



HAL
open science

Lemmes finis pour la dynamique des gaz

François Dubois

► **To cite this version:**

François Dubois. Lemmes finis pour la dynamique des gaz. [Rapport de recherche] Cnam. 2011. hal-00733937

HAL Id: hal-00733937

<https://hal.science/hal-00733937>

Submitted on 20 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lemmes finis
pour la dynamique des gaz
(1988-1998)

LEMMES FINIS
POUR LA DYNAMIQUE DES GAZ
(1988-1998)

François Dubois^{*}

^{*} Conservatoire National des Arts et Métiers et Université Paris Sud.

*En mathématiques, un lemme est un résultat préliminaire.
Les lemmes sont maintenant finis.*

Avant-propos

Les équations de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant du point de vue de leur étude mathématique que de celui de leur approximation numérique. En effet, les résultats abstraits récents, décrits par exemple dans le second tome du livre de Pierre-Louis Lions [Li96], ne portent que sur des modèles relativement simples en regard du besoin des ingénieurs. Aussi les méthodes d'approximation les plus efficaces et populaires pour représenter les ondes non linéaires telles que chocs et détentes sont également les plus rustiques. La méthode des volumes finis est de celles-ci. Elle est née d'une numérisation naturelle des lois de conservation fondamentales de la physique des milieux continus et elle permet une capture correcte des discontinuités admissibles sans avoir à les détecter au préalable. Nous n'abordons pas dans ce mémoire les résultats mathématiques généraux sur les volumes finis, pour lesquels nous renvoyons le lecteur au livre d'Edwige Godlewski et Pierre-Arnaud Raviart [GR96] ; nous nous concentrons ici sur les applications à la dynamique des gaz.

Ce document est une compilation bibliographique qui regroupe divers rapports de recherche et cours spécialisés rédigés en Français entre 1988 et 1998. On y trouve une synthèse de connaissances classiques et plusieurs résultats originaux. Les diverses contributions sont auto-consistantes et peuvent donc être lues indépendamment les unes des autres, ceci il est vrai au prix de quelques redites.

Toutefois, l'ordre choisi dans cette présentation permet une progression didactique à partir de connaissances préalables en physique des fluides et en calcul scientifique acquises typiquement à l'issue d'un premier cycle universitaire.

Dans le premier document, nous étudions la résolution exacte et approchée du problème de Riemann pour la dynamique des gaz. Il s'agit d'une question posée à une dimension d'espace qui correspond à une condition initiale formée de deux états constants séparés par une discontinuité. Physiquement, cette description mathématique modélise un dispositif expérimental connu sous le nom de "tube à choc". Numériquement, la résolution efficace du problème de Riemann est à la base des schémas décentrés modernes et constitue en quelque sorte "l'équation du second degré" de l'hyperbolicien. Ce travail a été initié par un cours à l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur sur les "Méthodes numériques pour le calcul d'écoulements compressibles ; applications industrielles" [CDV92] organisé par Jean-Paul Vila en septembre 1992.

Au second temps, nous étudions le problème des conditions aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz d'un point de vue mathématique et numérique. Dans le cas d'une dimension d'espace, nous rappelons quelques résultats classiques, fondés sur une analyse du problème linéarisé et nous présentons une formulation non linéaire du problème fondée sur une analyse de la dissipation de l'entropie. Cette approche fortement non linéaire autorise, avec la notion de "problème de Riemann partiel", la prise en compte numérique d'effets non triviaux au bord du domaine d'étude. Ce chapitre a été rédigé sous cette forme [Du88] à l'occasion d'une "école Cea-Edf-Inria" sur les "Méthodes de différences finies et équations hyperboliques" organisée en novembre 1988 par Pierre-Louis Lions.

Dans le cas bi ou tridimensionnel, c'est-à-dire pour des problèmes issus de modèles physiques réalistes, nous adaptons les idées précédentes et présentons [CDV92] une approche pour la discrétisation spatiale multidimensionnelle. Diverses possibilités géométriques peuvent être envisagées et nous présentons plusieurs variantes de la méthode des volumes finis. Nous discutons du choix de la grille, présentons la version du premier ordre du schéma décentré, étudions la prise en compte de diverses conditions aux limites et présentons une extension de la méthode au second ordre de précision en espace.

Dans une quatrième partie, nous abordons l'étude d'une paroi mobile, dans l'hypothèse classique d'un couplage aéroélastique qui suppose des petits mouvements devant la dimension de la première maille ainsi qu'une vitesse de déformation modérée devant celle des ondes sonores. Nous montrons, grâce à la prise

en compte de bilans dans l'espace-temps et la notion de problème de Riemann partiel pour le traitement des conditions aux limites, qu'il est possible au premier ordre de remplacer une modélisation géométrique de ce mouvement par un flux limite de paroi mobile sur les facettes qui relient le fluide et la structure et présentons la nécessaire adaptation du schéma numérique. *In fine*, le mouvement peut être décrit en termes algébriques.

Nous présentons dans un cinquième document une approche générale pour exprimer la condition d'entropie dans le cas de l'approximation de systèmes hyperboliques de lois de conservation par un schéma continu en temps et discret en espace avec la méthode des volumes finis dans le cas de plusieurs dimensions d'espace. Nous établissons un lien avec le schéma de Godunov dans le cas de la dynamique des gaz.

Après avoir remarqué que les équations de la dynamique des gaz conservent le moment cinétique, nous proposons dans un sixième temps un nouveau schéma de volumes finis pour leur approximation numérique. C'est une généralisation du schéma de Godunov qui prend en compte un champ de vitesse de type solide rigide dans chaque maille. Le point original du schéma est l'équation d'évolution du tourbillon, qui est donnée par la conservation du moment cinétique. Il s'agit de la version rédigée de quelques remarques présentées en juin 1998 lors d'un groupe de travail animé par Pierre-Arnaud Raviart au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique.

Nous avons choisi lors des travaux précédents de présenter l'approximation des lois de conservation qui régissent l'évolution d'un fluide compressible grâce à une approche qui découple l'espace et le temps. Pour la septième partie, nous abordons [CDV92] l'équation différentielle temporelle définie une fois fixé le schéma en espace, pour en donner une discrétisation complète en temps. Nous rappelons les principes fondamentaux de la discrétisation d'un système différentiel, détaillons les méthodes de Runge-Kutta explicites et diverses méthodes implicites, étudions l'effet de la discrétisation en temps sur le maintien de la propriété de variation totale décroissante et présentons plusieurs schémas dans le cas où certains termes ont une dynamique très rapide par rapport à d'autres.

Dans le huitième document, nous proposons une approche générale qui permet d'évaluer les termes dissipatifs du second ordre des équations de la mécanique des fluides sur des maillages non structurés généraux dans le cas de deux et trois dimensions d'espace avec la méthode des volumes finis. Les

opérateurs de dérivation en espace sont discrétisés en se fondant sur leur caractère à la fois local et linéaire. Le schéma obtenu reste toujours compact et ne fait intervenir que sept points au plus dans le cas bidimensionnel et onze points en tridimensionnel. Cette recherche finalisée en février 1992 [Du92] a été menée dans le cadre de la société “Aérospatiale” aux Mureaux et fut impulsée par Bertrand Mercier.

Dans le contexte industriel du développement d’un logiciel de résolution des équations de Navier-Stokes des gaz visqueux, nous montrons enfin [Du91] que la mise en place d’une phase implicite est facile si le calcul des gradients s’effectue à l’aide de l’approche détaillée au chapitre précédent.

Tous ces travaux de recherche industrielle et institutionnelle ont été menés au cours de la décennie 1988-1998. Ils n’ont donné lieu à aucune publication classique dans un journal à comité de lecture mais ont pu être présentés lors de séminaires et d’ateliers scientifiques. La rédaction présentée ici est celle originale, toujours en langue Française, à la correction de coquilles près lors de la révision dactylographique. La numérotation des paragraphes et des formules algébriques est propre à chaque partie. La bibliographie a toutefois été regroupée à la fin du document.

Ce travail de recherche constitue un corpus cohérent de connaissances préliminaires pour la conception, le développement et la réalisation de logiciels pour la simulation de la dynamique des gaz. Les réalisations informatiques associées ont en parallèle donné lieu à divers échanges internationaux dans les années 1990, entre autres en collaboration avec Olivier Michaux ([DM92], [DM93]) et Guillaume Mehlman ([DM96]).

Lemmes finis pour la dynamique des gaz.

Orsay, septembre 2003, octobre 2006, février 2011.

Remerciements

Les résultats présentés dans ce mémoire sont pour l'essentiel le fruit d'un travail d'équipe mené au cours des années quatre vingt dix à "Aérospatiale Espace & Defense" aux Mureaux, entreprise qui s'est transformée depuis en "Astrium Space Transportation". Il n'aurait pas été possible sans des discussions régulières et parfois quotidiennes avec Florence Arnoux, Rémy Baraille, Pierre Brenner, Patrick Bugnon, Eric Chaput, Jean-Jacques Chattot, François Coron, Eric Duceau, Jean Dupont, Laurent Fusade, Victor Grégo, Hervé Hollanders, Claude Hug, Gérard Laruelle, Vincent Levillain, Guillaume Mehlman, Bertrand Mercier, Olivier Michaux, Gilles Moulès, Michel Pollet, Antonio Rivas, Fabrice Ruffino et Isabelle Terrasse.

Nous tenons donc à remercier chaleureusement les responsables de la société "Astrium Space Transportation" d'avoir autorisé la publication des résultats présentés ici. De plus, l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur a permis que les "notes de cours" soient mises à disposition d'un plus grand nombre d'ingénieurs et nous l'en remercions également.

Enfin, l'explicitation et la mise en forme rédigée de méthodes abstraites en vue des applications est également le fruit d'interactions constructives au sein du milieu universitaire, entre autres avec Rémi Abgrall, Yann Brenier, Didier Chargy, Frédéric Coquel, Jean-Pierre Croisille, Jean-Antoine Désidéri, Bruno Després, Philippe Destuynder, Thierry Gallouët, Edwige Godlewski, Laurence Halpern, Bernard Larrouturou, Philippe Le Floch, Alain Lerat, Alain-Yves Le-Roux, Patrick Le-Tallec, Pierre-Louis Lions, Sylvie Mas-Gallic, Jean-Claude Nédélec, Roger Ohayon, Jacques Périaux, Pierre Perrier, Olivier Pironneau, Pierre-Arnaud Raviart, Philip Roe, Denis Serre, Bruno Stoufflet et Jean-Paul Vila. Merci à tous, plus encore à ceux qui ont été oubliés !

Table des matières

1.	Résolution numérique du problème de Riemann	
1.1	Rappels succincts de dynamique des gaz	1
1.2	Problème de Riemann pour le gaz parfait	4
1.3	Solution approchée pour les fluides réactifs	22
1.4	Quelques approximations classiques	26
2.	Conditions aux limites fortement non linéaires	
2.1	Introduction	33
2.2	Etude du problème continu	35
2.3	Discrétisation des conditions aux limites	45
2.4	Problème de Riemann partiel à la frontière	53
2.5	Conclusion	62
3.	Discrétisation spatiale multidimensionnelle	
3.1	Discrétisation en espace	63
3.2	Conséquences de l'invariance par rotation	67
3.3	Conditions limites pour les équations d'Euler	70
3.4	Une variante de la méthode de van Leer	77
3.5	Discrétisation des flux visqueux	81
4.	Flux limite de paroi mobile	
4.1	Introduction	85
4.2	Etude monodimensionnelle	88
4.3	Etude bidimensionnelle	102
4.4	Développements algébriques	122
4.5	Linéarisation du flux limite de paroi mobile	156
4.6	Conclusion	168

5.	Condition d'entropie multidimensionnelle	
5.1	Introduction	169
5.2	Flux d'entropie	170
5.3	Inégalité d'entropie	172
5.4	Equations d'Euler de la dynamique des gaz	173
6.	Dynamique des gaz, volumes finis et moment cinétique	
6.1	Euler conserve le moment cinétique	183
6.2	Vitesse tourbillonnante pour les volumes finis	186
6.3	Volumes finis pour les équations d'Euler	189
7.	Discrétisation en temps du système dynamique	
7.1	Rappel des notions de base	195
7.2	Schémas de Runge et Kutta	202
7.3	Décroissance de la variation totale	206
7.4	Traitement des termes raides	209
8.	Interpolation de Lagrange et volumes finis	
8.1	Introduction	213
8.2	Le cas bidimensionnel	217
8.3	Le cas tridimensionnel	231
8.4	Conclusion	257
8.5	Annexe A : Calcul du gradient et interpolation de Lagrange	257
8.6	Annexe B : Condition limite de Dirichlet et volumes finis	258
9.	Implication des flux visqueux	
9.1	Introduction	261
9.2	Expression des flux visqueux	262
9.3	Rappel du principe du calcul des gradients	264
9.4	Utilisation de la méthode de Beam et Warming	267
9.5	Une approche directe	270
	Références bibliographiques.	273

Résolution numérique du problème de Riemann

Dans ce premier document, nous étudions la résolution exacte et approchée du problème de Riemann pour la dynamique des gaz. Il s'agit d'un problème posé à une dimension d'espace qui correspond à une condition initiale formée de deux états constants séparés par une discontinuité. Physiquement, cette description mathématique modélise le dispositif expérimental connu sous le nom de "tube à choc". Numériquement, la résolution efficace du problème de Riemann est à la base des schémas décentrés modernes et constitue en quelque sorte "l'équation du second degré" de l'hyperbolicien. Nous adoptons le plan suivant : cas du gaz parfait polytropique dans une première partie, extension aux modèles réactifs dans une seconde partie avant de présenter dans une troisième partie quelques approximations classiques : schéma de Roe et d'Osher, décomposition de flux de van Leer.

1) Rappels succincts de dynamique des gaz.

- On étudie un gaz parfait soumis à un mouvement de vitesse variable dans l'espace et dans le temps. Les inconnues du problème sont donc les grandeurs thermodynamiques du gaz (densité ρ , énergie interne e , température T , pression p). On suppose dans ce qui suit que le gaz étudié est un gaz parfait polytropique, c'est à dire a des chaleurs spécifiques C_v (à volume constant) et

Chapitre 1 du cours à l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur [CDV92], septembre 1992. Traduction en "TEX" juillet 2003. Edition février 2011 ; 32 pages.

C_p (à pression constante) qui ne dépendent pas des variables thermodynamiques de température et de pression ; on note γ leur rapport :

$$(1.1) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} (= \text{constante}),$$

et on suppose de plus que le gaz obéit à la loi d'état des gaz parfaits qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(1.2) \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

De plus, l'énergie interne et la température sont reliées entre elles par la loi de Joule-Thomson

$$(1.3) \quad e = C_v T.$$

- Le mouvement est décrit dans l'approche proposée par Euler au XVIII^e siècle avec un champ de vitesse inconnu u qui est une fonction de l'espace x et du temps t :

$$(1.4) \quad u = u(x, t).$$

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons pour simplifier que l'espace x n'a qu'une dimension ($x \in \mathbb{R}$). Nous avons donc quatre fonctions inconnues (densité, vitesse, pression, énergie interne) reliées entre elles par la loi d'état (1.2). Il convient de trouver trois équations pour fermer le problème.

- La physique nous indique que la masse, l'impulsion et l'énergie totale sont des grandeurs conservées dans la nature, au moins dans le cadre de la physique classique de Galilée, cadre qui nous sert de référence ici, avec par exemple l'ouvrage de Landau-Lifchitz [LL54]. Quand on écrit la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie dans un volume infinitésimal dx advecté d'une célérité $u(x, t)$ exactement égale à la vitesse moyenne des molécules du gaz, on trouve [LL54] les lois de conservation sous la forme d'opérateurs de divergence :

$$(1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) u + p u \right) = 0.$$

- On introduit alors l'énergie totale E par unité de volume (dite aussi énergie totale spécifique)

$$(1.8) \quad E = \frac{1}{2}u^2 + e$$

et le vecteur W des “variables conservatives” ou plus exactement conservées :

$$(1.9) \quad W = (\rho, \rho u, \rho E)^t.$$

Les lois de conservation (1.5) à (1.7) prennent alors la forme synthétique suivante

$$(1.10) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0$$

où le vecteur de flux $W \mapsto F(W)$ admet l’expression :

$$(1.11) \quad F(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + p u)^t.$$

- Les système (1.10) forme un système hyperbolique non linéaire (on dit parfois “quasilinéaire”) de lois de conservation. On ne sait quasiment rien dire de l’existence d’une solution $(x, t) \mapsto W(x, t)$ lorsque le temps t n’est plus très petit, même si la condition initiale $W(x, 0)$ est une fonction régulière de la variable d’espace x . Des ondes non linéaires présentes dans le système (1.10) créent des discontinuités, ce qui rend l’étude mathématique générale du système (1.10) très délicate.

- Le second principe de la thermodynamique peut être introduit explicitement pour un gaz parfait polytropique en mouvement. L’entropie spécifique s est une fonction des variables d’état thermodynamique p et ρ :

$$(1.12) \quad s = \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \frac{p}{\rho^\gamma}$$

et on peut voir (avec un calcul élémentaire de quelques lignes laissé au lecteur) que l’entropie mathématique suivante :

$$(1.13) \quad \eta(W) = -\rho s$$

admet un flux d’entropie $\xi(W)$ au sens de la théorie de Lax [Lax71] de la forme

$$(1.14) \quad \xi(W) = -\rho u s.$$

Le second principe de croissance de l’entropie spécifique au cours du temps prend alors la forme “conservative” suivante :

$$(1.15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(W) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(W) \leq 0.$$

L’inégalité (1.15) est une égalité pour les solutions régulières $W(\bullet, \bullet)$ de la loi de conservation (1.10). Elle est à prendre au sens des distributions pour une solution faible $W(\bullet, \bullet)$ de (1.10).

- L'entropie (1.13) est une fonction strictement convexe des variables conservées si la température est positive (voir par exemple notre preuve dans [Du90b]). On peut introduire la dérivée (de Fréchet)

$$(1.16) \quad d\eta(W) = \phi \bullet dW$$

qui définit les variables entropiques ϕ . Le calcul des variables entropiques est élémentaire à partir de l'expression traditionnelle du second principe. Dans un volume V qui contient une masse M , une énergie interne \mathcal{E} et une entropie S qui est une fonction extensive (homogène de degré un) des variables précédentes, *i.e.*

$$(1.17) \quad S = \Sigma(M, V, \mathcal{E}),$$

la relation différentielle entre ces grandeurs s'exprime à l'aide de la relation classique :

$$(1.18) \quad d\mathcal{E} = T dS - p dV + \mu dM.$$

Les grandeurs globales sont reliées simplement aux grandeurs correspondantes par unité de masse grâce à l'ensemble des relations suivantes :

$$(1.19) \quad M = \rho V, \quad \mathcal{E} = e M, \quad S = s M.$$

L'entropie mathématique $\eta(\bullet)$ s'exprime simplement en avec la fonction $\Sigma(\bullet)$:

$$(1.20) \quad \eta(W) = -\Sigma(\rho, 1, \rho e).$$

Compte tenu des relations (1.8) et (1.18), on dérive facilement la relation (1.20) et il vient

$$(1.21) \quad d\eta(W) = \frac{1}{T} \left(\mu - \frac{u^2}{2} \right) d\rho + \frac{u}{T} d(\rho u) - \frac{1}{T} d(\rho E).$$

2) Problème de Riemann pour le gaz parfait.

2.1) Ondes non linéaires autosemblables.

- On construit dans un premier temps diverses solutions particulières du problème de Riemann qui, rappelons le, consiste à chercher une solution entropique $W(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) du problème suivant :

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0$$

$$(2.2) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

Nous remarquons d'abord que la loi de conservation (2.1) est **invariante par changement d'échelle** d'espace-temps. En effet, sous l'action de la transformation $(x, t) \mapsto T_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda t)$ paramétrée par $\lambda > 0$, toute solution (faible) $W(\bullet, \bullet)$ de (2.1) donne naissance à une nouvelle solution faible $T_\lambda W(x, t) \equiv W(T_\lambda(x, t))$. Comme la condition initiale est invariante par dilatation spatiale, c'est à dire

$$(2.3) \quad W(\lambda x, 0) = W(x, 0), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$

l'hypothèse d'unicité de la solution du problème (2.1)(2.2) entraîne facilement que la solution $W(\bullet, \bullet)$ doit être autosemblable, ce qu'on exprime par la relation

$$(2.4) \quad W(\lambda x, \lambda t) = W(x, t), \quad \lambda > 0.$$

La relation (2.4) exprime donc que la solution $W(x, t)$ doit être recherchée de façon autosemblable, c'est à dire comme fonction de $\frac{x}{t}$ seulement (voir à ce sujet Landau-Lifchitz [LL54] par exemple) :

$$(2.5) \quad W(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}.$$

• On cherche dans un premier temps une solution régulière $U(\xi)$. On injecte la représentation (2.5) dans l'équation (2.1) et on en tire :

$$(2.6) \quad dF(U(\xi)) \bullet \frac{dU}{d\xi} = \xi \frac{dU}{d\xi}.$$

On en déduit que ou bien $\frac{dU}{d\xi}$ est nul, ce qui correspond au cas trivial d'un état constant, ou bien ce vecteur est non nul, et il est nécessairement égal à un vecteur propre $R(W)$ de la matrice jacobienne $dF(W)$, ce dernier vérifiant la relation classique :

$$(2.7) \quad dF(W) \bullet R(W) = \lambda(W) R(W)$$

dans le cas particulier où $W = U(\xi)$. Par identification entre les relations (2.5) et (2.7), on en déduit que $\frac{dU}{d\xi}$ et $R(U)$ sont proportionnels et on en tire également

$$(2.8) \quad \lambda(U(\xi)) = \xi.$$

Nous venons de trouver les conditions qui permettent de construire une **onde de détente**.

• On peut également supposer la fonction $\xi \mapsto U(\xi)$ discontinue en $\xi = \sigma$. Si on note avec un crochet $[]$ la discontinuité d'un champ arbitraire, on dispose alors des relations de Rankine et Hugoniot :

$$(2.9) \quad [F(U)] = \sigma [U]$$

qui reviennent à exprimer que la fonction discontinue $U(\xi)$ est solution (en un sens faible, voir Lax [Lax73] par exemple) de l'équation (2.1). On construit de cette façon une **onde de choc**.

2.2) Ondes de détente.

• Nous avons vu au premier paragraphe que la construction d'une onde de détente est associée à une valeur propre du jacobien $dF(W)$. Dans le cas des équations d'Euler d'un gaz parfait polytropique, ces valeurs propres se calculent facilement en utilisant une forme non conservative des équations :

$$(2.10) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

obtenue en faisant apparaître l'entropie spécifique s . Nous posons donc

$$(2.13) \quad Z(W) = (\rho, u, s)^t$$

$$(2.14) \quad B(Z) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}(\rho, s) \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

et les équations d'Euler écrites sous la forme (2.10)-(2.12) s'écrivent matriciellement sous la forme

$$(2.15) \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + B(Z) \bullet \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

La vitesse du son c utilisée à la relation (2.14) est définie par

$$(2.16) \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s)$$

et pour un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes de rapport γ on a :

$$(2.17) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

• Il suffit de diagonaliser la matrice $B(Z)$ pour diagonaliser la matrice $dF(W)$, ce qui simplifie notablement les calculs dans la suite. En effet, on peut introduire la variable Z dans l'équation (2.1) :

$$(2.18) \quad dW(Z) \bullet \frac{\partial Z}{\partial t} + dF(W) \bullet dW(Z) \bullet \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

ce qui, par rapprochement avec la relation (2.15), montre que l'on a

$$(2.19) \quad B(Z) = (dW(Z))^{-1} \bullet dF(W) \bullet dW(Z).$$

Cette relation de conjugaison montre que $\tilde{R}(Z) \equiv (dW(Z))^{-1} \bullet R(W)$ est vecteur propre de la matrice $B(Z)$ pour la valeur propre $\lambda(W)$ si $R(W)$ est un vecteur propre de $dF(W)$ qui vérifie la relation (2.7). La diagonalisation de la matrice $B(Z)$ est alors immédiate. On trouve

$$(2.20) \quad \lambda_1 = u - c < \lambda_2 = u < \lambda_3 = u + c$$

avec des vecteurs propres associés donnés par les relations

$$(2.21) \quad \tilde{R}_1(Z) = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_2(Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_3(Z) = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que la dérivée de λ_1 (respectivement λ_3) dans la direction \tilde{R}_1 (respectivement \tilde{R}_3) n'est jamais nulle

$$(2.22) \quad d\lambda_1(W) \bullet \tilde{R}_1(W) \neq 0, \quad d\lambda_3(W) \bullet \tilde{R}_3(W) \neq 0, \quad \forall W$$

alors que la situation est opposée pour la seconde valeur propre pour laquelle on a

$$(2.23) \quad d\lambda_2(W) \bullet \tilde{R}_2(W) = 0.$$

Pour cette raison, on dit que les valeurs propres λ_1 et λ_3 définissent des champs **vraiment non linéaires** alors que la valeur propre $\lambda_2 = u$ définit un champ **linéairement dégénéré**. Les ondes de détente sont toujours associées à des champs vraiment non linéaires et nous détaillons dans le paragraphe suivant l'étude des 1-ondes de détente et des 3-ondes de détente.

- Une 1-onde de détente $\xi \mapsto U(\xi)$ vérifie

$$(2.24) \quad \frac{dZ}{d\xi}(U(\xi)) \text{ proportionnel à } \tilde{R}_1(Z)$$

donc si on intègre le champ de vecteurs $\tilde{R}_1(Z)$ c'est à dire si on résout l'équation différentielle (2.24), on trouve une fonction $Z(\xi)$ qui définit une 1-onde de détente, par exemple pour ξ compris entre deux valeurs limites ξ_0 et ξ_1 . Nous pouvons représenter la solution de l'équation (2.24) dans l'espace des états W ; on a une courbe $\xi \mapsto U(\xi)$ vérifiant la relation (2.24) et la condition initiale

$$(2.25) \quad U(\xi_0) = W_0$$

qui est définie par exemple jusqu'en $\xi = \xi_1$ où l'on atteint l'état final W_1 (voir la figure 1)

$$(2.26) \quad U(\xi_1) = W_1.$$

Dans l'espace-temps (x, t) , nous sommes en présence de trois "régimes" pour les célérités $\xi = \frac{x}{t}$:

$$(2.27) \quad U(\xi) = W_0 \quad \text{pour} \quad \xi \leq \xi_0 \quad (\text{état constant})$$

$$(2.28) \quad U(\xi) \text{ variable pour} \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \quad (\text{onde de détente})$$

$$(2.29) \quad U(\xi) = W_1 \quad \text{pour} \quad \xi \geq \xi_1 \quad (\text{état constant})$$

comme représenté à la figure 2. Notons que la relation (2.8) impose une valeur bien particulière ξ_0 pour la célérité :

$$(2.30) \quad \xi_0 = u(W_0) - c(W_0)$$

ainsi qu'une valeur analogue pour ξ_1 . On peut aussi montrer simplement (voir par exemple Smoller [Sm83]) que l'inégalité

$$(2.31) \quad \xi_0 \leq \xi_1$$

a nécessairement lieu si W_1 est relié à W_0 à travers une 1-onde ou une 3-onde de détente. Dans le cas d'une 3-onde de détente, les relations (2.27) à (2.29) et (2.31) sont encore valables, mais la relation (2.30) doit être remplacée par

$$(2.32) \quad \xi_0 = u(W_0) + c(W_0)$$

et on a aussi une relation analogue pour ξ_1 .

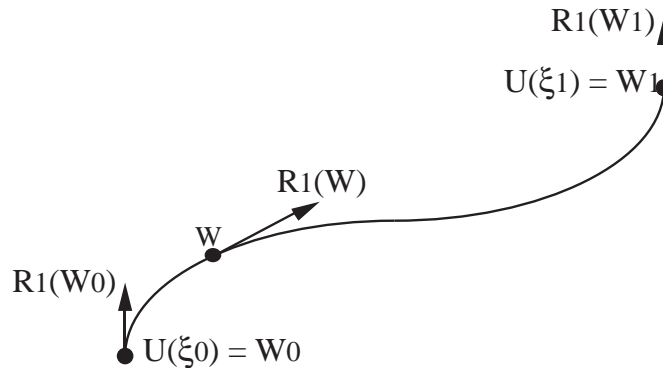


Figure 1 Onde de détente $\xi \mapsto U(\xi)$ associée à la valeur propre $\lambda_1 = u - c$ dans l'espace des états W : la trajectoire est tangente en tout point au vecteur propre $R_1(W)$.

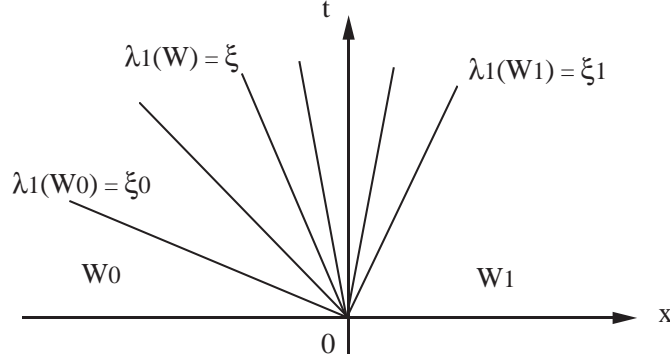


Figure 2 Onde de détente $\xi \mapsto U(\xi)$ associée à la valeur propre $\lambda_1 = u - c$ représentée dans le plan d'espace-temps.

- Le calcul pratique de la courbe $\xi \mapsto U(\xi)$ satisfaisant les relations (2.24) et (2.25) utilise la notion d'invariant de Riemann. Un 1-invariant de Riemann (respectivement un 3-invariant de Riemann) est une fonction $\beta^1(W)$ (respectivement $\beta^3(W)$) qui est toujours constante le long des 1-courbes de détente (respectivement des 3-courbes de détente) et qui vérifie par définition

$$(2.33) \quad d\beta^1(W) \bullet R_1(W) = 0 \quad \forall W$$

(respectivement $d\beta^3(W) \bullet R_3(W) = 0$ pour tout état W). Exprimée en termes des variables non conservatives Z , on vérifie facilement qu'on a la relation analogue

$$(2.34) \quad d\beta^1(Z) \bullet \tilde{R}_1(W) = 0 \quad \forall Z.$$

Compte tenu de la forme particulière (2.21) du vecteur $\tilde{R}_1(W)$, les deux fonctions suivantes

$$(2.35) \quad \beta_1^1(Z) = s$$

$$(2.36) \quad \beta_2^1(Z) = u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho, s)}{\rho} d\rho = u + \frac{2c}{\gamma-1}$$

sont des 1-invariants de Riemann puisqu'ils vérifient tous deux identiquement la relation (2.34). L'expression de deux 3-invariants de Riemann s'obtient de façon analogue :

$$(2.37) \quad \beta_1^3(Z) = s$$

$$(2.38) \quad \beta_2^3(Z) = u - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho, s)}{\rho} d\rho = u - \frac{2c}{\gamma-1}.$$

Les états W sur une 1-onde de détente issue de l'état W_0 sont explicités en pratique en exprimant la relation (2.33), qui revient à dire que les deux fonctions (2.35) et (2.36) sont constantes sur la courbe de détente :

$$(2.39) \quad s = s_0$$

$$(2.40) \quad u + \frac{2c}{\gamma-1} = u_0 + \frac{2c_0}{\gamma-1}$$

$$(2.41) \quad \xi = u - c, \quad \xi \geq u_0 - c_0.$$

• Nous détaillons la forme algébrique des relations reliant un état W à un état initial W_0 par une 1-onde de détente dans un gaz parfait polytropique. On vérifie d'abord simplement (voir les détails dans Courant-Friedrichs [CF48]) que dans une 1-onde de détente, la pression est décroissante et la vitesse croissante :

$$(2.42) \quad p \leq p_0, \quad u \geq u_0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par une 1-détente}$$

et en exprimant l'entropie pour un gaz parfait polytropique

$$(2.43) \quad s = \frac{p}{\rho^\gamma}$$

il vient, compte tenu des relations (2.17), (2.39) et (2.40)

$$(2.44) \quad u - u_0 + \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0 \quad (1\text{-détente})$$

avec le paramètre sans dimension μ défini par la relation

$$(2.45) \quad \mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Le graphe dans le plan (u, p) de la courbe de 1-détente (équation (2.44) sous la condition (2.42)) est donné à la figure 3.

