HAL
open science

# Un nouveau modèle de l'énergie de commande des systèmes stochastiques à commutation

Adriana Simona Mihaita, Stéphane Mocanu

## To cite this version:

Adriana Simona Mihaita, Stéphane Mocanu. Un nouveau modèle de l'énergie de commande des systèmes stochastiques à commutation. CIFA 2012 - 7ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. pp.WePM4T9.2. hal-00739300

**HAL Id: hal-00739300**

**https://hal.science/hal-00739300v1**

Submitted on 7 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un nouveau modèle de l'énergie de commande des systèmes stochastiques à commutation

**Simona Mihăiţă** * **Stéphane Mocanu** *

* *Control system department, GIPSA-lab, UMR 5216, Grenoble-INP, France.*

Résumé : Cet article présente une méthode de calcul analytique pour les temps moyennes et les probabilités de sortie de la zone de contrôle appliquée sur une classe de systèmes stochastiques à commutation, nécessaire pour construire le modèle énergétique. Le modèle utilisé est un intégrateur à commutation avec des états multiples qui est caractérisé par une chaîne de Markov en temps continu. Pour limiter l'évolution aléatoire de la variable d'état, une zone de contrôle a été considérée. Un critère quadratique pour minimiser l'énergie consommée quand on applique le contrôle basé sur les événements est utilisé pour lequel nous calculons les temps de sortie et les probabilités de sortir de la zone de contrôle. La validation des temps de sortie et des probabilités par des résultats numériques est présentée à la fin de cet article.

*Mots clés :* Systèmes stochastiques à commutation, contrôle basé sur les événements, temps moyens de sortie

## 1. INTRODUCTION

Les systèmes stochastiques à commutation sont très souvent utilisés comme méthode spéciale de modélisation pour les systèmes dynamiques pratiques, en général pour les systèmes qui peuvent subir des brusques perturbations environnementales, des réparations ou des changements aléatoires dans leur comportement. Ils ont une grande utilisation dans la robotique (Egerstedt (2000)), dans les réseaux de communication (Hespanha (2005)), les systèmes de transport (Pola et al. (2003)), les systèmes de route automatisés Varaiya (1993), dans les systèmes biologiques (Khare et al. (2005)), et aussi dans les systèmes automobiles (Balluchi et al. (2000)). Les systèmes stochastiques à commutation (SSC) sont à la base des systèmes hybrides avec une dynamique stochastique continue gouvernée par des équations stochastiques différentielles avec des transitions aléatoires entre les états. En raison de leur comportement dual (continu et discret), des chaînes de Markov en temps continu sont utilisées pour représenter cette commutation aléatoire entre les états (Tsai (1998)). Même si beaucoup d'études ont approfondi le comportement discret des SSC, des problèmes de simulation sont apparus. Malgré leur flexibilité de modélisation, des solutions analytiques sont difficiles à obtenir et peu d'algorithmes pour la simulation numérique existent. En dépite des etudes approfondies sur les problèmes des systèmes hybrides déterministes, beaucoup restent encore ouverts pour les systèmes hybrides stochastiques.

Le comportement discret d'un système stochastique à commutation est influencé par des évènements aléatoires qui peuvent changer l'évolution du système. En conséquence, un type spécial de contrôle est nécessaire : *le contrôle basé sur les événements*. Comme il est appliqué seulement quand il est nécessaire et jusqu'à ce que certaines conditions sont remplies, ce type de contrôle est devenu une méthode avantageuse pour appliquer le contrôle dans les systèmes industriels (Guzzella et Onder (2006)), dans les réseaux de communication (Xu et Hespanha (2004), Wang et Lemmon (2008)), sur les systèmes biologiques (Wilson (1999)). Il permet de simplifier le système de capteurs qui équipent le procédé car à la place d'un échantillonnage continu une seule détection de seuil est nécessaire. Il existe peu de théorie sur les méthodes de construire un contrôleur basé sur les événements ou sur les stratégies d'estimation, le problème est souvent traité comme un processus Markov de décision (Åström (2002)).

Pour appliquer le contrôle basé sur les événements avec une consommation minimale d'énergie nous avons besoin d'un modèle d'énergie stationnaire. Un modèle d'approximation pour un SSC aux états multiples et une optimisation non linéaire ont été proposés par Mihaita et Mocanu (2011a). Le modèle a été construit en prenant en compte les probabilités pour atteindre les limites de la zone de contrôle et les temps moyens de sortie de cette zone. Trouver les probabilités d'atteindre certaines limites dans un temps fixe a une importance majeure pour beaucoup d'applications : dans les modèles physiques (pour déterminer quand une particule va atteindre la barrière de passage (Gardiner (2004)), dans la gestion du trafic aérien (Blom et al. (2002)), dans les applications financières. Nous allons utiliser ce modèle énergétique comme principale référence pour les résultats présentés dans cet article.

