



HAL
open science

Contrôle Discret Robuste en boucle ouverte : une approche LMI

Benoit Bayon, Amol Khalate, Gérard Scorletti, Eric Blanco

► **To cite this version:**

Benoit Bayon, Amol Khalate, Gérard Scorletti, Eric Blanco. Contrôle Discret Robuste en boucle ouverte : une approche LMI. 2012 Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. pp.CDROM. hal-00734571

HAL Id: hal-00734571

<https://hal.science/hal-00734571v1>

Submitted on 2 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle Discret Robuste en boucle ouverte: une approche LMI^{*}

Benoit Bayon^{*} Amol Khalate^{**} Gérard Scorletti^{*}
Eric Blanco^{*}

^{*} *Laboratoire Ampère, UMR-5005, Ecole Centrale de Lyon, 36 Avenue
Guy de Collongues, 69134 ECULLY Cedex*

^{**} *Delft Center for Systems and Control, TU-Delft*

Abstract: Le filtrage et la pré-compensation sont des cas particuliers d'une classe plus générale de problèmes: les problèmes de contrôle en boucle ouverte. Ce papier aborde une classe de problèmes de contrôle robuste en boucle ouverte pour des systèmes discrets incertains. L'incertitude est représentée au moyen de transformations linéaires fractionnelles (LFT) et peut être composée de différentes incertitudes (paramétriques, dynamiques, non-linéarités, etc...). Il est démontré que la synthèse d'un filtre garantissant un certain niveau de performance pour le système Boucle Ouverte peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes inégalité matricielles linéaires, qui peut être résolu efficacement.

1. INTRODUCTION

La synthèse d'éléments d'une chaîne en satisfaisant à un cahier des charges est un problème critique dans certaines applications. Les problèmes de filtrage sont par exemple des cas particuliers (Gelb (1974)), ainsi que les problèmes de pré-compensation comme la génération d'impulsions pour le dépôt d'encre au moyen d'une imprimante Drop-on-Demand étudié dans (Khalate et al. (2011)). Cela recouvre également la synthèse d'éléments passifs dans une chaîne de transmission de puissance sans fil (Kazmerkovski et al. (2011)). Dans ces cas particuliers, la synthèse de correcteur en boucle fermée est exclue en raison de l'impossibilité physique de mettre un capteur (Khalate et al. (2011)) ou en raison de la structure du système (e.g. filtrage). Ces problèmes font partie d'une classe plus générale de problèmes : la synthèse en boucle ouverte qui fait l'objet de ce papier.

Les formalismes des problèmes de synthèse considérés sont présentés figure 1 et figure 2. Dans ces systèmes, un filtre F (à synthétiser) lie deux systèmes G (appelé système d'entrée) et H (appelé système de sortie). Ces systèmes sont appelés systèmes boucle ouverte (BO) en raison de l'absence de bouclage entre les éléments G , F et H du système. Ici, soit G , soit H sont sujets à une incertitude Δ . On s'intéresse à la synthèse du filtre F , de telle sorte que le système BO satisfasse à un critère de performance.

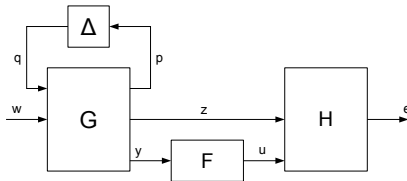


Fig. 1. Système BO : système d'entrée incertain

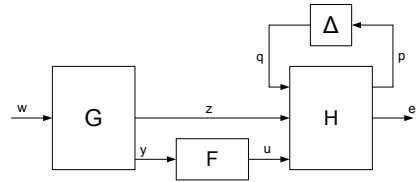


Fig. 2. Système BO : système de sortie incertain

La plupart du temps, les éléments composant cette chaîne ne sont pas parfaitement connus, mais peuvent être identifiés sous la forme de modèles discrets incertains (Bombois et al. (2010)) sous forme d'une Transformation Linéaire Fractionnelle (LFT) (Zhou et al. (1995)) d'un bloc incertain Δ par un modèle nominal. Le modèle incertain est une fonction rationnelle de plusieurs incertitudes. Il est alors nécessaire d'avoir une méthode de synthèse efficace garantissant un cahier des charges pour le modèle incertain.

Le calcul de la performance pire-cas d'un système incertain est un problème (NP) difficile. Dans le cadre LFT, le bloc Δ est caractérisé par des Contraintes Intégrales Quadratiques (IQCs, Megretski and Rantzer (1997)) sur ses signaux d'entrées et de sorties. Cela permet d'obtenir des conditions suffisantes convexes pour calculer efficacement une borne supérieure du pire cas de la performance du système incertain. Ces conditions convexes présentent le meilleur compromis entre conservatisme et complexité algorithmique. Malheureusement, en utilisant ces conditions pour créer une méthode de synthèse de contrôleur robuste, on n'aboutit pas à des conditions convexes : le calcul d'un contrôleur reste difficile.