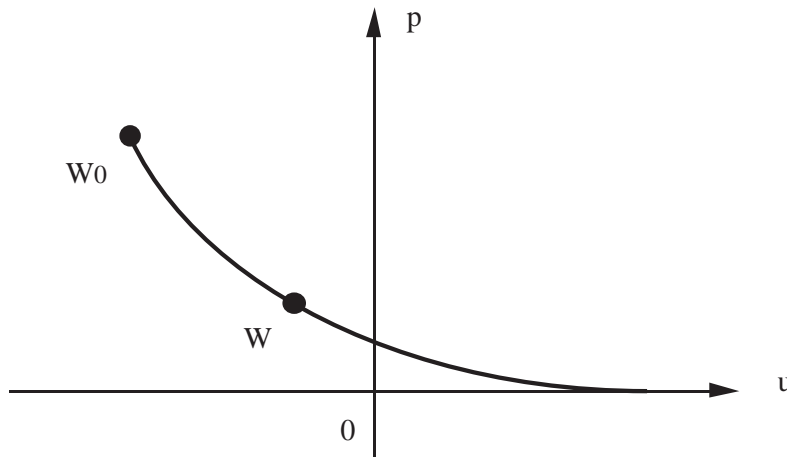


Figure 3 Onde de 1-détente reliant l'état W_0 à l'état W représentée dans le plan (vitesse, pression).

- Dans le cas d'une 3-onde de détente, nous nous intéressons (pour des raisons qui apparaîtront clairement plus loin) à un état W amont relié à un état W_0 **en aval**, ce qui nous donne

$$(2.46) \quad s = s_0$$

$$(2.47) \quad u - \frac{2c}{\gamma-1} = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1}$$

$$(2.48) \quad \xi = u + c, \quad \xi \leq u_0 + c_0.$$

Il est également facile d'en déduire que la vitesse est croissante dans une 3-onde ainsi que la pression, c'est à dire :

$$(2.49) \quad p \leq p_0, \quad u \leq u_0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par une 3-détente.}$$

Un calcul analogue à celui mené pour une 1-onde de détente nous montre que

$$(2.50) \quad u - u_0 - \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0 \quad (3\text{-détente}).$$

Le rapprochement entre les relations (2.44) et (2.50) nous amène à poser

$$(2.51) \quad \psi(p; \rho_0, p_0; \gamma) \equiv \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right).$$

Le graphe dans le plan (u, p) de la courbe de 3-détente (équation (2.50) sous la condition (2.49)) est donné à la figure 4.

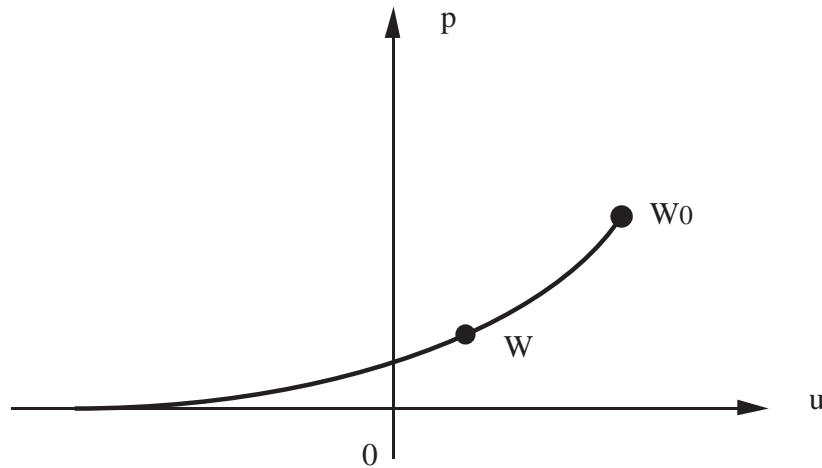


Figure 4 Courbe dans le plan (vitesse, pression) des états W aboutissant à l'état W_0 par l'intermédiaire d'une 3-onde de détente

2.3) Ondes de choc.

• Nous cherchons maintenant à définir de façon plus précise les relations qui relient deux états W_0 et W vérifiant les relations de Rankine et Hugoniot (2.9) ainsi qu'une condition d'entropie. Nous remarquons d'abord que l'invariance galiléenne des équations de la dynamique des gaz permet de se placer dans le repère ayant la vitesse σ de la discontinuité, ce qui permet de réécrire les relations (2.9) sous la forme

$$(2.52) \quad [\rho(u - \sigma)] = 0$$

$$(2.53) \quad [\rho(u - \sigma)^2 + p] = 0$$

$$(2.54) \quad \left[\rho(u - \sigma) \left(\frac{(u - \sigma)^2}{2} + e \right) + p(u - \sigma) \right] = 0$$

comme on peut aussi le vérifier à l'aide d'un calcul élémentaire laissé au lecteur. Il est classique d'introduire le flux de masse m qui traverse le choc :

$$(2.55) \quad m = \rho(u - \sigma)$$

et les conditions d'entropie (voir [LL54] ou [CF48]) nous indiquent qu'on a

$$(2.56) \quad m > 0 \quad \text{à travers un 1-choc}$$

$$(2.57) \quad m < 0 \quad \text{à travers un 3-choc.}$$

La numérotation des ondes de choc s'explique par un argument de continuité : si les sauts des relations (2.52) à (2.54) sont faibles, on peut montrer (voir les détails dans Smoller [Sm83] ou Godlewski-Raviart [GR96] par exemple) que la vitesse σ de la discontinuité commune aux états W_0 et W tend vers la valeur commune de $u - c$ pour un 1-choc et de $u + c$ pour un 3-choc. Le cas où le flux de masse m est nul sera étudié plus loin ; on parle alors de **discontinuité de contact**.

• Nous détaillons maintenant le calcul algébrique nécessaire pour exprimer que l'état aval W obtenu à travers une 1-onde de choc de célérité σ issue d'un état W_0 . On remarque d'abord que la condition d'entropie fournit toute une série d'inégalités :

$$(2.58) \quad \rho > \rho_0, \quad p > p_0, \quad u - c < \sigma < u_0 - c_0, \quad s > s_0$$

pour W issu de W_0 par un 1-choc qui sont utiles dans la suite. Nous notons h et τ l'enthalpie spécifique et le volume spécifique respectivement :

$$(2.59) \quad h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$(2.60) \quad \tau = \frac{1}{\rho}.$$

Des relations (2.52) à (2.54) on tire, compte tenu de (2.55), (2.59) et (2.60) :

$$(2.61) \quad [u] = m [\tau]$$

$$(2.62) \quad m^2 [\tau] + [p] = 0$$

$$(2.63) \quad [h] + \frac{m^2}{2} [\tau^2] = 0.$$

Nous particularisons dans la suite au cas du gaz parfait polytropique. En éliminant m des relations (2.62) et (2.63) et en exprimant l'enthalpie en fonction de la pression et du volume spécifique, c'est à dire

$$(2.64) \quad h = \frac{\gamma}{\gamma-1} p \tau$$

nous pouvons après un calcul algébrique simple, exprimer le volume spécifique τ en aval du choc en fonction des données amont, de la pression aval et du paramètre μ introduit en (2.45). On obtient :

$$(2.65) \quad \tau = \frac{p_0 + \mu^2 p}{p + \mu^2 p_0} \tau_0.$$

En reportant cette valeur dans la relation (2.62), nous pouvons exprimer le carré du flux massique à travers le choc :

$$(2.66) \quad m^2 = \frac{p + \mu^2 p_0}{(1-\mu^2) \tau_0}, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par un 1-choc.}$$

Pour une 1-onde de choc, la relation (2.56) jointe à (2.61) nous permet d'exprimer le saut de vitesse en fonction de la pression et de l'état amont :

$$(2.67) \quad u - u_0 + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\rho_0 (p + \mu^2 p_0)}} (p - p_0) = 0$$

pour W issu de W_0 par un 1-choc et nous pouvons, dans le plan (vitesse, pression), tracer (figure 5) la courbe caractérisée par l'équation (2.67) et les inégalités (2.58).

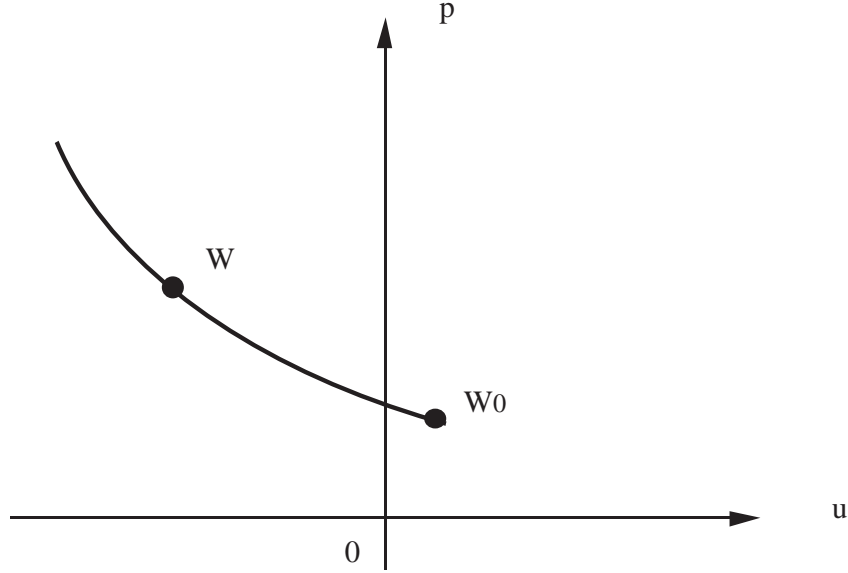


Figure 5 Courbe dans le plan (vitesse, pression) des états W issus de l'état W_0 par une 1-onde de choc.

- Dans le cas d'une 3-onde de choc, les relations (2.62) à (2.66) restent valables, mais au lieu de nous intéresser à un état W issu de W_0 par un 3-choc, nous nous intéressons aux états W qui permettent d'aboutir à W_0 à travers une 3-onde de choc. Il convient donc d'échanger le rôle des lettres avec et sans l'indice zéro dans les relations précédentes. Avec ces dernières hypothèses concernant les notations, un calcul simple montre que la relation (2.66) reste encore valable, et nous avons

$$(2.68) \quad m^2 = \frac{p + \mu^2 p_0}{(1 - \mu^2) \tau_0}, \quad W_0 \text{ issu de } W \text{ par un 3-choc.}$$

La relation qui exprime le saut de vitesse en fonction de l'état aval W_0 et de la pression amont prend alors la forme :

$$(2.69) \quad u - u_0 - \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\rho_0 (p + \mu^2 p_0)}} (p - p_0) = 0$$

pour W_0 issu de W par un 3-choc. Compte tenu des nouvelles notations, les conditions d'entropie s'écrivent

$$(2.70) \quad \rho_0 < \rho, \quad p_0 < p, \quad u_0 + c_0 < \sigma < u + c, \quad s_0 < s$$

si W_0 est issu de W par un 3-choc. Nous pouvons représenter une 3-onde de choc dans le plan (vitesse, pression) à la figure 6. Par rapprochement entre les relations (2.67) et (2.69), il est naturel de poser

$$(2.71) \quad \varphi(p; \rho_0, p_0; \gamma) \equiv \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\rho_0(p + \mu^2 p_0)}} (p - p_0)$$

où μ et γ sont reliés par la relation (2.45).

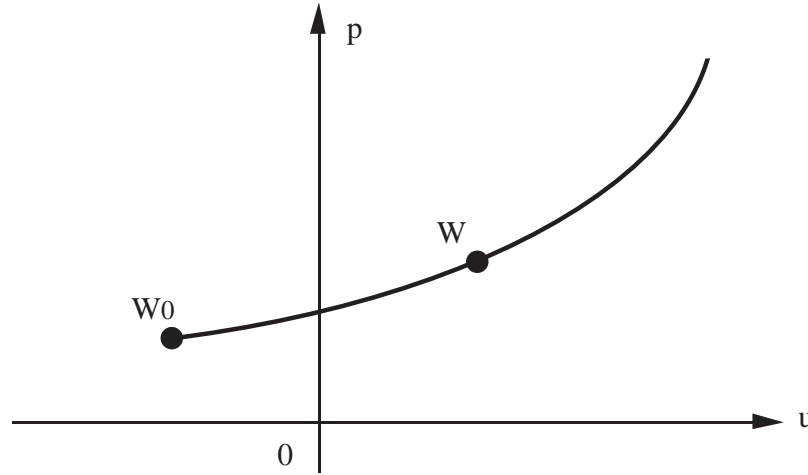


Figure 6 Courbe dans le plan (vitesse, pression) des états W aboutissant à l'état W_0 par une 3-onde de choc.

2.4) Discontinuités de contact.

• Au cours de l'étude des ondes de détente, nous avons introduit la notion de champ linéairement dégénéré à la relation (2.23) et le second champ des équations d'Euler est effectivement linéairement dégénéré. Ceci signifie que la seconde valeur propre, c'est à dire la vitesse est un invariant de Riemann :

$$(2.72) \quad \beta_1^2(Z) = u.$$

Compte tenu de l'expression (2.21) des vecteurs propres, il est facile de voir que la pression est un autre 2-invariant, indépendant du premier :

$$(2.73) \quad \beta_2^2(Z) = p.$$

Nous pouvons chercher une onde autosemblable régulière $\xi \mapsto U(\xi)$ solution de l'équation différentielle exprimant la proportionnalité entre $\frac{dU}{d\xi}$ et $R_2(U)$, mais alors la condition nécessaire (2.8) impose à la variable ξ de ne pas varier ! En effet, en dérivant la relation (2.8) par rapport à ξ , nous trouvons $d\lambda_2(U) \cdot \frac{dU}{d\xi} = 1$ alors que cette dernière quantité est identiquement nulle :

$$(2.74) \quad d\lambda_2(U) \cdot \frac{dU}{d\xi} = 0,$$

compte tenu de la linéaire dégénérescence du champ $\lambda_2 \equiv u$. Nous remarquons toutefois que si la fonction $\xi \mapsto U(\xi)$ est une courbe intégrale du champ R_2 , c'est à dire

$$(2.75) \quad \frac{dU}{d\xi} = R_2(U)$$

alors on a entre les états W_0 et W le calcul suivant :

$$\begin{aligned} F(W) - F(W_0) &= \int_{\xi_0}^{\xi} dF(U(\eta)) \bullet \frac{dU}{d\eta} d\eta = \int_{\xi_0}^{\xi} dF(U(\eta)) \bullet R_2(U(\eta)) d\eta \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi} \lambda_2(U(\eta)) R_2(U(\eta)) d\eta \\ &= \lambda_2 \int_{\xi_0}^{\xi} R_2(U(\eta)) d\eta = \lambda_2 (W - W_0). \end{aligned}$$

La quatrième étape est une conséquence de la linéaire dégénérescence qui exprime que la vitesse u est constante le long de la 2-courbe définie en (2.75). Nous venons donc de montrer qu'on a une relation de Rankine-Hugoniot

$$(2.76) \quad [F(W)] = \lambda_2 [W]$$

et dans l'espace des états les courbes de détente définies par la relation différentielle (2.75) et les courbes de choc trouvées en (2.76) coïncident ! Le second champ, linéairement dégénéré, définit une courbe dans l'espace des états joignant l'état W_0 à l'état W selon les relations

$$(2.77) \quad u = u_0$$

$$(2.78) \quad p = p_0$$

et dans l'espace-temps, ces deux états sont séparés par une discontinuité de célérité σ égale à λ_2 compte tenu de la relation (2.76) :

$$(2.79) \quad \sigma = u = u_0.$$

Une telle onde est appelée **discontinuité de contact** ou **ligne de glissement**. Nous avons

$$(2.80) \quad U(\xi) = \begin{cases} W_0, & \xi < u_0 = \sigma \\ W, & \xi > u_0 = \sigma. \end{cases}$$

Une représentation dans l'espace-temps de cette relation est donnée figure 7 alors que dans le plan (vitesse, pression), les projections des états W_0 et W coïncident, comme établi aux relations (2.77) et (2.78).

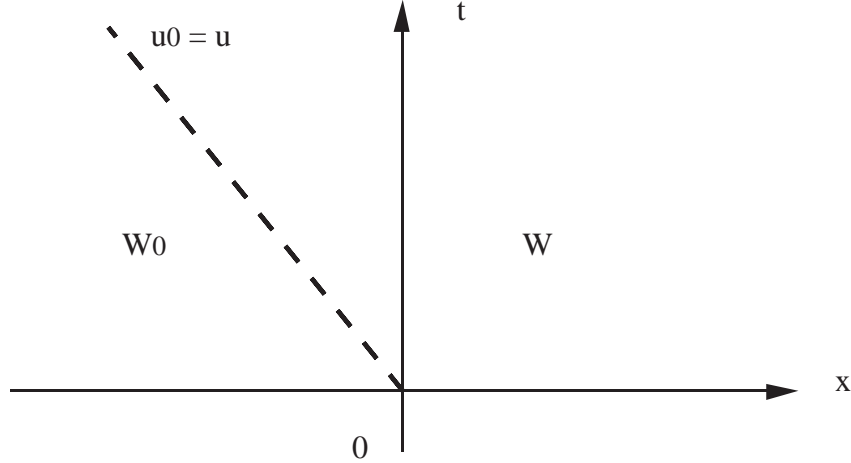


Figure 7 Discontinuité de contact entre les états W_0 et W .

2.5) Résolution du problème de Riemann pour le gaz polytropique.

• Pour résoudre le problème (2.1) (2.2) entre les états W_g et W_d , la théorie générale de Lax (voir [Lax73]) s'applique pour la dynamique des gaz. L'idée est de rechercher deux états intermédiaires W_1 et W_2 de sorte que

(2.81) W_1 est issu de l'état W_g par une 1-onde

(2.82) W_2 est issu de l'état W_1 par une 2-onde

(2.83) W_d est issu de l'état W_2 par une 3-onde.

Nous nous restreignons dans une première approche à rechercher la pression et la vitesse commune aux états W_1 et W_2 compte tenu du fait que la 2-onde est une discontinuité de contact :

$$(2.84) \quad u_1 = u_2 = u^*$$

$$(2.85) \quad p_1 = p_2 = p^*.$$

La relation (2.81) exprime que l'état W_1 est issu de l'état W_g par une 1-onde de détente (relation (2.42)) ou une 1-onde de choc (inégalités (2.58)). Nous avons donc :

$$(2.86) \quad \begin{cases} u_1 - u_g + \psi(p_1; \rho_g, p_g; \gamma) = 0, & p_1 < p_g \\ u_1 - u_g + \varphi(p_1; \rho_g, p_g; \gamma) = 0, & p_1 > p_g. \end{cases}$$

De même, nous remarquons également que la relation (2.83) exprime que l'état W_2 aboutit grâce à une 3-onde à l'état W_d , connu. Nous pouvons utiliser une 3-onde de détente entre W_2 et W_d (relation (2.49)) ou une 3-onde de choc (relation (2.70)). Il vient :

$$(2.87) \quad \begin{cases} u_2 - u_d - \psi(p_2; \rho_d, p_d; \gamma) = 0, & p_2 < p_d \\ u_2 - u_d - \varphi(p_2; \rho_d, p_d; \gamma) = 0, & p_2 > p_d. \end{cases}$$

Il suffit d'écrire l'équation (2.84) qui relie les vitesses u_1 et u_2 (*i.e.* $u_1 = u_2 = u^*$) sous la condition (2.85) relative aux pressions p_1 et p_2 ($p_1 = p_2 = p^*$) pour poser complètement le problème (figure 8).

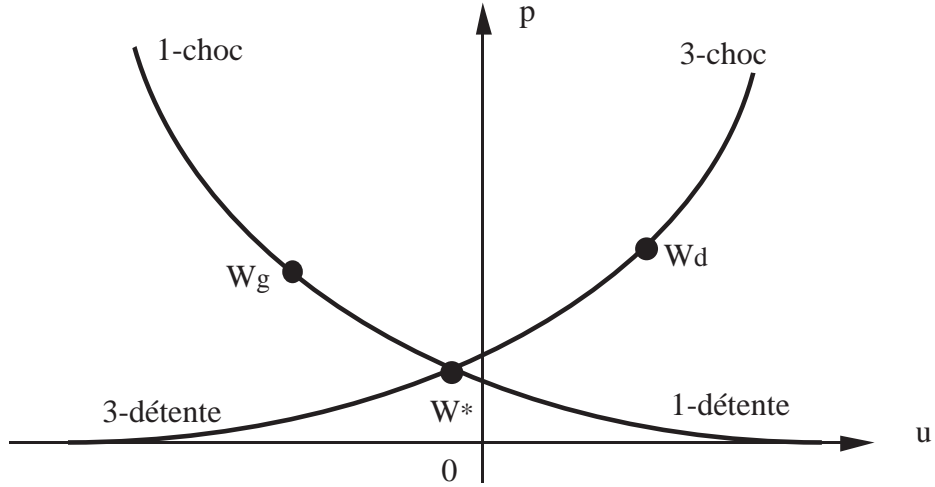


Figure 8 Résolution du problème de Riemann dans le plan (vitesse, pression).

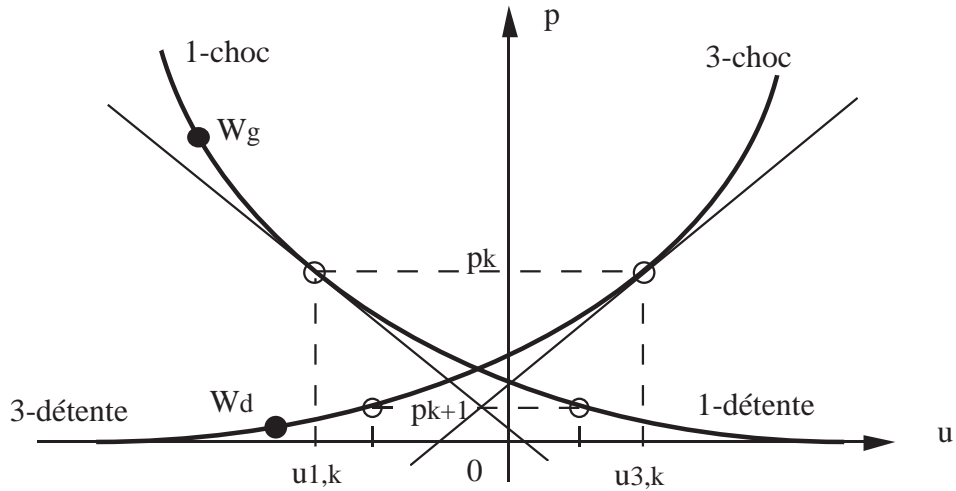


Figure 9 Algorithme de Newton pour la résolution du problème de Riemann dans le plan (vitesse, pression).

- La résolution numérique complète s'effectue par itérations successives (numérotées à l'aide de l'indice k) de type Newton comme illustré à la figure 9 :

partant d'une valeur de la pression p_k , on calcule facilement à l'aide des relations (2.86) et (2.87) les vitesses $u_{1,k}$ et $u_{3,k}$ associées à la 1-onde et à la 3-onde. Avec l'algorithme de Newton, il suffit de calculer l'intersection des tangentes aux deux points correspondants pour définir une nouvelle valeur p_{k+1} de la pression à l'itération $k+1$. L'initialisation de l'algorithme est obtenue classiquement en recherchant l'intersection des deux ondes de détente, c'est à dire en résolvant le système d'équations aux inconnues (u_O, p_O) suivant :

$$(2.88) \quad \begin{cases} u_O - u_g + \psi(p_O; \rho_g, p_g; \gamma) = 0 \\ u_O - u_d + \psi(p_O; \rho_d, p_d; \gamma) = 0. \end{cases}$$

Ce système d'équations, bien que non linéaire, se résout exactement par un calcul algébrique explicite et la pression p_O est finalement donnée par la relation

$$(2.89) \quad p_O^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{\frac{(\gamma-1)}{2} (u_g - u_d) + c_g + c_d}{c_g \left(\frac{1}{p_g}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} + c_d \left(\frac{1}{p_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}},$$

où les vitesses du son c_g et c_d sont calculées aux relations (2.17). Nous remarquons que la relation (2.89) définit effectivement une pression positive p_O si la relation suivante dite de "non apparition du vide" est réalisée :

$$(2.90) \quad u_d - u_g \leq \frac{2}{\gamma-1} (c_g + c_d).$$

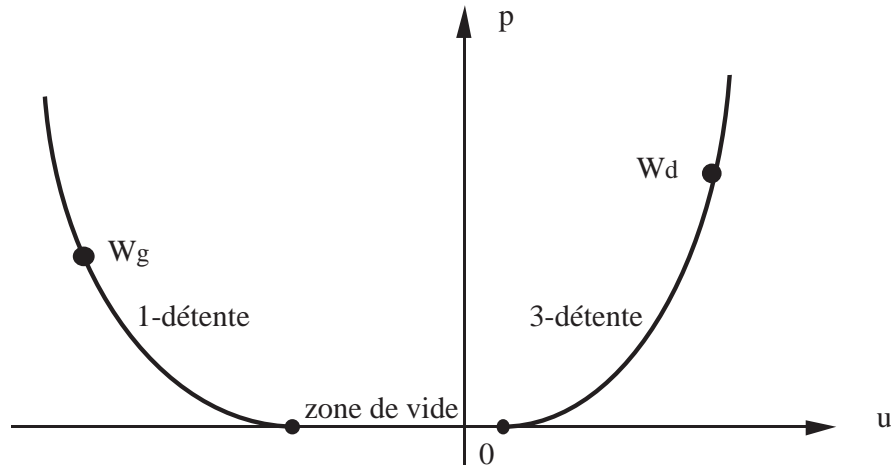


Figure 10 Apparition du vide dans le plan (vitesse, pression)

- Dans le cas contraire où la relation (2.90) est en défaut, les deux courbes représentatives des ondes de détente ne se coupent pas dans le plan (vitesse, pression) et il y a apparition du vide (figures 10 et 11). La solution du problème

de Riemann, qui n'est plus mathématiquement bien définie au sens de Lax, comporte une zone de vide définie par les célérités ξ telles que

$$(2.91) \quad u_g + \frac{2c_g}{\gamma-1} \leq \xi \leq u_d - \frac{2c_d}{\gamma-1}$$

pour lesquelles la pression est nulle ainsi que la densité alors que la vitesse n'est pas définie. Ce cas d'apparition du vide reste exceptionnel en pratique mais peut être entièrement résolu comme nous venons de le voir.

- Dans le cas où la relation (2.90) est réalisée, l'algorithme de Newton illustré à la figure 9 converge vers un couple (u^*, p^*) formé de la vitesse $u^* \in \mathbb{R}$ et de la pression $p^* > 0$ commune aux deux états intermédiaires W_1 et W_2 . Le calcul de la densité de ces deux états intermédiaires dépend de l'onde utilisée effectivement pour résoudre le problème de Riemann. Ainsi, si la pression p^* est inférieure à la pression p_g , la 1-onde est une onde de détente et l'entropie se conservant, on a :

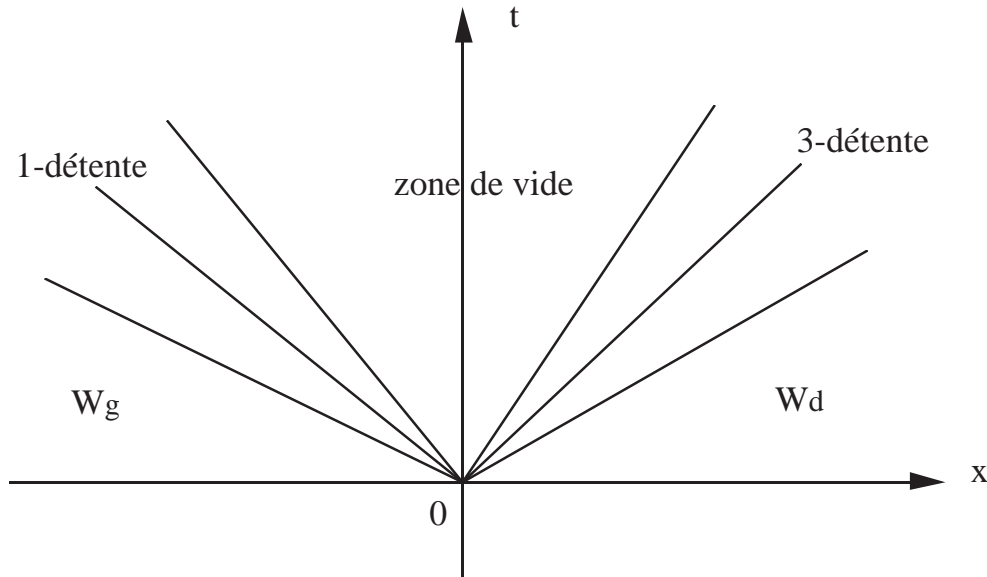


Figure 11 Solution du problème de Riemann comportant du vide.

$$(2.92) \quad \rho_1 = \left(\frac{p^*}{p_g}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_g, \quad p^* < p_g$$

et dans le cas contraire, on utilise une 1-onde de choc et compte tenu de la relation (2.65), on a finalement :

$$(2.93) \quad \rho_1 = \frac{p^* + \mu^2 p_g}{p_g + \mu^2 p^*} \rho_g, \quad p^* > p_g.$$

On peut alors préciser la valeur σ_1 de la célérité du 1-choc :

$$(2.94) \quad \sigma_1 = u_g - \sqrt{\frac{p^* + \mu^2 p_g}{(1-\mu^2) \rho_g}}.$$

Pour la 3-onde, on a une discussion analogue qui conduit finalement aux relations suivantes :

$$(2.95) \quad \rho_3 = \left(\frac{p^*}{p_d}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_d, \quad p^* < p_d$$

$$(2.96) \quad \rho_3 = \frac{p^* + \mu^2 p_d}{p_d + \mu^2 p^*} \rho_d, \quad p^* > p_d$$

$$(2.97) \quad \sigma_3 = u_d + \sqrt{\frac{p^* + \mu^2 p_d}{(1-\mu^2) \rho_d}}.$$

L'allure de la solution générale dans l'espace-temps d'un problème de Riemann pour la dynamique des gaz est illustrée à la figure 12.

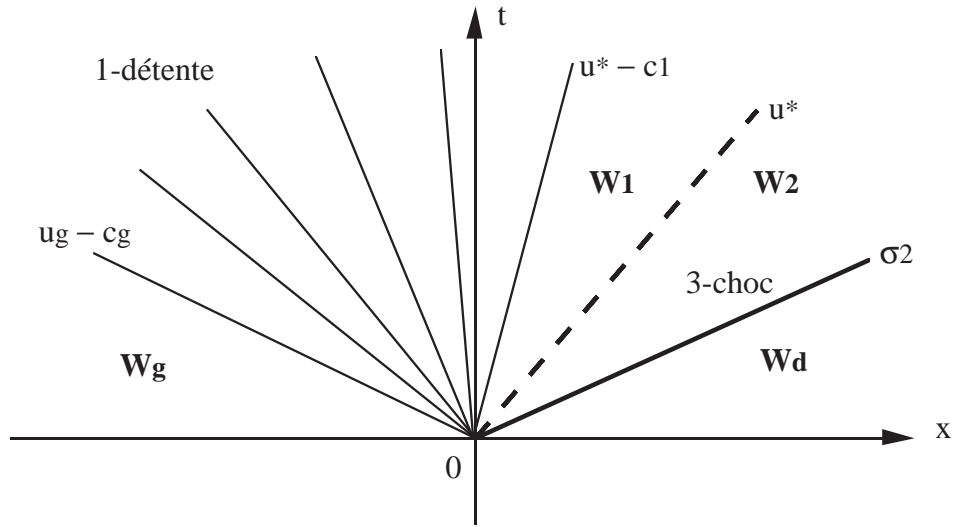


Figure 12 Solution du problème de Riemann dans l'espace-temps.

- Il importe pour la suite de pouvoir préciser l'état (variable) dans une 1-onde de détente en fonction de la célérité $\xi = \frac{x}{t}$. Compte tenu de la relation (2.8), nous avons d'une part :

$$(2.98) \quad u - c = \xi$$

et compte tenu de la relation (2.40), il vient facilement, pour $u_g - c_g < \xi < u_1 - c_1$:

$$(2.99) \quad u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_g + \frac{2}{\gamma+1} c_g + \frac{2}{\gamma+1} \xi$$

$$(2.100) \quad c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_g + \frac{2}{\gamma+1} c_g - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi.$$

L'élimination de la pression entre les relations (2.17) et (2.39) permet d'en déduire la densité. De même pour une 3-onde de détente, la relation (2.8) permet d'exprimer la 3-célérité en fonction de la donnée ξ :

$$(2.101) \quad u + c = \xi$$

et l'invariant (2.47) permet de calculer la vitesse u et la vitesse du son c en fonction des données :

$$(2.102) \quad u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_d - \frac{2}{\gamma+1} c_d + \frac{2}{\gamma+1} \xi$$

$$(2.103) \quad c = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_d + \frac{2}{\gamma+1} c_d + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi$$

sous les conditions $u_2 + c_2 < \xi < u_d + c_d$.