En raison du caractère aléatoire d'un système stochastique à commutation et des temps de sortie arbitraires, un traitement analytique est difficile à réaliser. Une approche numérique pour calculer les temps de sortie d'une région de contrôle pour des processus de Markov déterministes par morceaux a été présentée en Brandejsky et al. (2010) en utilisant une technique de quantification et approximation.

Par contre, notre approche suive les etudes de Gardiner (2004) et est adaptée au comportement hybride des systèmes stochastiques à commutations en proposant un calcul complet des probabilités et des temps de sortie d'une zone de contrôle afin de minimiser l'énergie consommée quand le contrôle basé sur les événements est appliqué.

Le modèle principal du système utilisé est présenté dans la section suivante, suivi par le critère quadratique de minimisation d'énergie. La troisième section présente le modèle énergétique et la méthode analytique pour calculer les temps moyens de sortie et les probabilités d'atteindre les limites de la zone de contrôle. Des résultats numériques seront présentés dans la dernière section.

## 2. MODÈLE PRINCIPAL

### *2.1 Intégrateur à commutation non contrôlé*

Le modèle principal qui est à la base de notre étude est un type special de système stochastique à commutation ayant des taux de variations différents associés à la variable continue du système. On lui attribue le nom d'un intégrateur commuté aux états multiples que nous pouvons décrire avec les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $x_0 \in \Re$ est l'état initial du système, $x(t)$ est la variable d'état, $Z(t)$ le mode du système à l'instant $t$ avec des valeurs aléatoires dans l'espace d'état fini $S = \{1, 2, .., N\}$, et $r_{Z(t)}$ les taux constants de variation de la variable continue $x(t)$ de sorte que $r_i > 0, \forall i \in \{1, .., M\}$, et $r_j < 0$, $\forall j \in \{M+1, .., N\}$. La chaîne de Markov qui caractérise le système ci-dessus est représentée par sa matrice de taux de transition qui a la forme suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\sum_{j\neq 1} \lambda_{1,j} & \lambda_{1,2} & .. & \lambda_{1,N} \\ \lambda_{21} & -\sum_{j\neq 2} \lambda_{2,j} & .. & \lambda_{2,N} \\ .. & .. & .. & .. \\ \lambda_{N,1} & \lambda_{N,2} & .. & -\sum_{j\neq N} \lambda_{N,j} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_{i,j}$ le taux de transition entre l'état $i$ et l'état $j$. De plus, la probabilité de transition entre $i$ et $j$ est $p_{i,j} = \lambda_{i,j} / \sum_{j\neq i} \lambda_{i,j}$.

### *2.2 Appliquer le contrôle basé sur les événements*

Les événements aléatoires peuvent changer complètement l'évolution des systèmes stochastiques à commutation, donc un contrôle special est nécessaire. Nous considérons que le contrôle basé sur les événements est une méthode appropriée pour l'intégrateur à commutation que nous avons étudié et qui peut exploiter les objectifs de la commande appliquée sur le système. Dans la littérature très peu de résultats analytiques sont publiés sur ce type de contrôle ; nous trouvons les exemples de Åström (2002) qui a montré que ce type de contrôle peut être facilement appliqué à des systèmes avec de multiples périodes d'échantillonnage ou à des systèmes distribués et à retards qui normalement sont difficiles à étudier. Des résultats numériques sur un problème similaire sont présentés par De Saporta et al. (2010) et De Saporta et Dufour (2010).

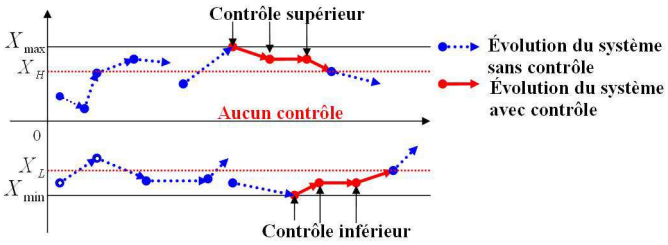


FIG. 1. Trajectoires possibles de l'intégrateur à commutation avec contrôle.

Le contrôle basé sur les événements est appliqué avec l'objectif principal de maintenir la variable d'état continue dans certaines limites : $x(t) \in [X_{min}, X_{max}]$, avec une consommation minimale d'énergie. On peut donc exprimer un critère de coût quadratique pour minimiser l'énergie consommée quand on applique le contrôle de la manière suivante :

$$J = \int_0^T [qx^2(t) + ru^2(t)]dt \tag{2}$$

Le choix de ce critère sera expliqué dans la section suivante. La figure 1 représente des trajectoires possibles de l'intégrateur à commutation quand le contrôle basé sur les événements est appliqué. Des limites pour arrêter le contrôle sont aussi considérées ($X_H$, $X_L$) après l'application d'un contrôle *supérieur* (quand $x(t) = X_{max}$), respectivement *inférieur* (quand $x(t) = X_{min}$). Donc nous pouvons décrire l'évolution de l'intégrateur par la suite :

- *aucun contrôle* est appliqué si
  - $x(t) \in [X_L, X_H]$ ou
  - $x(t) \in \{(X_H, X_{max}) \cup (X_{min}, X_L)\}$ et aucun contrôle n'a été nécessaire avant l'instant $t$
- le *contrôle supérieur* est appliqué si $x(t) = X_{max}$ et jusqu'à ce que $x(t) = X_H$ ;
- le *contrôle inférieur* est appliqué si $x(t) = X_{min}$ et jusqu'à ce que $x(t) = X_L$.