Cependant les conditions de synthèse deviennent convexes pour des cas particuliers tels que le cas du filtrage robuste ou de la pré-compensation robuste pour des incertitudes généralisées au moyen d'IQCs dynamiques (dépendantes de la fréquence) (Scherer and Kose (2008), Scorletti and Fromion (2006)). De façon plus générale, le point commun à ces systèmes qui permet d'avoir des

^{*} Ce travail a été supporté par la région Rhône-Alpes, dans le cadre des bourses Explora-Doc

conditions de synthèse convexes est l'absence de bouclage sur l'incertitude (Scherer (2009)).

Comme on ne dispose que de conditions suffisantes, la généralité de la méthode et le conservatisme associé est un point critique. Les approches par fonction de Lyapunov dépendantes des paramètres (Xie et al. (2004)) ou les approches LFT utilisant des IQCs statiques (indépendantes de la fréquence (Sun and Packard (2005))) sont possiblement conservatives pour certains types d'incertitudes (e.g. incertitudes LTI). L'utilisation des IQCs dynamiques permet d'avoir une approche plus générale. De plus, le conservatisme est considérablement réduit dans certains cas (incertitudes paramétriques ou dynamiques LTI).

Nous proposons ici une approche générale de la boucle ouverte discrète robuste, en donnant des solutions aux problèmes de synthèse présentés en section 2 et formalisés figures 1 et 2. L'incertitude est prise en compte en utilisant des Contraintes Intégrales Quadratiques dynamiques, avec une représentation LFT. Nous présentons un théorème donnant des conditions pour tester l'existence d'un filtre qui garantit une borne supérieure sur le pire cas du gain- \mathcal{L}_2 de la boucle ouverte pour les cas présentés figure 1 et 2. Les conditions sont des contraintes Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) et peuvent être testées efficacement. La solution proposée étend au cas discret les résultats de (Scorletti and Fromion (2006); Scherer and Kose (2008)) avec une approche générale prenant en compte n'importe quelle fonction de transfert stable en entrée ou sortie du système. De plus elle présente une approche alternative à l'approche de la pré-compensation robuste des systèmes incertains polytopiques présentés dans (Khalate et al. (2011)).

Dans ce papier, A^T est la transposée de la matrice A , A^* sa transposée conjuguée. $(A)^*XA$ est noté $(\diamond)^*XA$. Dans une matrice \diamond note un élément symétrique. P note une matrice introduite par le lemme Kalman-Yakubovitch-Popov. $T_{w \rightarrow e}$ représente l'opérateur (possiblement une fonction de transfert) de w vers e et $\|T_{w \rightarrow e}\|_{i_2}$ sa norme induite par l'espace L_2 des signaux. Le produit étoile de Redheffer est noté par \star . $\gamma \in \mathbb{R}^+$ représente un niveau de performance. Toute matrice Ψ carrée peut être partitionnée en $\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} \end{bmatrix}$.

2. DÉFINITION DU PROBLÈME

Nous considérons la classe de systèmes définis figures 1 et 2. Le système discret G est sujet à un signal non mesuré $w \in \mathbb{R}^{n_w}$. Le système BO est formé par G et H reliés par $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ et la matrice de fonctions de transfert F . F admet en entrée $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ et pour sortie $u \in \mathbb{R}^{n_u}$. L'incertitude Δ sur le système G (ou H) est représentée par une LFT et ses entrées et sorties sont respectivement notées q et p .

On définit l'ensemble $\Gamma_\Delta : \Delta \in \Gamma_\Delta$, avec $0 \in \Gamma_\Delta$. Associé à Γ_Δ , on définit l'ensemble Γ_Π . $\Pi(j\omega) \in \Gamma_\Pi$ si $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $\Pi(j\omega)$ vérifie l'IQC donnée équation (1).

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\diamond)^T \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} x(j\omega) \\ \Delta(x)(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}_2 \quad (1)$$

Cette définition recouvre des incertitudes paramétriques LTI/LTV, dynamiques LTI/LTV ou encore des non-

linéarités. Nous prenons en compte ici des IQCs dynamiques qui en comparaison avec les IQC statiques permettent de caractériser des incertitudes de différente nature (Megretski and Rantzer (1997)).

Nous considérons le gain- \mathcal{L}_2 des opérateurs discrets $T_{w \rightarrow e}$. Le gain- \mathcal{L}_2 permet de caractériser l'amplification énergétique maximale d'un système.