3) Solution approchée pour les fluides réactifs.

• Dans le cas où le fluide étudié n'est plus un gaz parfait mais un gaz soumis à des réactions chimiques, le problème de Riemann se pose encore sous la forme (2.1) (2.2), mais les équations d'Euler de fluide parfait (sans viscosité) prennent une forme plus complexe. On peut avoir

$$(3.1) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^t$$

pour un gaz réel à l'équilibre chimique dans le cas de deux dimensions d'espace ou bien

$$(3.2) \quad W = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho u, \rho v, E)^t$$

pour un mélange de n espèces en interaction chimique. Le premier cas est en un sens le plus délicat à traiter car nous avons à faire à une loi d'état de gaz réel qui peut être non triviale, alors que le second conduit à un système hyperbolique associé à la seconde modélisation qui se ramène en général à un mélange de gaz parfaits polytropiques vus à la première partie de ce chapitre. Nous commençons par ce second modèle pour terminer le paragraphe par le premier.

3.1) Mélange idéal de gaz parfaits polytropiques.

• Nous supposons que le fluide se compose de n espèces sans interactions chimiques (celles-ci sont reportées dans un second membre non différentiel). La loi de pression vérifie donc la loi de Dalton

$$(3.3) \quad p = \sum_{j=1}^n p_j$$

et chaque pression partielle satisfait à une loi polytropicque :

$$(3.4) \quad p_j = (\gamma_j - 1) \rho_j e_j$$

où l'on a décomposé l'énergie totale volumique E en énergie cinétique, plus n énergies internes volumiques correspondant à chaque espèce chimique :

$$(3.5) \quad E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \sum_{j=1}^n \rho_j e_j = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e.$$

On suppose de plus un équilibre thermodynamique local atteint, c'est à dire l'existence d'une unique température pour toutes les espèces et nous introduisons la chaleur spécifique à volume constant pour la j ième espèce c_{vj} . On a alors :

$$(3.6) \quad e_j = c_{vj} T.$$

On peut voir simplement (*c.f.* Abgrall [Ab88] ou Mehlman [Me91]) que la pression est reliée simplement à l'énergie interne selon la relation

$$(3.7) \quad p = (\gamma - 1) \rho e$$

avec un coefficient γ calculé par :

$$(3.8) \quad \gamma = \frac{\sum_{j=1}^n \rho_j c_{vj} \gamma_j}{\sum_{j=1}^n \rho_j c_{vj}},$$

ce qui permet d'associer à chaque état W un "gamma équivalent" très voisin, en ce qui concerne les expressions algébriques, de celui rencontré pour un gaz parfait polytropicque.

- Le système hyperbolique monodimensionnel associé aux $(n + 3)$ inconnues s'écrit :

$$(3.9) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0.$$

Il admet deux ondes vraiment non linéaires (numérotées par analogie avec le paragraphe précédent 1 et 3), et une onde linéairement dégénérée (numéro 2) de multiplicité $(n + 1)$. Nous avons

$$(3.10) \quad \lambda_1 = u - c \quad ; \quad \lambda_2 = u \quad ; \quad \lambda_3 = u + c$$

avec une vitesse locale du son c qui est encore obtenue en utilisant la relation classique (2.17)

$$(3.11) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

mais où γ est cette fois calculé à l'aide de l'expression (3.8). Les invariants de Riemann pour ces trois champs sont de la forme

$$(3.12) \quad \text{1-invariants de Riemann : } \frac{\rho_1}{\rho}, \dots, \frac{\rho_n}{\rho}, \frac{p}{\rho^\gamma}, u + \frac{2c}{\gamma-1}, v$$

$$(3.13) \quad \text{2-invariants de Riemann : } u, p$$

$$(3.14) \quad \text{3-invariants de Riemann : } \frac{\rho_1}{\rho}, \dots, \frac{\rho_n}{\rho}, \frac{p}{\rho^\gamma}, u - \frac{2c}{\gamma-1}, v.$$

- Les concentrations $\frac{\rho_i}{\rho}$ ainsi que la vitesse tangentielle sont constantes à travers les ondes vraiment non linéaires et compte tenu de la relation (3.8), il en est de même pour le rapport γ . Les ondes de détente restent donc calculées par une relation analogue à (2.44) ou (2.50) à ceci près que le coefficient γ est maintenant associé à l'état de référence W_0 :

$$(3.15) \quad u - u_0 + \psi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par une 1-détente}$$

$$(3.16) \quad u - u_0 - \psi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W_0 \text{ issu de } W \text{ par une 3-détente}$$

où la fonction $\psi(\bullet; \bullet, \bullet; \bullet)$ a été définie en (2.51). En ce qui concerne les ondes de choc, les relations de Rankine et Hugoniot relatives au système (3.9) montrent facilement qu'on a :

$$(3.17) \quad \left[\frac{\rho_i}{\rho} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$(3.18) \quad [v] = 0$$

ce qui entraîne que le rapport γ défini en (3.8) reste constant à travers un 1-choc ou un 3-choc. On peut alors dérouler l'algèbre présentée dans la première partie (voir par exemple Fernandez-Larrouturou [FL89] ou Mehlman [Me91]) et dans le plan (vitesse, pression), les relations (2.67) et (2.69) se généralisent sous la forme

$$(3.19) \quad u - u_0 + \varphi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par un 1-choc}$$

$$(3.20) \quad u - u_0 - \varphi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W_0 \text{ issu de } W \text{ par un 3-choc}$$

où la fonction $\varphi(\bullet; \bullet, \bullet; \bullet)$ est définie par les relations (2.71) et (2.45).

- La résolution du problème de Riemann n'offre alors pas de difficulté. Il s'agit, étant donnés deux états W_g et W_d , de résoudre le système d'équations relatives aux 2-invariants de Riemann (u^*, p^*) des deux états intermédiaires W_1 et W_2 . C'est une généralisation simple du système (2.86)(2.87) et nous avons :

$$(3.21) \quad \begin{cases} u^* - u_g + \psi(p^*; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0, & p^* < p_g \\ u^* - u_g + \varphi(p^*; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0, & p^* > p_g \\ u^* - u_d - \psi(p^*; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0, & p^* < p_d \\ u^* - u_d - \varphi(p^*; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0, & p^* > p_d \end{cases}$$

L'algorithme présenté à la figure 9 s'applique sans modification. Une fois déterminés la vitesse u^* et la pression p^* des états intermédiaires, on détaille la 1-onde et la 3-onde par des généralisations simples des relations (2.92) à (2.103). La résolution exacte du problème de Riemann que nous venons de décrire pour la partie hyperbolique (c'est à dire le fluide figé) de la dynamique des gaz réactifs s'implémente alors sans difficulté.

3.2) Gaz réel à l'équilibre chimique.

• La résolution du problème de Riemann pour les équations d'Euler d'un gaz à l'équilibre chimique a été abordée par Colella-Glaz [CG85]. La différence essentielle par rapport au paragraphe précédent est qu'on remplace la loi de Dalton (3.3) par une donnée de la loi de pression à l'aide de tables de Mollier

$$(3.22) \quad p = f(\rho, \rho e).$$

On introduit classiquement les dérivées χ et κ de la loi de pression (3.22) :

$$(3.23) \quad \chi = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, \rho e)$$

$$(3.24) \quad \kappa = \frac{\partial p}{\partial(\rho e)}(\rho, \rho e).$$

Pour un gaz parfait polytropique, on a simplement :

$$(3.25) \quad \chi = 0, \quad \kappa = \gamma - 1, \quad \text{gaz parfait polytropique}$$

et dans le cas général, on établit aisément la relation suivante :

$$(3.26) \quad c^2 = \chi + \kappa h$$

• De façon pratique, les tables thermodynamiques les plus classiques (Hilsenrath et Klein [HK65]) ne fournissent pas une relation fonctionnelle explicite de type (3.22) et il faut, pour calculer la pression, résoudre un problème relatif à la température. Un effort récent (Srinivasan-Tannehill-Weilmuenster [STW87]) a permis de tabuler sous forme de fonctions élémentaires la loi de pression (3.22) pour l'air de l'atmosphère terrestre. Mais si les fonctions suivantes ont bien été tabulées

$$(3.27) \quad s = s(\rho, \rho e), \quad \frac{h}{e} = \frac{h}{e}(\rho, \rho e), \quad c = c(\rho, \rho e),$$

il n'en est pas de même pour les coefficients χ et κ qui interviennent explicitement dans la jacobienne du flux par exemple (voir les détails dans Montagné-Yee-Vinokur [MYV87] par exemple). Le simple calcul des ondes non linéaires est très délicat ; Colella et Glaz ont proposé une méthode itérative pour manipuler les ondes de choc, et nous avons [Du89a] développé un algorithme de calcul des ondes de détente à partir du diagramme de Mollier de Srinivasan.

- En pratique, des formules très simples issues du gaz parfait polytropicque semblent suffisantes et nous proposons d'appliquer sans modification l'adaptation qui est rigoureuse pour les mélanges de gaz parfaits. Les détentes sont donc calculées par les relations (3.15)(3.16) et les chocs par (3.19)(3.20). Mais il reste le problème de définir la valeur du "gamma équivalent" puisque la relation (3.8) n'a maintenant plus de sens. Nous proposons, en suivant une remarque de Mehlman [Me91] de choisir un coefficient γ local grâce à la relation

$$(3.28) \quad \gamma = \frac{\rho c^2}{p}.$$

En effet, dans ce cas, la valeur limite du rapport des pentes est lié à la vitesse du son :

$$(3.29) \quad \frac{p - p_0}{u - u_0} \quad \text{tend vers} \quad \begin{cases} -\rho_0 c_0 & \text{pour une 1-onde} \\ \rho_0 c_0 & \text{pour une 3-onde} \end{cases}$$

et l'introduction d'une valeur calculée grâce à la relation (3.28) dans les formules (3.15), (3.16), (3.19) et (3.20) permet d'approcher correctement les tangentes aux différentes ondes (on le voit facilement pour les ondes de choc grâce aux relations (2.71) et (2.45)) donc de représenter correctement l'acoustique du gaz. Ceci termine notre étude relative au schéma de Godunov sur les gaz réels.

4) Quelques approximations classiques.

- Nous avons vu que la résolution exacte du problème de Riemann conduit à un algorithme itératif même pour le cas simple d'un gaz parfait polytropicque, avec utilisation de fonctions exponentielles et de racines carrées, ce qui en fait un algorithme réputé cher. De très nombreuses tentatives ont été proposées pour résoudre de façon approchée le problème de Riemann. Nous nous concentrons d'abord sur le cas du gaz parfait polytropicque puis dirons quelques mots du cas d'un gaz réel. L'idée la plus simple consiste à mettre en œuvre l'approximation acoustique (Godunov [GZIKP79]), ce qui revient dans l'algorithme de résolution à remplacer les 1 et 3-ondes par leurs tangentes au points W_g et W_d respectivement. Cette idée naturelle est efficace dans plus de quatre vingt dix pour cent

des interfaces d'un maillage, mais pour les ondes fortement non linéaires, cette idée ne suffit pas et il faut pousser plus loin l'algorithme de Newton-Raphson. Cet argument nous semble *in fine* très efficace, mais n'est pas toujours le plus populaire, contrairement aux idées de Roe, Osher et van Leer que nous exposons maintenant.

4.1) Flux de Roe.

- Dans son article de 1981, P. Roe [Roe81] a proposé d'introduire une famille de matrices pour linéariser la décomposition de la discontinuité entre deux états W_g et W_d . Une matrice de Roe $A(W_g, W_d)$ satisfait par définition aux trois propriétés suivantes :

$$(4.1) \quad F(W_d) - F(W_g) = A(W_g, W_d) \bullet (W_d - W_g)$$

$$(4.2) \quad A(W, W) = dF(W)$$

$$(4.3) \quad A(W_g, W_d) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.$$

Le problème général de la recherche d'une matrice de Roe est mal posé (sauf dans le cas scalaire !) et Harten, Lax et van Leer [HLV83] ont montré que si le système hyperbolique étudié admet une entropie mathématique (ce qui est toujours le cas pour les lois de conservation issues de modèles physiques classiques), on peut construire une matrice de Roe satisfaisant aux propriétés (4.1) à (4.3). Mais cette matrice n'a qu'un intérêt théorique car elle est incalculable en pratique !

- Le point clef dans l'étude de Roe est d'avoir montré qu'on peut calculer la matrice $A(W_g, W_d)$ sous la forme

$$(4.4) \quad A(W_g, W_d) = dF(\Psi(W_g, W_d))$$

où $\Psi(\bullet, \bullet)$ est une moyenne non linéaire entre les états W_g et W_d qui est définie par les relations devenues classiques

$$(4.5) \quad u^* = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.6) \quad v^* = \frac{\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.7) \quad H^* = \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

où H représente l'enthalpie totale

$$(4.8) \quad H = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

Des relations (4.5) à (4.8) on déduit la vitesse du son c^* de l'état moyen $\Psi(\bullet, \bullet)$ et l'on dispose alors d'assez de données pour évaluer la jacobienne (4.4). La simplicité des relations (4.5) à (4.8), jointe à la relation classique sur la viscosité numérique d'un schéma décentré, permet de calculer le flux $\Phi(W_g, W_d)$ entre les deux états par la relation

$$(4.9) \quad \Phi(W_g, W_d) = \frac{1}{2} [F(W_g) + F(W_d) - |A(W_g, W_d)| \bullet (W_d - W_g)].$$

La valeur absolue de matrice au second membre de la relation (4.9) se manipule de façon explicite (voir par exemple Yee [Ye87]). Un défaut du schéma de Roe est sa non consistence possible avec la condition d'entropie : des chocs stationnaires non physiques peuvent être capturés par le schéma, ce qu'il faut éviter. Pour remédier à ce défaut, Harten [Ha83] a proposé d'utiliser dans l'expression de la valeur absolue lors du calcul de la matrice de Roe

$$(4.10) \quad |A(W_g, W_d)| = \sum_j |\lambda_j| R_j L_j$$

(R_j est le j -ième vecteur propre à droite de la matrice de Roe $A(W_g, W_d)$ et L_j le j -ième vecteur propre à gauche) une approximation parabolique $Q(\lambda)$ de la fonction "valeur absolue" (figure 13) de façon à ajouter un peu de viscosité au schéma. On pose

$$(4.11) \quad Q(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| \geq \delta \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 + \delta^2}{\delta}, & |\lambda| \leq \delta. \end{cases}$$

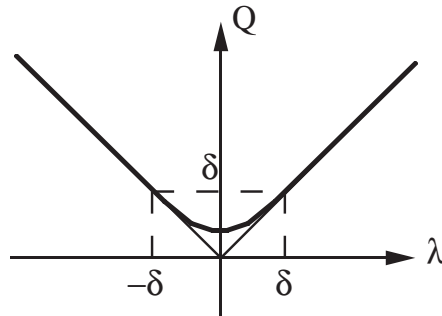


Figure 13 Approximation de la fonction "valeur absolue" de Harten

- Le défaut de cette correction, efficace par ailleurs, est qu'elle introduit un paramètre δ qu'il faut régler avec soin (voir par exemple Yee [Ye87]). Avec G. Mehlman [DM96], nous avons proposé une nouvelle correction **non paramétrée** pour la méthode de Roe, fondée sur une détection des points soniques où le schéma initial de Roe ne dissipe pas assez d'entropie. Nous décomposons

le saut $W_d - W_g$ sur la base des vecteurs propres R_j de la matrice de Roe $A(W_g, W_d)$:

$$(4.12) \quad W_d - W_g = \sum_k \alpha_k R_k$$

et cette décomposition nous permet de définir des états intermédiaires W_j en ne prenant que les premiers termes du second membre de (4.12) :

$$(4.13) \quad W_j - W_g = \sum_{k \leq j} \alpha_k R_k$$

Nous évaluons la j -ième valeur propre λ_j entre les états W_{j-1} et W_j , c'est à dire pour la j -ième onde. Celle-ci est sonique si l'on a :

$$(4.14) \quad \lambda_j(W_{j-1}) < 0 < \lambda_j(W_j).$$

Dans ce cas, on remplace la fonction de flux non pas par une approximation linéaire comme le propose Roe, mais par une approximation **non linéaire** fondée sur une interpolation de Hermite de degré trois qui respecte la j -ième valeur propre. On peut alors résoudre **exactement** un problème de Riemann auxiliaire pour le flux approché, ce qui conduit à une correction d'entropie non paramétrée, non itérative et qui n'est de fait employée que très ponctuellement. Nous renvoyons à notre article [DM96] ou à la synthèse plus récente [Du2K] pour le détail des relations algébriques à mettre en œuvre pour cette correction.

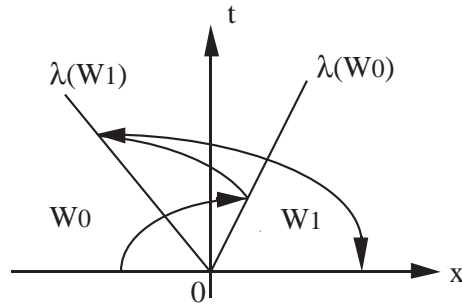


Figure 14 Onde de détente multivaluée.

4.2) Flux d'Osher.

• Parallèlement aux travaux de Roe, S. Osher [Os81] a cherché à généraliser au cas vectoriel un travail mené avec B. Engquist [EO80] sur les schémas de décomposition de flux pour les lois de conservation scalaires :

$$(4.15) \quad \Phi(W_g, W_d) = F^+(W_g) + F^-(W_d)$$

où l'on a décomposé la fonction de flux $F(\bullet)$ sous la forme

$$(4.16) \quad F(W) \equiv F^+(W) + F^-(W)$$

avec l'hypothèse

$$(4.17) \quad dF^+(W) \geq 0, \quad dF^-(W) \leq 0.$$

De cette façon, S. Osher a abouti à une vision assez compliquée et abstraite d'un schéma qui peut (pour la variante "P" ayant une interprétation physique) s'interpréter grâce à l'acquis sur le problème de Riemann, ce que nous développons dans la suite. L'idée de base est d'utiliser les ondes de détente là où un choc est physiquement présent, c'est à dire si

$$(4.18) \quad \xi_0 \equiv \lambda(W_0) > \lambda(W_1) \equiv \xi_1.$$

Dans ce cas, on ne peut pas construire comme aux relations (2.27) à (2.29) une solution physique $W(\xi)$ dans l'espace-temps par juxtaposition d'un état constant W_0 , d'une région d'onde de détente où $W(\xi)$ varie, puis d'un nouvel état constant W_1 . Mais on décide de la faire tout de même ! On utilise sans modification les relations (2.27) à (2.29) malgré l'hypothèse (4.18). Nous disposons donc de **trois** états $W(\xi)$ lorsque $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_0$, donc d'une onde de détente multivaluée illustrée à la figure 14. Le flux de cette "solution" est calculé par le flux de Engquist-Osher :

$$(4.19) \quad F(\xi) = F(W_0) - F(W(\xi)) + F(W_1), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_0,$$

où l'état $W(\xi)$ varie effectivement "en sens contraire" d'une détente traditionnelle, ce qui explique le signe "moins" qui lui est affecté à la relation (4.19). Il est donc possible depuis Osher [Os81] de n'utiliser que des ondes de détente pour résoudre de façon approchée le problème de Riemann. Nous avons développé dans [Du87] les relations qui généralisent la relation (4.19) au cas de la dynamique des gaz. Le point clef qui rend le flux d'Osher également populaire est son caractère non itératif. En effet, le calcul de l'intersection des ondes de détente, posé en (2.88) se résout exactement grâce à la relation (2.89) pour un gaz parfait polytropique.

4.3) Décomposition de flux de van Leer.

• Au lieu d'approcher la solution du problème de Riemann comme l'ont cherché Roe et Osher, B. van Leer [vL82] a essayé de trouver une décomposition du flux des équations d'Euler du type (4.15)(4.16). Et il y est effectivement parvenu ! Les formules sont très simples ; on introduit le nombre de Mach

$$(4.20) \quad M = \frac{u}{c}$$

et l'on pose

$$(4.21) \quad F^+(W) = F(W) \quad \text{si } M \geq 1$$

$$(4.22) \quad F^-(W) = F(W) \quad \text{si } M \leq 1.$$

Nous détaillons la décomposition pour les trois composantes de F^+ dans le cas transsonique :

$$(4.23) \quad F^+(W) = (F_m^+(W), F_x^+(W), F_e^+(W))$$

$$(4.24) \quad F_m^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2$$

$$(4.25) \quad F_x^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2 \frac{(\gamma-1)u + 2c}{\gamma}$$

$$(4.26) \quad F_e^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2 \frac{((\gamma-1)u + 2c)^2}{2(\gamma^2-1)}$$

et le calcul de F^- s'en déduit immédiatement grâce à la relation (4.16). Le flux de van Leer permet effectivement de résoudre avec succès des problèmes de dynamique des gaz comportant des chocs forts et il a servi de brique de base à la version initiale du code FLU3C développé à l'ONERA et à l'Aérospatiale. Mais pour l'approximation de couches limites visqueuses ou de discontinuités de contact, une diffusion trop importante est introduite par le schéma, ce qui n'est pas le cas si on utilise les flux de Godunov, Roe ou Osher.

4.4) Généralisation aux gaz réels.

- Si on généralise les idées précédentes aux gaz réels qui sont mélanges de gaz parfaits ou à l'équilibre chimique, on se heurte à diverses difficultés. En ce qui concerne les flux de Roe tout d'abord, Montagné, Yee et Vinokur [MYV87] ont cherché à généraliser la relation (4.4) pour les gaz réels à l'équilibre chimique mais il est alors nécessaire d'être très précis avec les coefficients χ et κ des relations (3.23) à (3.26). A notre avis, cette approche n'est pas entièrement satisfaisante compte tenu du manque d'information présente dans les diagrammes de Mollier. Pour les mélanges de gaz parfaits, Abgrall [Ab89] et Fernandez-Larrourou [FL89] ont proposé un algorithme qui peut entraîner des concentrations négatives ou bien supérieures à l'unité dans certains cas extrêmes. Enfin, G. Mehlman a proposé de s'abstraire de l'hypothèse (4.4) pour la construction d'une matrice de Roe pour les gaz réactifs et a adapté le solveur de Colella-Glaz. En pratique (voir les détails dans la thèse de Mehlman [Me91]), il suffit de remplacer les ondes de détente par des chocs (c'est la solution duale du choix de Osher !) et de résoudre le système d'équations

$$(4.27) \quad \begin{cases} u_M - u_g + \varphi(p_M; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0 \\ u_M - u_d - \varphi(p_M; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0. \end{cases}$$

Ce système a une solution unique sous une condition d'apparition du vide un peu plus restrictive que la condition (2.90) mais il est résolu par un algorithme de

Newton-Raphson très efficace en partant de la valeur $p = 0$! Le calcul détaillé du schéma de Roe peut alors être extraordinairement simplifié et de plus la positivité des fractions massiques est garantie théoriquement. Dès que l'on a à prendre en compte plus de quatre espèces, le caractère itératif de la résolution du système (4.27) n'est pas pénalisant devant le peu de calculs complémentaires que demande cette version du schéma.

- Pour les flux d'Osher, Stoufflet [St89] et Abgrall-Montagné [AM89] ont proposé un schéma simplifié consistant à résoudre l'intersection des courbes de détente approchées grâce au système

$$(4.28) \quad \begin{cases} u_O - u_g + \psi(p_O; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0 \\ u_O - u_d - \psi(p_O; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0. \end{cases}$$

Mais les propositions qui ont été faites pour l'évaluation des coefficients γ_g et γ_d semblent moins fondées que la relation (3.28) que nous préconisons ici. Là encore, le prix à payer lors du passage au multi-gaz réel est le caractère itératif du schéma approché. Notons que Abgrall et Montagné ont introduit une initialisation très robuste de l'algorithme de Newton dans ce cas.

- Enfin, la décomposition de flux de van Leer nous semble peu adaptée aux gaz réels même si elle est très populaire. En effet, elle est fondée sur un calcul algébrique sur des polynômes par rapport au coefficient γ , calcul qui est plus difficile à justifier pour un gaz réel quelconque. Toutefois B. Larrouturou [La91] a développé des corrections pour assurer la positivité de toutes les fractions massiques, lesquelles sont très efficaces en pratique. Nous préférons utiliser la décomposition de Sanders-Prendergast [SP74] moins satisfaisante du point de vue de ses propriétés théoriques mais fondée physiquement sur une discussion relative au nombre de Mach qui garde toujours une signification claire.

- Nous retiendrons de ce chapitre sur l'approximation du problème de Riemann que le fait de manipuler des solutions particulières des équations de la dynamique des fluides compressibles pour construire des schémas numériques donne aux méthodes ainsi construites de très bonnes propriétés de robustesse. Pour améliorer la précision, on fait appel en général à l'extension au second ordre proposée par van Leer [vL79] et exposée à la troisième partie.

Conditions aux limites fortement non linéaires

Nous étudions diverses formulations des conditions aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz d'un point de vue mathématique et numérique. Dans le cas d'une dimension d'espace, nous rappelons les résultats classiques, fondés sur une analyse du problème linéarisé et nous présentons une formulation plus récente du problème, qui autorise la prise en compte d'effets non linéaires importants au bord du domaine d'étude. Cette formulation s'insère naturellement dans une discrétisation par la méthode des volumes finis et nous présentons un cas test monodimensionnel significatif.

1) Introduction.

- Les équations d'Euler de la dynamique des gaz constituent un système hyperbolique non linéaire de lois de conservation. Nous pouvons les écrire sous cette forme dans le cas de deux dimensions spatiales par exemple :

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0$$

avec des variables conservatives W et des flux $f(W)$, $g(W)$ donnés par :

$$(1.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t$$

$$(1.3) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

Cours Cea-Edf-Inria organisé par Pierre-Louis Lions sur les “Méthodes de différences finies et équations hyperboliques” en novembre 1988 [Du88]. Traduction en “ \TeX ” juillet 2003. Edition février 2011 ; 29 pages.

$$(1.4) \quad g(W) = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t$$

où ρ (respectivement u, v, E, p) désigne la densité (respectivement les deux composantes de la vitesse, l'énergie totale spécifique et la pression). Il suffit de se donner la pression comme fonction des variables conservatives pour définir complètement le système hyperbolique (1.1) ; nous choisissons simplement une loi d'état de gaz parfait polytropique :

$$(1.5) \quad p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right).$$

- Le problème de Cauchy posé sur \mathbb{R}^2 pour le système (1.1) associé à la condition initiale

$$(1.6) \quad W(0, x, y) = W_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

n'a fait, à notre connaissance, l'objet d'aucun résultat d'existence globale en temps, même pour des données W_0 régulières. Il en est de même pour le problème de Cauchy (1.1)(1.6) posé à une seule dimension d'espace. Nous devons donc aborder le problème aux limites posé sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0 & t \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ W(0, x, y) = W_0(x, y) & t = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ \text{Condition limite } (W(t, x, y)) = 0 & t \geq 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec prudence. Pourtant, c'est bien une approximation de "la" solution du problème aux limites (1.7) que cherche l'ingénieur, dans un domaine Ω qui est souvent **non borné**.

- La difficulté mathématique de l'étude du problème (1.1)(1.6) est liée à la présence d'**ondes non linéaires** qui imposent une étude en termes de solutions faibles (voir par exemple Lax [Lax73] ou Smoller [Sm83]). De plus, l'unicité des solutions faibles est en général en défaut et une **inégalité d'entropie** doit être ajoutée afin d'exclure des solutions physiquement non admissibles telles que les chocs de détente par exemple (Germain-Bader [GB53], Oleinik [Ol57], Godunov [Go61], Lax [Lax71]). Le problème aux limites (1.7) n'est quant à lui parfaitement compris mathématiquement que dans le cas **linéaire** (Kreiss [Kr70], Higdon [Hi85] et les références citées).

- L'approche numérique pose par ailleurs un problème pratique important : les schémas aux différences les plus classiques (Lax-Wendroff [LW60], Mac Cormack [Mc69]) proposent un calcul **centré** des approximations des dérivées en espace qui permettent d'incrémenter en temps les valeurs $W_{i,j}$ grâce aux valeurs

$W_{i+1, j+1}$, $W_{i, j+1}$, $W_{i-1, j+1}$, ... situées dans un **voisinage discret** du point de grille (i, j) . Il est donc nécessaire d'introduire un "schéma à la limite" pour incrémenter les valeurs $W_{i, j}$ situées au bord du domaine de calcul (voir par exemple Richtmyer-Morton [RM67]). La situation est même paradoxale : dans certaines situations physiquement bien déterminées (entrée ou sortie subsonique par exemple), les études linéaires montrent que le problème est bien posé avec moins de conditions limites que le système (1.1) ne compte d'équations (voir par exemple Oliger-Sundstrom [OS78], Yee-Beam-Warming [YBW82] ou Gustafsson [Gu85]). Les conditions aux limites supplémentaires doivent également être telles que le schéma **global** (*i.e.* le schéma à l'intérieur et le schéma à la limite) reste stable. Le travail classique de Gustafsson, Kreiss et Sundstrom [GKS72] a permis de développer une méthode d'analyse de la stabilité des schémas aux différences finies pour des systèmes hyperboliques **linéaires**.

- Dans ces notes de cours, nous nous limiterons essentiellement à des problèmes **monodimensionnels**, ce qui correspond pour le problème aux limites (1.7) à une analyse dans la direction normale à la frontière. Dans une première partie, nous étudions le problème continu. Au cours d'une seconde partie, nous nous intéressons aux schémas numériques existants pour l'écriture de conditions aux limites linéaires ou non. Enfin nous proposons une méthode de type volumes finis qui étend très simplement l'approche originale de Godunov [Go59] (voir aussi Godunov *et al* [GZIKP79]) et permet la prise en compte de fortes non-linéarités à la frontière du domaine de calcul.

2) Etude du problème continu.

2.1) Quelques rappels élémentaires.

- Nous réécrivons le système (1.1) des équations d'Euler dans le cas d'une seule dimension d'espace. La composante v de la vitesse est identiquement nulle et l'on a simplement :

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

avec

$$(2.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho E)^t$$

$$(2.3) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu)^t.$$

La pression est calculée grâce à la loi d'état (1.5). Il est utile d'écrire (2.1) sous forme **non conservative** et nous choisissons pour cela les variables V définies par :

$$(2.4) \quad V = (\rho, u, S)^t.$$

L'entropie spécifique adimensionnalisée S est reliée aux autres variables thermodynamiques ρ, p par la relation :

$$(2.5) \quad p = S \rho^\gamma$$

(voir les textes classiques tels que Courant-Friedrichs [CF48] ou Landau-Lifchitz [LL54]) et le système (2.1) s'écrit sous forme équivalente

$$(2.6) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + A(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

lorsque la solution $V(t, x)$ est régulière. Nous avons :

$$(2.7) \quad A(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

La célérité du son c , définie par

$$(2.8) \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S)} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

intervient dans le calcul des valeurs propres $\lambda_j(W)$ de la matrices $A(V)$:

$$(2.9) \quad \lambda_1(W) \equiv u - c < \lambda_2(W) \equiv u < \lambda_3(W) \equiv u + c.$$

Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres se calculent facilement :

$$(2.10) \quad r_1(V) = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2(V) = \begin{pmatrix} \partial p / \partial S \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}; \quad r_3(V) = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• **Le problème de Riemann** $R(W_g, W_d)$ associé au système (2.1) est un problème de Cauchy particulier ; la condition initiale est composée de deux états constants :

$$(2.11) \quad W_0(x) = \begin{cases} W_g & x < 0 \\ W_d & x > 0. \end{cases}$$

La solution entropique de ce problème est constituée d'ondes de choc, d'ondes de détente et d'une discontinuité de contact, séparés par au plus deux états constants (voir par exemple Courant-Friedrichs [CF48], Landau-Lifchitz [LL54], Godunov *et al* [GZIKP79]). Rappelons que le long d'une détente, les invariants de Riemann associés sont constants, *i.e.*

$$(2.12) \quad w_1^1 = S; \quad w_2^1 = u + \frac{2}{\gamma-1} c \quad \text{1-détente}$$

$$(2.13) \quad w_1^2 = u; \quad w_2^2 = p \quad \text{2 -discontinuité de contact}$$

$$(2.14) \quad w_1^3 = S ; \quad w_2^3 = u - \frac{2}{\gamma-1} c \quad 3\text{-détente.}$$

Rappelons également que le long d'une telle détente, $W = W(x/t)$ est une solution autosemblable qui satisfait à l'équation différentielle :

$$(2.15) \quad \frac{d}{d\left(\frac{x}{t}\right)} \left(W\left(\frac{x}{t}\right) \right) = r_j \left(W\left(\frac{x}{t}\right) \right) \quad j = 1 \text{ ou } 3.$$

A travers une onde de choc ou une discontinuité de contact de célérité σ , on a les relations de Rankine-Hugoniot :

$$(2.16) \quad [f(W)] = \sigma [W].$$

Rappelons que le champ numéro 2 (linéairement dégénéré) peut être vu à la fois comme un choc et une détente. La solution du problème de Riemann consiste à construire trois j -courbes $U_j(W)$ dans l'espace des phases (ou des états) au voisinage de chaque état W :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} W \in U_j(W) \\ \forall W' \in U_j(W), \text{ la solution de } R(W, W') \text{ ou de } R(W', W) \\ \text{est une onde simple décrite plus haut.} \end{array} \right.$$

Les états intermédiaires W_1 et W_2 sont alors définis de sorte que

$$(2.18) \quad W_1 \in U_1(W_g) ; \quad W_2 \in U_2(W_1) ; \quad W_d \in U_3(W_2).$$

Pour plus de détails concernant les courbes $U_j(\bullet)$, nous renvoyons à Lax [Lax73] ou Smoller [Sm83].

