est usuel de reconstruire la surface mesurée avec tous les modes calculés lors de la décomposition (500 dans ce cas), et de

Ce paramétrage permet donc de changer l'espace de description de la mesure de la surface. On passe d'un espace dans lequel la mesure est décrite points à points, à un espace dans lequel les descripteurs sont les modes de vibrations d'un élément géométrique plan.

La surface mesurée  $V_{mes}$  est projetée dans l'espace des modes  $Q_i$  selon l'équation 1 et nous obtenons la décomposition modale suivante :

$$V_{mes} = \sum_{i=1}^{N_q} \lambda_i Q_i + \epsilon(N_q) \quad (4)$$

Dans ce cas d'application, la mesure de la surface a été décomposée dans un espace de 500 modes. Dans l'espace des modes, le résultat de la DMD se représente sous la forme d'un spectre. Ce spectre représente la contribution  $\lambda_i$ , en valeur métrique, de chaque mode sur la surface mesurée, que l'on nomme coordonnée modale (cf. Figure 2).

Il est intéressant d'observer que les valeurs des coordonnées modales décroissent rapidement avec l'indice du mode : les composantes haute fréquence ont des valeurs métriques très peu élevées devant les composantes de basse fréquence. C'est un résultat classique de la DMD appliquée à des mesures de surfaces "réelles".

comparer cette reconstruction à la surface mesurée (cf. Figure 4).

Dans le cadre de cet exemple, la surface reconstruite  $V_{rec}$  a une amplitude de 37  $\mu\text{m}$  et la surface résidu  $V_{résidu}$  a une amplitude de 2.5  $\mu\text{m}$ . La surface résidu est principalement

composé du bruit de mesure et des défauts de nature non

périodique (défauts locaux).

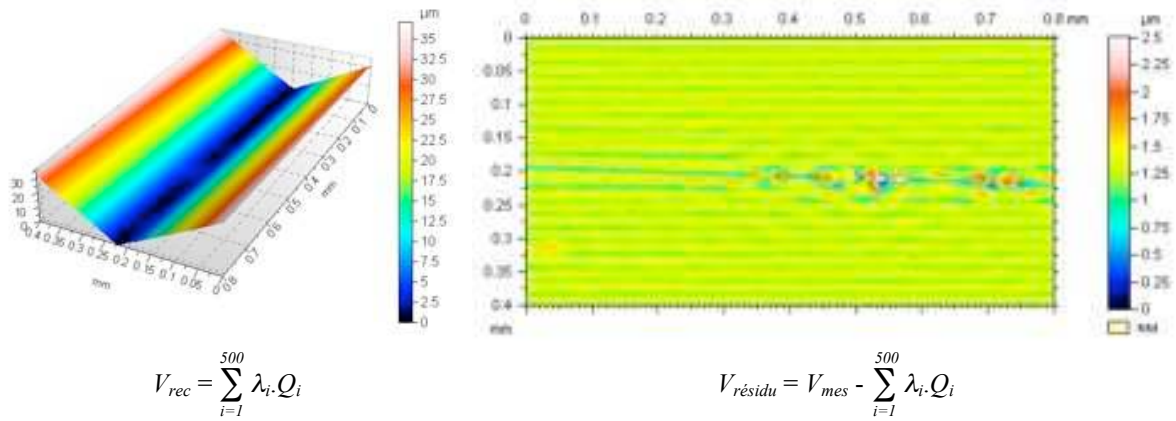


Figure 4 : Reconstruction modal de la surface

**Filtrage modal**

La DMD permet comme nous venons de le décrire de reconstruire complètement la surface (cf. Figure 4) ou partiellement (cf. Figure 5) : en triant par fréquence (c'est-à-dire indice des modes) ou par valeurs décroissantes des coordonnées modales.