- Système d'entrée incertain

$$T_{w \rightarrow e} = H(j\omega) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F(j\omega) \end{bmatrix} (G(j\omega) \star \Delta) \quad (2)$$

- Système de sortie incertain

$$T_{w \rightarrow e} = (H(j\omega) \star \Delta) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F(j\omega) \end{bmatrix} G(j\omega) \quad (3)$$

Problème 1. (Synthèse gain- \mathcal{L}_2 Boucle Ouverte). Pour un γ donné, trouver si un filtre F existe tel que $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$

$$\|T_{w \rightarrow e}\|_{i_2} < \gamma \quad (4)$$

L'opérateur $T_{w \rightarrow e}$ pour le cas avec incertitudes sur le système d'entrée (resp. système de sortie) est donnée équation (2) (resp. équation (3)).

2.1 Préliminaire: Analyse robuste de la performance

Les outils pour tester une borne supérieure sur le pire cas du gain- \mathcal{L}_2 de l'opérateur $T_{w \rightarrow e}$ sont présentés ici. Le théorème 3 regroupe les conditions obtenues pour le problème d'analyse et le problème dual. On a ainsi plusieurs conditions équivalentes pour tester un pire cas du gain- \mathcal{L}_2 d'un système incertain discret $M \star \Delta$ représenté figure 3.

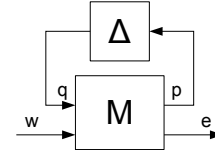


Fig. 3. Système Incertain

Théorème 2. (Megretski and Rantzer (1997)). Soit M LTI et stable. $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, $M \star \Delta$ est stable avec un gain- \mathcal{L}_2 inférieur à γ si il existe $\epsilon > 0$, $\Pi(j\omega) \in \Gamma_\Pi$ tels que la condition (5) soit vérifiée.

$$[\diamond]^* \begin{bmatrix} \Pi_{11}(j\omega) & 0 & \Pi_{12}(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \Pi_{21}(j\omega) & 0 & \Pi_{22}(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(e^{j\omega}) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I \quad (5)$$

Pour un système donné, trouver $\Pi(j\omega)$ est un problème d'optimisation de dimensions infinies, avec une infinité de contraintes : toutes les fonctions de transfert $\Pi(j\omega)$ de tout ordre sont candidates, et toutes les fréquences doivent être testées. Pour résoudre ce problème, l'idée est dans un premier temps de restreindre $\Pi(j\omega)$ à un ensemble de dimensions finies, puis d'utiliser le lemme Kalman-Yakubovitch-Popov (KYP) (Rantzer (1996)) pour tester toutes les fréquences.

On restreint la fonction de transfert $\Pi(j\omega)$ à un sous espace affine de Γ_Π . On définit l'espace affine $\Gamma_X : X \in \Gamma_X$ si

$$[\diamond]^* \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(e^{j\omega}) & 0 \\ 0 & K(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \in \Gamma_\Pi \quad (6)$$

où $K(e^{j\omega}) = [1 (e^{j\omega})^{-1} \dots (e^{j\omega})^{-n}]$.

Différentes factorisations sont possibles pour la fonction de transfert. Ici les fonctions de transfert Π_{ii} seront restreintes à des polynômes en $e^{j\omega}$ d'ordre $2n$. Comme $0 \in \Gamma_\Delta$, on a $\Pi_{11} \geq 0$, et par conséquent, il est nécessaire d'avoir $(\diamond)^* X_{11} K(e^{j\omega}) > 0$. Cette factorisation introduit du conservatisme permet de disposer de conditions suffisantes de dimensions finies pour tester la condition (5). Cependant, le conservatisme diminue lorsque l'on augmente l'ordre de la base $K(e^{j\omega})$ (Scherer and Kose, 2008). La contrainte obtenue avec cette factorisation peut être transformée en contraintes LMI en utilisant le lemme KYP. On note par la suite $K(e^{j\omega}) = C_K(e^{j\omega}I - A_K)^{-1}B_K + D_K$.

Le problème dual

Le problème de synthèse de filtre pour le cas incertitudes sur le système de sortie est le problème dual du problème de synthèse de filtre pour le cas incertitudes sur le système d'entrée (figure 1), plus simple à résoudre. Nous nous intéressons ici au problème dual d'analyse.

Par application du lemme 7 dans (Kose and Scherer (2008)), la condition (5) est équivalente à la condition (7).

$$(\diamond)^* \begin{bmatrix} \Phi_{11}(j\omega) & 0 & \Phi_{12}(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \Phi_{21}(j\omega) & 0 & \Phi_{22}(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -M^*(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \geq \epsilon I \quad (7)$$

avec $\Phi = \Pi^{-1}$

Avec une permutation et un changement de signe, la condition (7) est équivalente à la condition (8).

$$(\diamond)^* \begin{bmatrix} -\gamma^2\Phi_{22}(j\omega) & 0 & \gamma^2\Phi_{21}(j\omega) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \gamma^2\Phi_{12}(j\omega) & 0 & -\gamma^2\Phi_{11}(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^*(e^{j\omega}) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I \quad (8)$$