2.2) Système des équations d'Euler linéarisées.

• La plupart des résultats existants concernent les équations hyperboliques linéaires. Nous linéarisons donc les équations d'Euler autour d'un **état constant** \bar{W} en posant :

$$(2.19) \quad W = \bar{W} + W'$$

et en négligeant les termes du second ordre en W' dans le système obtenu. Les résultats les plus simples résultent de la forme (2.6) des équations et l'on obtient :

$$(2.20) \quad \frac{\partial V'}{\partial t} + A(\bar{V}) \frac{\partial V'}{\partial x} = B(\bar{V}, V').$$

On peut alors poursuivre l'étude de ce système en diagonalisant la matrice $A(\bar{V})$. Nous notons φ_j les coordonnées de la perturbation V' dans la base (fixe) des vecteurs propres $r_j(\bar{V})$:

$$(2.21) \quad V' = \sum_{j=1}^3 \varphi_j r_j(\bar{V})$$

et l'on a :

$$(2.22) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2\bar{\rho}\bar{c}^2} (p' - \bar{\rho}\bar{c}u') \\ \varphi_2 = -\frac{1}{\bar{c}^2} S' \\ \varphi_3 = \frac{1}{2\bar{\rho}\bar{c}^2} (p' + \bar{\rho}\bar{c}u'). \end{cases}$$

- La différence de pression p' est donnée selon la relation linéarisée :

$$(2.23) \quad p' \equiv p - \bar{p} = \frac{\partial p}{\partial S}(\bar{W}) S' + \bar{c}^2 \rho'.$$

Le changement de variables $V' \mapsto \varphi$ permet de découpler le membre de gauche de la relation (2.20) sous la forme de trois équations d'advection :

$$(2.24) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda(\bar{W}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = C(\bar{W}, \varphi)$$

où $\Lambda(\bar{W}) = \text{diag}(\bar{u} - \bar{c}, \bar{u}, \bar{u} + \bar{c})$. Le couplage entre les composantes de φ est uniquement réalisé par le second membre $C(\bar{W}, \varphi)$, qui est un opérateur non différentiel. Le système (2.24) est appelé dans la suite “système des équations d'Euler sous forme caractéristique” et les variables φ définies en (2.22) sont les “variables caractéristiques”. L'intérêt essentiel de cette démarche est qu'on a ramené, dans le cas linéarisé, le système des équations d'Euler à une forme classique.

2.3) Problème aux limites pour un système hyperbolique linéaire.

- Dans un article devenu classique, Kreiss [Kr70] introduit une notion de “problème bien posé” pour l'étude du problème aux limites associé au système (2.24) dans le “quart d'espace” $t \geq 0, x \geq 0$. Nous notons Λ^I (respectivement Λ^{II}) la matrice diagonale obtenue à partir de $\Lambda(\bar{W})$ en ne conservant que les valeurs propres positives (respectivement négatives), donc nous supposons ici $\bar{u} \neq 0$. Nous décomposons également les variables caractéristiques φ sous la forme

$$(2.25) \quad \varphi = (\varphi^I, \varphi^{II})$$

de façon à utiliser les notations de Kreiss. La condition limite en $x = 0$ est écrite sous la forme

$$(2.26) \quad \varphi^I = \Sigma \varphi^{II} + g \quad t \geq 0, \quad x \geq 0$$

et la condition initiale est simplement

$$(2.27) \quad \varphi(0, x) = \varphi_0(x) \quad t = 0, \quad x \geq 0.$$

Le système (2.24) associé à la condition (2.26) et à la condition initiale (2.27) (l'IVBP (2.24)(2.26)(2.27) de façon plus concise) est alors **bien posé** dans L^2 , au sens de Kreiss.

- La condition limite (2.26) s'interprète en termes de **directions caractéristiques** : le champ φ le long des caractéristiques entrantes est une **fonction affine** des composantes le long des caractéristiques sortant du domaine d'étude. Nous insistons sur le fait que le résultat précédent peut s'étendre dans diverses directions. En particulier le cas multidimensionnel (beaucoup plus complexe) peut être abordé à l'aide des mêmes concepts : la direction x doit alors être remplacée par la normale au domaine Ω (voir par exemple Higdon [Hi86]). Dans le cas où la vitesse de référence \bar{u} est nulle (frontière caractéristique) les résultats de Kreiss ont été étendus par Majda-Osher [MO75].

- Pour la mise en œuvre pratique de la condition limite (2.26), on distingue habituellement quatre cas selon que la vitesse \bar{u} est positive (entrée) ou négative (sortie), de module supérieur à la célérité du son (supersonique) ou inférieur (subsonique).

(i) Entrée supersonique ($\bar{u} > \bar{c}$).

La composante "sortante" de φ , à savoir φ^{II} , est nulle et la relation (2.26) revient à se donner toutes les composantes de φ .

(ii) Entrée subsonique ($0 < \bar{u} < \bar{c}$).

On dispose de deux caractéristiques entrantes φ^I et d'une caractéristique sortante φ^{II} . Le problème linéarisé est donc bien posé lorsqu'on se donne l'un des couples suivants (*c.f.* Olinger-Sundstrom [OS78] ou Yee-Beam-Warming [YBW82]) : (densité, pression), (vitesse, pression) ou (enthalpie, entropie).

(iii) Sortie subsonique ($-\bar{c} < \bar{u} < 0$).

Une seule caractéristique entre dans le domaine de calcul et deux sont sortantes. Il est classique de se donner la pression ou la vitesse de sortie. Remarquons que le choix d'une pression imposée $p = \bar{p}$ s'écrit après linéarisation autour de $\bar{V} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p})^t$:

$$(2.28) \quad p' = 0$$

ce qui revient, dans la relation (2.26), à prendre

$$(2.29) \quad \Sigma = (-1, 0), \quad g = 0.$$

(iv) Sortie supersonique ($\bar{u} < -\bar{c}$).

Toutes les caractéristiques sont sortantes ($\varphi^I = 0$), donc aucune information n'est contenue dans la relation (2.26) ; aucune "condition analytique" n'est nécessaire dans ce cas.

- Aux quatre cas précédents, il convient de rajouter le cas singulier où $\bar{u} = 0$ qui correspond physiquement à une paroi solide. On montre (Oliger-Sundstrom [OS78] par exemple) que le problème aux limites (2.24)(2.27)(2.30) est bien posé dans L^2 avec la condition naturelle

$$(2.30) \quad u' = 0$$

qui revient à imposer l'imperméabilité de la paroi pour les équations linéarisées. Remarquons que (2.30) peut également s'écrire sous la forme (2.26) avec le choix

$$(2.31) \quad \Sigma = (1, 0), \quad g = 0.$$

2.4) Problème aux limites dans le cas non linéaire.

- Les équations d'Euler sont abordées théoriquement dans le cas monodimensionnel à l'aide de deux approches mathématiques : la méthode de Glimm (Glimm [Gl65]) et la compacité par compensation (DiPerna [DP83]). La compacité par compensation permet à notre connaissance de n'aborder que des systèmes hyperboliques de deux équations seulement et aucune étude d'un problème aux limites fondée sur cette technique n'a encore été proposée. La méthode de Glimm permet de prouver l'existence de solutions entropiques pour le problème de Cauchy (1.1)(1.6) posé sur \mathbb{R} (*i.e.* $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) pour un système hyperbolique quelconque lorsque la condition initiale est proche d'un état \bar{W} fixé. Il est donc naturel de faire la même hypothèse lorsqu'on s'intéresse au problème aux limites. L'analyse du nombre de conditions scalaires à imposer, développée au paragraphe précédent, a permis de formuler de façon raisonnable les conditions aux limites. Cette approche a été suivie par Nishida-Smoller [NS77] et Liu [Li77] lors de leur étude du p -système de la dynamique des gaz isentropiques. Ces auteurs montrent que, associée à une condition limite sur la pression ou la vitesse, la méthode de Glimm converge lorsque le pas du maillage tend vers zéro. Le choix d'une condition limite, écrite sous forme **forte**, résulte de l'analyse du système linéarisé. On peut donc la qualifier de "faiblement non linéaire".

- Le cas d'une inconnue w **scalaire** est très intéressant puisqu'on dispose d'un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy (posé dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2) (Kružkov [Kr70]). Le problème aux limites correspondant a été abordé par Bardos-Leroux-Nédélec [BLN79]. Cette étude a été généralisée aux systèmes, mais en se restreignant au cas monodimensionnel dans notre travail avec Philippe Le Floch [DLf88]. De façon précise, nous montrons que sous des hypothèses raisonnables de convergence, la limite w de l'approximation visqueuse w^ϵ solution du problème parabolique suivant :

$$(2.32) \quad \begin{cases} \frac{\partial w^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w^\epsilon) = \epsilon \frac{\partial^2 w^\epsilon}{\partial x^2} & x > 0, \quad t > 0 \\ w^\epsilon(0, x) = v_0(x) & x > 0 \\ w^\epsilon(t, 0) = u_0(t) & t > 0 \end{cases}$$

vérifie au bord du domaine une **inégalité d'entropie**, pour tout couple (η, ξ) d'entropie-flux au sens de Lax [Lax71] :

$$(2.33) \quad \xi(w(t, 0^+)) - \xi(w_0(t)) - d\eta(w_0(t)) \bullet (f(w(t, 0^+)) - f(w_0(t))) \leq 0$$

avec $w(t, 0^+) = \lim_{x \rightarrow 0} w(t, x)$.

- Cette inégalité généralise au cas des systèmes hyperboliques l'approche proposée initialement par Bardos-Leroux-Nédélec [BLN79] pour les lois de conservation scalaires et dans le cas où η est une entropie de Kružkov : $\eta(w) = |w - k|$. Elle a également été obtenue indépendamment dans le cas général par Audounet [Au84] et Mazet *et al* [MBGB87] à partir d'une formulation variationnelle entropique des équations d'Euler. Dans le cas d'une équation scalaire avec poids, nous renvoyons à Le Floch et Nédélec [LN88]. Nous proposons ici, comme dans [DLf88] de **définir** la condition limite par la relation

$$(2.34) \quad w(t, 0^+) \in \mathcal{E}(w_0(t)), \quad t > 0$$

où l'ensemble limite $\mathcal{E}(w_0)$ associé à la "condition limite" W_0 est défini par :

$$(2.35) \quad \mathcal{E}(w_0) = \left\{ w / \xi(w) - \xi(w_0) - d\eta(w_0) \bullet (f(w) - f(w_0)) \leq 0 \right\};$$

$\forall (\eta, \xi) \text{ couple entropie-flux au sens de Lax}$

cette notion de condition à la limite constitue une extension de la condition de Dirichlet habituelle.

- Pour un système hyperbolique linéaire, le choix d'une entropie particulière permet de montrer que l'inégalité d'entropie à la limite (2.33) est équivalente à la condition classique (2.26) avec le choix $\Sigma = 0$ (pas de réflexion d'onde). Nous le détaillons pour l'équation d'**advection**

$$(2.36) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad w(t, x) \in \mathbb{R}$$

qui admet le couple entropie-flux $(\eta, \xi) = (w^2, a w^2)$. L'inégalité (2.33) s'écrit alors dans ce cas particulier

$$(2.37) \quad a (w - w_0)^2 \leq 0$$

et nous pouvons en déduire facilement la discussion classique sur le nombre de conditions aux limites du paragraphe 2.

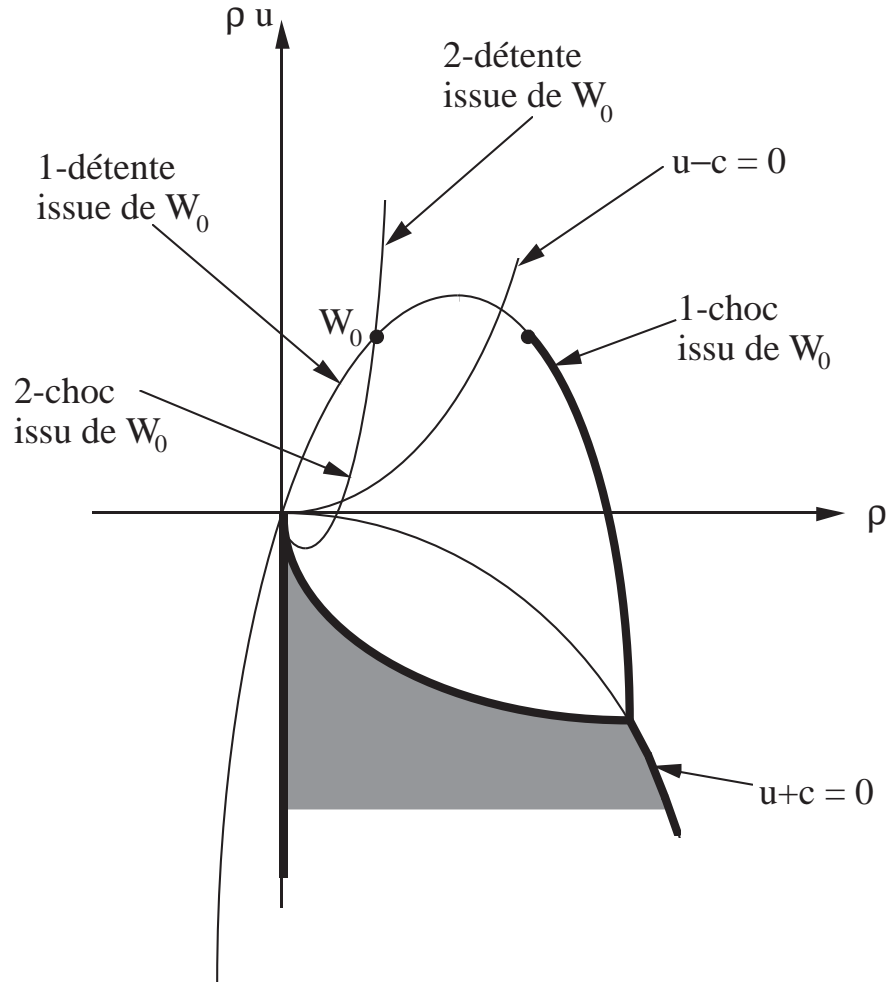


Figure 1 Ensemble limite $\mathcal{V}(W_0)$ [représenté en trait fort et à l'aide des zones grisées] pour les équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz dans l'approximation isentropique. Cas d'une entrée supersonique.

- Le cas de l'équation de Burgers ($f(w) = w^2/2$, $w \in \mathbb{R}$) permet de calculer complètement l'ensemble $\mathcal{E}(w_0)$ (voir aussi Le Floch [Lf88]) et l'on a :

$$(2.38) \quad \mathcal{E}(w_0) = \begin{cases}] -\infty, -w_0] \cup \{w_0\} & w_0 \geq 0 \\] -\infty, 0] & w_0 \leq 0. \end{cases}$$

Nous lisons la relation (2.38) de la façon suivante : lorsque w_0 est strictement positif (entrée “supersonique” en mécanique de Burgers) et l'état limite w “proche” de celui-ci, alors w est égal à w_0 et l'étude linéarisée du problème à la limite (qui revient dans ce cas à étudier l'équation d'advection) fournit la bonne condition. Lorsque w est “assez loin” (*i.e.* $|w - w_0| > 2w_0$) on peut

accepter à la limite des états “sortants” et la condition d’entropie (2.34)(2.35) s’avère “fortement non linéaire”.

- Dans le cas d’un système général de lois de conservation, l’explicitation de l’ensemble limite échoue car il est très difficile de manipuler pratiquement toutes les entropies η . Notons toutefois que pour le p -système (défini par exemple dans Lax [Lax73]), Benabdallah-Serre [BS87] ont obtenu un régionnement non trivial de l’ensemble $\mathcal{E}(w_0)$.

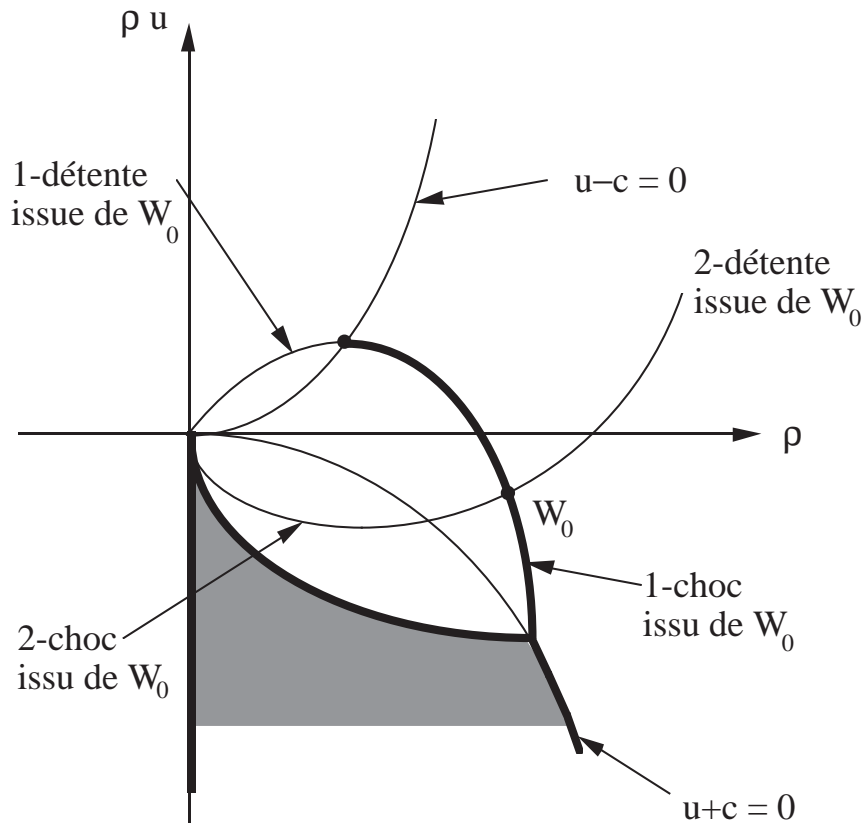


Figure 2 Ensemble limite $\mathcal{V}(W_0)$ [représenté en trait fort et à l’aide des zones grisées] pour les équations d’Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz dans l’approximation isentropique. Cas d’une sortie subsonique ; le cas d’une entrée subsonique est analogue.

- Nous avons par ailleurs remarqué que dans les cas particuliers d’une équation **scalaire** (non nécessairement convexe) et d’un **système hyperbolique**

linéaire, l'ensemble limite $\mathcal{E}(w_0)$ est caractérisé simplement à l'aide du **problème de Riemann** (*c.f.* partie 1 et [DLf87]) :

$$(2.39) \quad \mathcal{E}(w_0) = \mathcal{V}(w_0) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs en } \frac{x}{t} = 0^+ \text{ de la solution entropique} \\ \text{du problème de Riemann } R(w_0, w), w \text{ variant} \end{array} \right\}.$$

Une seconde formulation de la condition limite s'écrit alors simplement [DLf87] :

$$(2.40) \quad w(t, 0^+) \in \mathcal{V}(w_0(t)) \quad t > 0.$$

Elle a l'avantage d'introduire un ensemble limite $\mathcal{V}(w_0)$ **calculable explicitement**. Remarquons que Benabdallah-Serre [BS87] ont montré que l'inclusion

$$(2.41) \quad \mathcal{V}(w_0) \subset \mathcal{E}(w_0)$$

est toujours satisfaite, mais que l'égalité (2.39) peut être en défaut. Par ailleurs, Dubroca-Gallice [DG88] ont montré que la méthode de Glimm converge lorsqu'on l'associe à la première condition limite (2.34) et que pour le p -système, la condition plus restrictive (2.40) conduit également à un problème bien posé.

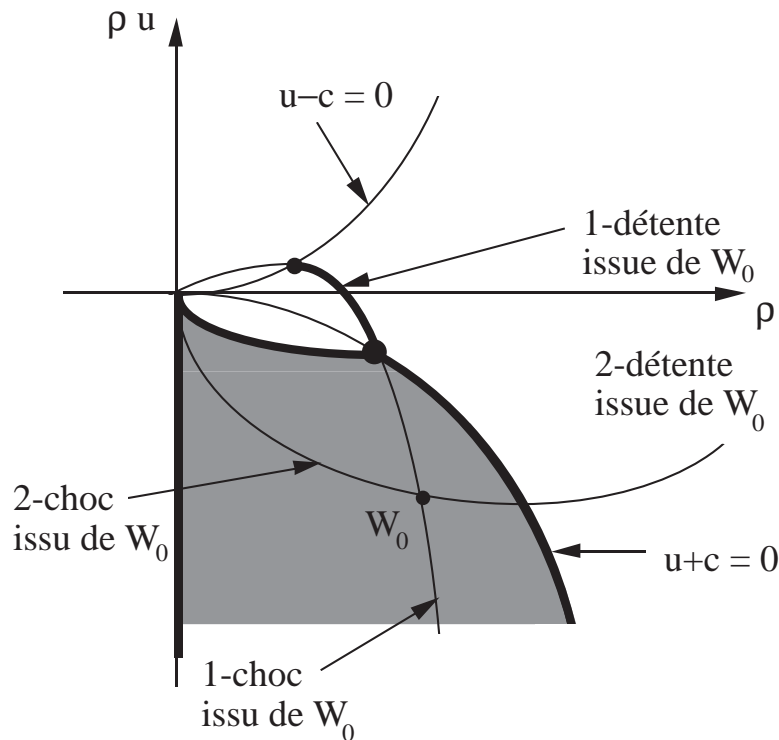


Figure 3 Ensemble limite $\mathcal{V}(W_0)$ [représenté en trait fort et à l'aide des zones grisées] pour les équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz dans l'approximation isentropique. Cas d'une sortie supersonique de nombre de Mach inférieur à $\frac{2}{\gamma-1}$.

- Avec Philippe Le Floch [DLf87], nous avons calculé et représenté graphiquement l'ensemble $\mathcal{V}(w_0)$ dans le cas des équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz **isentropiques** ainsi qu'illustré aux figures 1 à 3. Même lorsque l'état w_0 correspond à une entrée supersonique (figure 1), l'ensemble admissible $\mathcal{V}(w_0)$ n'est réduit à $\{w_0\}$ que dans un **voisinage** de w_0 , ce qui correspond à l'approche linéarisée. L'état w_0 peut être relié à l'état $w(t, 0^+)$ par un 1-choc, ou bien $w(t, 0^+)$ peut correspondre à une sortie supersonique (!).

- L'utilisation du problème de Riemann pour formuler la condition limite conduit à un problème bien posé lorsque les données w_0 et v_0 sont des états constants :

$$(2.42) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0 & x > 0, \quad t > 0 \\ w(0, x) = v_0 & x > 0 \\ w(t, 0^+) \in \mathcal{V}(w_0) & t > 0. \end{cases}$$

Nous pouvons par ailleurs envisager de fortes non linéarités et pour les équations d'Euler, seuls les problèmes d'apparition du vide limitent la construction de la solution du problème de riemann $R(w_g, w_d)$. De plus, le calcul des points frontières utilise alors les mêmes outils que le calcul des points intérieurs, comme nous l'étudions dans la seconde partie.

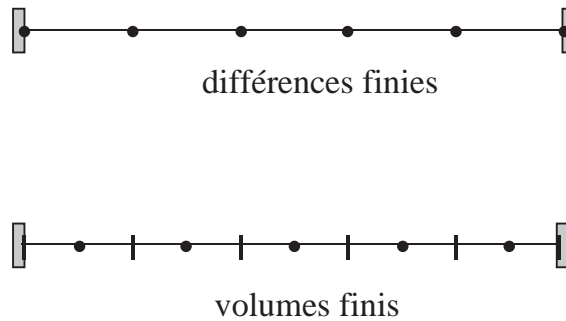


Figure 4 Points de calcul pour la résolution des équations d'Euler par la méthode des différences finies (en haut) : $x_j = j h$ et celle des volumes finis (en bas) : $x_j = (j + 1/2) h$.

3) Discrétisation des conditions aux limites.

3.1) Différences finies ou volumes finis ?

- Nous notons Δx (respectivement Δt) le pas d'espace (respectivement de temps), supposé uniforme, en vue de l'écriture sous forme discrète de l'équation

(2.1). Les schémas conservatifs sont fondés sur une écriture des équations sous forme intégrale :

$$(3.1) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(W_j^{n+1} - W_j^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \right) = 0$$

et pour les points intérieurs au domaine de calcul, W_j^n représente une approximation de la valeur ponctuelle de W au temps $t^n = n \Delta t$ et au point x_j aussi bien que la valeur moyenne du champ $W(t^n, \bullet)$ sur un intervalle de mesure $h = \Delta x$ autour du point x_j . On peut raisonnablement dire que les deux méthodes coïncident dans ce cas.

- Lorsqu'on se place sur un intervalle borné (figure 4), les deux méthodes conduisent à des problèmes spécifiques. Avec la méthode des différences finies, on construit en général un "schéma frontière" **différent** du schéma (3.1), alors que la méthode des volumes finis traite les cellules du bord comme les autres et ne demande qu'une évaluation du **flux frontière**. Nous détaillons ces deux approches dans les paragraphes qui suivent, en étudiant successivement le cas des équations d'Euler **linéarisées**, le cas d'une paroi et enfin celui d'une frontière fluide. La précision des méthodes proposées est variable selon les problèmes et les méthodes utilisées. La méthode des différences finies permet l'écriture de schémas au besoin très précis alors que celle des volumes finis dégénère au premier ordre dans la plupart des exemples que nous proposons.

3.2) Equations d'Euler linéarisées.

- Nous nous limitons à la frontière de gauche (située en $x = 0$) d'un domaine de calcul $\{x > 0\}$. Une condition du type (2.26), *i.e.*

$$(3.2) \quad \varphi^I = \Sigma \varphi^{II} + g \quad t \geq 0, \quad x = 0$$

entre les variables caractéristiques entrantes φ^I et sortantes φ^{II} assure p relations à la frontière (où p est le nombre de valeurs propres positives de (2.24), *i.e.* le nombre de composantes de φ^I).

- La méthode des différences finies demande donc $(n-p)$ relations supplémentaires qui constituent les "conditions aux limites numériques" à ajouter aux relations (3.2) pour calculer l'état au bord. Diverses méthodes classiques (extrapolation en espace, en espace-temps, schéma décentré au bord, etc...) sont d'utilisation courante (voir par exemple Yee, Beam et Warming [YBW82] ou Cambier, Escande et Veillot [CEV86]) et conduisent à des schémas bien posés au sens de la stabilité GKS (voir par exemple Goldberg-Tadmor [GT87] et les références incluses). Nous détaillons ici le procédé qui nous semble le plus satisfaisant, celui des **relations de compatibilité** (Viviand-Veillot [VV78], voir aussi Bramley-Sloan [BS77] et Kentzer [Ke71]).

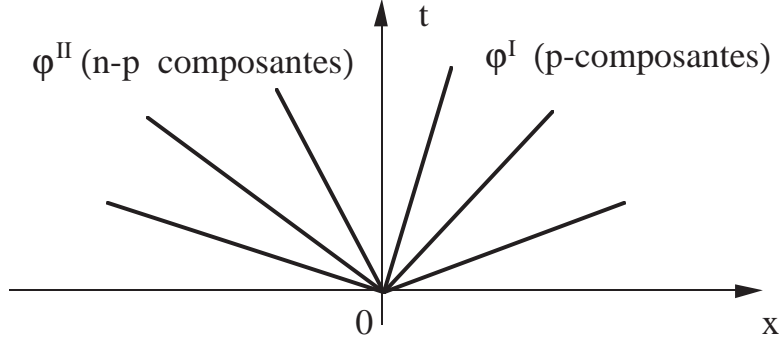


Figure 5 Directions caractéristiques au bord du domaine de calcul.

- Les relations de compatibilité reviennent, dans le cas linéaire, à discrétiser les équations du système (2.24) qui correspondent aux **ondes sortantes** (composantes φ^{II}) ; on obtient ainsi $n - p$ équations d'advection :

$$(3.3) \quad \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial t} + \Lambda^{II}(\overline{W}) \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial x} = P^{II} C(\overline{W}, \varphi)$$

où P^{II} est le projecteur associé aux variables φ^{II} dans la décomposition (2.25) (figure 5). Le schéma final se déduit de (3.2)(3.3) : une discrétisation **décentrée** de la dérivée spatiale $\frac{\partial}{\partial x}$ présente au sein de la relation (3.3) permet de calculer φ^{II} en $x = 0$ au temps t^{n+1} à partir de φ au temps t^n et la relation (3.2) achève la construction. L'évaluation des dérivées spatiales à l'instant t^{n+1} conduit à divers schémas implicites à la frontière (voir par exemple Yee, Beam et Warming [YBW82]).

- La méthode des volumes finis s'applique sans modification essentielle au bord de Ω ; il suffit de prendre $j = 1$ dans la relation (3.1) qui définit le schéma. Le flux aux interfaces est évalué de façon **décentrée** par une méthode d'ordre un de Godunov [Go59] ou d'ordre deux de van Leer [vL79]. A la paroi, le flux $f_{j+1/2}$ est calculé de façon à prendre en compte la relation (3.2) :

$$(3.4) \quad f_{1/2} = \Lambda^+(\overline{W}) (\sum \varphi_1^{II} + g) + \Lambda^-(\overline{W}) \varphi_1^{II}$$

où φ_1^{II} désigne la composante numéro II de l'état W_1 ou bien une valeur extrapolée en $x = 0^+$ du champ à partir des valeurs dans les premières mailles (pour les calculs d'ordre deux). Remarquons que l'écriture (3.4) de la condition limite (3.2) **affaiblit** cette dernière puisque seul le flux numérique utilise la condition à la limite. Notons également que l'état paroi qui permet d'évaluer le flux grâce à la relation (3.4) résulte d'une extrapolation en espace des variables sortantes φ^{II} et d'un calcul des variables entrantes φ^I à partir de la relation (3.2), avant l'incrément en temps (3.1), alors que l'approche par la méthode

des différences finies jointe aux relations de compatibilité revient à coupler les deux étapes pour les composantes sortantes, avant de recalculer φ^{II} grâce à la condition limite (3.2). L'avantage de l'approche "volumes finis" pour les calculs frontières tient au fait qu'aucun schéma numérique supplémentaire n'est nécessaire (pour les calculs au premier ordre en espace au moins !) pour prendre en compte la frontière, comme l'avaient remarqué Godunov *et al* [GZIKP79] et Rizzi [Ri81] par exemple. Signalons aussi que les études théoriques de stabilité à la frontière sont beaucoup moins développées avec cette approche qu'avec l'approche "différences finies" classique.

3.3) Frontière fluide.

