HAL open science

Une caractérisation spinorielle des surfaces de Sol_3

Julien Roth

To cite this version:

Julien Roth. Une caractérisation spinorielle des surfaces de Sol_3. 2012. hal-00739665v3

HAL Id: hal-00739665

https://hal.science/hal-00739665v3

Preprint submitted on 25 May 2015 (v3), last revised 7 Feb 2017 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE CARACTÉRISATION SPINORIELLE DES SURFACES DE Sol_3

JULIEN ROTH

Résumé. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une immersion isométrique d'une surface dans le groupe Sol_3. Cette condition s'exprime par l'existence sur la surface d'un champ de spineurs particulier.

1. Introduction

Une hypersurface immergée isométriquement dans une variété ambiante satisfait aux équations de Gauss et Codazzi. Dans le cas où l'espace ambiant est un des 3 espaces formes ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$), ces équations sont également une condition suffisante à l'existence d'une immersion isométrique dans cet espace. Récemment, Daniel [1, 2] a obtenu un théorème d'immersion isométrique dans les espaces produits $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ ainsi que dans les espaces homogènes de dimension 3 dont le groupe d'isométrie est de dimension 4, c'est à dire les sphères de Berger, le groupe d'Heisenberg Nil_3, le revêtement universel du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ainsi que les produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Dans ce cas, deux équations sont nécessaires en supplément de celle de Gauss et Codazzi pour l'existence d'une immersion isométrique.
Piccione et Tausk [10] ont généralisé les résultats de Daniel à une classe plus large de groupes de Lie grâce à la notion de G-structure. En particulier, cette classe englobe le groupe Sol_3, dont Lodovici a explicité les équations nécessaires et suffisantes (voir [7]), obtenant ainsi un théorème d'immersion isométrique dans la huitième et dernière géométrie de la classification de Thurston, les sept autres étant $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 et $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$. Pour plus de détails sur ces huit géométries, on se référera à [12].
D'autre part, des versions spinorielles de ces théorèmes ont été obtenus pour les espace ambiants de dimension 3. Plus précisément, la condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une immersion isométrique est l'existence d'un champ de spineur particulier sur la surface, remplaçant les équation de Gauss et Codazzi et d'éventuelles équations additionnelles selon l'espace ambiant (voir [3, 8, 11, 9]). Seul le cas du groupe Sol_3 n'a pas été traité jusqu'à présent, c'est le but de cette note (Théorème 4.1).

2. Sol_3 et ses surfaces

Le groupe de Lie Sol_3 muni d'une métrique invariante à gauche est une variété homogène de dimension 3 dont le groupe d'isométrie est de dimension 3. Il peut être vu comme $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique suivante :

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2,$$

où (x, y, z) sont les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^3$. Cette métrique est invariante à gauche pour la structure de groupe de Lie donné par le produit suivant :

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^{z}y', z + z').$$

On définit le repère (e_1, e_2, e_3) appelé repère canonique par :

$$e_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x},\ e_2 = e^{z}\frac{\partial}{\partial y},\ e_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ce repère est orthonormé et invariant à gauche. La connexion riemannienne $\overline{\nabla}$ est alors donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lll} \overline{\nabla}_{e_1}e_1 = -e_3, & \overline{\nabla}_{e_2}e_1 = 0, & \overline{\nabla}_{e_3}e_1 = 0, \\ \overline{\nabla}_{e_1}e_2 = 0, & \overline{\nabla}_{e_2}e_2 = e_3, & \overline{\nabla}_{e_3}e_2 = 0, \\ \overline{\nabla}_{e_1}e_3 = e_1, & \overline{\nabla}_{e_2}e_3 = -e_2, & \overline{\nabla}_{e_3}e_3 = 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Soit maintenant (M, g) une surface immergée isométriquement dans Sol_3 et ∇ sa connexion de Levi-Civita. On notera par ν sa normale unitaire et A sa seconde forme fondamentale. Enfin, on considère les vecteurs tangents T_i et les fonctions réelles f_i tels que $e_i = T_i + f_i\nu$, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. On a donc clairement $< T_i, T_j > + f_i f_j = \delta_i^j$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ et grâce aux relations (1), on peut voir que les relations suivantes sont satisfaites. Pour $i = 1, 2$ et tout champ de vecteurs tangent X :

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_X T_i = f_i AX + (-1)^i < X, T_i > T_3, \\ X(f_i) = - < AX, T_i > + (-1)^i < X, T_j > f_3, \end{array}\right. \tag{2}$$

ainsi que :

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_X T_3 = f_3 AX + \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1} < X, T_j > T_j, \\ X(f_3) = - < AX, T_3 > + \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1} < X, T_j > f_j. \end{array}\right. \tag{3}$$