En prenant $M(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega}I - A)^{-1}B + D$, on a $M^*(e^{j\omega}) = B^T(e^{-j\omega}I - A^T)^{-1}C^T + D^T$. En choisissant $\tilde{\omega} = -\omega$, et en notant $\tilde{M}(e^{j\tilde{\omega}}) = B^T(e^{j\tilde{\omega}}I - A^T)^{-1}C^T + D^T$, $\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_{11}(j\tilde{\omega}) & \tilde{\Pi}_{12}(j\tilde{\omega}) \\ \tilde{\Pi}_{21}(j\tilde{\omega}) & \tilde{\Pi}_{22}(j\tilde{\omega}) \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} -\Phi_{22}(j\omega) & \Phi_{21}(j\omega) \\ \Phi_{12}(j\omega) & -\Phi_{11}(j\omega) \end{bmatrix}$, on est ramenés à la condition (9).

$$(\diamond)^* \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_{11}(j\tilde{\omega}) & 0 & \tilde{\Pi}_{12}(j\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \tilde{\Pi}_{21}(j\tilde{\omega}) & 0 & \tilde{\Pi}_{22}(j\tilde{\omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}(e^{j\tilde{\omega}}) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I \quad (9)$$

A partir de cette équation, on peut utiliser les mêmes étapes que pour la mise en dimension finie présentée précédemment : $\tilde{\Pi}_{ii}(j\tilde{\omega}) = K^*(j\tilde{\omega})X_{ii}K(j\tilde{\omega})$. L'application du lemme KYP permet de se ramener à des conditions indépendantes de la fréquence. On a alors le théorème 3.

Théorème 3. Considérons l'opérateur incertain $(M \star \Delta)$, avec $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$. Considérons la factorisation présentée équation (6). L'opérateur $(M \star \Delta)$ est stable avec un gain- \mathcal{L}_2 inférieur à γ si il existe $X \in \Gamma_X$, $P = P^T > 0$, $P_K = P_K^T > 0$ telles que les conditions (10), (11) soient vérifiées.

$$(\diamond)^T \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{11} & 0 & X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{21} & 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \\ S_{51} & S_{52} \\ 0 & S_{62} \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$(\diamond)^T \begin{bmatrix} -P_K & 0 & 0 \\ 0 & P_K & 0 \\ 0 & 0 & X_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (11)$$

La définition de S correspondant à la définition du problème d'analyse (équation (5)) est donnée équation (12). La définition de S correspondant à la définition duale (équation (9)) est donnée équation (13).

$$\begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \\ S_{51} & S_{52} \\ 0 & S_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A & B_p & B_w \\ 0 & C_K & B_K C_q & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ 0 & 0 & C_e & D_{ep} & D_{ew} \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \\ S_{51} & S_{52} \\ 0 & S_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K B_p^T & B_K D_{qp}^T & B_K D_{ep}^T \\ 0 & 0 & A^T & C_q^T & C_e^T \\ 0 & C_K & B_K B_p^T & D_K D_{qp}^T & D_K D_{ep}^T \\ 0 & 0 & B_w^T & D_{qw}^T & D_{ew}^T \\ C_K & 0 & 0 & D_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

Démonstration : Par application du KYP et après utilisation de la factorisation présentée equation (6), l'inégalité (5) est vérifiée si et seulement si l'inégalité (10) est vérifiée, avec la définition de S donnée equation (12). Avec $0 \in \Gamma_\Delta$ la conservation des propriétés structurelles de Π par la factorisation amène l'inégalité $K^*(e^{j\omega})X_{11}K(e^{j\omega}) > 0$ qui par le KYP est équivalente à l'inégalité (11). Le même cheminement pour le cas dual aboutit aux mêmes conditions avec la définition de S donnée equation (13).

Ce théorème présente un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Pour un γ donné, trouver X , P , P_K est un problème de faisabilité, qui peut être résolu en utilisant un algorithme efficace.

3. RESULTAT PRINCIPAL

Dans cette section nous présentons une solution au problème 1 posé section 2 sous la forme d'un théorème donnant des conditions pour l'existence d'un filtre assurant une borne supérieure sur le gain- \mathcal{L}_2 de l'opérateur $T_{w \rightarrow e}$ pour les deux systèmes présentés figure 1 et figure 2. Nous définissons dans un premier temps les représentations d'état des systèmes présentés figure 1 :

$$G(e^{j\omega}) = \begin{bmatrix} C_q \\ C_z \\ C_y \end{bmatrix} (e^{j\omega}I - A_G)^{-1} \begin{bmatrix} B_p & B_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{qp} & D_{qw} \\ D_{zp} & D_{zw} \\ D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{bmatrix} E_q \\ E_e \end{bmatrix} (e^{j\omega}I - A_H)^{-1} \begin{bmatrix} F_p & F_z & F_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{qp} & H_{qz} & H_{qu} \\ H_{ep} & H_{ez} & H_{eu} \end{bmatrix}$$

Pour le cas système d'entrée incertain, on a E_q , H_{qp} , H_{qz} , H_{qu} , F_p , H_{ep} qui sont des matrices vides. Respectivement pour le cas système de sortie incertain, on a C_q , D_{qp} , D_{qw} , D_{zp} , D_{yp} , B_p qui sont des matrices vides. Nous présentons à présent notre résultat principal, dont la démonstration est donnée en annexe.