L'équation de base de l'intégrateur commuté avec le contrôle basé sur les événements devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_{Z(t)} + u_{Z(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$u_{Z(t)}(x(t)) = \begin{cases} 0 & \text{,si } Cas_1 \\ -QH_l & \text{,si } Cas_2,\ \forall l \in \{1, 2..N\} \\ +QL_m & \text{,si } Cas_3,\ \forall m \in \{1, 2..N\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cas_1 : & (x(t) \in [X_L, X_H])\vee \\ & (x(t) \in (X_H, X_{max}) \wedge u(Z(t-\Delta t)) = 0)\vee \\ & (x(t) \in (X_{min}, X_L) \wedge u(Z(t-\Delta t)) = 0) \\ Cas_2 : & (\textit{état}{=}l) \wedge [(x(t) = X_{max})\vee \\ & (x(t) \in (X_H, X_{max}) \wedge u(Z(t-\Delta t)) \neq 0)] \\ Cas_3 : & (\textit{état}{=}m) \wedge [(x(t) = X_{min})\vee \\ & (x(t) \in (X_{min}, X_L) \wedge u(Z(t-\Delta t)) \neq 0)] \end{cases} \tag{4}$$

Les mesures de contrôle supérieur ($QH_l$) ou inférieur ($QL_m$) seront appliquées de sorte que $x(t)$ va retourner dans la zone sans contrôle ($X_L, X_H$), donc :

$$\begin{cases} r_l - QH_l < 0 & ,\forall QH_l > 0,\ l \in \{1, ..N\} \\ r_m + QL_m > 0 & ,\forall QL_m > 0,\ m \in \{1, ..N\} \end{cases}$$

Un rôle important dans l'évolution de l'intégrateur contrôlé décrit par l'équation 3 est joué par les événements qui peuvent être :

- *des événements incontrôlables de la chaîne de Markov* qui sont indépendants des frontières ou des limites pour arrêter le contrôle et sont responsables de la commutation entre les états ayant le même type de contrôle (*aucun, supérieur, inférieur*) ;
- *des événements de contrôle* : qui changent le type de contrôle applique lorsque les limites sont atteintes.

### *2.3 Critère quadratique de minimisation*

En regardant la Figure 1 nous observons que le système redémarre soit en $X_H$ soit en $X_L$, dans un état aléatoire, après chaque application du contrôle. En conséquence le comportement de l'intégrateur à commutation peut être vu comme une alternance entre deux processus de renouvellement avec deux points de renouvellement $(X_H, X_L)$ qui nous donnent les périodes de renouvellement. Une période de renouvellement moyenne $(T)$ est représentée par exemple par l'évolution du système sans contrôle entre $X_L$ et $X_{min}$ suivie par l'évolution avec le contrôle *inférieur* entre $X_{min}$ et $X_L$ ; plusieurs combinaisons sont possibles (quatre pour notre système).

Cette alternance de renouvellement rend l'analyse théorique même d'un système simple très difficile à réaliser mais nous a donné la possibilité de formuler le critère quadratique de minimisation (2) : l'énergie globale pour appliquer le contrôle basé sur les événements sera minimisée en considérant les énergies minimales consommées sur chaque période de renouvellement. Afin de pouvoir calculer les périodes de renouvellement, nous avons besoin de déterminer les temps moyens de sortie de la zone de contrôle qui seront présentés dans la section suivante.

## 3. LE MODÈLE D'ÉNERGIE

### *3.1 Description*

Avant d'entrer dans la méthode analytique des temps moyens de sortie, nous introduisons le modèle d'énergie stationnaire construit pour le modèle principal (Mihaita et Mocanu (2011a)) car l'application du contrôle basé sur les événements quand les limites sont atteintes se fait avec une consommation d'énergie. On a considéré que le système peut passer de la zone sans contrôle $([X_L, X_H])$ vers une zone contrôlée et vice-versa, mais jamais commuter directement entre la zone de contrôle supérieur et inférieur. Des scénarios qui correspondent aux périodes de renouvellement à partir de $X_H$ et $X_L$ sont représentées dans la Figure 2. On note $T_1, T_3, T_5, T_7$ les temps de sortie vers les limites de la zone de contrôle et $T_2, T_4, T_6, T_8$ les temps nécessaires pour appliquer le contrôle.