• Comme on l'a vu dans la première partie, on distingue classiquement quatre cas selon le type d'écoulement à la frontière, c'est à dire le nombre p de composantes de φ^I . L'approche aux différences finies remplace la relation (3.2) par p relations **non linéaires** adaptées au problème, *i.e.* état imposé, enthalpie totale et entropie imposées, pression imposée ou pas de relation pour les quatre cas classiques :

$$(3.5) \quad B(W) = 0 \quad (p \text{ relations non linéaires}).$$

Les $(n-p)$ relations supplémentaires sont le plus souvent issues des **relations de compatibilité** (Viviand-Veuillot [VV78]) : le système (2.1) admet des vecteurs propres $r_j(W)$ (2.10) et des formes linéaires propres $\ell_j(W)$ (ou "vecteurs propres à gauche" ; $\ell_j(W)^\dagger$ est en fait vecteur propre de $A(W)^\dagger$), définies par les relations

$$(3.6) \quad \ell_j(W) \bullet A(W) = \lambda_j(W) \ell_j(W).$$

Le système (2.1) est réécrit sous la forme non conservative équivalente

$$(3.7) \quad \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_j(W) \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

qui constitue l'ensemble des relations de compatibilité sous forme non linéaire. On ne conserve pour définir le schéma limite que les indices j qui correspondent à des directions caractéristiques sortantes ($j = 1, \dots, n-p$) et l'on a en définitive :

$$(3.8) \quad \begin{cases} B_j(W) = 0 & j = 1, \dots, p \\ \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_j(W) \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0 & j = 1, \dots, n-p. \end{cases}$$

Lorsqu'on utilise la valeur de grille W_0^n (sur la frontière du domaine de calcul) dans l'expression de la forme linéaire ℓ_j [on approche $\ell_j(W)$ par $\ell_j(W_0^n)$], les relations (3.7) sont identiques aux relations (3.3) linéarisées et fournissent les schémas explicites les plus utilisés (Viviand-Veuillot [VV78], Cambier-Escande-Veuillot [CEV86] et les références incluses). Lorsqu'on linéarise le terme en $\frac{\partial}{\partial t}$

de (3.8) autour de la valeur de grille W_0^n , (Chakravarthy [Ch83]), les relations obtenues définissent un schéma **implicite** pour l'incrément $(W_0^{n+1} - W_0^n)$ du point frontière.

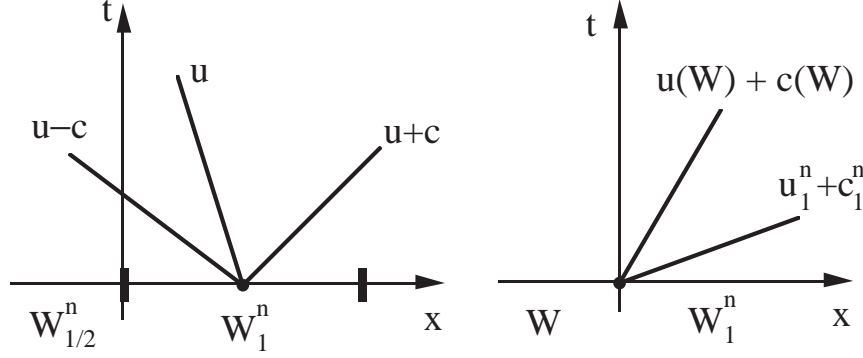


Figure 6 Sortie subsonique faiblement non linéaire (d'après Osher-Chakravarthy [OC83]).

- Pour les méthodes de volumes finis, Osher-Chakravarthy [OS83] ont proposé un procédé que nous généraliserons dans la troisième partie. L'idée consiste à calculer l'état frontière $W_{1/2}$ par une étude des ondes non linéaires d'un problème de Riemann et non plus par les relations de compatibilité (3.7). L'état frontière $W_{1/2}$ vérifie toujours la condition limite (3.5) et est relié à l'état W_1^n dans la première maille par une famille de p ondes simples (*c.f.* (2.17)(2.18)) et la figure 6) ; il appartient donc à une variété de codimension p (qui passe par l'état $W_{1/2}$) et satisfait aux p équations (3.5), ce qui pose *a priori* correctement le problème. Nous détaillons le cas d'une sortie subsonique où la pression de sortie est supposée fixée (voir également Osher-Chakravarthy [OC83]) et la variété est alors de codimension $p = 1$. Nous utilisons le solveur du problème de Riemann proposé par Osher [Os81], qui n'utilise que des ondes de détente, éventuellement multivaluées (voir van Leer [vL84], Osher [Os84] et divers détails dans [Du87]).

- On détermine d'abord l'état W de pression imposée \bar{p} tel que W est lié à l'état W_1^n par une 3-onde de détente (*c.f.* 1.14)) :

$$(3.9) \quad \begin{cases} p(W) & = \bar{p} \\ u(W) - \frac{2}{\gamma-1} c(W) & = u_1^n - \frac{2}{\gamma-1} c_1^n \\ \frac{p(W)}{\rho(W)^\gamma} & = \frac{p_1^n}{\rho_1^{n\gamma}}. \end{cases}$$

Si l'on suppose $u_1^n < 0 < u_1^n + c_1^n$, l'état W_1^n dans la première cellule satisfait aux inégalités de sortie subsonique (figure 6). Il s'agit donc d'un cas de **faible non-linéarité** et c'est l'hypothèse faite le plus souvent dans les applications (voir par exemple Hemker-Spekrijse [HS86]). Dans ce cas, l'état $W_{1/2}$ de paroi est exactement l'état intermédiaire calculé en (3.9) et l'on a :

$$(3.10) \quad f_{1/2} = f(W)$$

où le flux $f(\bullet)$ est déterminé à la relation (2.3).

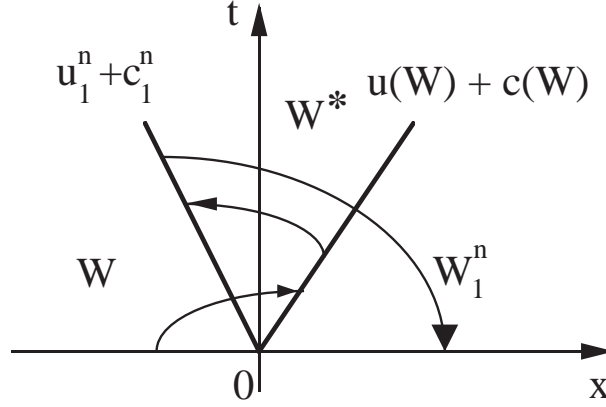


Figure 7 Sortie subsonique fortement non linéaire calculée grâce au schéma d'Osher [Os81].

• Si, au contraire, on suppose $u_1^n + c_1^n \leq 0$, l'état W_1^n n'est pas lui-même un état correspondant à une sortie subsonique. Il y a donc **forte non linéarité** à la frontière et dans ce cas, les travaux de Osher-Chakravarty [OS83] donnent déjà quelques éléments de réponse. L'état W est relié à W_1^n par une **détente éventuellement multivaluée** et il faut abandonner la notion d'état frontière si l'on utilise le flux d'Osher. Il suffit de déterminer le flux à l'entrée du domaine à l'aide de W , W_1^n et de l'état sonique W^* le long de la 3-détente, calculée grâce aux relations

$$(3.11) \quad \begin{cases} u(W^*) + c(W^*) & = 0 \\ u(W^*) - \frac{2}{\gamma-1} c(W^*) & = u_1^n - \frac{2}{\gamma-1} c_1^n \\ \frac{p(W^*)}{\rho(W^*)^\gamma} & = \frac{p_1^n}{\rho_1^{n\gamma}}. \end{cases}$$

Avec Osher-Chakravarty [OS83], nous supposons que l'état W vérifie la condition $u(W) + c(W) \geq 0$; la 3-onde de détente "contient" la frontière fluide $\frac{x}{t} = 0$ (c.f. figure 7) et le flux numérique de frontière s'exprime selon

$$(3.12) \quad f_{1/2} = f(W) - f(W^*) + f(W_1^n).$$

D'autres cas de figure doivent être envisagés pour prendre en compte les différentes configurations que peut prendre la 3-détente (éventuellement multivaluée). Nous reviendrons dans la troisième partie sur une présentation générale de ces problèmes.

- Le cas d'une frontière fluide peut donc être traité dans de nombreux cas non linéaires comme une extension du cas linéaire, où les conditions aux limites non-linéaires (3.5) sont couplées aux relations de compatibilité (3.7) associées aux caractéristiques sortantes. Cette approche est traditionnelle pour les schémas de volumes finis, le calcul de l'état du bord proposé par Osher-Chakravarthy [OS83], par résolution d'un **problème de Riemann partiel**, ne définit le schéma à la frontière que par l'introduction du flux numérique associé.

- Signalons enfin le problème des conditions aux limites **absorbantes**, où il faut exprimer que les ondes quittent le domaine de calcul sans réflexion. L'étude monodimensionnelle de Hedstrom [He79] revient à écrire que l'état à la frontière est une "combinaison" d'ondes de détentes **sortantes**, ce qui implique (Hedstrom [He79]) :

$$(3.13) \quad \ell_j \bullet \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Les relations (3.13) sont à substituer à (3.5) dans une formulation non linéaire de type (3.8) pour les schémas aux différences finies. Pour une extension bidimensionnelle, nous renvoyons à Thompson [Th87].

3.4) Parois solides.

- Ce cas de condition limite est physiquement très différent du précédent puisqu'un obstacle est présent dans l'écoulement et la condition limite physique

$$(3.14) \quad u = 0 \quad (u : \text{vitesse de l'état paroi } W)$$

exprime la non-pénétrabilité du fluide à la paroi.

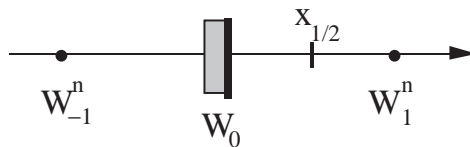


Figure 8 Point fictif dans la paroi (schémas aux différences finies).

- Le traitement de (3.13) à l'aide des schémas aux différences a été proposé très tôt. L'approche traditionnelle propose d'introduire un point fictif W_{-1} dans la paroi (figure 8) et d'écrire une condition de symétrie

$$(3.15) \quad \begin{cases} u_{-1} & = -u_1 \\ p_{-1} & = p_1 \\ \rho_{-1} & = \rho_1 \end{cases}$$

de façon à incrémenter l'état paroi W_0 à l'aide du schéma à trois points utilisé pour les points intérieurs. Mais Moretti [Mo68] a montré que les conditions (3.15) introduisent des conditions supplémentaires à la paroi qui sur-spécifient le problème continu. Aussi Roache [Ro72] recommande-t-il d'utiliser les volumes finis ("second mesh system"). L'approche courante actuellement depuis Viviani-Veuillot [VV78] utilise la relation de compatibilité correspondant à la valeur propre λ_1 (sortant du domaine de calcul) pour calculer la pression paroi (essentiellement pour les applications aérodynamiques !). Pour les détails, nous renvoyons à Cambier-Escande-Veuillot [CEV86].

- L'utilisation des volumes finis est plus facile à formuler ; compte tenu de la condition de non-pénétrabilité (3.14), le flux frontière $f_{1/2}$ prend la forme algébrique suivante (*c.f.* (2.3)) :

$$(3.16) \quad f_{1/2} = (0, p_{1/2}, 0)^t$$

et la pression paroi $p_{1/2}$ définit complètement le schéma. Dans ce cas, la méthode de l'"état miroir" (condition de symétrie) définit encore un état fictif W_0 de sorte que :

$$(3.17) \quad \begin{cases} u_0 & = -u_1 \\ p_0 & = p_1 \\ \rho_0 & = \rho_1. \end{cases}$$

Cet état ne sert qu'à l'évaluation du flux paroi (3.16), par l'intermédiaire d'une résolution exacte du problème de Riemann $R(W_0, W_1)$. En effet, l'extrapolation de la pression et de la densité proposés dans (3.17) ne sont pas introduits explicitement dans le schéma numérique, ce qui n'est pas le cas avec l'approche aux différences finies (relations (3.15)).

- Notons également que dans le cas de faibles non linéarités à la paroi (le plus courant ; la vitesse normale u_1 dans la cellule jouxtant le bord est "petite"), le calcul de la pression $p_{1/2}$ peut être effectué par extrapolation à l'aide d'un schéma aux différences précis au second ordre (voir par exemple Lerat [Le81]). Signalons enfin l'approche utilisée à l'Inria (Stoufflet [St84] par exemple). Celle-ci s'apparente à la fois aux différences finies (ou aux éléments finis !) puisque le nœud à calculer est situé sur la paroi et aux volumes finis puisque le schéma utilisé, du premier ordre en espace, revient à écrire un bilan dans la demi-maille $[x_0, x_{1/2}]$ (figure 8). Le flux paroi est évalué grâce à la relation (3.16) et la pression correspondante est simplement la pression de l'état W_0 .

4) Problème de Riemann partiel à la frontière.

- Nous présentons dans cette dernière partie une technique générale qui permet la prise en compte des fortes non linéarités aux frontières du domaine de calcul, lorsqu'on utilise la méthode des volumes finis et les schémas "de type Godunov" (au sens de Harten-Lax et van Leer [HLV83]). Dans le premier paragraphe, nous exposons l'ensemble du schéma dans le cas d'une précision du **premier ordre**, puis nous montrons (au second paragraphe) comment le cas particulier de faibles effets non linéaires conduit aux résultats classiques exposés plus haut. Nous terminons par un cas test monodimensionnel où de fortes non linéarités sont présentes.

4.1) Volumes finis prenant en compte la frontière.

- Nous rappelons que nous cherchons une approximation W_j^n de la valeur moyenne des variables conservatives (2.2) dans la maille $K_j =](j-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x[$ au temps $t^n = n\Delta t$. Le schéma de Godunov [Go59] ou les méthodes de type Godunov ([Harten-Lax-van Leer [HLV83]) consistent à intégrer la loi de conservation (2.1) dans le domaine d'espace-temps $]n\Delta t, (n+1)\Delta t[\times K_j$ et on l'écrit usuellement :

$$(4.1) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(W_j^{n+1} - W_j^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, N.$$

Pour les mailles internes $(j + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, N - \frac{1}{2})$, le flux numérique correspondant est calculé par résolution exacte (Godunov) ou approchée (Roe [Roe81], Osher [Os81], Collela-Glaz [CG85]) du problème de Riemann $R(W_j^n, W_{j+1}^n)$; nous notons Φ le flux numérique correspondant :

$$(4.2) \quad f_{j+1/2} = \Phi(W_j^n, W_{j+1}^n), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Nous supposons que le flux numérique Φ est calculé grâce aux **ondes** d'un problème de Riemann (*c.f.* (2.17)(2.18)) et non par une décomposition de flux, ce qui en pratique nous limite aux solveurs de Godunov (exact), Osher (ondes de détente seulement) ou Collela-Glaz (ondes de choc seulement) ; le solveur de Roe (discontinuités de contact seulement) ne définit pas à notre connaissance de j -ondes U_j dans l'espace des états et nous ne l'utilisons donc pas dans la suite.

- A la frontière du domaine de calcul, les conditions aux limites conduisent à se donner certains paramètres caractéristiques (voir les relations (3.5)). Nous appelons **variété limite** (et nous notons \mathcal{M}) l'ensemble des états qui satisfont les conditions "que l'on désire obtenir" à la frontière. Ainsi, pour les cas habituels de frontières fluides, nous avons par exemple :

$$(4.3) \quad \mathcal{M} = \{W_0\} \quad \text{entrée supersonique}$$

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{états } W \text{ tels que les variables non conservatives} \\ (\rho, u, p) \text{ vérifient } \frac{1}{2} u^2 + h(\rho, p) = H, \frac{p}{\rho^\gamma} = S \end{array} \right\} \\ \text{entrée subsonique d'enthalpie totale et d'entropie imposées.} \end{array} \right.$$

$$(4.5) \quad \mathcal{M} = \{W / p = \bar{p}\} \quad \text{sortie subsonique de pression imposée}$$

$$(4.6) \quad \mathcal{M} = \{W / u + c \leq 0\} \quad \text{sortie supersonique.}$$

La variété \mathcal{M} (à bord éventuellement, *c.f.* (4.6)) est de codimension p . Notons que le cas d'une paroi solide définit également une variété \mathcal{M} , qui dépend du pas de temps :

$$(4.7) \quad \mathcal{M} = \{ \text{état miroir de } W_1^n, \text{ défini par la relation (3.16)} \}.$$

- A la frontière gauche ($x = 0$), nous posons un “**problème de Riemann partiel**” $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ entre la variété frontière \mathcal{M} et l'état dans la première cellule W_1^n . Cette notion, introduite dans [Du87] et [DLf89] ne correspond pas à un problème de Cauchy comme pour le problème de Riemann usuel $R(W_g, W_d)$. Une solution de $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ n'est tout d'abord définie que dans l'espace des états et consiste en une suite d'au plus $\text{codim } \mathcal{M}$ j -ondes séparées par des états constants, en suivant la démarche classique pour résoudre la problème de Riemann (voir Lax [Lax73] par exemple.) On cherche un état $W = W_0$ appartenant à \mathcal{M} , et p états intermédiaires W, \dots, W_{p-1} de sorte que

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = W_0 \in \mathcal{M} \text{ et il existe } W_1, W_2, \dots, W_{p-1} \text{ (} p = \text{codim } \mathcal{M}) \\ \text{tels que } W_1 \in U_{3-(p-1)}(W_0), W_2 \in U_{3-(p-2)}(W_1), \dots, \\ W_p = W_1^n \in U_3(W_{p-1}). \end{array} \right.$$

Une fois l'état W déterminé grâce aux relations (4.8) (qui ne conduisent pas toujours à un état unique, voir par exemple le cas (4.4) dans [Du87]), la solution de $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ est définie dans l'espace (x, t) comme la solution du problème de Riemann **classique** $R(W, W_1^n)$. Le flux frontière $f_{1/2}$ est alors simplement le flux numérique associé au problème de Riemann $R(W, W_1^n)$:

$$(4.9) \quad f_{1/2} = \Phi(W, W_{j+1}^n), \quad W \in \mathcal{M} \text{ solution de (4.8).}$$

Comme les ondes du problème de Riemann peuvent prendre une célérité arbitraire, on n'a pas forcément $f_{1/2} = f(W)$ comme le proposent implicitement Hemker et Spekrijse [HS86] par exemple.

- Le cas d'une sortie subsonique de pression imposée a été abordé au cours de la seconde partie. Les relations (3.9) sont dans ce cas équivalentes aux conditions (4.8) et il suffit d'interpréter les ondes du problème de Riemann $R(W, W_1^n)$. Sur la figure 9 par exemple, l'état W_1^n correspond à une sortie supersonique et la 3-détente est entièrement localisée dans le quadrant $\{\frac{x}{t} \leq 0, t \geq 0\}$. Le flux paroi est seulement déterminé par l'état W_1^n : $f_{1/2} =$

$f(W_1^n)$. [On comparera avec les autres cas de figure (3.10) et (3.12) relatifs à ce même problème] .

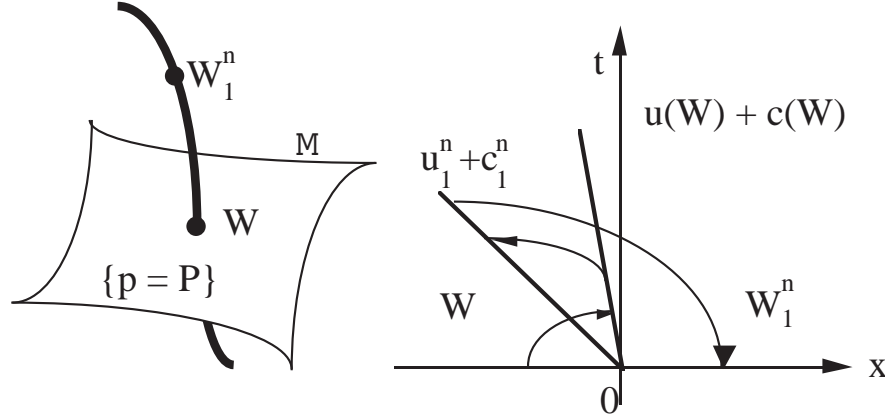


Figure 9 Sortie subsonique de pression imposée, formulée à l'aide du problème de riemann partiel $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ et utilisant le flux multivalué de Osher.

- Nous détaillons maintenant les deux cas triviaux pour l'étude linéarisée, à savoir l'entrée et la sortie supersonique. Dans le premier cas, la variété \mathcal{M} est un singleton (*c.f.* (4.3)) et le problème de Riemann partiel est en fait un problème de Riemann classique. Ainsi, le flux paroi peut être différent de $f(W_g)$, comme les figures 1 à 3 le montrent. Dans le second cas, \mathcal{M} est une variété à bord (*c.f.* (4.6)) et l'état W défini par la relation (4.8) est exactement W_1^n si ce dernier appartient à \mathcal{M} , mais est confondu avec l'état sonique W^* appartenant à la 3-détente dans le cas contraire. Nous insistons sur le fait que le flux de sortie **ne se réduit pas toujours à une extrapolation** du type

$$(4.10) \quad f_{1/2} = f(W_1^n) \quad (W_1^n \in \mathcal{M}, \text{ définie en (4.6)})$$

comme nous l'avons proposé jusqu'ici, puisqu'il faut également tenir compte de l'éventualité

$$(4.11) \quad f_{1/2} = f(W^*) \quad (W_1^n \notin \mathcal{M}, \text{ c.f. (4.6)}) .$$

- La méthode décrite dans ce paragraphe permet le calcul du flux paroi comme le flux d'un problème de Riemann partiel, posé entre la "variété limite" \mathcal{M} qui décrit les conditions physiques à imposer et l'état W_1^n dans la cellule touchant le bord. Lorsqu'on utilise une résolution **exacte** du problème de Riemann, nous généralisons la formulation de la condition limite proposée dans [DLf87] et l'état à la frontière peut être très **éloigné** à la fois de l'état W_1^n et de

la variété \mathcal{M} . Nous avons ainsi **affaibli** la notion de condition limite pour prendre en compte les fortes ondes non linéaires présentes à la frontière du domaine de calcul. Les calculs algébriques relatifs aux cas de figure (4.3) à (4.6) sont exposés dans [Du87] lorsqu'on utilise le solveur proposé par Osher pour résoudre le problème de Riemann.

4.2) Cas des faibles non linéarités.

• Nous supposons dans ce paragraphe que l'interaction au bord du domaine est faible, *i.e.*

(4.12) W_1^n appartient à un voisinage de \mathcal{M} .

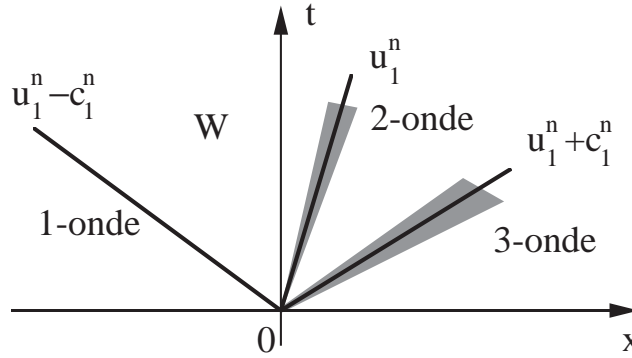


Figure 10 Entrée subsonique faiblement non linéaire.

Quitte à prendre un voisinage assez petit, il est alors clair que le problème de Riemann partiel a ses codim \mathcal{M} ondes à l'intérieur du quadrant $\{\frac{x}{t} > 0, t \geq 0\}$ (figure 10) puisque les vitesses des ondes du problème de Riemann partiel sont des grandeurs positives voisines des valeurs propres $\lambda_j(W_1^n)$. Le quadrant $\{\frac{x}{t} \leq 0, t \geq 0\}$ contient donc seulement l'état constant W déterminé aux relations (4.8). On peut alors parler d'un état frontière et l'on a clairement

$$(4.13) \quad f_{1/2} = f(W).$$

Le calcul de l'état W est effectué soit par résolution d'un problème de Riemann (voir Osher-Chakravarthy [OC83] et Hemker-Spekreijse [HS86]), soit par approximations des ondes non linéaires par des discontinuités de vitesses $\lambda_j(W_1^n)$. On retrouve alors les relations de compatibilité (relations (3.3)) qui, jointes à la condition

$$(4.14) \quad W \in \mathcal{M}$$

permet de calculer l'état frontière de façon approchée (voir Veillot et Viviand [VV78], Chakravarthy [Ch83], Cambier-Escande-Veillot [CEV86]).

4.3) Etude d'un cas test.

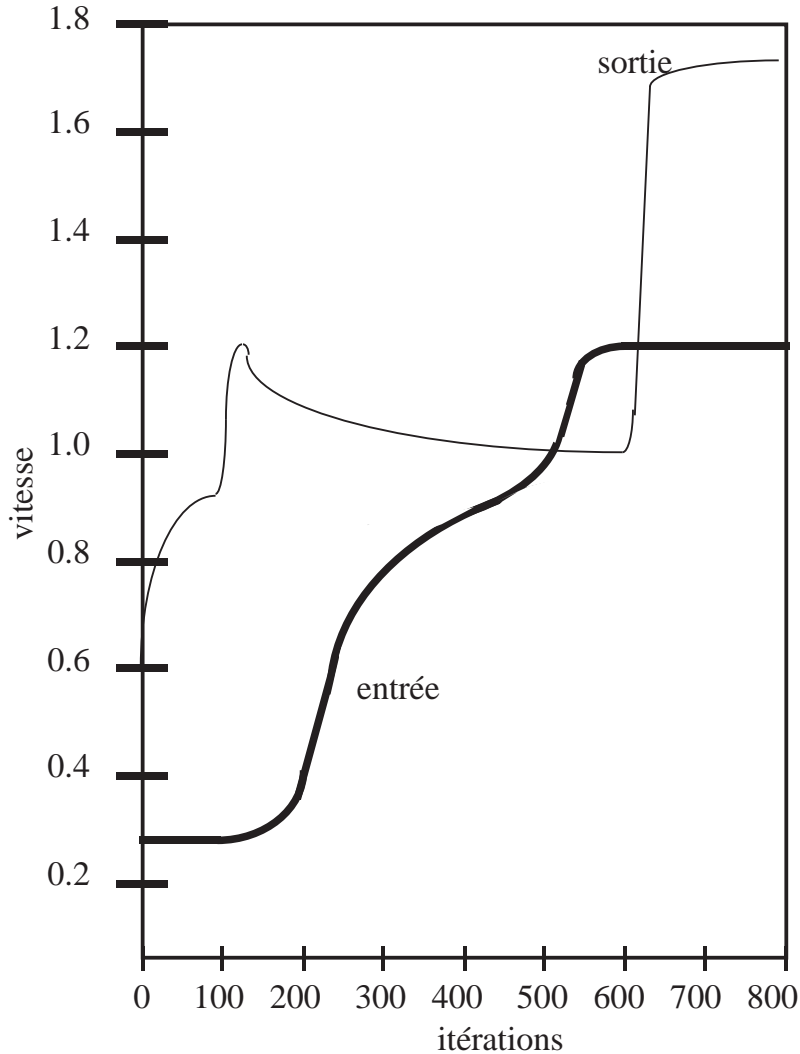


Figure 11 Evolution de la vitesse en $x = 0$ et $x = 1$ pour le maillage de 80 cellules.

- Nous avons étudié un cas test très simple, déjà abordé entre autres par Yee, Beam et Warming [YBW82] : il s'agit du calcul d'un écoulement entièrement supersonique dans une tuyère divergente. La section $A(x)$ est donnée par la relation

$$(4.15) \quad A(x) = 1.598 + 0.347 \operatorname{th}(8x - 4) \quad 0 \leq x \leq 1$$

et l'entrée supersonique est définie par l'état suivant :

$$(4.16) \quad \rho_g = 0.502, \quad u_g = 1.299, \quad p_g = 0.381.$$

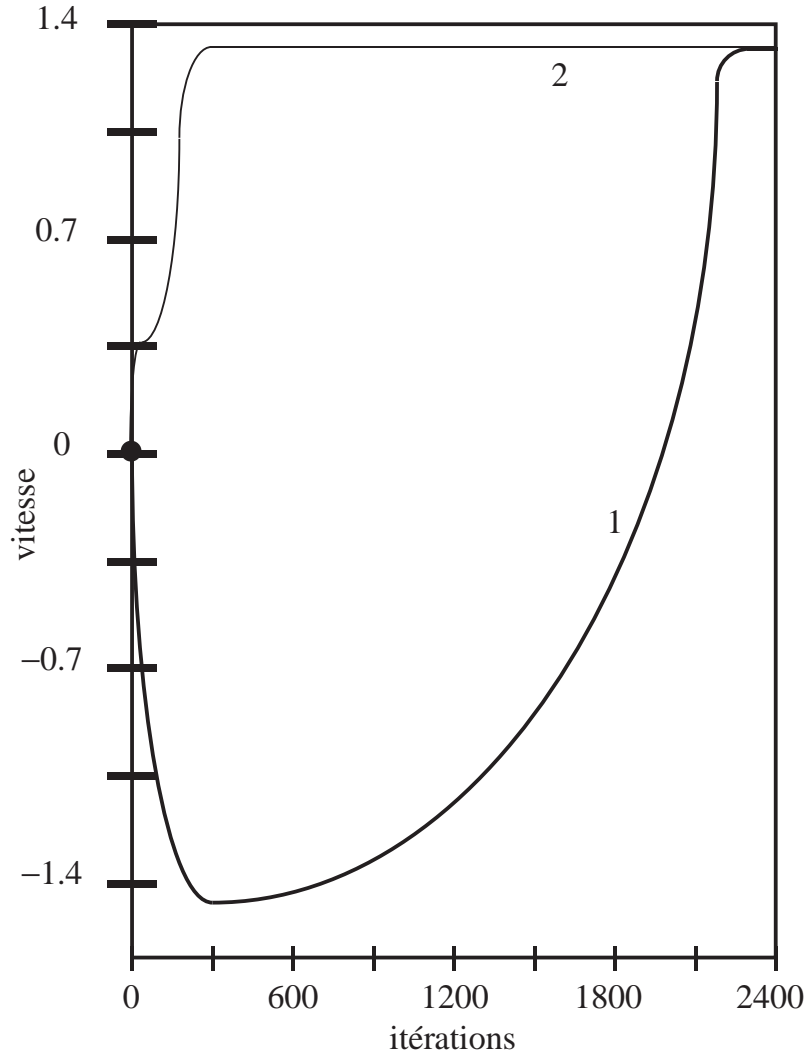


Figure 12 Tuyère divergente, 20 points de grille, sortie supersonique.
 Evolution de la vitesse en $x = 0$
 avec la condition limite traditionnelle (4.18) (courbe 1)
 et avec la condition (4.9) fondée sur le problème de Riemann (courbe 2).

L'écoulement supersonique recherché est solution stationnaire du modèle quasi-monodimensionnel des tuyères, obtenu en adjoignant aux équations d'Euler (2.1) un terme source afin de prendre en compte les variations de section dans les bilans (voir par exemple Liu [Li82]). Nous avons effectué le calcul [Du87] à l'aide d'un schéma explicite en temps (CFL=0.9), du premier ordre en espace et divers maillages de 20, 40 et 80 cellules. Le problème de Riemann aux interfaces a été traité à l'aide du flux d'Osher. Les conditions initiales correspondent à un état de vitesse nulle qui a même entropie et même enthalpie totale que l'état décrit en (4.16), *i.e.*

$$(4.17) \quad \rho_i = 1, \quad u_i = 0, \quad p_i = 1.$$

Rappelons le traitement des conditions aux limites : l'entrée est supersonique donc le flux limite est évalué à l'aide du problème de Riemann entre l'état amont (4.16) et celui présent au pas de temps étudié dans la première cellule. La sortie, supersonique également, est calculée à l'aide de l'un des flux (4.10) ou (4.11) selon que l'état de la dernière cellule est supersonique sortant ou non.

- Malgré l'inadéquation entre une condition initiale d'état subsonique (!) (4.17) et les conditions aux limites (4.16), le régime stationnaire est atteint après une évolution instationnaire importante mais régulière (figure 11). Afin de mesurer l'importance du choix de chacune des deux conditions au bord, nous avons effectué deux tests complémentaires. Dans le premier cas, toutes choses égales par ailleurs, nous changeons le traitement numérique de la condition d'entrée, en remplaçant le problème de Riemann $R(W_g, W_1^n)$ par une évaluation "classique" du flux :

$$(4.18) \quad f_{1/2} = f(W_g).$$

La convergence, qui demandait 200 pas de temps environ avec 20 points de grille, en demande trois fois plus (figure 12) et la vitesse en $x = 0$ commence par être négative (l'entrée supersonique se comporte comme une sortie pendant la plus longue partie du transitoire !) avant d'atteindre la valeur finale exacte. Dans le second cas, nous avons simplement remplacé (par rapport à l'expérience initiale de la figure 11), la condition de sortie supersonique par une extrapolation classique (4.10) à **tous** les pas de temps. Le résultat est encore plus surprenant : après une phase transitoire très brève (trois fois plus rapide que pour le test initial), on obtient une solution convergée **subsonique** (figure 13), et celle-ci est stable par raffinements successifs du maillage. La prise en compte des fortes non-linéarités de frontière est donc essentielle pour qu'une évolution instationnaire converge vers "la" solution définie par les conditions aux limites que l'on se donne, et ce avec une vitesse de convergence la plus élevée possible.