Théorème 4. Pour un γ donné, $\forall \Delta \in \Gamma_\Delta$, il existe un filtre discret tel que $\|T_{w \rightarrow e}\|_{i_2} < \gamma$ s'il existe des matrices

$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1^T$, \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_3^T$, $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, \mathbf{F} , $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K^T$, $\mathbf{X} \in \Gamma_X$ de dimensions appropriées telles que les conditions (14) et (15) soient satisfaites.

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} -P_K & 0 & 0 \\ 0 & P_K & 0 \\ 0 & 0 & X_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} + \mathcal{L}_1 & \diamond \\ \Phi_{21} + \mathcal{L}_2 & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\text{Avec } \Phi_{11} = \text{diag} \left(- \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathcal{L}_1 = [\diamond]^T X \begin{bmatrix} C_\Phi & 0 & | & C_\Phi & 0 & | & 0 & D_\Phi \end{bmatrix}.$$

$$\Phi_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 & | & I & 0 \\ \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & 0 & | & 0 & 0 \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & | & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & | & 0 \\ 0 & | & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \mathbf{Z}_2^T & \mathbf{Z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_F \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ M_5 & I & 0 & M_6 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{22} = \text{diag} \left(- \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \mathbf{Z}_1 & 0 \\ \diamond & \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_2^T & I \\ \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, -I \right)$$

Selon le système considéré, les matrices M_i , C_Φ , D_Φ ont des définitions différentes :

Cas incertitudes sur le système d'entrée (figure 1)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \hline C_\Phi & 0 & | & D_\Phi \\ \hline M_5 & 0 & | & M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & | & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & | & 0 & B_K D_{qp} & B_K D_{qw} \\ 0 & 0 & A_G & | & 0 & B_p & B_w \\ \hline 0 & 0 & F_z C_z & | & A_H & F_z D_{zp} & F_z D_{zw} \\ 0 & 0 & H_{ez} C_z & | & E_e & H_{ez} D_{zp} & H_{ez} D_{zw} \\ \hline 0 & C_K & D_K C_q & | & 0 & D_K D_{qp} & D_K D_{qw} \\ C_K & 0 & 0 & | & 0 & D_K & D_K \\ \hline 0 & 0 & C_y & | & 0 & D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$\left[M_2 \left\| \frac{M_3}{M_4} \right. \right] = \left[\begin{array}{c} A_H \\ E_e \end{array} \left\| \frac{F_u}{H_{eu}} \right. \right]$$

Cas incertitudes sur le système de sortie (figure 2)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \hline C_\Phi & 0 & | & D_\Phi \\ \hline M_5 & 0 & | & M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & | & 0 & B_K & 0 \\ 0 & A_K & B_K F_p^T & | & 0 & B_K H_{qp}^T & B_K H_{ep}^T \\ 0 & 0 & A_H^T & | & 0 & E_q^T & E_e^T \\ \hline 0 & 0 & C_z^T F_z^T & | & A_G^T & C_z^T H_{qz}^T & C_z^T H_{ez}^T \\ 0 & 0 & D_{zw}^T F_z^T & | & B_w^T & D_{zw}^T H_{qz}^T & D_{zw}^T H_{ez}^T \\ \hline 0 & C_K & D_K F_p^T & | & 0 & D_K H_{qp}^T & D_K H_{ep}^T \\ C_K & 0 & 0 & | & 0 & D_K & D_K \\ \hline 0 & 0 & F_u^T & | & 0 & H_{qu}^T & H_{eu}^T \end{bmatrix}$$

$$\left[M_2 \left\| \frac{M_3}{M_4} \right. \right] = \left[\begin{array}{c} A_G^T \\ B_w^T \end{array} \left\| \frac{C_y^T}{D_{yw}^T} \right. \right]$$

Ce théorème donne des conditions pour tester l'existence d'un filtre pour un niveau de performance choisi, pour les deux systèmes présentés figure 1 et 2. La condition (14), correspond à des conditions de test pour l'existence du filtre. Le bloc Φ_{11} assure la stabilité du filtre, en garantissant que toutes ses valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité. Pour finir, la condition (15) garantit que les propriétés de la contrainte intégrale quadratique originale $\Pi(j\omega)$ sont conservées par la factorisation.