Quatre possibilités sur l'évolution de $x(t)$ sont analysées :

(1) partir de $X_H$ , atteindre $X_{max}$ pendant $T_1$, appliquer le contrôle supérieur jusqu'à $x(t) = X_H$ pendant $T_2$ (une première période de renouvellement possible : $PR_1$) ;

(2) partir de $X_H$ , atteindre $X_{min}$ pendant $T_3$, appliquer le contrôle inférieur jusqu'à $x(t) = X_L$ pendant $T_4$ $(PR_2)$ ;

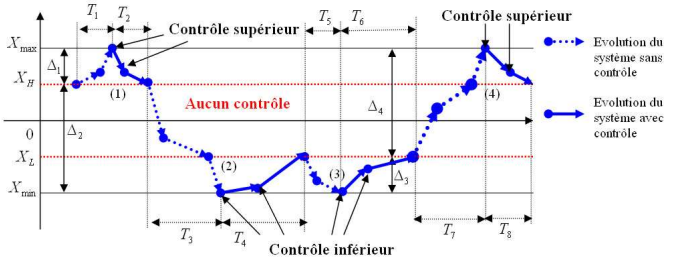


FIG. 2. Scénarios à partir des points de renouvellement $X_H$ et $X_L$.

(3) partir de $X_L$ , atteindre $X_{min}$ pendant $T_5$, appliquer le contrôle inférieur jusqu'à $x(t) = X_L$ pendant $T_6$ $(PR_3)$ ;

(4) partir de $X_L$ , atteindre $X_{max}$ pendant $T_7$, appliquer le contrôle supérieur jusqu'à $x(t) = X_H$ pendant $T_8$ $(PR_4)$.

Cette analyse nous permet d'écrire l'expression de l'énergie consommée dans un état $i$ comme :

$$En_{tot_i} = p_1 E_{1,i} + p_2 E_{2,i} + p_3 E_{3,i} + p_4 E_{4,i}. \tag{5}$$

où $E_{j,i}, j = 1..4, i = 1..N$ est l'énergie consommée dans l'état $i$ quand on est dans un des cas $j$ décrits ci-dessus. L'énergie consommée pendant les quatre périodes de renouvellement possibles ($PR_1$,..,$PR_4$) sera utilisée après pour appliquer le critère quadratique de minimisation (2). Pour pouvoir calculer ces énergies, les probabilités caractéristiques de chaque cas seront présentées dans la section suivante.

### *3.2 Probabilités de sortie*

La méthode analytique que nous avons utilisée est basée sur une méthode de calcul des temps de sortie dont une particule a besoin pour sortir d'une zone de contrôle avec deux limites absorbantes, présentée par Gardiner (2004). La première étape consiste à calculer les probabilités de sortie vers une limite. Gardiner (2004) considère que la probabilité de sortie vers une limite imposée vérifie une équation Fokker-Plank avec des conditions sur les frontières. Étant donné que notre intégrateur commuté est un système stochastique aux états multiples, caractérisé par une chaîne de Markov avec des taux différents associés à chaque état, une équation Fokker-Plank équivalente doit être utilisée. Dans la littérature, des études sur la performabilité des systèmes de fabrication modélisés avec des chaînes de Markov récompensées (Markov Rewarded Chains) donnent des équations différentielles partielles pour le calcul de la matrice de distribution cumulée de la variable d'état continue (Viswanadham et al. (1995)).

Nous utilisons cette dernière approche pour écrire les équations Fokker-Plank afin de calculer les probabilités de sortie vers la limite maximale, respectivement minimale pour l'intégrateur commuté aux états multiples :

$$R \cdot \partial_x \boldsymbol{\pi_{up}}(\boldsymbol{x}) + Q^T \cdot \boldsymbol{\pi_{up}}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{6}$$

$$R \cdot \partial_x \boldsymbol{\pi_{dw}}(\boldsymbol{x}) + Q^T \cdot \boldsymbol{\pi_{dw}}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{7}$$

où $R$ est la matrice diagonale des taux associés à chaque état :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & .. & 0 \\ 0 & .. & r_N \end{pmatrix}$$

Q est la matrice de taux de transitions définie dans la Section 2.1, et $\boldsymbol{\pi_{up}(x)}, \boldsymbol{\pi_{dw}(x)}$ sont les vecteurs de probabilité définis par :

$$\boldsymbol{\pi_{up}(x)} = [\, \pi_{1up}(x) \;\; \pi_{2up}(x) \;\; .. \;\; \pi_{Nup}(x) \,]^T$$
$$\boldsymbol{\pi_{dw}(x)} = [\, \pi_{1dw}(x) \;\; \pi_{2dw}(x) \;\; .. \;\; \pi_{Ndw}(x) \,]^T$$

où $\pi_{jup}(x), \pi_{jdw}(x)$ sont les probabilités d'arriver à la limite maximale, respectivement minimale, en partant de l'état $j$. Les conditions sur les frontières seront donc analysées à partir des définitions des probabilités présentées ci-dessus :

$$\pi_{jup}(X_{min}) = Prob\{x(t) = X_{max} | x(0) = X_{min} \wedge Z(0) = j\}$$
$$\pi_{jdw}(X_{max}) = Prob\{x(t) = X_{min} | x(0) = X_{max} \wedge Z(0) = j\}$$

qui dépendent des taux $(r_j)$ associés à chaque état $j \in \{1..N\}$ :

$$\begin{cases} \pi_{jup}(X_{min}) = 0 \text{ if } r_j < 0 \\ \pi_{jup}(X_{max}) = 1 \text{ if } r_j > 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \pi_{jdw}(X_{min}) = 1 \text{ if } r_j < 0 \\ \pi_{jdw}(X_{max}) = 0 \text{ if } r_j > 0 \end{cases} \tag{8}$$