Enfin, les equations de Gauss et Codazzi sont les suivantes : **À VÉRIFIER, surtout les signes !**

(4)
$$R_{1212} = det(A) + ||T_1||^2||T_2||^2 - < T_1, T_2 >^2 - ||T_1||^2||T_3||^2 + < T_1, T_3 >^2 - ||T_2||^2||T_3||^2 + < T_2, T_3 >^2$$

(5)
$$d^{\nabla}A(\epsilon_1, \epsilon_2) = < JT_1, T_2 > (f_2T_1 - f_1T_2) - < JT_1, T_3 > (f_3T_1 - f_1T_3) - < JT_2, T_3 > (f_3T_2 - f_2T_3),$$

où J est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur l'espace tangent à M, et(ϵ_1, ϵ_2) est une base orthonormée de M. Dans [7], Lodovici a montré que la donnée sur une surface (M, g) des données A, T_i et f_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, vérifiant les équations (2), (3), (4) et (5) et équivalent à l'existence d'une immersion isométrique de (M, g) dans Sol_3 de seconde forme fondamentale A et telle que en tout point de M, $T_i + f_i\nu = e_i$, où ν est la normale à l'immersion. De plus, cette immersion est unique aux isométries ambiantes près.

3. Spineurs sur les surfaces

Tout d'abord, pour les rappels concernant la géométrie spinorielle, nous nous renvoyons à la lecture de [6, 4] par exemple. Le groupe Sol_3 étant difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, c'est une variété spinorielle et nous la munissons de la structure spinorielle triviale. Soit une section constante φ du fibré des spineurs, l'expression locale de la

connection spinorielle, en utilisant (1), montre que la dérivée covariante de φ vérifie l'expression suivante (voir [5] où ce calcul est fait) :

$$\overline{\nabla}_{e_1}\varphi = \frac{1}{2}e_2 \bullet \varphi, \qquad \overline{\nabla}_{e_2}\varphi = \frac{1}{2}e_1 \bullet \varphi, \qquad \overline{\nabla}_{e_3}\varphi = 0, \tag{6}$$

où $\overline{\nabla}$ est la connexion spinorielle et $\bullet$ est la multiplication de Clifford de Sol_3. Il est bien connu que le fibré des spineurs d'une surface immergée dans un espace de dimension 3 et le fibré des spineurs de l'espace ambiant au dessus de la surface sont isomorphes et que leurs connexions respectives sont liées par la formule de Gauss spinorielle :

$$\begin{aligned}
\nabla_X\varphi &= -\frac{1}{2}AX\cdot\varphi + \overline{\nabla}_X\varphi \\
&= -\frac{1}{2}AX\cdot\varphi + \overline{\nabla}_{<X,T_1>e_1}\varphi + \overline{\nabla}_{<X,T_2>e_2}\varphi + \overline{\nabla}_{<X,T_3>e_1}\varphi \\
&= -\frac{1}{2}AX\cdot\varphi + \frac{1}{2}<X,T_1>e_2\bullet\varphi + \frac{1}{2}<X,T_2>e_1\bullet\varphi \\
&= -\frac{1}{2}AX\cdot\varphi + \frac{1}{2}<X,T_1>T_2\bullet\varphi + \frac{1}{2}<X,T_1>f_2\nu\bullet\varphi \\
&\quad +\frac{1}{2}<X,T_2>T_1\bullet\varphi + \frac{1}{2}<X,T_2>f_1\nu\bullet\varphi
\end{aligned}$$

où ∇ et $\cdot$ sont respectivement la connexion spinorielle et la multiplication spinorielle de M. En utilisant la relation entre les multiplications de Clifford de Sol_3 et de M, à savoir $Y\bullet\varphi = -Y\cdot\omega\cdot\varphi$ pour Y tangentet $\nu\bullet\varphi = \omega\cdot\varphi$, ainsi que les relations (6), on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla_X\varphi &= --\frac{1}{2}AX\cdot\varphi - \frac{1}{2}<X,T_1>T_2\cdot\omega\cdot\varphi + \frac{1}{2}<X,T_1>f_2\omega\cdot\varphi \\
&\quad -\frac{1}{2}<X,T_2>T_1\cdot\omega\cdot\varphi + \frac{1}{2}<X,T_2>f_1\omega\cdot\varphi
\end{aligned} \tag{7}$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour énoncer le résulat principal de cette note.

4. Résultat principal

Le résultat suivant est donc la version spinorielle du théorème d'immersion isométrique des surfaces dans le groupe Sol_3.