Il est remarquable de voir que ce théorème donne des conditions LMI pour lesquelles on dispose d'un algorithme de résolution efficace. Pour un γ donné, le problème d'optimisation est un problème de faisabilité. Il est également possible de mettre ce théorème sous la forme d'une minimisation d'une fonction de coût, en minimisant $\hat{\gamma} = \gamma^2$, on pourra trouver le filtre qui donne la plus petite borne sur le pire cas du gain- \mathcal{L}_2 atteignable dans ce cadre.

Corollaire 5. Si les conditions du théorème sont vérifiées, alors un filtre garantissant un gain- \mathcal{L}_2 inférieur à γ est donnée par $F = C_f(e^{j\omega} I - A_f)^{-1} B_f + D_f$

Incertitudes sur le système d'entrée

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} \left(A_F - \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} A_H \begin{bmatrix} Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} \right) R^{-T} & B_F \\ & D_F \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} F_u \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} R = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ -Z_2^T & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & Z_2 \\ 0 & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Incertitudes sur le système de sortie

$$\begin{bmatrix} A_f^T & C_f^T \\ B_f^T & D_f^T \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} \left(A_F - \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} A_G^T \begin{bmatrix} Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} \right) R^{-T} & B_F \\ & D_F \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} C_y^T \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} R = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ -Z_2^T & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & Z_2 \\ 0 & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Ce corollaire permet de reconstruire directement à partir des variables solutions du problème d'optimisation le filtre correspondant.

4. APPLICATION NUMÉRIQUE

Nous présentons dans cette partie un exemple académique de synthèse de pré-compensateur robuste. On souhaite que la réponse impulsionnelle d'un système compensé $(S \star \Delta)F$ soit au plus proche d'une réponse impulsionnelle donnée par un système de référence T_{ref} . Le système T_{ref} correspond à une impulsion qui permettra par exemple dans le cas d'une imprimante Drop-on-Demand d'avoir un dépôt de goutte. Il est donné par sa fonction de transfert discrète.

$$T_{ref} = \frac{0.066e^{j\omega} + 0.055}{e^{2j\omega} - 1.45e^{j\omega} + 0.57}$$

La formalisation de ce problème est présenté figure 4: on cherche un filtre F qui minimise le pire cas sur la norme H_∞ du système étendu $T_{ref} - (S \star \Delta)F$, pour un signal w tel que $\|w\|_\infty < 1$. Si l'erreur est suffisamment petite la boucle ouverte $(S \star \Delta)F$ aura une réponse proche de la réponse souhaitée T_{ref} .

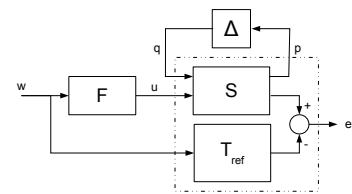


Fig. 4. Problème de pré-compensation robuste

n	0 (statique)	1	2	3	5
$BS\gamma$	0.84	0.503	0.480	0.480	0.480
$BI\gamma$	0.63	0.498	0.480	0.480	0.480
n_F	4	8	12	16	24

Table 1. $\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty$: Borne inférieure et supérieure pour un ordre n de $K(e^{j\omega})$

Le système S à commander est sujet à une incertitude paramétrique δ répétée 2 fois ($\Delta = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, $|\delta| < 1$). La représentation d'état de S est donnée équation (18), avec $p = \Delta q$.

$$\begin{bmatrix} A & F_p & F_u \\ E_q & H_{qp} & H_{qu} \\ E_e & H_{ep} & H_{eu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

La réponse impulsionnelle du système de référence, ainsi que des réponses impulsionnelles du système réalisées via un balayage sur δ sont données figure 5

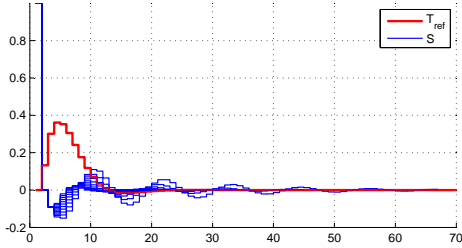


Fig. 5. Réponses impulsionnelles

Nous appliquons notre méthode sur ce système. L'IQC après factorisation correspondant à un scalaire incertain répété est la suivante ($K(e^{j\omega}) = [1 \ e^{-j\omega} \ \dots \ e^{-nj\omega}]$) :

$$[\diamond]^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(e^{j\omega}) & 0 \\ 0 & K(e^{j\omega}) \end{bmatrix}$$