Le filtrage par fréquence permet de reconstruire les différents ordres de défauts ; forme, ondulation et rugosité. La reconstruction de ces ordres de défauts peut se calculer en exploitant les indices des modes du début, milieu et fin

du spectre modal (cf. Figure 2). Il est clair que la définition des seuils sur le spectre influence fortement le résultat des reconstructions de chaque ordre de défaut. Les documents de normalisation ne définissent pas de règles systématiques pour positionner ces seuils et ce n'est pas non plus l'objectif de cette méthode de paramétrage. Cependant, l'utilisateur de la DMD peut facilement faire varier ces seuils pour procéder à la reconstruction de ces ordres de défauts en temps réel.

La Figure 6 présente la reconstruction des ordres de défauts pour notre cas d'application.

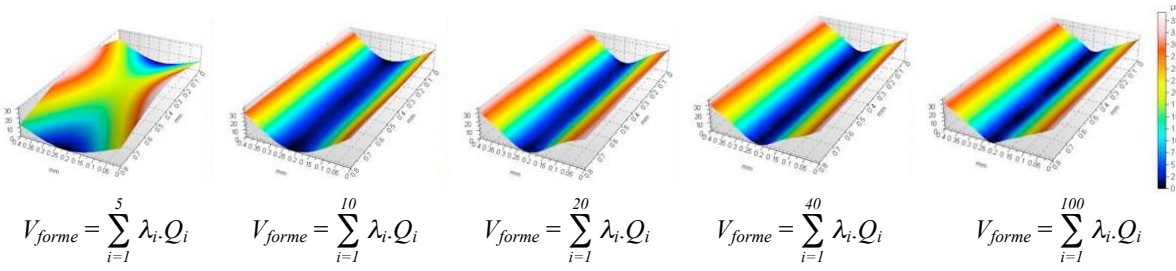


Figure 5 : Reconstruction modal de la surface avec les 5, 10, 20, 40, 100 premiers modes

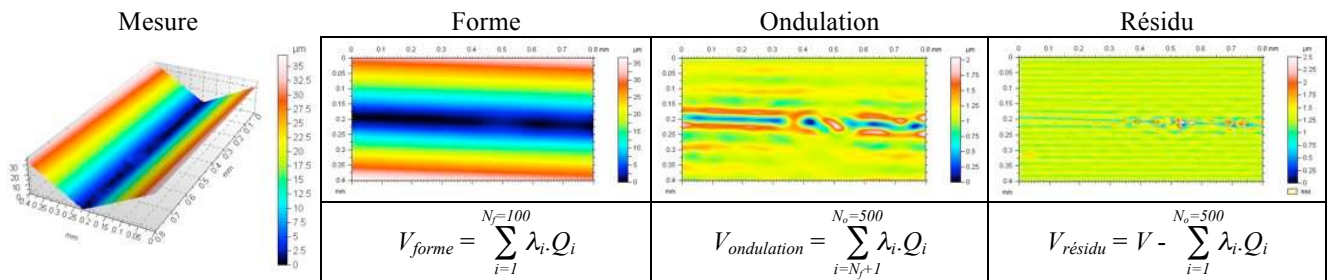


Figure 6 : Filtrage modal de la surface mesurée

**Calibration de la planéité d'un montage XY de micro-positionnement**

Nous proposons, dans cette seconde partie, d'évaluer les variations géométriques systématiques d'un montage XY de micro-positionnement d'un profilomètre optique Altisurf®. L'objectif est de corriger les défauts de planéité engendrés par le système mécanique de guidage.

Dans un premier temps, nous évaluons les variations géométriques systématiques ou répétables par l'intermédiaire de la mesure d'un plan de verre ( $\lambda/10$ , planéité  $\approx 60$  nm). Nous calculons, dans un second temps, une surface de correction non linéaire par la méthode du paramétrage modal, présentée dans le paragraphe précédent.