- La géométrie d'une tuyère étant assez simple, et sans faire une analyse détaillée de l'interaction des ondes instationnaires de choc et de détente avec les ondes stationnaires induites par la géométrie (pour laquelle nous renvoyons par exemple à Liu [Li82]), nous pouvons tenter d'interpréter simplement les divers phénomènes qui se produisent au cours de ces trois expériences numériques. Avec nos conditions limites initiales, nous imposons la résolution du problème de Riemann $R(W_g, W_1^n)$, lequel comporte un 1-choc de vitesse négative et un 3-choc de vitesse positive (figure 10). Par ailleurs, la condition de sortie fait entrer une 1-détente par l'aval du domaine de calcul. L'écoulement d'entrée se

stabilise vite autour d'une valeur intermédiaire relative au problème de Riemann $R(W_g, W_i)$ (figure 11) tandis que le 3-choc interagit avec la 1-détente au milieu de la tuyère. Le résultat de cette interaction conduit à une augmentation régulière de la vitesse en entrée et à un 1-choc qui sort de la tuyère après 650 pas de temps environ (figure 11, ligne fine).

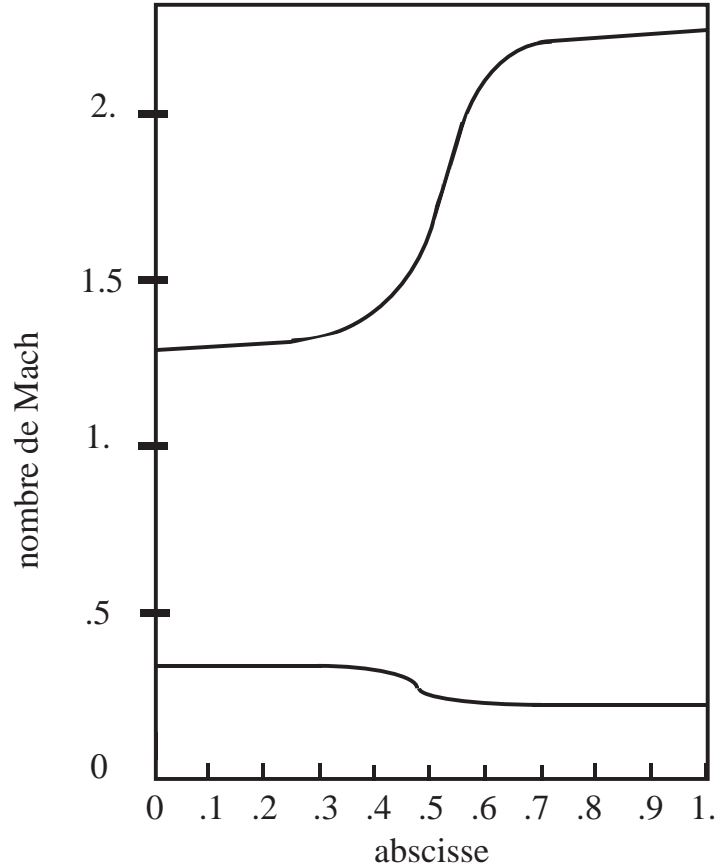


Figure 13 Tuyère divergente, 80 points de grille.

Nombre de Mach à convergence (courbe du bas)
avec une condition limite de sortie calculée grâce à l'extrapolation (4.10)
et solution exacte (courbe du haut).

- Lorsqu'on force la condition de flux (4.18), le 1-choc présent au temps $t = 0$ à l'entrée est animé d'une vitesse positive et est réfléchi brutalement par la tuyère (figure 12). La 1-détente centrée en $x = 1$ envahit alors progressivement la tuyère, mais les interactions internes sont plus fortes que dans le cas précédent et le phénomène met plus de temps à s'établir. Si l'on traite classiquement la condition de sortie, on ne crée pas de 1-détente en $x = 1$ et la tuyère réagit comme un tube à choc : la 3-détente sort du domaine étudié et la solution sta-

tionnaire est essentiellement liée à l'état intermédiaire du problème de Riemann posé à l'entrée (figure 14).

5) Conclusion.

- Nous avons passé en revue les diverses approches mathématiques et numériques pour l'étude du problème des conditions aux limites associées à la résolution des équations d'Euler de la dynamique des gaz. La prise en compte de fortes non-linéarités peut s'écrire théoriquement à l'aide d'une **inégalité d'entropie à la frontière**. Lorsqu'on interprète cette dernière grâce au **problème de Riemann**, les effets non linéaires présents à la frontière sont pris en compte naturellement avec la **méthode des volumes finis** qui **affaiblit** la condition limite ; la discussion classique sur les différents cas de figure (entrée ou sortie, sub ou super-sonique) se réinterprète à l'aide d'un **problème de Riemann partiel** entre une variété limite et un état fluide. Les premiers tests numériques montrent l'intérêt d'une telle méthode.

- Toutefois, il reste de nombreuses questions sans réponse actuellement : quelle est la stabilité non linéaire des schémas numériques ainsi définis ? Comment aborder le cas d'un domaine multidimensionnel ? Enfin, dans la plupart des applications, on étudie les fortes non-linéarités **à l'intérieur** du domaine de calcul et la frontière ne joue pas un rôle déterminant pour la prise en compte des effets non linéaires !

Discrétisation spatiale multidimensionnelle

Nous avons vu dans les documents précédents divers exemples de problèmes issus de la dynamique des fluides compressibles dans le cas d'une dimension d'espace. Dans le cas bi ou tridimensionnel, c'est à dire pour des problèmes issus de modèles physiques plus réalistes, nous devons adapter les idées précédentes. Diverses possibilités peuvent être envisagées et nous présentons ici quelques variantes de la méthode des volumes finis. Nous discutons d'abord du choix de la grille, présentons la version de base, dite au premier ordre, du schéma décentré, étudions ensuite la prise en compte de diverses conditions aux limites, présentons une adaptation multidimensionnelle de la méthode de van Leer qui permet d'étendre le schéma au second ordre de précision en espace. Enfin, nous proposons une méthode pour la discrétisation des flux visqueux.

1) Discrétisation en espace.

- La loi de conservation

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j} F^j(W) + \frac{\partial}{\partial x_j} P^j(W, \nabla W) \right] = \Omega(W)$$

Chapitre 2 du cours à l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur [CDV92], septembre 1992. Traduction en "TEX" juillet 2003. Edition février 2011 ; 21 pages.

est discrétisée par la méthode des volumes finis. Nous découpons le domaine d'étude Ω en cellules de contrôle K de sorte que deux cellules différentes ne se recouvrent pas :

$$(1.2) \quad \text{mes}(K \cap L) = 0$$

et imposons un choix de degrés de liberté lié aux valeurs moyennes des inconnues W sur les volumes de contrôle :

$$(1.3) \quad W_K = \frac{1}{|K|} \int_K W(x) dx .$$

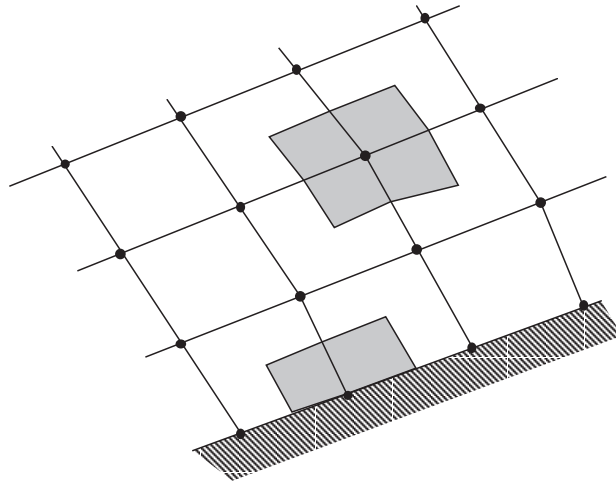


Figure 1 Maillage structuré. Volumes de contrôle (en grisé) associés aux sommets du maillage (cell vertex).

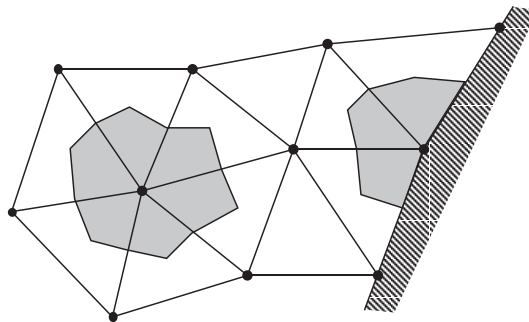


Figure 2 Maillage en triangles. Volumes de contrôle (en grisé) associés aux sommets du maillage (cell vertex).

- Le choix du maillage et des volumes de contrôle laisse une grande liberté pour l'implémentation de la méthode. Si dans un premier temps nous nous limitons à des maillages satisfaisant aux contraintes classiques des maillages aux éléments finis (voir par exemple Ciarlet [Ci78]), nous pouvons utiliser un maillage structuré régulier de type “différences finies” ou un maillage non

structuré classique en éléments finis, en triangles par exemple dans le cas de deux dimensions d'espace. Mais il faut ensuite définir les volumes de contrôle avec précision. Le premier choix est issu des habitudes de l'emploi des éléments P_1 conformes et associe un volume de contrôle à chaque sommet du maillage. On parle alors de l'approche "cell vertex", illustrée aux figures 1 et 2. Dans le cas d'un maillage par des triangles, l'approche cell vertex a été popularisée par l'Inria dont les premiers travaux remontent à Vijayasundaram [Vi82].

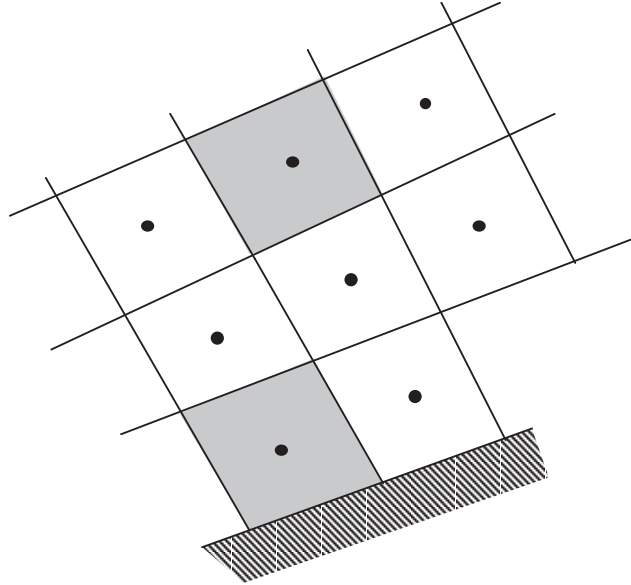


Figure 3 Maillage structuré. Volumes de contrôle (en grisé) identiques aux éléments du maillage (cell center).

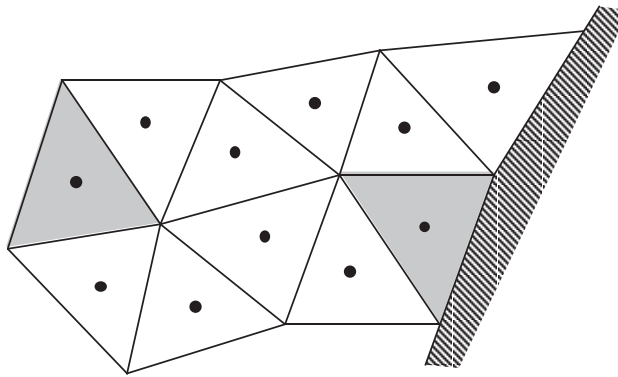


Figure 4 Maillage en triangles. Les volumes de contrôle coïncident avec les éléments du maillage (cell center).

- Mais il est également naturel de considérer que les éléments du maillage sont également les volumes de contrôle de la méthode étudiée. On parle alors de

l'approche "cell center" et l'emploi de maillages structurés ou non est possible (figures 3 et 4). Dans la cas de maillages structurés, cette approche "cell center" a été mise en œuvre à l'Onera par exemple par A. Lerat [Le81]. Pour une comparaison entre ces deux approches, on peut encore se référer à l'ouvrage classique de Roache [Ro72]. Notons enfin que les volumes de contrôle peuvent aussi être construits à partir de maillages ne satisfaisant pas les contraintes classiques des éléments finis, comme illustré à la figure 5.

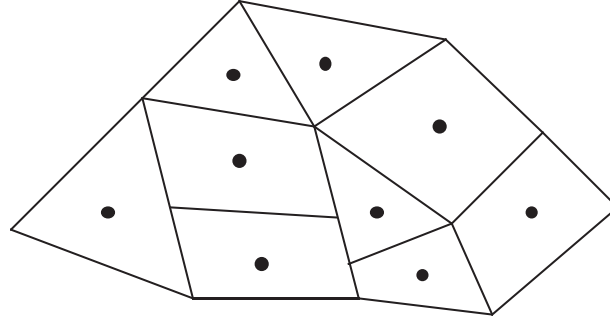


Figure 5 Volumes finis. Approche "cell center" pour un maillage ne satisfaisant pas aux contraintes des maillages "éléments finis".

- Une fois donnés les degrés de liberté associés à la relation (1.3), on définit la méthode numérique en introduisant d'abord un système différentiel pour les valeurs moyennes W_K . On obtient ce dernier en intégrant en espace l'équation aux dérivées partielles (1.1) dans le volume de contrôle K et en intégrant par parties les termes différentiels :

$$(1.4) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + \int_{\partial K} [F(W) + P(W, \nabla W)] \bullet n \, d\gamma = |K| \Omega(W_K).$$

Pour achever de définir la discrétisation en espace, il faut préciser le mode de calcul des flux approchés tant pour la partie liée au fluide parfait

$$(1.5) \quad F_a \bullet n_a = \Phi_a(\{W_L\}), \quad a \text{ interface du maillage}$$

que pour celle liée aux termes visqueux

$$(1.6) \quad P_a \bullet n_a = \Pi_a(\{W_L\}), \quad a \text{ interface}$$

puisque les termes de sources chimiques W_K ne sont fonction que du champ W_K dans la maille K donc ne posent pas de problème en ce qui concerne la discrétisation en espace. En reportant ces flux numériques dans la relation (1.4) et en notant $|a|$ la mesure d'une interface entre deux volumes de contrôle, on peut écrire l'équation d'évolution de l'inconnue W_K :

$$(1.7) \quad \frac{dW_K}{dt} + \sum_{a \in \partial K} \frac{|a|}{|K|} [\Phi_a + \Pi_a] - \Omega(W_K) = 0.$$

Nous avons donc transformé l'équation aux dérivées partielles initiale (1.1) en un système différentiel à un nombre fini (mais grand) de degrés de liberté dont les inconnues sont uniquement les valeurs moyennes W_K . Il nous faut maintenant préciser le choix de la fonction de flux numérique (1.5) ou (1.6) puis intégrer en temps l'équation différentielle (1.7), ce qui sera fait plus loin.

2) Conséquences de l'invariance par rotation.

- Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cas non visqueux et cherchons à approcher une loi de conservation bidimensionnelle

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

et, pour fixer les idées, supposons qu'on résout les équations d'Euler de la dynamique des gaz, c'est à dire

$$(2.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^t.$$

Nous nous donnons une interface entre deux cellules de contrôle (arête à deux dimensions d'espace, face à trois dimensions) de normale n_a séparant les cellules K et L . Nous cherchons une valeur approchée Φ_a du flux dans la direction normale, c'est à dire de $F n_x + G n_y$ et supposons dans une première approche que ce flux approché est uniquement fonction de la direction normale de l'interface n_a et des états dans les deux mailles K et L :

$$(2.3) \quad \Phi_a = \Phi(W_K, n_a, W_L).$$

- La fonction $\Phi(\bullet, \bullet, \bullet)$ est appelée "fonction de flux numérique". Elle doit satisfaire à un certain nombre de propriétés. Tout d'abord, nous devons assurer la conservativité du schéma : quand on échange les rôles des mailles K et L , la direction normale change de signe, mais ce flux doit rester inchangé à ce changement de signe près. Ceci se traduit par la relation

$$(2.4) \quad \Phi(W_K, n_a, W_L) + \Phi(W_L, -n_a, W_K) = 0.$$

De plus si les états W_K et W_L sont égaux, la consistance du schéma numérique avec l'équation (2.1) à approcher impose la relation suivante :

$$(2.5) \quad \Phi(W_K, n_a, W_K) = F(W_K) n_a^x + G(W_K) n_a^y.$$

- Nous utilisons maintenant l'invariante par rotation des équations d'Euler de la dynamique des gaz. Si nous faisons une rotation du système (x, y) de coordonnées (l'analogie tridimensionnel s'obtient sans difficulté), c'est à dire si nous posons :

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où la matrice de rotation R

$$(2.7) \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est fixée indépendamment du point (x, y) , nous savons qu'en transformant le champ de vitesse de façon analogue :

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et en conservant à l'identique les valeurs des variables thermodynamiques

$$(2.9) \quad W' \equiv RW = (\rho, \rho u', \rho v', E)^t,$$

les équations d'Euler qui décrivent l'évolution de W' dans le repère (x', y') sont exactement identiques à l'équation (2.1), ce qu'on exprime par la relation

$$(2.10) \quad \frac{\partial W'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W') + \frac{\partial}{\partial y} G(W') = 0.$$

• Cette propriété d'invariance doit se retrouver pour le flux numérique (2.3). Si nous tournons la normale n_a et les états W_K et W_L dans une même rotation R , le flux numérique est lui aussi affecté de la même rotation :

$$(2.11) \quad \Phi(RW_K, Rn_a, RW_L) = R\Phi(W_K, n_a, W_L).$$

Nous remarquons maintenant qu'il est toujours possible de trouver une rotation R qui amène n_a sur le premier vecteur de base e_1 :

$$(2.12) \quad n_a = R^{-1} e_1.$$

Nous pouvons alors évaluer le flux $\Phi(W_K, n_a, W_L)$ selon la relation

$$(2.13) \quad \Phi(W_K, n_a, W_L) = R^{-1} \Phi(RW_K, e_1, RW_L).$$

Or le flux $\Phi(W'_K, e_1, W'_L)$ au second membre de la relation (2.13) est une approximation du flux en $x' = 0$ relatif au problème de Riemann suivant

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial W'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} F(W') = 0 \\ W'(x', 0) = \begin{cases} W'_K, & x' < 0 \\ W'_L, & x' > 0. \end{cases} \end{cases}$$

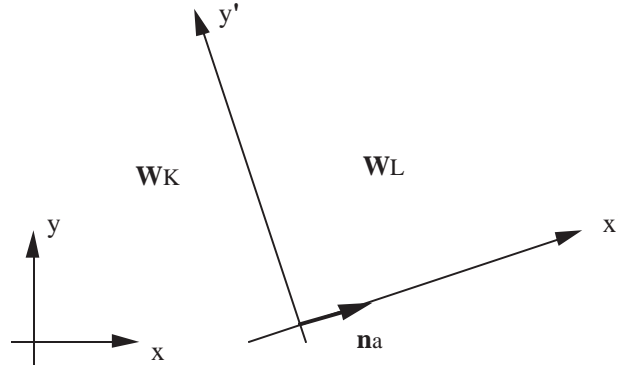


Figure 6 Problème de Riemann dans la direction normale.

comme illustré à la figure 6. Nous pouvons donc utiliser les résultats acquis au chapitre sur la résolution numérique du problème de Riemann. Le flux $\Phi(W'_K, e_1, W'_L)$ est égal au flux de la solution autosemblable (en $\frac{x'}{t'}$) du problème (2.14) comme le propose Godunov ou est approché par une relation simplifiée à la manière de Roe, Osher ou van Leer. Nous posons donc :

$$(2.15) \quad \Phi(W'_K, e_1, W'_L) = (F'_m, F'_{x'}, F'_{y'}, F'_e)^t$$

pour mettre en évidence le flux de masse F'_m , d'énergie F'_e ainsi que les deux composantes du flux d'impulsion $(F'_{x'}, F'_{y'})$. Pour calculer les contributions analogues pour le flux (2.3) recherché, c'est à dire

$$(2.16) \quad \Phi(W_K, n_a, W_L) = (F_m, F_x, F_y, F_e)^t,$$

il suffit d'appliquer la relation (2.13) qui conduit finalement à

$$(2.17) \quad F_m = F'_m$$

$$(2.18) \quad F_e = F'_e$$

$$(2.19) \quad \begin{cases} F_x = \sin \theta F'_{x'} - \sin \theta F'_{y'} \\ F_y = \cos \theta F'_{x'} + \cos \theta F'_{y'} \end{cases}.$$

Nous venons de montrer que pour une interface de normale n_a qui sépare deux états W_K et W_L , on peut calculer un flux non visqueux (1.5) avec deux points de grille c'est à dire à l'aide des états W_K et W_L uniquement en utilisant l'invariance par rotation des équations d'Euler et un flux décentré monodimensionnel qu'on applique dans la direction de la normale à l'interface. Il importe maintenant de préciser ce qu'il convient de faire quand l'état W_L n'existe pas, c'est à dire au bord du domaine.

3) Conditions limites pour les équations d'Euler.

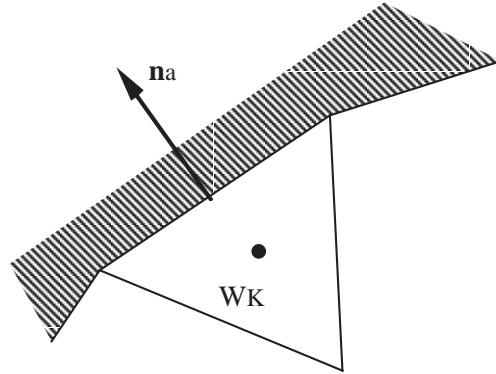


Figure 7 Volume de contrôle la frontière.

La normale est orientée vers l'extérieur du domaine d'étude.

- Nous étudions toujours dans ce paragraphe les équations d'Euler de la dynamique des gaz à deux dimensions d'espace et nous cherchons à évaluer le flux Φ_a dans la direction normale n_a lorsque le volume de contrôle K borde la frontière du domaine d'étude (figure 7). Nous traitons en détail uniquement le cas de l'approche "cell center" puisque si l'on conserve un schéma de volumes finis dans l'approche "cell vertex", on se ramène à un bilan dans une demi-maille (voir les figures 1 et 2) qui revient à évaluer un flux le long de la frontière comme dans le cas présent (voir les détails par exemple dans nos notes de cours Inria [Du88], second document de ce mémoire). Deux cas fondamentalement différents se présentent selon que l'élément de frontière est une paroi ou est au contraire une frontière fluide. Nous les détaillons dans la suite de ce paragraphe.

3.1) Condition limite de paroi.

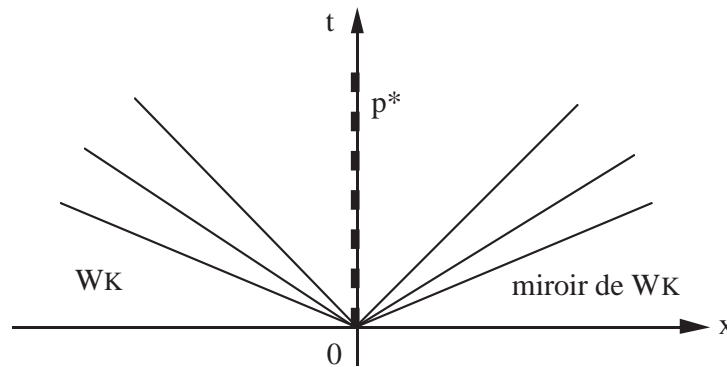


Figure 8 Solution du problème de Riemann entre un état W_K et son état miroir.

- La condition physique est une non-pénétration du fluide dans la paroi, ce qu'on exprime par la relation

$$(3.1) \quad u \bullet n \equiv u n^x + v n^y = 0.$$

Le flux dans la direction normale est de la forme

$$(3.2) \quad F \bullet n = \begin{pmatrix} \rho u \bullet n \\ [\rho(u \bullet n)^2 + p] n^x + \rho(u \bullet n)(u \bullet \tau) n^y \\ \rho(u \bullet n)(u \bullet \tau) n^x + [\rho(u \bullet \tau)^2 + p] n^y \\ (E + p) u \bullet n \end{pmatrix}$$

où $(u \bullet \tau)$ désigne la vitesse dans la direction tangente :

$$(3.3) \quad u \bullet \tau = -u n^y + v n^x.$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.1), l'expression (3.2) se simplifie en

$$(3.4) \quad F \bullet n = (0, p^* n^x, p^* n^y, 0)^t$$

où p^* représente la pression à la paroi. Il s'agit donc de déterminer cette pression en fonction des états $\{W_L\}$ du fluide discret. Le plus naturel (et c'est la solution classique !) consiste à déterminer le flux (3.4) à l'aide d'une part d'un état miroir \widetilde{W}_K de l'état W_K et d'autre part en utilisant une fonction de flux décentrée vue précédemment. Nous choisissons l'état \widetilde{W}_K avec la même densité, la même énergie interne et la même vitesse tangentielle que l'état W_K mais avec une vitesse normale opposée :

$$(3.5) \quad \widetilde{W}_K = (\rho, \rho(u - 2(u \bullet n) n^x), \rho(v - 2(u \bullet n) n^y), E)^t.$$

Si on résout le problème de Riemann dans la direction normale (second paragraphe) entre ces deux états, on constate (voir par exemple la figure 8) qu'on a :

$$(3.6) \quad \Phi(W_K, n_a, \widetilde{W}_K) = (0, p^* n^x, p^* n^y, 0)^t$$

c'est à dire un flux de la forme (3.4). Cette propriété demeure si, au lieu d'utiliser une fonction de flux décentrée exacte on résout le problème de Riemann à l'aide d'une approximation proposée par Roe, Osher ou van Leer. Le cas d'une paroi solide est donc complètement résolu par les relations (3.5) (3.6).

3.2) Frontière fluide.

Ce cas est moins simple que le précédent et nous suivons pour l'essentiel notre exposé du cours Cea-Edf-Inria [Du88]. Nous distinguons divers cas particuliers importants dans la pratique que le lecteur pourra facilement généraliser pour ses propres besoins.

- **Etat imposé.**

En aérodynamique externe par exemple, on connaît l'état W_∞ "à l'infini" amont ou aval. Il est donc naturel, après avoir choisi la frontière du domaine suffisamment lointaine, de modéliser l'extérieur du domaine de calcul par cet état constant W_∞ ; on dispose alors d'un état de l'autre côté de l'interface frontière et le flux numérique s'en déduit simplement par résolution d'un problème de Riemann :

$$(3.7) \quad \Phi_a = \Phi(W_K, n_a, W_\infty).$$

- **Sortie supersonique.**

En aérodynamique interne on étudie souvent des tuyères en régime amorcé avec un écoulement supersonique en sortie. Il est alors en général admis qu' "il n'y a pas de condition limite" dans un tel cas. Nous préférons exprimer que le flux est obtenu par simple extrapolation à l'aide de l'état W_K :

$$(3.8) \quad \Phi_a = F(W_K) \bullet n_a.$$

Mais cette approche n'est pas entièrement satisfaisante dans le cas d'un régime transitoire où l'état W_K peut ne pas correspondre à une sortie supersonique, comme nous l'avons montré dans [Du88]. En effet, si nous supposons

$$(3.9) \quad u_K \bullet n_a \leq c_K,$$

alors l'état W_K ne correspond pas à une sortie supersonique. Il convient alors de revenir à une étude en termes d'ondes non linéaires grâce au problème de Riemann. On relie dans l'espace des états la donnée W_K à l'ensemble \mathcal{M}_+ des états qui vérifient la condition à la limite :

$$(3.10) \quad \mathcal{M}_+ = \{ W, u \bullet n_a > c \}$$

en utilisant une 1-onde de détente. L'état W^* intersection de la 1-onde issue de W_K et du bord de \mathcal{M}_+ est sonique et peut être calculé sans difficulté à partir des relations (1.99) et (1.100) du chapitre précédent. Le comportement de la condition de sortie supersonique dans ce cas est illustré à la figure 9. Le flux frontière est donc alors simplement calculé grâce à la relation

$$(3.11) \quad \Phi_a = F(W^*) \bullet n_a.$$

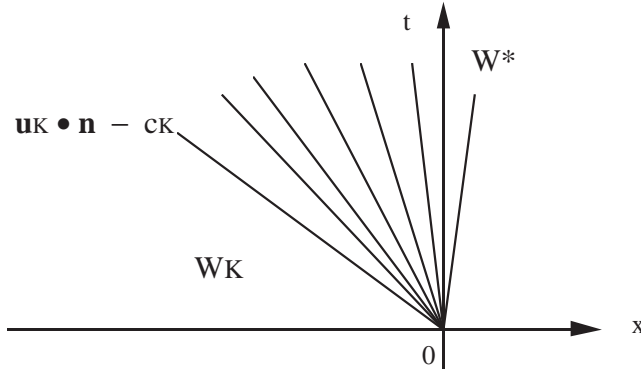


Figure 9 Sortie supersonique dans le cas où l'état W_K ne satisfait pas la condition limite.

- **Sortie subsonique de pression imposée.**

Dans ce cas, on ne dispose que de la donnée de la pression statique P de sortie, comme dans le cas d'un écoulement qui débouche dans l'atmosphère par exemple. On a en général à envisager une sortie subsonique et l'étude du problème linéarisé montre qu'une seule condition limite unique est nécessaire et suffisante pour aboutir à un problème bien posé car il y a une et une seule caractéristique entrante dans le domaine d'étude. Pour calculer le flux à la frontière, nous suivons la même approche que celle décrite ci-dessus. Nous introduisons la variété limite

$$(3.12) \quad \mathcal{M}_P = \{ W, p = P \}$$

et nous posons un problème de Riemann partiel entre l'état W_K dans la cellule qui borde la frontière et la variété limite \mathcal{M}_P . Nous déterminons l'état W^* intersection entre la 1-onde issue de W_K et l'ensemble \mathcal{M}_P . Une projection dans le plan (vitesse, pression) de cette étude est présentée à la figure 10. Nous calculons finalement le flux à la frontière en allant chercher la solution du problème de Riemann posé par les états W_K et W^* :

$$(3.13) \quad \Phi_a = \Phi(W_K, n_a, W^*) .$$

Nous remarquons également que la pression de l'état solution du problème de Riemann posé en (3.13) peut ne pas être égale à la donnée P quand des ondes fortement non linéaires sont en présence !

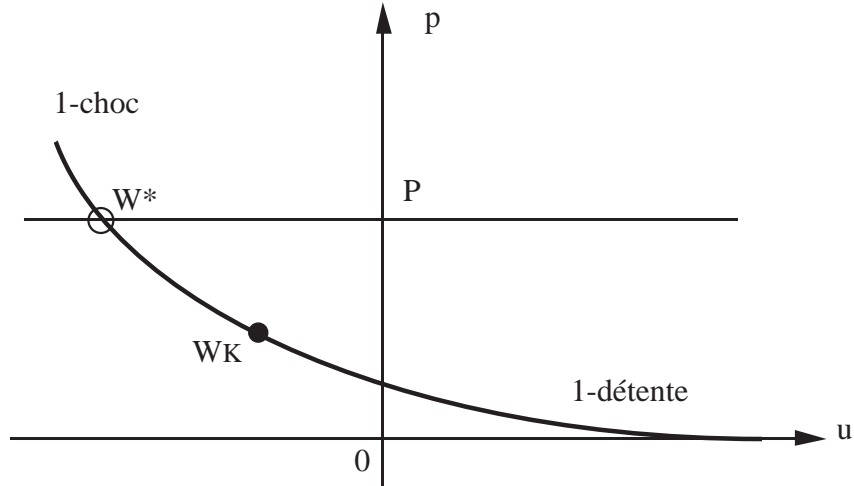


Figure 10 Condition limite de pression imposée.
Analyse dans le plan (vitesse, pression).