Les solutions des équations (6)-(7), en considérant les conditions initiales (8), ont la forme suivante :

$$\boldsymbol{\pi_{up}(x)} = e^{-R^{-1} \cdot Q^T \cdot (x - X_{min})} \cdot \boldsymbol{\pi_{up}(X_{min})} \tag{9}$$
$$\boldsymbol{\pi_{dw}(x)} = e^{-R^{-1} \cdot Q^T \cdot (x - X_{min})} \cdot \boldsymbol{\pi_{dw}(X_{min})} \tag{10}$$

En sachant que le système a deux points de renouvellement, ces solutions nous permettent de calculer les probabilités d'atteindre $X_{min}$ ou $X_{max}$ en partant de $X_H$ dans un état $j$ par exemple :

$$\pi_{jup}(XH) = P_{X_H X_{max}}$$
$$\pi_{jdw}(XH) = P_{X_H X_{min}}$$

ou en partant de $X_L$ :

$$\pi_{jup}(XL) = P_{X_L X_{max}}$$
$$\pi_{jdw}(XL) = P_{X_L X_{min}}$$

Avec cette démarche nous pouvons maintenant calculer les probabilités $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ utilisées en (5), mais en tenant compte des probabilités $P_H$, $P_L$ qui sont maintenant facile à obtenir (les probabilités que le système démarre en $X_H$, respectivement en $X_L$) :

$$p_H = \frac{p_{X_L X_{max}}}{p_{X_L X_{max}} + p_{X_H X_{min}}}$$
$$p_L = \frac{p_{X_H X_{min}}}{p_{X_L X_{max}} + p_{X_H X_{min}}}$$

Ensuite nous calculons les probabilités utilisées dans l'équation (5) :

$$p_1 = p_H \cdot p_{X_H X_{max}} \qquad p_2 = p_H \cdot p_{X_H X_{min}}$$
$$p_3 = p_L \cdot p_{X_L X_{min}} \qquad p_4 = p_L \cdot p_{X_L X_{max}}$$

Avec ces résultats, la deuxième étape sera de calculer les temps de séjour (temps moyens de sortie) nécessaires pour atteindre les limites.

### *3.3 Les temps moyens de sortie*

En suivant la même méthode de Gardiner (2004), après avoir calculé les probabilités d'atteindre les limites, nous pouvons définir, pour un état $j$, les probabilités d'atteindre la limite maximale, respectivement minimale, dans un certain temps de sortie $T_{jup}$, respectivement $T_{jdw}$ :

$$\pi_{T_{jup}}(x) = \pi_{jup}(x) \cdot T_{jup}(x)$$
$$\pi_{T_{jdw}}(x) = \pi_{jdw}(x) \cdot T_{jdw}(x)$$

où $\pi_{jup}(x)$ , $\pi_{jdw}(x)$ sont les probabilités obtenues en (9)-(10) pour un état $j$ qui forment les vecteurs de probabilité :

$$\boldsymbol{\pi_{Tup}(x)} = [\, \pi_{T1up}(x) \;\; \pi_{T2up}(x) \;\; .. \;\; \pi_{TNup}(x) \,]^T$$
$$\boldsymbol{\pi_{Tdw}(x)} = [\, \pi_{T1dw}(x) \;\; \pi_{T2dw}(x) \;\; .. \;\; \pi_{TNdw}(x) \,]^T$$

Ces probabilités satisfont les équations Fokker-Plank suivantes :

$$R \cdot \partial_x \boldsymbol{\pi_{Tup}(x)} + Q^T \cdot \boldsymbol{\pi_{Tup}(x)} + \boldsymbol{\pi_{up}(x)} = 0$$
$$R \cdot \partial_x \boldsymbol{\pi_{Tdw}(x)} + Q^T \cdot \boldsymbol{\pi_{Tdw}(x)} + \boldsymbol{\pi_{dw}(x)} = 0 \tag{11}$$

avec les conditions aux limites :

$$\pi_{T_{jup}}(X_{min}) = \pi_{T_{jdw}}(X_{min}) = 0, \text{ if } r_j < 0$$
$$\pi_{T_{jup}}(X_{max}) = \pi_{T_{jdw}}(X_{max}) = 0, \text{ if } r_j > 0$$

en sachant que, par exemple, le temps de sortie vers $X_{max}$ en partant de $X_{min}$ dans un état caractérise par un taux négatif est infini.