Théorème 4.1. *Soient (M,g) une surface riemannienne orientée, $A : TM \longrightarrow TM$ un champ d'endomorphismes, T_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ des champs de vecteurs tangents et f_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ des fonctions réelles tels que $< T_i, T_j > + f_i f_j = \delta_i^j$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant 3$. Si de plus les vecteurs T_i et les fonctions f_i satisfont les équations (2) et (3), alors il y a équivalence entre*

(1) l'existence d'une immersion isométrique de (M,g) dans Sol_3 de seconde forme fondamentale A et telle que en tout point de M, $T_i + f_i\nu = e_i$, où ν est la normale à l'immersion, $(e_!, e_2, e_3)$ étant le base canonique de Sol_3.

(2) l'existence d'un champ de spineur satisfaisant l'équation (7), c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\nabla_X\varphi &= --\frac{1}{2}AX\cdot\varphi - <X,T_1>T_2\cdot\omega\cdot\varphi + <X,T_1>f_2\omega\cdot\varphi \\
&\quad -<X,T_2>T_1\cdot\omega\cdot\varphi + <X,T_2>f_1\omega\cdot\varphi
\end{aligned}$$

De plus, cette immersion est unique aux isométries de Sol_3 *près.*

Idée de preuve : Le sens (i) implique (ii) découle de la discussion des sections 2 et 3. Pour la réciproque, l'argument de preuve est standard pour ce type de résultat, on calcule la courbure spinorielle appliquée au champ de spineur φ, c'est à dire

$$\mathcal{R}(X,Y)\varphi = \nabla_X\nabla_Y\varphi - \nabla_Y\nabla_X\varphi - \nabla_{[X,Y]}\varphi.$$

Ce calcul est simple, mais (très) long étant donné l'expression de la dérivée de φ. Nous ne referons pas ce calcul ici, d'autant plus qu'il est proche de celui effectué dans [11] pour le cas des autres espaces homogènes de dimension 3.

$$\mathcal{R}(e_1,e_2)\psi = -\frac{1}{2}R_{1212}e_1\cdot e_2\cdot\psi,$$

valable pour tout champ de spineurs ψ, on obtient la relation suivante :

$$G\omega\cdot\varphi = C\cdot\varphi,$$

où G est une fonction réelle, C un champ de vecteur et $\omega = \epsilon_1\cdot\epsilon_2$ est l'élément de volume réel de M. Par un argument classique utilisé dans [8, 11] par exemple, on déduit que la fonction G et le champ de vecteurs C sont nuls, ce qui correspond aux équations de Gauss et Codazzi respectivement. On conclut en utilisant le théorème de Lodovici, comme les équations de Gauss et Codazzi sont vérifiées, ainsi que les deux équations additionnelles (2) et (3), il existe une immersion isométrique de (M,g) vérifiant toutes les conditions annoncées. □

Remarque 1. *Pour obtenir les équations de Gauss et Codazzi à partir du calcul de la courbure spinorielle, nous utilisons uniquement les équations (2) et pas les équations (3). Cependant, nous devons supposer qu'elles sont vérifiées pour utiliser le résultat de Lodovici.*

Références

[1] B. Daniel, *Isometric immersions into* $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ *and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (12) (2009), 6255-6282.

[2] B. Daniel, *Isometric immersions into* 3*-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv. 82 (2007), 87-131.

[3] T. Friedrich, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean* 3*-space*, J. Geom. Phys. (1998), 143-157.

[4] T. Friedrich, *Dirac operator's in Riemannian Geometry*, Graduate studies in mathematics, Volume 25, Americain Mathematical Society.

[5] G. Habib, *Tenseur d'impulsion-énergie et feuilletage*, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1 (2006).

[6] H.B. Lawson and M.L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University press, Princeton, New Jersey, 1989.

[7] S.D.B Lodovici, *An isometric immersion theorem in* Sol_3, Mat. Contemp 30 (2006), 109-123.

[8] B. Morel, *Surfaces in* $\mathbb{S}^3$ *and* $\mathbb{H}^3$ *via spinors*, Actes du séminaire de théorie spectrale, Institut Fourier, Grenoble, 23 (2005), 9-22.

[9] R. Nakad and J. Roth, *Hypersurfaces of Spin*^{c} *Manifolds and Lawson Correspondence*, Ann. Glob Anal. Geom 42 (3) (2012), 421-442 .

[10] P. Piccione and D.V. Tausk, *An existence theorem for G-strcture preserving affine immersions*, Indiana Univ. Math. J. 57 (3) (2008), 1431-1465.

[11] J. Roth, *Spinorial characterization of surfaces into* 3*-dimensional homogeneous manifolds*, J. Geom. Phys 60 (2010), 1045-106.

[12] P. Scott, *The geometry of* 3-*manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. 15 (5) (1983), 401-487.

Université Paris-Est, LAMA (UMR 8050), UPEMLV, UPEC, CNRS, F-77454, Marne-la-Vallée, France