- **Entrée subsonique de type réservoir.**

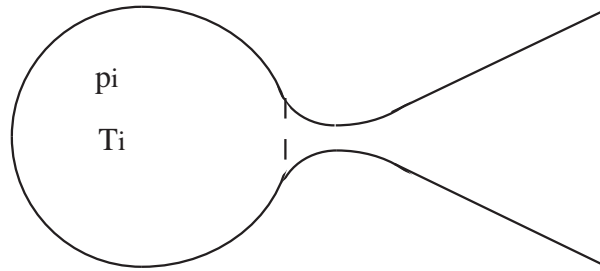


Figure 11 Entrée subsonique de type réservoir
suivie d'une tuyère de de Laval.

Ayant à calculer un écoulement dans une tuyère convergente-divergente de de Laval, on connaît en général la pression génératrice p_i et la température génératrice T_i du gaz au repos comme illustré à la figure 11. Entre cet état bien défini et l'état à l'entrée dans la tuyère le gaz se détend de façon isentropique en conservant son enthalpie. Nous introduisons donc l'enthalpie H et l'entropie S de l'état de pression génératrice p_i et de température T_i . Pour un gaz parfait polytropique de constante égale à r ($p = \rho r T$), nous avons :

$$(3.14) \quad \begin{cases} H = \frac{\gamma}{\gamma-1} r T_i \\ S = r \gamma p_i^{1-\gamma} T_i^\gamma . \end{cases}$$

Nous nous donnons également la direction θ du vecteur vitesse en entrée. L'entrée subsonique de ce type est donc entièrement déterminée par la donnée de l'enthalpie

totale H , de l'entropie S et de l'angle θ . Nous introduisons donc la variété limite

$$(3.15) \quad \mathcal{M}_{H,S,\theta} = \left\{ W, \quad u^2 + v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = H, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} S, \quad v = u \operatorname{tg}\theta \right\}.$$

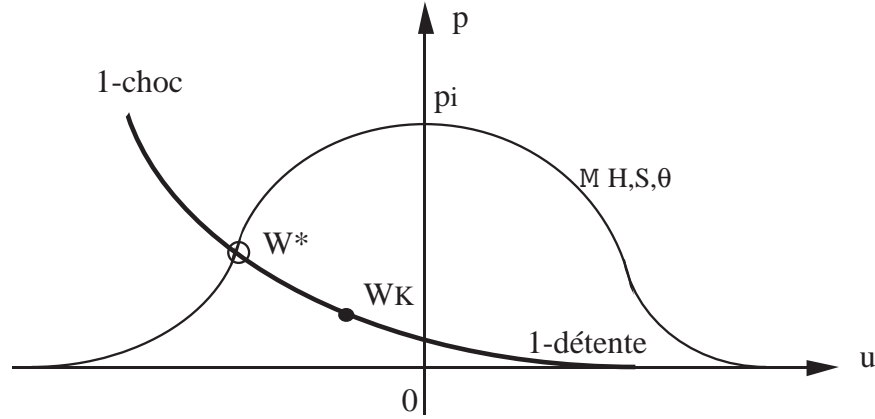


Figure 12 Condition limite d'entrée subsonique de type réservoir. Analyse dans le plan vitesse-pression.

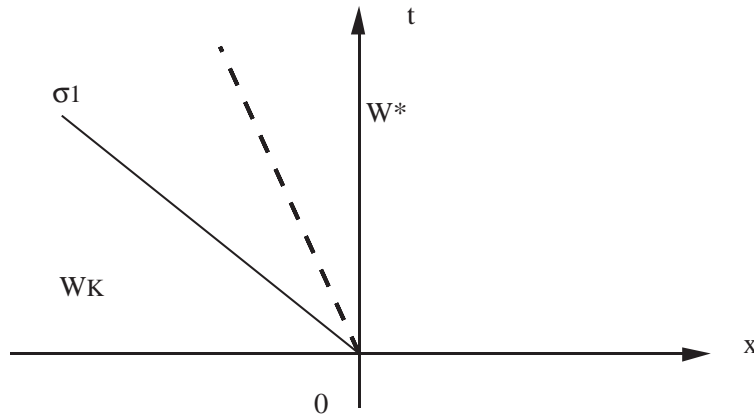


Figure 13 Condition limite d'entrée subsonique de type réservoir. Solution du problème de Riemann partiel associé.

Nous recherchons l'intersection W^* de la 1-onde issue de l'état W_K avec l'ensemble $\mathcal{M}_{H,S,\theta}$. Dans le plan (vitesse, pression), l'ensemble des états admissibles prend la forme d'une courbe en cloche (figure 12) et nous pouvons construire l'état intersection W^* . Le détail de ce calcul dans le cas où l'on utilise le flux d'Osher est présenté dans le rapport [Du87]. Le flux limite est ensuite calculé par résolution du problème de Riemann entre les états W_K et W^* :

$$(3.16) \quad \Phi_a = \Phi(W_K, n_a, W^*)$$

et la solution dans l'espace-temps de ce problème est illustrée à la figure 13.

- **Entrée subsonique de type jet.**

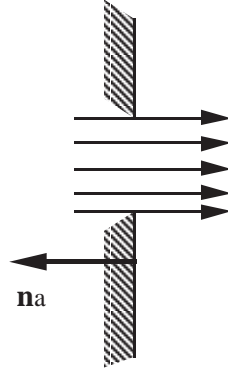


Figure 14 Condition limite d'entrée subsonique de type jet.

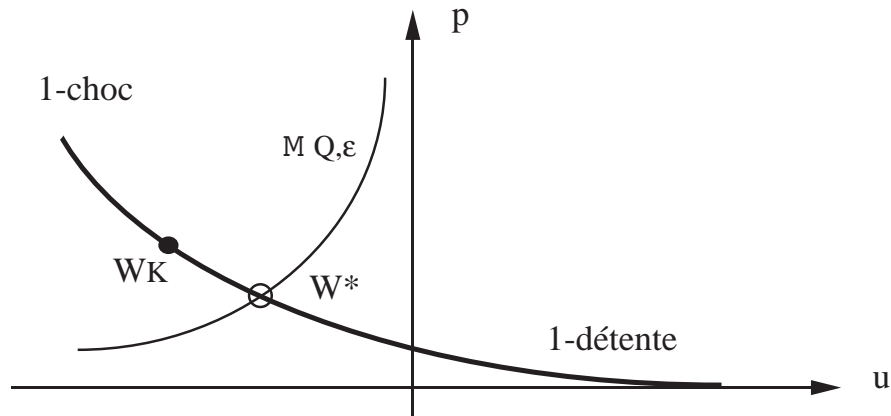


Figure 15 Condition limite d'entrée subsonique de type jet.
Etude dans le plan (vitesse, pression).

Dans ce cas, le fluide entrant est normal à la frontière (pour simplifier l'exposé, *c.f.* figure 14), sa température T donc son énergie interne ϵ est donnée ainsi que son débit Q (négatif par convention vu l'orientation de la normale à la frontière). Nous introduisons encore un ensemble d'états admissibles à la limite :

$$(3.17) \quad \mathcal{M}_{Q, \epsilon} = \{ W, \quad \rho u = Q, \quad e = \epsilon \}$$

et le flux limite est encore calculé à l'aide de la relation (3.16), les ondes entrantes dans le domaine de calcul ont encore l'allure donnée à la figure 13, mais l'état intersection W^* appartient à l'ensemble $\mathcal{M}_{Q, \epsilon}$ et est par ailleurs sur la 1-onde issue de l'état frontière W_K . L'analyse dans le plan (vitesse, pression) est proposée à la figure 15.

4) Une variante de la méthode de van Leer.

• Nous détaillons dans ce paragraphe la mise en œuvre multidimensionnelle du schéma “Multidimensional Upwindcentered Scheme for Conservation Laws” de van Leer [vL79]. Diverses variantes existent selon qu’on opère en maillage structuré ou non et selon le choix de degrés de liberté aux sommets du maillage ou au centre de gravité des éléments. Dans le cas d’un maillage structuré à variation régulière de la taille des mailles (figures 1 et 3), on est essentiellement ramené au cas monodimensionnel, ainsi qu’il a été développé par Borrel-Montagné [BM85] lors de l’élaboration du code de calcul Flu3c. On note par z une “variable primitive”, c’est à dire la densité, une composante de la vitesse ou la pression :

$$(4.1) \quad z \in \{\rho, u, v, p\} \quad (\text{variables primitives})$$

et au lieu de calculer le flux d’interface en $(i+1/2, j)$ entre les mailles de numéros (i, j) et $(i+1, j)$, on utilise deux états extrapolés $W_{i+1/2, j}^-$ et $W_{i+1/2, j}^+$ de part et d’autre de cette interface. Cette interpolation non linéaire s’effectue à l’aide d’un “limiteur de pente” $\varphi(\bullet)$ présenté dans un chapitre précédent, qui opère sur les variables primitives (4.1) et nous avons typiquement :

$$(4.2) \quad z_{i+1/2, j}^- = z_{i, j} + \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{z_{i, j} - z_{i-1, j}}{z_{i+1, j} - z_{i, j}}\right) (z_{i+1, j} - z_{i, j})$$

Diverses corrections sont nécessaires pour garantir une bonne approximation de la géométrie et pour les détails nous renvoyons le lecteur aux travaux de Borrel et Montagné et aux documents de l’Onera.

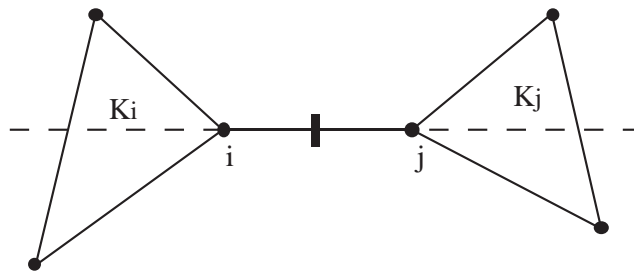


Figure 16 Schéma papillon pour définir une variante de la méthode de van Leer.

• Pour les maillages en triangles utilisant l’approche “cell vertex”, les travaux de F. Fezoui [Fe85] à l’Inria ont permis de découvrir le “schéma papillon” illustré à la figure 16. Etant donnés deux sommets i et j du maillage, on repère parmi les éléments contenant le sommet i un élément K_i contenant la direction de l’arête $[i, j]$ et opposé au sommet j . On fait de même en échangeant les rôles de i et de j . On est alors en mesure d’interpoler à partir des valeurs aux divers

sommets deux valeurs du champ z le long de la droite joignant les sommets i et j de part et d'autre du segment $[i, j]$. Nous pouvons alors utiliser une relation monodimensionnelle du type de celle présentée en (4.2) et nous renvoyons le lecteur aux nombreux travaux de l'Inria sur ce sujet pour une description précise du schéma papillon.

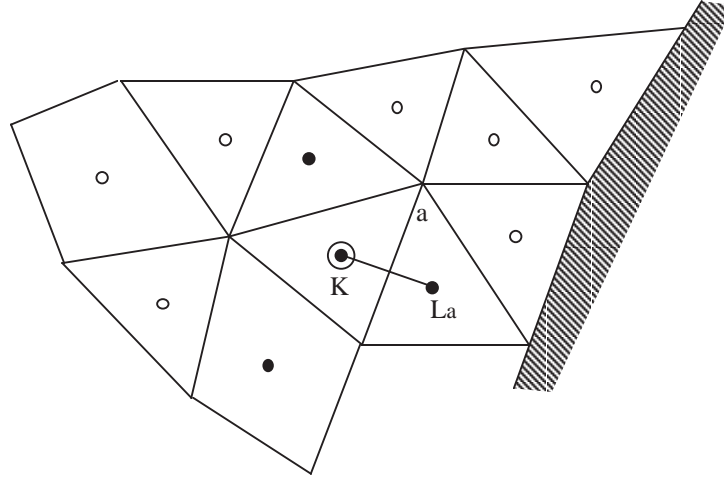


Figure 17 Cellules voisines nécessaires (point noir) pour le calcul du gradient dans la cellule considérée (double cercle).

- Enfin, dans une approche non structurée mais où les volumes de contrôle et les éléments du maillage concident (“cell center”), nous avons développé à l'Aérospatiale avec Olivier Michaux pour le logiciel Cel3gr une variante de la méthode de van Leer très simple et naturelle [DM92] décrits dans la suite de ce paragraphe. L'idée de base est de remplacer le flux numérique à deux points de type (2.3) par une résolution exacte ou approchée du problème de Riemann entre deux états extrapolés W_a^- et W_a^+ de part et d'autre de l'interface :

$$(4.3) \quad \Phi_a = \Phi(W_a^-, n_a, W_a^+).$$

Comme dans les schémas précédents, ces états sont déterminés à l'aide de champs scalaires z qui peuvent être les variables primitives comme à la relation (4.1) ou bien un autre jeu de variables tel que celui-ci :

$$(4.4) \quad z \in \{\rho, \rho u, \rho v, p\}$$

qui a été choisi pour le logiciel Cel3gr et nous donne satisfaction. Nous extrapolons le champ z du centre de la maille x_K vers le milieu x_a de l'arête a grâce à une fonction affine :

$$(4.5) \quad z_a = z_K + \alpha(K, z) \nabla z(K) \cdot (x_a - x_K)$$

où $\nabla z(K)$ est une estimation (centrée) du gradient de z au centre de la maille et $\alpha(K, z)$ un coefficient de limitation lié au champ z et à la cellule K dont nous précisons le calcul plus loin. L'estimation du gradient dans la maille K fait appel aux mailles voisines par l'intermédiaire d'une interface a comme illustré à la figure 17. Nous déterminons d'abord une moyenne à deux points entre la valeur dans la maille K et la valeur dans la maille voisine L_a sur l'arête a qui sépare les éléments K et L_a par un schéma très simple :

$$(4.6) \quad \bar{z}_a = (1 - \theta_a) z_K + \theta_a z_{L_a}$$

où $(1 - \theta_a)$ et θ_a sont par exemple les coordonnées barycentriques du point x_a par rapport aux centres de gravité des éléments K et L_a . Si a est une arête du bord du domaine, deux cas de figure sont à envisager selon que la portion de frontière est une paroi ou une interface fluide. Dans le premier cas, le champ z est associé à un état W_a qui est par convention la moyenne arithmétique entre l'état W_K et son état miroir (3.5) :

(4.7) $W_a = (\rho, \rho(u - (u \cdot n)n^x), \rho(v - (u \cdot n)n^y), E)^t$, a sur la paroi de façon à satisfaire à la condition limite (3.1) pour cet état extrapolé alors que dans le second cas, on extrapole simplement la valeur dans la maille vers la frontière fluide :

$$(4.8) \quad W_K = W_a, \quad a \text{ arête de la frontière fluide.}$$

On évalue ensuite le gradient moyen dans la maille K à l'aide d'une formule de Green :

$$(4.9) \quad \nabla z(K) = \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \bar{z} n \, d\gamma$$

ce qui est un calcul bien élémentaire.

- La limitation de pente à l'aide du coefficient $\alpha(K, z)$ est réellement multidimensionnelle mais elle est également fondée sur le fait que z est un champ scalaire. On détermine d'abord la valeur $m(K, z)$ minimale (respectivement $M(K, z)$ maximale) parmi les cellules L voisines de l'élément K (ce sont les voisines par l'intermédiaire d'une arête commune dans le cas de deux dimensions d'espace, voir la figure 17) :

$$(4.10) \quad m(K, z) = \min \{ z(L), \quad L \text{ voisin de } K, \quad L \neq K \}$$

$$(4.11) \quad M(K, z) = \max \{ z(L), \quad L \text{ voisin de } K, \quad L \neq K \}.$$

Si la valeur $z(K)$ est extrémale parmi les valeurs voisines, on impose une valeur nulle pour le coefficient $\alpha(K, z)$ de limitation :

$$(4.12) \quad \alpha(K, z) = 0 \quad \text{si} \quad z(k) \leq m(K, z) \quad \text{ou} \quad z(k) \geq M(K, z).$$

Dans le cas contraire, on impose à la variation $\alpha(K, z) \nabla z(K) \bullet (x_a - x_K)$ de ne pas dépasser une certaine proportion k de la variation liée aux valeurs $m(K, z)$ et $M(K, z)$:

$$(4.13) \quad \begin{cases} k(z(K) - m(K, z)) \leq \alpha(K, z) \nabla z(K) \bullet (x_a - x_K) \leq \\ \leq k(M(K, z) - z(K)) \end{cases}$$

ce pour toute arête du bord de l'élément K . On choisit alors $\alpha(K, z)$ le plus grand possible inférieur ou égal à 1 pour satisfaire les contraintes (4.13) :

$$(4.14) \quad \alpha(K, z) = \min \left[1, k \frac{\min(M(K, z) - z(K), z(K) - m(K, z))}{\max \{ |\nabla z(K) \bullet (x_a - x_K)|, a \in \partial K \}} \right].$$

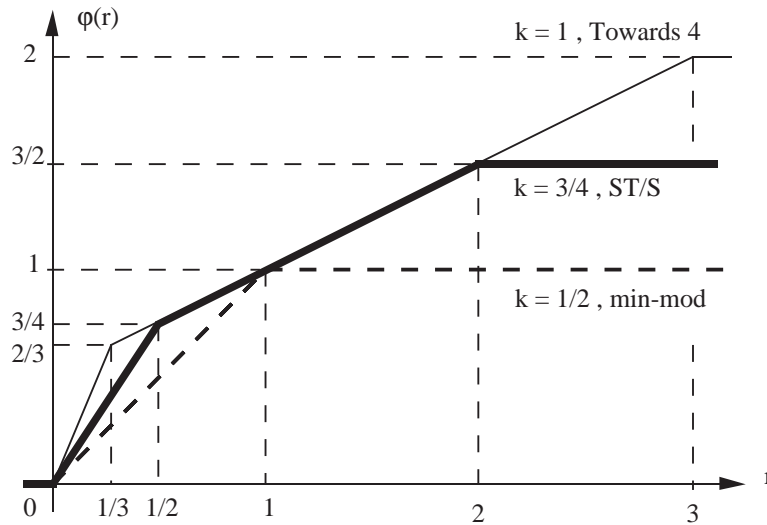


Figure 18 Limiteurs de pente monodimensionnels associés à la limitation multidimensionnelle (4.14).

Dans le cas d'une seule dimension d'espace en maillage régulier, on peut réécrire la loi d'extrapolation (4.5) sous une forme habituelle en différences finies (4.2), et le limiteur $\varphi(r)$ associé est représenté figure 18 en fonction de r pour certaines valeurs du paramètre k . Pour $k = 1$, nous retrouvons le limiteur de pente introduit par van Leer [vL77] que nous appelons "Towards 4", pour $k = 1/2$, il s'agit du limiteur "min-mod" de Harten [Ha83] ; le cas $k = 3/4$, est un compromis entre les deux précédents [Du90a] dit "limiteur ST/S". Ces précisions méthodologiques terminent notre présentation de la variante non structurée du schéma Muscl telle que nous l'avons mise en œuvre à l'Aérospatiale aux Mureaux.

5) Discrétisation des flux visqueux.

• Nous abordons maintenant la discrétisation des termes du second ordre associés à des modélisations de type visqueux du fluide compressible étudié. Selon que l'on opère dans le cadre "cell vertex" ou "cell center", le problème se formule de façon très classique ou avec plus de nouveauté dans le cas d'un maillage non structuré. Dans le cas d'une approximation avec des degrés de liberté aux sommets du maillage (cell vertex), on doit effectuer un bilan du flux visqueux $\frac{\partial}{\partial x_j} P^j(W, \nabla W)$ dans la maille K_i autour du sommet numéro i . En fait, en suivant l'idée de Rostand-Stoufflet [RS88], on intègre ce flux après multiplication par la fonction de forme φ_i affine par morceaux, nulle aux sommets j différents du i -ème et valant 1 au nœud i ; on intègre par parties et l'on a :

$$(5.1) \quad \int_{K_i} \frac{\partial P^j}{\partial x_j} \varphi_i(x) \, dx = - \int_{K_i} P^j \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \, dx + \int_{\partial K_i} P^j n_j \varphi_i(x) \, d\gamma .$$

Le membre de droite de (5.1) est facile à calculer : la fonction $P^j(W, \nabla W)$ est en fait une fonction donnée du gradient de la vitesse et du gradient de la température. Comme ces deux champs sont définis en chaque sommet du maillage, leur gradient ∇u et ∇T est naturellement constant dans chaque élément fini. Comme il en est de même pour le gradient de la fonction de base $\varphi_i(x)$, le terme de droite de la relation (5.1) n'offre pas de difficulté à être évalué complètement. On peut remarquer qu'en choisissant ce mode de calcul du flux visqueux, on ne suit pas *stricto-sensu* une approche de volumes finis, qui aurait voulu que l'on calculât l'intégrale

$$(5.2) \quad \int_{K_i} \frac{\partial}{\partial x_j} P^j(W, \nabla W) \, dx = \int_{\partial K_i} P^j n_j \, d\gamma$$

et non celle proposée à la relation (5.1). Toutefois, cette simplicité dans le passage aux flux visqueux où l'on récupère le savoir-faire des méthodes d'éléments finis est un atout de l'approche "cell vertex".

• Dans l'approche "cell center", il est encore nécessaire d'évaluer un flux à l'interface entre les volumes de contrôle, c'est à dire ici les éléments du maillage. On réduit d'abord le problème en remarquant à nouveau que le flux visqueux $P^j(W, \nabla W)$ est fonction **linéaire** du gradient de la vitesse ∇u et du gradient de la température ∇T . En maillage structuré, l'évaluation du gradient à cette interface est classique à l'aide d'un schéma centré aux différences finies (voir par exemple le livre de Peyret-Taylor [PT83]) mais la généralisation au cas non structuré n'est pas aussi traditionnelle. Nous avons développé un algorithme qui permet d'évaluer le gradient ∇u d'un champ u en fonction d'un nombre constant de valeurs données au centre des éléments [DM93]. Pour un maillage

bidimensionnel en triangles par exemple, on peut déterminer un ensemble $V(a)$ de six degrés de liberté voisins pour une interface a qui n'est pas située sur la frontière de la façon suivante : on associe d'abord à l'interface a les deux éléments K_g et K_d de part et d'autre de la face puis pour les quatre autres arêtes qui composent le bord de ces deux triangles (figure 19), on associe les éléments qui ont ces quatre arêtes dans leur bord :

$$(5.3) \quad V(a) = \{K_g, K_d\} \cup \left\{ K, \partial K \cap \partial K_g \text{ ou } \partial K \cap \partial K_d \text{ est une arête du bord de } K_g \text{ ou } K_d \right\}.$$

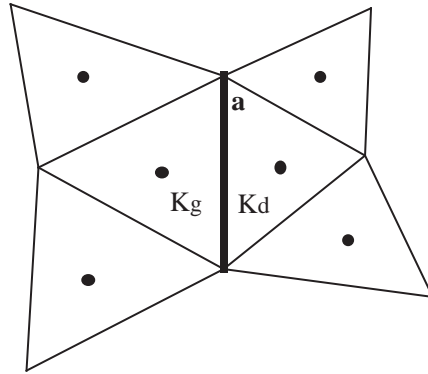


Figure 19 Triangles voisins d'une face a pour le calcul du gradient.

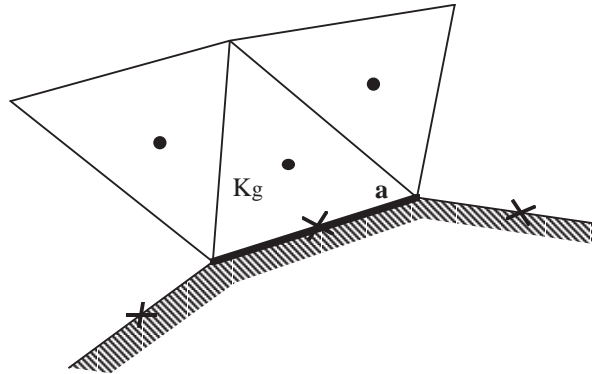


Figure 20 Degrés de liberté voisins d'une face frontière.

- Si l'arête a est sur la frontière, elle est naturellement le support d'un degré de liberté de type condition de Dirichlet ou de Neumann par exemple :

$$(5.4) \quad \sigma_a(u) = u_a \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial n}$$

puisque les conditions aux limites pour résoudre les équations de Navier-Stokes imposent une vitesse nulle en paroi, ou bien une température imposée ou bien un flux de chaleur nul, etc... Dans ce cas, on peut admettre les deux arêtes

du bord du domaine de calcul qui touchent l'arête a parmi les voisins ainsi que l'arête a elle-même (figure 20). On complète le voisinage $V(a)$ à l'aide de la relation (5.3), à ceci près que cette fois-ci, seul l'élément K_g est à prendre en compte. Quelle que soit la position de l'arête dans le maillage, nous avons donc déterminé un voisinage $V(a)$ comportant au plus six degrés de liberté. On détermine ensuite une base $B(a)$ de polynômes paramétrée par l'arête a ; on associe l'axe Ox avec la direction normale à l'interface et l'axe Oy avec la direction tangentielle et on pose :

$$(5.5) \quad B(a) = \{ 1, x, y, x^2, y^2, x^3 \}, \quad a \text{ interface intérieure au domaine}$$

si l'arête a est intérieure au domaine et

$$(5.6) \quad B(a) = \{ 1, x, y, x^2, xy, y^2 \}, \quad a \text{ interface située sur la frontière}$$

si elle est sur la frontière. On calcule enfin le gradient du champ donné u sur l'interface a selon une relation donnée *a priori* sous la forme :

$$(5.7) \quad \nabla u = \sum_{\sigma \in V(a)} \alpha(a, \sigma) \sigma(u)$$

qui est **linéaire** et **locale**, comme l'opérateur continu de dérivation. Les coefficients $\alpha(a, \sigma)$ sont calculés une fois pour toutes en supposant que pour toute fonction u de la base $B(a)$, la relation (5.7) est exacte. On obtient de cette façon un système linéaire d'inconnues $\alpha(a, \sigma)$, qui est inversible en pratique et dont on stocke la solution en mémoire à l'issue de l'étape de prétraitement. L'extension au cas tridimensionnel n'offre pas de difficulté fondamentale [Du92].

- En conclusion, l'approche "cell center" qui est la plus satisfaisante du point de vue de la simplicité de la forme des volumes finis mis en jeu, peut être utilisée pour l'approximation numérique de fluides visqueux même avec un maillage non structuré. On n'utilise que l'information donnée par les degrés de liberté de la méthode des volumes finis et celle donnée par les conditions aux limites, avec un nombre constant de points voisins pour définir le schéma numérique. Ce paragraphe termine ce chapitre sur l'approximation spatiale multidimensionnelle des équations des fluides compressibles. Que ce soit sur un maillage structuré ou non, dans l'approximation "cell vertex" ou "cell center", nous avons pu déterminer des flux autour des cellules de contrôle comme fonction (connue) des degrés de liberté, pour les fluides dans l'approximation non visqueuse ou en se plaçant dans le cadre d'un modèle visqueux plus réaliste.

Flux limite de paroi mobile

Si un fluide est limité par une structure lentement variable et qui se déplace peu dans l'espace, nous cherchons à prendre en compte ce mouvement sans modification des mailles du logiciel de simulation. Nous posons d'abord le problème dans le cadre élémentaire d'une seule dimension d'espace. Puis pour un maillage bidimensionnel cartésien de frontière mobile, nous montrons que les bilans en espace-temps des variables conservées peuvent se décrire par un "flux limite de paroi mobile" qui contient toute la dynamique. Dans le cas de petits mouvements suffisamment lents, nous proposons une linéarisation de ce flux et décrivons en détail une implémentation numérique possible.

1) Introduction.

- On cherche à modéliser numériquement l'écoulement de fluide parfait dans un domaine extérieur à un objet flexible limité par une paroi mobile Γ . Dans le cas d'une paroi rigide, le problème fluide est posé sous la forme d'un problème aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz : équations d'Euler (stationnaires ?) dans le volume fluide Ω , condition limite de non pénétration du fluide dans la paroi sur cette portion Γ de frontière ($u \cdot n = 0$, où u est le champ de vitesse du fluide et n la normale à Γ extérieure au domaine Ω), condition d'écoulement uniforme à l'infini sur la partie Γ_∞ qui complète le bord $\partial\Omega$ ($\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_\infty$; voir la figure 1).

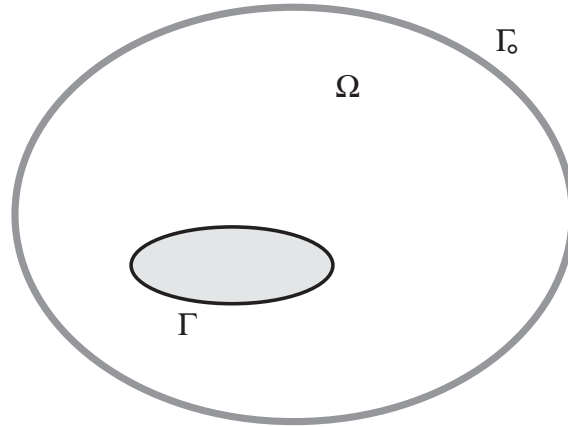


Figure 1 Ecoulement fluide en domaine extérieur.

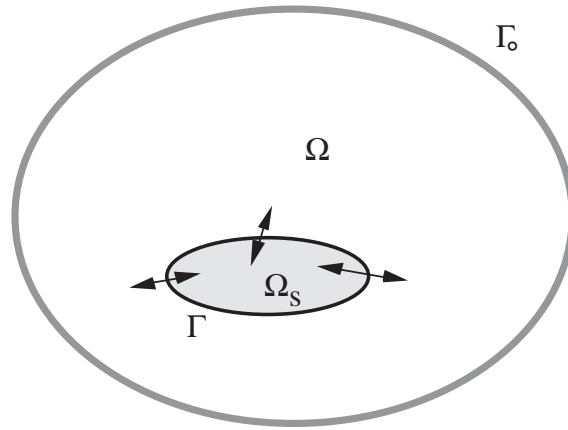


Figure 2 Problème couplé d'interaction fluide-structure ;
la frontière Γ est mobile.

- Dans le cas où la paroi est flexible, c'est en toute rigueur un problème d'interaction fluide-structure qu'il faut poser sur la réunion de la zone fluide Ω et de la zone solide Ω_S (de frontière commune Γ) (voir par exemple Morand et Ohayon [MO92]). Il convient toujours de poser un problème fluide dans le domaine Ω (avec condition limite fluide sur Γ_∞) mais également d'écrire les équations de l'élastodynamique dans le domaine solide Ω_S , avec comme condition limite imposée sur Γ la donnée des efforts locaux du fluide sur la structure ($\sigma \cdot n + p n = 0$ sur Γ où σ est le tenseur des contraintes solides, n la normale extérieure et p la pression du fluide sur la paroi Γ). De plus, les domaines Ω et Ω_S sont mobiles et l'interface Γ est en fait une fonction du temps (figure 2) sur laquelle on doit toujours écrire la non pénétration du fluide à la paroi ($u_S \cdot n = u \cdot n$, avec u_S égale à la vitesse du solide, sans changer les notations précédentes). Cette mobilité de l'interface constitue une difficulté majeure dans le traitement

numérique de ce problème : les logiciels de mécanique des fluides utilisent en général des maillages de référence fixes, (comme par exemple le logiciel Flu3c de Borrel *et al* [BMDGL88] que nous considérons ici comme code de référence) et il en est de même pour les codes de mécanique des structures comme Nastran [Mn86] ou Samcef [Sa92].

- Une approche possible pour résoudre ce problème lorsque le mouvement du solide est lent devant le temps de mise à l'équilibre du fluide (voir par exemple Destuynder [De94] pour une classification des problèmes d'interaction fluide-structure séparant clairement aéroélasticité et aéroacoustique), on découple les mouvements du fluide et de la structure à l'aide d'un algorithme de type "point fixe" (voir par exemple Piperno [Pi95]) : le mouvement de la paroi mobile Γ (champ u_S sur Γ) permet le calcul du fluide sur le domaine mobile $\Omega(t)$. Comme résultat de cette modélisation, on dispose du champ de pression paroi $p(t)$ qui est une condition limite pour le problème d'élastodynamique posé dans le domaine Ω_S (petites déformations), lequel permet la détermination du mouvement de la paroi mobile u_S . Et on recommence !

- Ce processus est *a priori* convergent lorsque la vitesse de la paroi u_S est faible devant la vitesse c des ondes dans le fluide ($|u_S| \ll c$ sur Γ) et lorsque l'extension géométrique des perturbations est faible, c'est-à-dire lorsque $\Omega(t)$ est "proche" du domaine fixe Ω . Pour fixer les idées, le mouvement d'un point de la paroi doit être tel que l'écart δ à la position nominale reste petit devant la taille d'une maille discrète ($|\delta| \ll \Delta x$). La résolution du problème fluide demande l'emploi d'un maillage (partiellement mobile) avec une méthode de type Euler-Lagrange Arbitraire (Ale ; voir par exemple la synthèse proposée par Anderson [An87]), ce qui est délicat mais fournit une solution satisfaisante (voir par exemple Ruffino et Coron [RC96]). Le lien entre l'approche dynamique avec suivi de la surface mobile et une formulation en domaine fixe avec une condition de transpiration a été proposée dans un cadre continu par Fanion, Fernandez et Le Tallec [FFL2k].