### Protocole de calibration

Le montage XY de micro-positionnement, étudié dans ces travaux, est composé de deux tables linéaires d'une course de 200 mm chacune. Le protocole de calibration consiste à mesurer un plan de verre de 200×200 mm de faible planéité ( $\lambda/10$ , planéité  $\approx 60$  nm) pour évaluer une cartographie des variations géométriques du montage XY. Nous avons choisi de mesurer dix fois le plan de verre. Pour chaque mesure, nous prenons un échantillonnage en mode grille orthogonale de 201×201 points, soit un pas de 1 mm sur X et Y (cf. Figure 7). Le choix d'avoir un pas de 1 mm est lié d'une part, au système mécanique de guidage des tables linéaires et d'autre part, au temps de calibration qui ne doit pas être trop important (ici  $\approx 10$  min). Sur la Figure 8 est présentée le résultat de 10 mesures consécutives du plan de verre. On montre sur ces cartographies 3D, la surface moyenne (cf. Figure 8 a et b) et écart-type (cf. Figure 8) calculées à partir du lot des 10 mesures. L'amplitude max de la surface moyenne est 9  $\mu\text{m}$  pour un écart-type max de 0.275  $\mu\text{m}$ . La surface écart-type du lot met en évidence les zones géographiques des

variations géométriques répétables. Compte tenu des valeurs de l'écart-type et de l'amplitude des variations géométriques du lot de mesures, il semble intéressant de calculer une correction numérique pour améliorer significativement la planéité du montage XY de micro-positionnement.

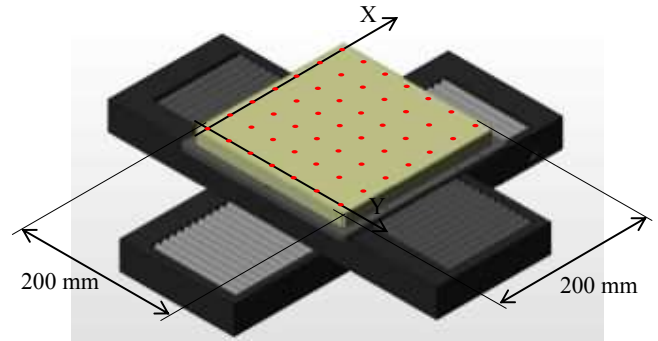


Figure 7 : Protocole de calibration

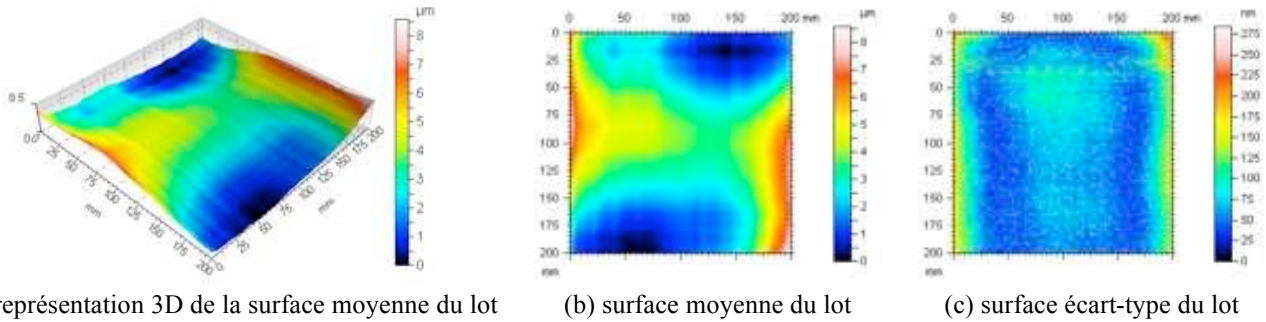
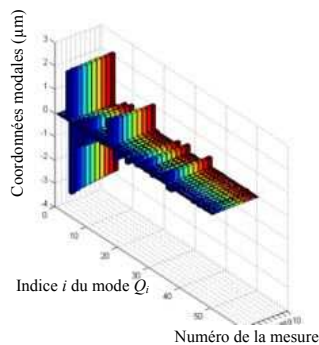


Figure 8 : Cartographie de la surface moyenne des variations géométriques du montage XY