La table 1 présente les bornes supérieures sur le pire cas de $\|T_{w \rightarrow e}\|_\infty$, ainsi que les bornes inférieures obtenues par une balayage fin de δ pour un ordre de $K(e^{j\omega})$ donné. On peut s'apercevoir que la méthode est peu conservatrice même pour des ordres de $K(e^{j\omega})$ très faible. En comparant avec l'utilisation de multiplieurs statiques le gain réalisé en prenant des multiplieurs dépendants de la fréquence est significatif ($\approx 25\%$). D'un point de vue calcul, pour $n = 2$, qui permet le meilleur rapport performance/taille du multiplieur, $n_K = 4$, le nombre de variables du problème d'optimisation est de 487. Le temps de résolution avec le solveur standard de la *Robust Control ToolboxTM* de *Matlab*® est de 12s. Ces résultats valident notre méthode. Comme il est nécessaire d'avoir un filtre d'ordre plein, l'ordre du filtre synthétisé est donné par $n_G + n_H + 2n_k$, ou n_G , n_H sont les ordres des systèmes G et H , et n_k l'ordre de $K(e^{j\omega})$, ce qui grandit assez rapidement avec n_k . Cependant ici on génère un signal d'entrée, qui peut être généré directement via les valeurs des échantillons de sa réponse impulsionnelle. L'ordre du filtre est donc sans importance. Pour les autres cas, utiliser des méthodes de réduction de modèle avant d'implémenter le filtre pourra être profitable. Nous présentons par la suite les réponse impulsionnelles du système corrigé en

comparaison avec le système de référence en figure 6. Nous pouvons observer qualitativement que le pré-compensateur donne bien au système incertain considéré la forme de réponse impulsionnelle souhaitée.

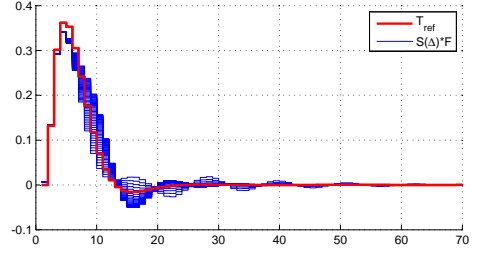


Fig. 6. Réalisation temporelle

5. CONCLUSION

Ce papier démontre que la synthèse d'un filtre discret assurant la performance d'un système en boucle ouverte peut se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes Inégalités Matricielles Linéaires. Les incertitudes sont prises en compte en utilisant des Contraintes Intégrales Quadratiques Dynamiques permettant de considérer des classes variées d'incertitudes. Nous avons prouvé ici que la représentation d'état du contrôleur peut se calculer directement à partir de la solution du problème d'optimisation. Notre résultat étend les résultats sur le filtrage robuste et la pré-compensation robuste au cas discret en ajoutant la possibilité de considérer n'importe quelle fonction de transfert en entrée ou en sortie du système comme par exemple des pondérations. Une application numérique de pré-compensation montre l'intérêt de la méthode. Cette méthode devrait permettre une approche systématique de la synthèse d'éléments passifs dans des chaînes de transmission d'énergie.

Appendice A. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

On considère dans cette partie le système avec incertitudes sur le système de sortie (figure 1). On applique le théorème 2 à ce système en choisissant la définition de la matrice S définie équation (12). Pour le système avec incertitudes en sortie, les mêmes étapes peuvent être suivies en choisissant la définition de la matrice S donnée équation (13). S est définie dans ce cas la comme:

$$\begin{bmatrix} S_{21} \\ S_{31} \\ S_{41} \\ S_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_K & B_K C_q & 0 \\ 0 & 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & F_z C_z + F_u D_F C_y & A_H & F_u C_F \\ 0 & 0 & B_F C_y & 0 & A_F \\ 0 & C_K & D_K C_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{ez} C_z + H_{eu} D_F C_y & E_e & H_{eu} C_y \\ C_K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{32} \\ S_{42} \\ S_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_K & 0 \\ B_K & \begin{bmatrix} D_{qp} & D_{qw} \\ D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix} \\ F_z & \begin{bmatrix} D_{zp} & D_{zw} \\ D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix} + F_u D_F \begin{bmatrix} D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix} \\ B_F & \begin{bmatrix} D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix} \\ D_K & \begin{bmatrix} D_{qp} & D_{qw} \end{bmatrix} \\ H_{ez} & \begin{bmatrix} D_{zp} & D_{zw} \\ D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix} + H_{eu} D_F \begin{bmatrix} D_{yp} & D_{yw} \end{bmatrix} \\ D_K & 0 \end{bmatrix}$$

S contient les coefficients du filtre, qui sont des variables du problème. Dans ce cas, l'inégalité (10) est une Inégalité Matricielle Bilinéaire. Les étapes qui suivent servent à linéariser cette équation pour se ramener à une LMI. Avec une permutation et un lemme de Schur (Boyd et al., 1994, page 41), la condition (10) est équivalente à la condition (A.1).