Soit $P = -R^{-1}Q^T$. Par l'intégration du système (11) on obtient la probabilité d'atteindre $X_{max}$ dans un temps $T_{up}(x)$ :

$$\boldsymbol{\pi_{T_{up}}(x)} = e^{P(x - X_{min})} \pi_{T_{up}}(X_{min}) - \\ - \int_{X_{min}}^{x} e^{P(x-\tau)} R^{-1} \cdot \pi_{up}(\tau) d\tau \tag{12}$$

et la probabilité d'atteindre la limite minimale dans un temps $T_{dw}(x)$ :

$$\boldsymbol{\pi_{T_{dw}}(x)} = e^{P(x - X_{min})} \pi_{T_{dw}}(X_{min}) - \\ - \int_{X_{min}}^{x} e^{P(x-\tau)} R^{-1} \cdot \pi_{dw}(\tau) d\tau \tag{13}$$

Une fois que nous avons obtenu les $\boldsymbol{\pi_{T_{up}}(x)}$ et $\boldsymbol{\pi_{T_{dw}}(x)}$, nous pouvons calculer les temps de sortie vers la limite maximale ou minimale dans un état $j$ :

$$T_{jup}(x) = \pi_{T_{jup}}(x) / \pi_{jup}(x) \tag{14}$$
$$T_{jdw}(x) = \pi_{T_{jdw}}(x) / \pi_{jdw}(x) \tag{15}$$

De retour sur les scénarios considérés dans la Figure 2, nous savons maintenant calculer les valeurs de :

$$T_1 = T_{up}(XH) \quad T_3 = T_{dw}(XH)$$
$$T_5 = T_{dw}(XL) \quad T_7 = T_{up}(XL)$$

Une période de renouvellement est composée d'un temps de sortie vers une limite de contrôle et aussi d'un temps nécessaire pour appliquer le contrôle ; on peut exprimer les temps nécessaires pour appliquer le contrôle comme :

$$T_2 = T_8 = \frac{X_{max} - X_H}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i (QH_i - r_i)} \tag{16}$$

$$T_4 = T_6 = \frac{X_L - X_{min}}{\sum_{j=1}^{N} \pi_j (QL_j + r_j)} \tag{17}$$

Avec les résultats des temps obtenus ci-dessus (14)-(17), on peut construire la formule de l'énergie totale consommée dans un état $i \in \{1, 2..n\}$ qui sera utilisée pour appliquer le critère quadratique de minimisation :

$$En_{tot,i} = p_1 \frac{e_{1,i}}{T_1 + T_2} + p_2 \frac{e_{2,i}}{T_3 + T_4} + p_3 \frac{e_{3,i}}{T_5 + T_6} + p_4 \frac{e_{4,i}}{T_7 + T_8}$$

où $e_{1,i}$ , $e_{2,i}$, $e_{3,i}$, $e_{4,i}$ sont les espérances obtenues sur les intervalles de contrôle :

$$e_{1,i} = e_{4,i} = \int_0^{T_2} QH_i^2 dt = QH_i^2 \cdot T_2$$
$$e_{2,i} = e_{3,i} = \int_0^{T_4} QL_i^2 dt = QL_i^2 \cdot T_4$$

## 4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les probabilités et les temps moyens de sortie calculés dans cette section aident à appliquer le critère quadratique de minimisation de l'énergie sur le modèle de système considéré. Afin de valider ces mesures, un algorithme de simulation en temps continu a été conçu pour l'intégrateur à commutation avec le contrôle basé sur les événements, présenté par Mihaita et Mocanu (2011b) ; initialement il a été développé par Suri et Fu (1991) pour évaluer le niveau d'exécution des lignes de production.

Pour les expériences nous considérons un intégrateur à commutation avec deux états et des taux associés à chaque état : $r_1 > 0$ et $r_2 < 0$. L'ensemble des données que nous considérons pour la validation est le suivant : $r_1 = 7$, $r_2 = -4$, $\lambda = 9$, $\mu = 5$, $X_{max} = 1$, $X_{min} = 0$, $X_H = 0.8$, $X_L = 0.4$. Tenant compte du caractère aléatoire du système, $N = 500.000$ simulations ont été effectuées.

Les probabilités pour atteindre les limites $X_{max}, X_{min}$ ($\pi_{1up}(x)$, $\pi_{2up}(x)$, $\pi_{1dw}(x)$, $\pi_{2dw}(x)$) obtenues avec cette méthode analytique sont représentées dans la Figure 3. La figure montre que les probabilités obtenues vérifient bien les conditions aux limites (8) : $\pi_{2up}(X_{min}) = \pi_{2dw}(X_{max}) = 0, \pi_{2dw}(X_{min}) = \pi_{1up}(X_{max}) = 1$. La comparaison avec la simulation est donnée dans le Tableau 1 où sont représentées les valeurs des probabilités aux limites de renouvellement ($X_H$ et $X_L$). Les erreurs faibles nous indiquent que la méthode présentée en (3.2) fonctionne. Des comparaisons entre la simulation et la méthode présentée dans cet article (sur plusieurs points $x \in \{X_{min}, X_{max}\}$) ont été effectués en obtenant en moyenne une erreur de 0.15%.