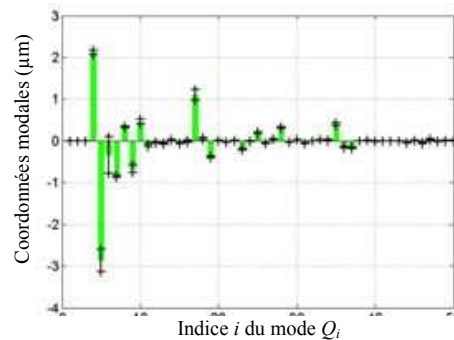
### Décomposition modale

Nous réalisons alors la DMD des mesures des dix surfaces. La DMD est effectuée dans un espace de 500 modes, identique à celui utilisé au §*Décomposition modale*. Le résultat est présenté sur le spectre modal 3D (cf. Figure 9 (a)) d'une part, et d'autre part sous la forme d'un spectre moyen du lot et l'écart-type associé (cf. Figure 9 (b)). L'utilisation de ce paramétrage permet, tout d'abord, de filtrer la surface par ordre de défauts (cf. Figure 10), puis d'en évaluer la répétabilité.

La valeur de l'écart-type de chaque mode (sur les 500 modes de la décomposition), nous permet de conclure sur la très bonne répétabilité des variations géométriques de type forme [1, 50] et ondulation [51, 500] du montage XY. On montre sur la Figure 10 la reconstruction de la forme moyenne (amplitude = 8.5  $\mu\text{m}$ ), de l'ondulation moyenne (amplitude = 1.3  $\mu\text{m}$ ) et l'écart-type associé. La visualisation de ces reconstructions, nous permet d'en déduire la qualité géométrique du système mécanique de guidage, liée d'une part à la rectitude des rails de guidage et d'autre part aux éléments roulants.



(a) Représentation 3D du spectre modal du lot



(b) Spectre modal moyen du lot et écart type associé

Figure 9 : Spectre modal du lot

Mesure moyenne

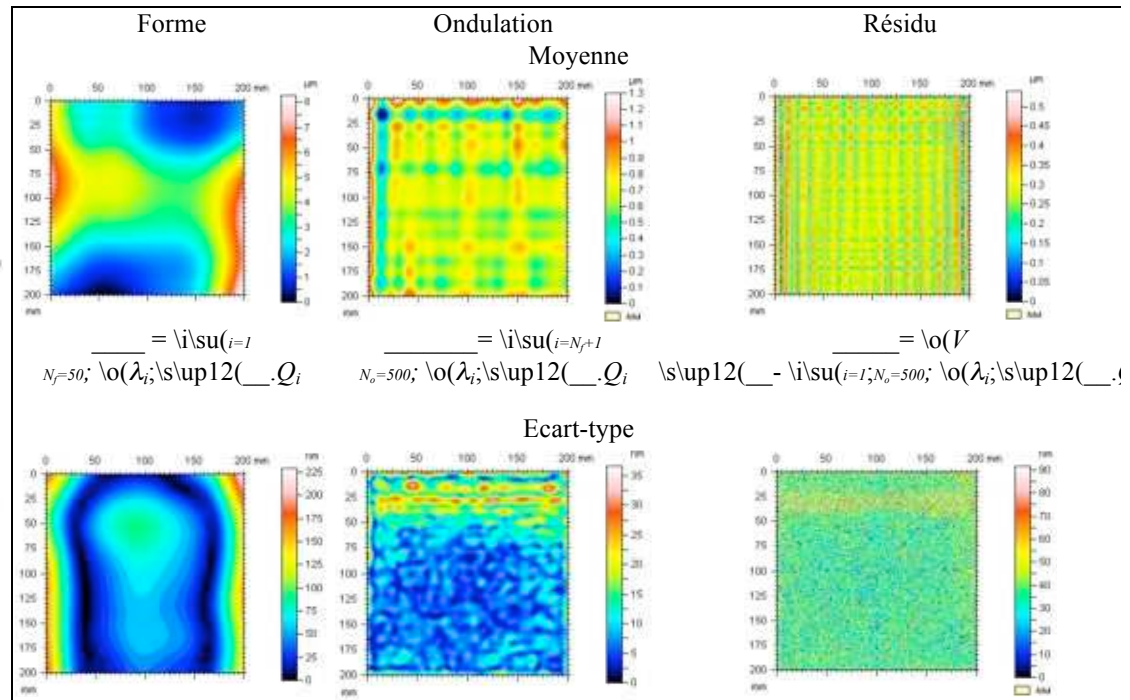
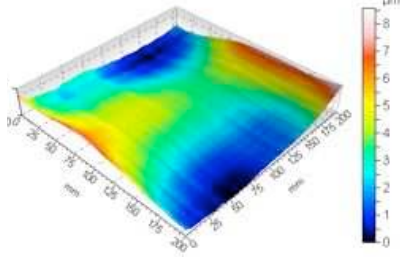