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & [\diamond]^T \gamma^2 S_{62} \end{bmatrix} + [\diamond]^T X \begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{51} & S_{52} \end{bmatrix} & \diamond \\ \hline \begin{bmatrix} PS_{21} & PS_{22} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (\text{A.1})$$

On introduit la partition de P et de son inverse $P^{-1} = Q$.

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \hline \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{array} \middle| \begin{array}{c} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{array} \right] \quad Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline \diamond & Q_{22} \end{array} \middle| \begin{array}{c} Q_{13} \\ Q_{23} \\ Q_{33} \end{array} \right].$$

$$PS_{21} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \hline \diamond & \mathbf{P}_{22} \end{array} \middle| \begin{array}{c} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_K & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & A_K & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & A_G & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & A_H \\ \hline \dots & \dots & \dots & A_F \end{array} \right]$$

$P_{33}, Q_{33}, P_2, Q_2, P_1, Q_1$ sont des matrices carrées de même dimension. On effectue une multiplication congruente sur l'équation (A.1) avec $\text{diag}(VJ, I, VJ, I)$.

$$J = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_1 = Q_{11}^{-1}, \quad \mathbf{Z}_2 = Q_{11}^{-1} Q_{12} \quad \mathbf{Z}_3 = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}.$$

$$VJ = \begin{bmatrix} I & \mathbf{Z}_2 & R_1 \\ 0 & \mathbf{Z}_3 & R_2 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad VJP = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{Z}_2^T & I & 0 \\ \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & P_{13} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} & P_{23} \end{bmatrix}.$$

En utilisant le changement de base défini equation A.2, on obtient la condition (14). La condition (15) est obtenue directement par l'utilisation du théorème 3.

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ I \end{bmatrix} B_p \\ \hline \dots + \left(\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} A_w \begin{bmatrix} Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_F R^T & B_F \\ C_F R^T & D_F \end{bmatrix} + \end{array} \right] \quad (\text{A.2})$$

Démonstration du corollaire 5

Le filtre peut être reconstruit à partir du changement de variable donné equation A.2. Il est nécessaire de reconstruire les matrices $\begin{bmatrix} P_{13}^T \\ P_{23}^T \end{bmatrix}$ et R . On dispose de la partition de P ainsi que de la partition de son inverse Q .

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ -Z_2^T & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & Z_2 \\ 0 & Z_3 \end{bmatrix}$$

Comme la représentation du filtre est choisie dans une base donnée, on peut choisir $\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} = I$. Dans ce cas

$$R = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ -Z_2^T & I \end{bmatrix} (I - Q_1 P_1) \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix}^{-T}$$

En inversant le changement de base donnée equation A.2 on obtient le corollaire 5, avec la définition donnée equation (16). Les mêmes étapes avec le cas dual amène à la définition donnée equation (17).

REFERENCES

- X. Bombois, H. Hjalmarsson, and G. Scorletti. Identification for robust H_2 deconvolution filtering. *Automatica*, 46(3):577–584, March 2010.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 1994.
- A. Gelb. *Applied optimal estimation*. Wiley New York, 1974.
- M.P. Kazmerkovski, A. Moradewicz, J. Duarte, E. Lomonowa, and C. Sonntag. Contactless Energy Transfer. In Wilamowski and Irwin, editors, *Power Electronics and Motor Drives*, chapter 35. Boca Radon, crc press edition, 2011.
- A. Khalate, B. Bayon, X. Bombois, G. Scorletti, and R. Babu. Drop-on-Demand Inkjet Printhead Performance Improvement Using Robust Feedforward Control. In *Conference on Decision and Control-European Control Conference CDC-ECC*, Orlando, 2011.
- IE Kose and C.W. Scherer. Robust L_2 -gain feedforward control of uncertain systems using dynamic IQCs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(11):1224–1247, 2008.
- H. Li and M. Fu. A Linear Matrix Inequality Approach to Robust H_∞ Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9):2338–2350, 1997.
- A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):819–830, 1997.
- Anders Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28(1):7–10, 1996.
- C. Scherer. Robust Controller Synthesis is Convex for Systems without Control Channel Uncertainties. In Paul M.J. Hof, Carsten Scherer, and Peter S.C. Heuberger, editors, *Model-Based Control: Bridging Rigorous Theory and Advanced Technology*, chapter 1, pages 13–31. Springer-Verlag, New-York, 2009.
- C. Scherer and I. Kose. Robustness with dynamic IQCs: An exact state-space characterization of nominal stability with applications to robust estimation. *Automatica*, 44(7):1666–1675, July 2008.
- G. Scorletti and V. Fromion. Further results on the design of robust H_∞ feedforward controllers and filters. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3560–3565, San Diego, 2006.
- K. Sun and A. Packard. Robust H_2 and H_∞ filters for uncertain LFT systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):715–720, 2005.
- L. Xie, L. Lu, L. Zhang, and H. Zhang. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 40(5):873–880, 2004.
- K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995.