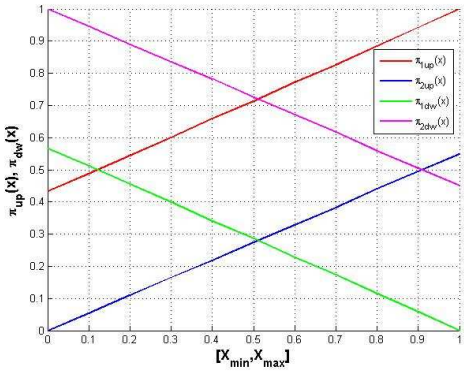


FIG. 3. Probabilités de sortie vers $X_{max}, X_{min}$.

Dans la Figure 4 sont représentées les probabilités de sortie vers $X_{max}$ ($X_{min}$) dans un certain temps $T_{up}(x)$ ($T_{dw}(x)$). On observe que les conditions aux limites sont respectées de nouveau : $\pi_{T_{2up}}(X_{min}) = \pi_{T_{2dw}}(X_{min}) = 0, \pi_{T_{1up}}(X_{max}) = \pi_{T_{1dw}}(X_{max}) = 0$. Des erreurs moyennes d'environ 0.2% ont été obtenues par rapport à la simulation.

| Probabilités | Méthode analytique | Simulation | Erreurs[%] |
|---|---|---|---|
| $\pi_{1up}(XH)$ | 0.8856 | 0.8850 | 0.0678 |
| $\pi_{1dw}(XH)$ | 0.1144 | 0.1150 | 0.5217 |
| $\pi_{1up}(XL)$ | 0.6585 | 0.6574 | 0.1670 |
| $\pi_{1dw}(XL)$ | 0.3414 | 0.3426 | 0.3503 |
| $\pi_{2up}(XH)$ | 0.4405 | 0.4393 | 0.2724 |
| $\pi_{2dw}(XH)$ | 0.5595 | 0.5607 | 0.2140 |
| $\pi_{2up}(XL)$ | 0.2170 | 0.2181 | 0.5044 |
| $\pi_{2dw}(XL)$ | 0.7830 | 0.7819 | 0.1405 |

TAB. 1. Les probabilités de sortie vers $X_{max}, X_{min}$

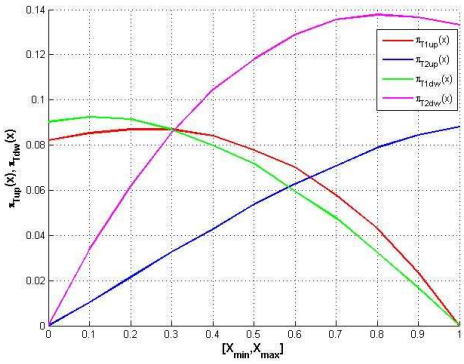


FIG. 4. Probabilités de sortie vers $X_{max}, X_{min}$ dans des temps de sortie $T_{up}(x)$, $T_{dw}(x)$.

Les temps moyens de sortie de la zone de contrôle (14)-(15) sont représentés dans la Figure 5 ; les résultats et la comparaison entre la méthode analytique de cet article et la simulation sont représentés dans le Tableau 2. Les temps de sortie valident aussi les conditions aux limites : $T_{1up}(X_{max}) = T_{2dw}(X_{min}) = 0$, $T_{2up}(X_{min}) == T_{1dw}(X_{max}) = \infty$. Avec cette méthode de calcul nous sommes en mesure de valider les probabilités et les temps de sortie pour plusieurs ensembles de données. Pour des zones de contrôle plus grandes des erreurs un peu plus

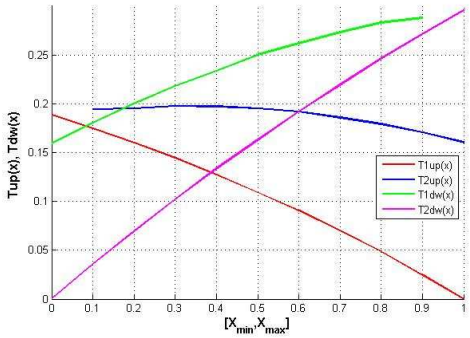


FIG. 5. Temps moyens de sortie vers $X_{max}, X_{min}$.