Figure 10 : Filtrage modal du lot

**Calcul de la surface de correction**

Compte tenu de la qualité de répétabilité des variations géométriques du montage XY étudié en terme de défaut forme et d'ondulation, il est pertinent de calculer une correction numérique. On montre, sur la Figure 11, la

reconstruction de la surface de correction  $V_{correction}$ , calculée avec les 500 modes de l'espace pour ce montage XY. En appliquant la correction à une mesure de plan de verre, on corrige d'un ordre de grandeur la planéité du montage XY, de 8.5 µm à 0.55 µm (cf. Figure 11 surface corrigée  $V_{corrigée}$ ).

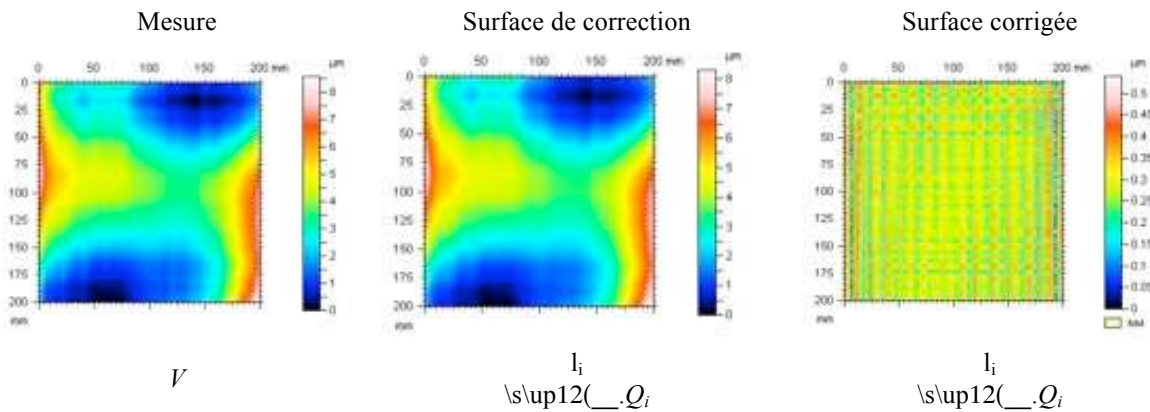


Figure 11 : Surface de correction

Cette surface de correction permet donc de compenser ces variations géométriques, en temps réel, sur les mesures du profilomètre optique.

**Conclusion**

L'avènement des instruments d'optique dans le domaine de la métrologie des surfaces a permis d'augmenter considérablement la qualité des mesures, en terme de précision et de densité de points mesurés. L'introduction de ces technologies optiques sur les moyens de contrôle nécessite des exigences plus grandes dans la conception des instruments et requiert une qualité géométrique plus importante. De ce fait, nous avons, dans ces travaux,

amélioré significativement et de façon pertinente la planéité d'un montage XY de micro-positionnement d'un profilomètre optique Altisurf©.

En effet, en partant d'une approche expérimentale de mesure de plan verre, nous avons caractérisé les variations géométriques engendrées par le système mécanique de guidage du montage XY. L'utilisation d'une méthode originale de paramétrage de variations géométriques de surface, nous a ensuite permis de quantifier la répétabilité des défauts géométriques. Le paramétrage modal, appliqué aux mesures du plan de verre, s'est avéré pertinent dans la sélection des ordres de défauts systématiques.

Finalement, nous avons pu mettre en place un protocole expérimental de calibration permettant de construire une

surface de correction robuste pour compenser les variations géométriques du montage XY. L'intégration de cette correction dans le logiciel de pilotage (Phenix©) du profilomètre optique Altisurf© permet de compenser ces variations, en temps réel, sur la mesure en cours.

## Références

- [1] ISO 1101, "Geometric tolerancing - Tolerancing of form, orientation, location, and run-out - Generalities, definitions, symbols, and indications on drawings", International Organization for Standardization, 1983.
- [2] N. Cho, J.F. Tu, "Roundness modeling of machined parts for tolerance analysis", Precision Engineering, 2001, vol. 25, pp. 35-47.
- [3] N. Cho, J.F. Tu, "Quantitative circularity tolerance analysis and design for 2D precision assemblies", International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2002, vol. 42, pp. 1391-1401.
- [4] E. Capello, A. Semeraro, "Harmonic fitting approach for plane geometry measurements", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2000, vol. 16, pp. 250-258.
- [5] E. Capello, A. Semeraro, "The harmonic fitting method for the assessment of the substitute geometry estimate error. Part I: 2D and 3D theory", International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2001, vol. 41, pp. 1071-1102.
- [6] E. Capello, A. Semeraro, "The harmonic fitting method for the assessment of the substitute geometry estimate error. Part II: statistical approach, machining process analysis and inspection plan optimisation", International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2001, vol. 41, pp. 1103-1129.
- [7] J.C. Wyant, K. Creath, "Basic wavefront aberration theory for optical metrology", Applied Optics and Optical Engineering, 1992, vol. 11, pp. 27-39.
- [8] ISO 10110-5, "Optics and photonics - Preparation of drawings for optical elements and systems - Part 5: Surface form tolerances", International Organization for Standardization, 2001.
- [9] R.P. Henke, K.D. Summerhays, J.M. Baldwin, R.M. Cassou, C.W. Brown, "Methods for evaluation of systematic geometric deviations in machined parts and their relationships to process variables", Precision Engineering, 1999, vol. 23, pp. 273-292.
- [10] X. Chen, J. Raja, S. Simanapalli, "Multi-scale analysis of engineering surfaces", International Journal of Machine Tools and Manufacture, 1995, vol. 35, pp. 231-238.
- [11] S.H. Lee, H. Zahouani, R. Caterini, T.G. Mathia, "Morphological characterisation of engineered surfaces by wavelet transform", International Journal of Machine Tools and Manufacture, 1998, vol. 38, pp. 581-589.
- [12] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung, H.H. Liu, "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis", Proc. Roy. Soc. London, 1998, vol. 454, pp. 903-995.
- [13] AO. Boudraa, C. Pollet, JC. Cexus, Z. Saidi, "Caractérisation des fonds marins par Décomposition Modale Empirique", 20<sup>e</sup> colloque sur le traitement du signal et des images, 2003, Colloque GRETSI.
- [14] K.D. Summerhays, R.P. Henke, J.M. Bladwin, R.M. Cassou, C.W. Brown, "Optimizing discrete point sample patterns and measurement data analysis on internal cylindrical surfaces with systematic form deviations", Journal of the International Societies for Precision Engineering, 2002, vol. 26, 105-121.
- [15] F. Formosa, S. Samper, I. Perpoli, "Modal expression of form defects", Proceedings of 9th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Arizona State University, USA, 2005.
- [16] A.W. Leissa, Vibration of plates, NASA SP-60, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., 1969.
- [17] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The finite element method for solid and structural mechanics, Sixth Edition, ISBN 0-7506-6320-0, 2002.