| Temps de sortie | Simulation | Analytique | Erreurs[%] |
|---|---|---|---|
| $T_{1up}(XL)$ | 0.1278 | 0.1290 | 0.9302 |
| $T_{2up}(XL)$ | 0.1973 | 0.1987 | 0.7046 |
| $T_{1up}(XH)$ | 0.0486 | 0.0496 | 2.0161 |
| $T_{2up}(XH)$ | 0.1792 | 0.1803 | 0.6101 |
| $T_{1dw}(XL)$ | 0.2337 | 0.2373 | 1.5171 |
| $T_{2dw}(XL)$ | 0.1335 | 0.1339 | 0.2987 |
| $T_{1dw}(XH)$ | 0.2829 | 0.2941 | 3.8082 |
| $T_{2dw}(XH)$ | 0.2463 | 0.2469 | 0.2430 |

TAB. 2. Les temps moyens pour sortir vers $X_{max}, X_{min}$

grandes peuvent s'obtenir en raison des erreurs numériques des termes exponentiels avec les conditions aux limites imposées.

## 5. CONCLUSIONS

Cet article présente une méthode analytique pour améliorer le modèle énergétique stationnaire conçu pour un intégrateur stochastique à commutation sur lequel nous appliquons le contrôle basé sur les événements. Nous avons utilisé des approches analytiques efficaces pour calculer les probabilités de sortie de la zone de contrôle mais aussi pour déterminer les temps moyens de sortie de cette zone. Nous avons validé les résultats par des simulations numériques qui nous confirment la justesse de cette méthode.

## RÉFÉRENCES


Åström, K. (2002). Event based control. In A. Astolfi et L. Marconi (eds.), *Analysis and design of nonlinear control systems*, volume 3, 127–147. Springer, Berlin.

Balluchi, A., Benvenuti, L., Benedetto, M., Miconi, G., Pozzi, U., Villa, T., Wong-Toi, H., et Sangiovanni-Vincentelli, A. (2000). Maximal safe set computation for idle speed control of an automotive engine. In *Hybrid Systems : Computation and Control*, 32–44. Springer, Berlin.

Blom, H., G.J., et Baker (2002). Conflict probability and incrossing probability in air traffic management. *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control, LAs Vegas, NV*, 10-13, 2421–2426.

Brandejsky, A., de Saporta, B., et Dufour, F. (2010). Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic markov process. URL `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00546339/en/`. INRIA Technical Report.

De Saporta, B. et Dufour, F. (2010). Numerical method for impulse control of Piecewise Deterministic Markov Processes. URL `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00541413/`. INRIA Technical Report.

De Saporta, B., Dufour, F., Zhang, H., et Elegbede, C. (2010). Optimal stopping for predictive maintenance. URL `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00554759/`. To appear in Journal of Risk and Reliability, 2011.

Egerstedt, M. (2000). Behavior based robotics using hybrid automata. In *Hybrid Systems : computation and control*, volume 1790/2000, 103–116. Springer, Berlin.

Gardiner, C. (2004). *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*. Springer, Berlin, 3 edition.

Guzzella, L. et Onder, C. (2006). Past, present and future automotive control. In M. Smith, B. Francis, et J. Willems (eds.), *Control of uncertain systems : modelling, approximation and design*, 163–182. Springer-Verlag, Heidelberg.

Hespanha, J. (2005). Polynomial stochastic hybrid systems. In *Hybrid Systems : Computation and Control*, volume 3414/2005, 322–338. Springer Verlag, Berlin.

Khare, N.A., Amonlirdviman, K., Tree, D., Chen, W., Axelrod, J., et Tomlin, C. (2005). Mathematical modeling of planar cell polarity to understand domineering nonautonomy. *Science*, 307(5708), 423–426.

Mihaita, S. et Mocanu, S. (2011a). An energy model for event-based control of a switched integrator. In *IFAC World Congress, Milano*.

Mihaita, S. et Mocanu, S. (2011b). Simulation en temps continu pour la commande orientée événements des systèmes stochastiques a commutation. *Modélisation des Systèmes Réactifs, Lille, France*.

Pola, G., Bujorianu, M., Lygeros, J., et DiBenedetto, M. (2003). Stochastic hybrid models : an overview. In *IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 720–733.

Suri, R. et Fu, B. (1991). On using continuous flow lines for performance estimation of discrete production lines. In *Proceedings of the Winter Simulation Conf.*, 968–977.

Tsai, C. (1998). Composite stabilisation of singularly perturbed stochastic hybrid systems. *International Journal of Control*, 71(6), 1005–1020.

Varaiya, P. (1993). Smart cars on smart roads : problems of control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 9(52), 195–207.

Viswanadham, N., pattripati, K.R., et Gopalakrishna, V. (1995). Performability studies of automated manufacturing systems with multiple part types. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 11(5), 692–709.

Wang, X. et Lemmon, M. (2008). Event-trigered broadcasting across distributed network control systems. *Proceedings of the 2008 American Control conference*.

Wilson, H. (1999). *Spikes, decisions, and actions : the dynamical foundations of neuroscience*. Oxford University Press, USA.

Xu, Y. et Hespanha, J. (2004). Optimal communication logics in networked control systems. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*.