- Nous proposons ici une méthodologie qui permette, dans le cadre de la méthode numérique de volumes finis utilisée pour le code Flu3c, d'éviter d'effectuer un calcul sur un maillage mobile par l'emploi d'une condition limite équivalente, dite de "paroi mobile". Les travaux menés jusqu'ici et dont nous avons connaissance (voir par exemple Coron [Co97]) montrent que la mise en œuvre de la condition classique de transpiration (voir par exemple Mortchéléwicz [Mo89]) ne suffit pas à modéliser correctement l'effet de la paroi mobile pour le calcul de la pression. Nous rappelons au paragraphe 2 l'étude du cas nonodimensionnel qui permet de traiter divers problèmes de calcul de pression avant de passer aux paragraphes 3 à 5 à un modèle bidimensionnel qui demande une

description géométrique précise, un calcul non banal de flux transverses et des développements algébriques importants.

2) Etude monodimensionnelle

• 2.1 • Volumes finis

• Nous étudions les équations d'Euler de la dynamique des gaz dans un domaine mobile $\Omega(t)$:

$$(2.1) \quad \Omega(t) =]0, X(t)[, \quad t \geq 0, \quad X(t) > 0$$

tel que le mouvement du point frontière $X(t)$ est donné et reste voisin d'un point fixe d'abscisse $L > 0$:

$$(2.2) \quad X(t) \simeq L \quad t \geq 0.$$

Dans le domaine d'espace-temps Ξ défini par :

$$(2.3) \quad \Xi = \bigcup_{t \geq 0} \Omega(t) \times \{t\}$$

nous cherchons un état fluide $W(x, t)$ fonction de l'espace x et du temps t :

$$(2.4) \quad 0 \leq x \leq X(t), \quad t \geq 0.$$

L'état $W(x, t)$ est le vecteur des variables conservées (écrit ici comme la transposée d'un vecteur ligne) :

$$(2.5) \quad W = (\rho, \rho u, \rho E)^t$$

où ρ est la densité du fluide, u sa vitesse et E son énergie totale spécifique liée à l'énergie interne spécifique e via la relation constitutive :

$$(2.6) \quad E = e + \frac{1}{2}u^2.$$

L'équation d'Euler s'écrit sous forme conservative

$$(2.7) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

et la fonction de flux $f(\bullet)$ suit la relation algébrique :

$$(2.8) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu)^t$$

qui introduit la pression comme une fonction de W via l'énergie interne e et le rapport γ ($\gamma = 7/5$ pour l'air) des chaleurs spécifiques (voir par exemple le livre de Courant et Friedrichs [CF48]) :

$$(2.9) \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

• Le système (2.7) doit être “fermé” via deux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = X(t)$ et une condition initiale à $t = 0$ qu’on peut écrire :

$$(2.10) \quad W(\bullet, 0) = W_0.$$

La condition limite en $x = 0$ consiste à se donner un état fluide $W_\infty(t)$ via une condition faible d’entropie à la limite :

$$(2.11) \quad W(0, t) \in \mathcal{E}(W_\infty(t))$$

qui relie un ensemble d’états admissibles $\mathcal{E}(W_\infty(t))$ à un état $W(0, t)$ au bord du domaine d’étude (voir [DLf88] et [Du88]) ; dans le cas d’une étude linéarisé où $W(0, t)$ est voisin de $W_\infty(t)$, la condition d’entropie à la paroi limite (2.11) revient à écrire les “relations caractéristiques entrantes”, dont Kreiss [Kr70] a démontré qu’elles conduisent à un problème linéaire bien posé. La condition sur la paroi mobile est de type non pénétration ; la “normale extérieure” au domaine $\Omega(t)$ est ici simplement égale à 1 et il suffit d’écrire que la vitesse du fluide $u(X(t), t)$ sur la paroi mobile est égale à la vitesse (imposée) $\frac{dX}{dt}$ de ladite paroi :

$$(2.12) \quad u(X(t), t) = \frac{dX}{dt}, \quad t \geq 0.$$

• La discrétisation numérique du problème (2.7), (2.10), (2.11), (2.12) s’effectue avec l’une des nombreuses variantes de l’approche Muscl de van Leer [vL79] ; nous en donnons une version avec un schéma d’ordre 1 en temps et renvoyons le lecteur par exemple à [Du93] pour une proposition d’implémentation du schéma explicite de Heun. On fixe un pas d’espace Δx de sorte que :

$$(2.13) \quad I \Delta x = L, \quad I \text{ entier} \geq 1$$

et

$$(2.14) \quad |X(t) - L| \ll \Delta x$$

ce qui revient à exprimer que le mouvement $X(t)$ est d’extension spatiale tellement faible qu’une discrétisation usuelle des équations d’Euler le néglige géométriquement. Fixons les notations pour le maillage, qui ne sont pas les plus simples pour ce problème monodimensionnel, mais sont les plus naturelles à transposer au cas multidimensionnel. On pose :

$$(2.15) \quad x_{i+1/2} = i \Delta x \quad 0 \leq i \leq I$$

et

$$(2.16) \quad x_{I+1/2}(t) = X(t) \quad t \geq 0,$$

l'hypothèse (2.14) indique que la dernière maille reste quasiment de volume Δx lorsque t varie.

- La discrétisation en temps introduit classiquement un paramètre de discrétisation $\Delta t > 0$ (voir la figure 3) ; la vitesse moyenne de la paroi mobile entre les deux pas de temps $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$ est notée $s^{n+1/2}$:

$$(2.17) \quad s^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n \right).$$

Par convention, la notation en exposant n qui fixe les variables au temps $(n\Delta t)$. Cette vitesse $s^{n+1/2}$ est faible devant la vitesse de mise à l'équilibre dans le fluide, donc en particulier la vitesse du son dans la dernière maille :

$$(2.18) \quad |s^{n+1/2}| \ll c_I^n, c_I^{n+1}; \quad n \text{ entier} \geq 0$$

et la vitesse du son $c(W)$ satisfait à la relation :

$$(2.19) \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

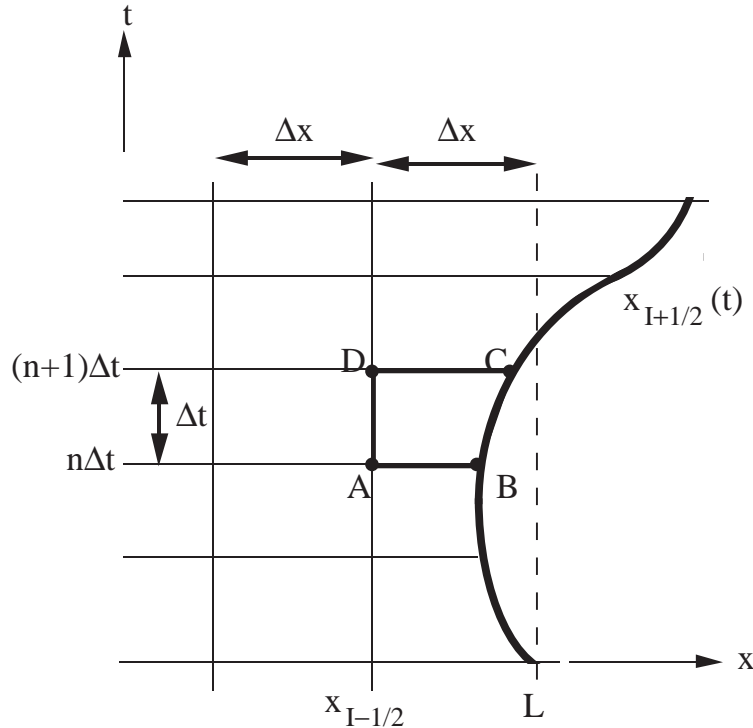


Figure 3 Discrétisation spatio-temporelle d'une paroi monodimensionnelle lentement variable.

- La méthode des volumes finis consiste à intégrer la loi de conservation (2.7) dans une boîte $]x_{I-1/2}, x_{I+1/2}[\times]n\Delta t, (n+1)\Delta t[$, à introduire comme inconnue de base la valeur moyenne W_i^n au temps $n\Delta t$:

$$(2.20) \quad W_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, n\Delta t) dx ; \quad 1 \leq i \leq I$$

et à chercher à exprimer le flux d'interface $f_{i+1/2}^{n+1/2}$ donné par l'expression :

$$(2.21) \quad f_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(W(x_{i+1/2}, t)) dt$$

à l'aide de l'ensemble de variables $\{W_l^n, 1 \leq l \leq I\}$ de façon à faire avancer d'un pas de temps Δt les variables conservées :

$$(2.22) \quad \frac{1}{\Delta t} [W_i^{n+1} - W_i^n] + \frac{1}{\Delta x} [f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2}] = 0.$$

Pour les valeurs de i allant de 1 à $I-1$, le maillage est fixe et la relation (2.22) s'applique ; la condition limite de paroi mobile consiste à imposer à la relation (2.22) d'être encore vraie dans la dernière maille, alors que l'intégration de la loi de conservation doit se faire dans un domaine contenant une paroi mobile.

- La méthode Muscl propose de calculer d'abord une valeur interpolée $W_{i+1/2,-}^n$ à gauche de l'interface $x_{i+1/2}$ et une valeur interpolée $W_{i+1/2,+}^n$ à droite de cette interface avant de calculer le flux numérique $f_{i+1/2}^{n+1/2}$ à l'aide d'un "solveur" approché $\Psi(\bullet, \bullet)$ du problème de Riemann entre les valeurs extrapolées $W_{i+1/2,\pm}^n$ de part et d'autre de l'interface :

$$(2.23) \quad f_{i+1/2}^{n+1/2} = \Psi(W_{i+1/2,-}^n, W_{i+1/2,+}^n).$$

Dans le cas de la première maille ($i=1$), le flux entrant $f_{1/2}^{n+1/2}$ est évalué en utilisant la donnée fluide W_∞^n à l'instant $n\Delta t$:

$$(2.24) \quad f_{1/2}^{n+1/2} = \Psi(W_\infty^n, W_{1/2,+}^n), \quad n \geq 0.$$

- Pour être complet, rappelons que le logiciel industriel utilise comme flux numérique $\Psi(\bullet, \bullet)$ le flux-splitting de van Leer [vL82] (à ne pas confondre avec le schéma Muscl de van Leer !) défini par les relations suivantes :

$$(2.25) \quad \Psi(W_g, W_d) = f^+(W_g) + f^-(W_d).$$

Les flux partiels $f^\pm(\bullet)$ réalisent une décomposition de la fonction de flux $f(\bullet)$ donnée à la relation (2.8) :

$$(2.26) \quad f(W) = f^+(W) + f^-(W), \quad \forall W \in \mathbb{R}^3$$

et la fonction $f^+(\bullet)$ est paramétrée par le nombre de Mach $M = \frac{u}{c}$ de l'état W . On a :

$$(2.27) \quad f^+(W) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leq -1 \\ (f_m^+, f_x^+, f_e^+)^t & \text{si } |M| \leq 1 \\ f(W) & \text{si } M \geq 1 \end{cases}$$

avec les relations suivantes :

$$(2.28) \quad f_m^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2$$

$$(2.29) \quad f_x^+(W) = f_m^+(W) \frac{(\gamma-1)u + 2c}{\gamma}$$

$$(2.30) \quad f_e^+(W) = f_m^+(W) \frac{((\gamma-1)u + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}.$$

- Dans le cas particulier où la paroi est fixe (c'est-à-dire $X(t) \equiv L$, $x_{I+1/2}^n \equiv I\Delta x$), la relation (2.22) est encore valable et le flux paroi est donné encore à l'aide de la relation (2.22), mais l'état $W_{I+1/2,+}^n$ est en général choisi comme l'état "miroir" $\mu(W_{I+1/2,-}^n)$ de $W_{I+1/2,-}^n$ de façon à imposer un flux à la paroi de la forme "force de pression" :

$$(2.31) \quad f_{I+1/2}^{n+1/2} = (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t, \quad n \geq 0.$$

Afin d'alléger les notations, notons u_*^n la vitesse extrapolée à la paroi :

$$(2.32) \quad u_*^n = u(W_{I+1/2,-}^n), \quad n \geq 0$$

et supposons le nombre de Mach de cet état extrapolé compris entre -1 et 1 . Rappelons, compte-tenu des relations (2.26) à (2.30) que pour $|M| \leq 1$, on a :

$$(2.33) \quad f_m^-(W) = -\rho c \left(\frac{M-1}{2} \right)^2$$

$$(2.34) \quad f_x^-(W) = f_m^-(W) \frac{(\gamma-1)u - 2c}{\gamma}$$

$$(2.35) \quad f_e^-(W) = f_m^-(W) \frac{((\gamma-1)u - 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}.$$

Dans ces conditions, le choix d'un foncteur "miroir" $\mu(\bullet)$ est donné par :

$$(2.36) \quad \mu(W) = (\rho, -\rho u, \rho E)^t$$

qui assure que pour $|M(W)| \leq 1$, on a :

$$(2.37) \quad f^+(W) + f^-(\mu(W)) = \left(0, 2 f_m^+(W) \frac{(\gamma - 1)u + 2c}{\gamma}, 0\right)^t.$$

Nous avons démontré la

Proposition 2.1 Pression paroi à vitesse nulle.

Lorsque la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi (définie à la relation (2.17)) est nulle, la pression $p_*^{n+1/2}(0)$ définie en (2.31) est calculée par l'expression :

$$(2.38) \quad p_*^{n+1/2}(0) = 2 f_m^+(W_{I+1/2,-}^n) \frac{(\gamma - 1)u_*^n + 2c_*^n}{\gamma} \quad \text{si } |M_*^n| \leq 1,$$

où u_*^n , c_*^n et $M_*^n = \frac{u_*^n}{c_*^n}$ sont respectivement la vitesse, la célérité du son et le nombre de Mach de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$. Lorsque $u_*^n = 0$, la relation (2.38) exprime de deux façons différentes la pression p_*^n de l'état extrapolé.

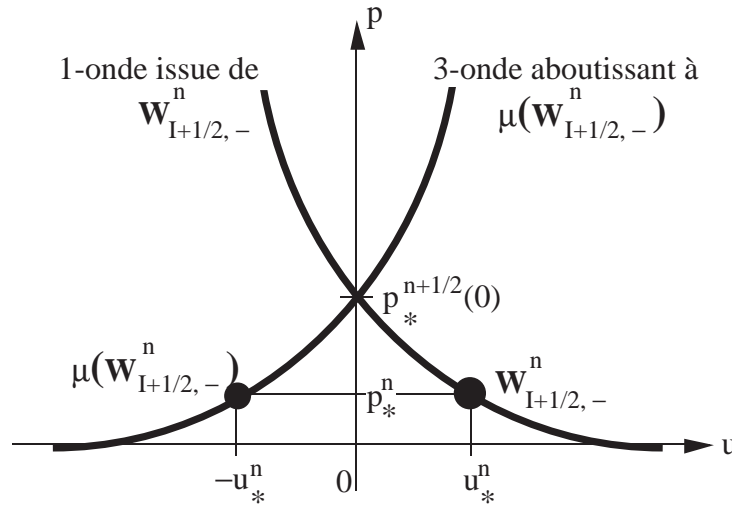


Figure 4 Problème de Riemann avec un état miroir.

Remarque 2.1

- Il faut faire attention au fait qu'en général, $p_*^{n+1/2}(0)$ n'est pas égale à p_*^n : la pression à la paroi $p_*^{n+1/2}(0)$ est *a priori* différente de la pression de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$ car la vitesse u_*^n près de la paroi, lorsqu'elle est non nulle, introduit une sur-pression (ou une sous-pression). On renvoie à la figure 4 où l'on a représenté les ondes du problème de Riemann entre l'état extrapolé et son miroir.

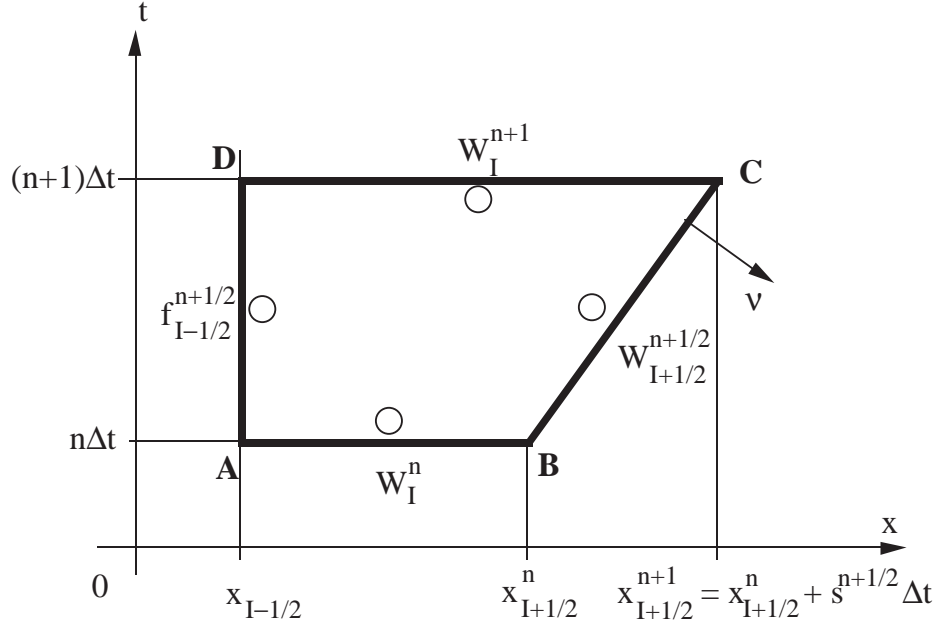


Figure 5 Volume de contrôle (ABCD) dans l'espace-temps.

• 2.2 • Bilan spatio-temporel

• Dans le cas où la paroi $X(t)$ est mobile, la loi de conservation (2.22) ne s'applique plus *a priori*, et en particulier, le flux à la paroi $f_{I+1/2}^{n+1/2}$ ne saurait être calculé à l'aide de la relation (2.31). La condition limite de paroi mobile est une réécriture de la loi de conservation (2.7) dans la boîte d'espace-temps ABCDA décrite à la figure 5, qui force la forme algébrique (2.22), quitte à définir un nouveau flux à la paroi, noté $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ et appelé dans la suite "flux limite de paroi mobile". On a la

Proposition 2.2

Condition limite de paroi mobile monodimensionnelle.

Avec les notations utilisées plus haut, soit $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ l'état de vitesse $s^{n+1/2}$ sur la 1-onde (de choc ou de détente) issue de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$ (de vitesse u_*^n , pression p_*^n , densité ρ_*^n , vitesse du son c_*^n). Sa pression :

$$p_{I+1/2}^{n+1/2} \equiv p(W_{I+1/2}^{n+1/2})$$

est calculée par résolution du système d'équations suivant :

$$(2.39) \quad s^{n+1/2} - u_*^n + \frac{2}{\gamma - 1} c_*^n \left[\left(\frac{p_{I+1/2}^{n+1/2}}{p_*^n} \right) - 1 \right] = 0 \quad \text{si } s^{n+1/2} - u_*^n \geq 0$$

$$(2.40) \quad s^{n+1/2} - u_*^n + \frac{\sqrt{2} (p_{I+1/2}^{n+1/2} - p_*^n)}{\sqrt{\rho_*^n [(\gamma + 1) p_{I+1/2}^{n+1/2} + (\gamma - 1) p_*^n]}} = 0$$

si $s^{n+1/2} - u_*^n \leq 0$.

Si dans la méthode Muscl, on résout exactement le problème de Riemann, c'est-à-dire si la fonction $\Psi(\bullet, \bullet)$ de la relation (2.23) est calculée à l'aide du flux de Godunov, alors le flux $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ relatif à la condition limite de paroi mobile est évalué grâce à l'expression algébrique suivante :

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{I+1/2}^{n+1/2} &= \frac{\Delta x}{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}} \left\{ \left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} f_{I-1/2}^{n+1/2} + s^{n+1/2} W_I^n \right\}. \end{aligned} \right.$$

Remarque 2.2

- Lorsque $s^{n+1/2} = 0$, le préfacteur de l'accolade dans la relation (2.41) est égal à 1, les coefficients de $f_{I-1/2}^{n+1/2}$ et W_I^n sont nuls et la pression $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ est exactement la pression de l'état de vitesse nulle dans la résolution de problème de Riemann entre $W_{I+1/2,-}^n$ et son miroir $\mu(W_{I+1/2,-}^n)$. Cette dernière est approchée par $p_*^{n+1/2}(0)$, calculée à la relation (2.38) si on remplace la résolution exacte du problème de Riemann par le flux de van Leer.

Preuve de la proposition 2.2.

- On intègre la loi de conservation (2.7) dans le volume d'espace-temps ABCDA décrit à la figure 5. La normale extérieure à ce domaine a la forme très générale $\nu = (\nu_x, \nu_t)$. On a donc :

$$(2.42) \quad \int_{\partial(ABCD A)} \{W \nu_t + f(W) \nu_x\} d\gamma = 0$$

et il suffit de détailler le calcul des quatre termes de cette intégrale de contour.

- On a d'abord, pour le segment "horizontal" AB :

$$(2.43) \quad \int_{AB} W \nu_t d\gamma = -(\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}) W_I^n$$

puisque $x_{I+1/2}^n - x_{I-1/2} = x_{I+1/2} - (x_{I+1/2} - \Delta x)$.

- Le segment BC de la frontière mobile a une direction normale ν qui satisfait aux relations :

$$(2.44) \quad \nu_x = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^{n+1/2})^2}}$$

$$(2.45) \quad \nu_t = -\frac{s^{n+1/2}}{\sqrt{1 + (s^{n+1/2})^2}}$$

et la “longueur spatio-temporelle” est telle que :

$$(2.46) \quad \int_{BC} \nu_x d\gamma = \Delta t.$$

- On fait l’hypothèse que ce flux est calculé en utilisant un problème de Riemann partiel ([Du87], [DLf89] et [Du01]) ayant comme état à gauche $W_{I+1/2,-}^n$ de façon à couvrir dans l’espace-temps le secteur angulaire des vitesses v qui vérifient $v \leq s^{n+1/2}$. Si $u_*^n \leq s^{n+1/2}$, il se produit une détente à partir de l’état $W_{I+1/2,-}^n$ pour aboutir à un état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ de vitesse $s^{n+1/2}$ en $\frac{x}{t} = s^{n+1/2}$ et la relation (2.39) s’applique. Dans le cas contraire où $u_*^n \geq s^{n+1/2}$, on passe de $W_{I+1/2,-}^n$ à $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ par une onde de choc et la relation (2.40) doit être utilisée. Pour plus de détail algébrique, on renvoie à [CF48]. Dans tous les cas, un état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ est présent avec la célérité $s^{n+1/2}$ et l’on a :

$$(2.47) \quad \int_{BC} \{W \nu_t + f(W) \nu_x\} d\gamma = \Delta t \left(f(W_{I+1/2}^{n+1/2}) - s^{n+1/2} W_{I+1/2}^{n+1/2} \right)$$

comme l’explicite quasiment la figure 5 à partir des relations (2.44) à (2.46).

- La forme particulière de la fonction de flux (2.8) et le fait que la vitesse de l’état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ est exactement égale à $s^{n+1/2}$ montrent que :

$$(2.48) \quad \int_{BC} \{W \nu_t + f(W) \nu_x\} d\gamma = \Delta t \left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t$$

où, comme annoncé, $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ est la pression de l’état $W_{I+1/2}^{n+1/2}$ (voir la figure 6).

- On a ensuite facilement :

$$(2.49) \quad \int_{CD} W \nu_t d\gamma = (\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1/2} - x_{I+1/2}) W_I^n$$

$$(2.50) \quad \int_{DA} f(W) \nu_x d\gamma = -\Delta t f_{I-1/2}^{n+1/2}$$

et ce dernier flux est évalué à l'aide du schéma (2.23), valable à l'intérieur du domaine d'étude.

• On regroupe les expressions (2.43), (2.48), (2.49) et (2.50) pour écrire la relation de conservation (2.42), et on divise par Δt . Il vient :

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \left[(\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}) W_I^{n+1} \right. \\ \quad \left. - (\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}) W_I^n \right] \\ \quad \left. + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t - f_{I-1/2}^{n+1/2} \right] \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Le rapprochement de (2.51) et de (2.22) permet d'introduire un flux de paroi mobile $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ de façon à ce qu'une réécriture de (2.51) sous la forme (2.22) ne modifie en rien le résultat. Il vient, par soustraction de (2.51) et de (2.22)

multiplié par $1 + \frac{x_{I+1/2}^{n+1/2} - x_{I+1/2}}{\Delta x}$ c'est-à-dire par soustraction de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) W_I^{n+1} - \left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) W_I^n \right] + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) F_{I+1/2}^{n+1/2} - \left(\frac{\Delta x + x_{I+1/2}^n - x_{I+1/2}}{\Delta x} \right) f_{I-1/2}^{n+1/2} \right] \\ & \hspace{15em} = 0, \end{aligned}$$

la relation :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Delta t \Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n) W_I^n + \frac{\Delta x + x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x^2} F_{I+1/2}^{n+1/2} \\ & \quad - \frac{1}{\Delta x} \left(0, p_{I+1/2}^{n+1/2}, p_{I+1/2}^{n+1/2} s^{n+1/2} \right)^t - \frac{1}{\Delta x^2} (x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n) f_{I-1/2}^{n+1/2} = 0, \end{aligned}$$

qui, à une opération algébrique simple près, s'identifie à la relation (2.41). La proposition 2.2 est établie. \square

Remarque 2.3

• Il faut noter que la relation (2.41) est vraie en toute généralité, sans hypothèse sur $s^{n+1/2}$, à condition de résoudre l'une des deux équations non-linéaires (2.39) ou (2.40). De même, il suffit que la condition de "non pénétration du maillage" :

$$(2.52) \quad x_{I+1/2}^n > x_{I-1/2} = x_{I+1/2} - \Delta x, \quad n \geq 0$$

soit réalisée pour que le calcul précédent soit légitime, sans utilisation de l'hypothèse (2.14).

- Le défaut de la relation (2.41) est que lorsque la vitesse de la paroi $s^{n+1/2}$ est identiquement nulle, la pression paroi est calculée par le flux de Godunov, alors que le savoir-faire numérique initial utilise le flux de van Leer et en particulier la relation (2.38). Nous allons donc adapter l'étude au cas du schéma numérique réellement utilisé au sein du logiciel industriel.

• 2.3 • Développement limité de la pression paroi

- Dans le cas où la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi est faible devant la vitesse des ondes du problème (hypothèse (2.18)), on peut linéariser les équations (2.39) et (2.40) qui autorisent le calcul de la pression $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ à la paroi. Nous avons la

Proposition 2.3 Calcul approché de la pression paroi.

Pour calculer le flux limite de paroi mobile $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ à l'aide de la relation (2.41), on peut utiliser pour évaluer la pression paroi au premier ordre (par rapport à la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi mobile) l'expression suivante :

$$(2.53) \quad p_{I+1/2}^{n+1/2} = p_*^{n+1/2}(0) - \rho_*^n c_*^n s^{n+1/2} \equiv p_*^{n+1/2}(s^{n+1/2})$$

au lieu des équations (2.39) et (2.40). Dans la relation (2.53), ρ_*^n et c_*^n désignent respectivement la densité et la célérité du son de l'état $W_{I+1/2,-}^n$ extrapolé à la paroi et $p_*^{n+1/2}(0)$ la pression paroi à vitesse nulle, étudiée à la proposition 2.1 et calculée pour le flux de van Leer à l'aide de la relation (2.38).

Preuve de la proposition 2.3.

- On fait l'hypothèse que le calcul de la pression paroi à vitesse nulle, donné théoriquement par (2.39) ou (2.40) avec $s^{n+1/2} = 0$, peut être approché par l'expression (2.38) issue de l'emploi du flux de van Leer. On utilise la relation (2.39) (ou bien (2.40) qui lui est équivalente pour ce qui suit car les courbes de choc et de détente ont mêmes éléments de contact jusqu'à l'ordre deux inclus, voir par exemple [CF48]) pour calculer la dérivée dp/ds de la pression paroi en fonction de la vitesse paroi ; il vient, en dérivant par rapport à la variable $s^{n+1/2}$ la relation (2.39) :

$$(2.54) \quad 1 + \frac{2}{\gamma - 1} c_*^n \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{p_*^n} \left(\frac{dp}{ds} \right) (0) = 0$$

si on suppose les pressions p_*^n et $p_*^{n+1/2}(0)$ assez voisines, ce qui est légitime lorsque la vitesse u_*^n de l'état extrapolé $W_{I+1/2,-}^n$ est voisine de la vitesse $s^{n+1/2}$ de la paroi, elle-même infiniment petite compte tenu de l'hypothèse (2.18). On tire alors de la relation (2.54) :

$$(2.55) \quad \left(\frac{dp}{ds}\right)(0) = -\rho_*^n c_*^n$$

et la relation (2.53) résulte de (2.55) et de la formule de Taylor à l'ordre un. \square

Remarque 2.4

• Lorsque les vitesses u_*^n et $s^{n+1/2}$ sont des infiniment petits du même ordre, on peut également calculer $p_*^{n+1/2}(0)$ par développement limité de la relation (2.39) par rapport à $s^{n+1/2}$, compte tenu de l'expression :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)(0) = \rho_*^n c_*^n$$

qui fournit grâce à la formule de Taylor la pression à vitesse nulle :

$$(2.56) \quad p_*^{n+1/2}(0) = p_*^n + \rho_*^n c_*^n u_*^n .$$

De façon équivalente la pression à paroi mobile se calcule par :

$$(2.57) \quad p_{I+1/2}^{n+1/2} = p_*^n + \rho_*^n c_*^n (u_*^n - s^{n+1/2}) ,$$

relation qu'on peut obtenir directement à partir de (2.39) et de sa linéarisation à l'ordre 1 par rapport à la variable $u_*^n - s^{n+1/2}$.

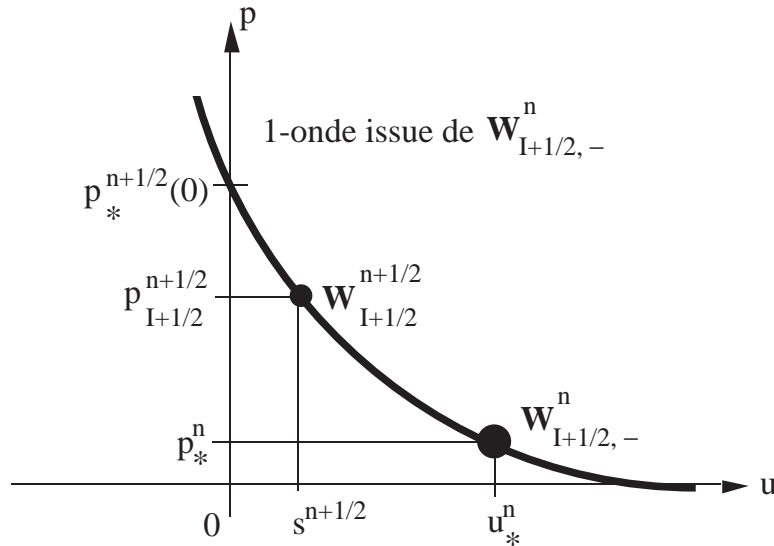


Figure 6 Problème de Riemann partiel à la frontière.

- La figure 6 illustre bien ces relations (2.53), (2.56) et (2.57) : si $u_*^n = s^{n+1/2}$, alors l'état extrapolé le long de la paroi a exactement la vitesse de la paroi et sa pression p_*^n s'identifie à la pression sur la paroi mobile.

• 2.4 • Expression approchée du flux paroi

- La condition limite de paroi mobile est conçue pour étudier des écoulements tels que d'une part le nœud de la paroi est mobile avec une faible vitesse devant celle des ondes présentes dans l'écoulement (hypothèse (2.18)) et d'autre part l'extension spatiale de la perturbation reste petite devant la taille Δx de la dernière maille (hypothèse (2.14)). On peut donc injecter cette double hypothèse de petite perturbation dans la relation (2.41) pour calculer le flux limite de paroi mobile, en tenant compte du travail déjà fait pour le calcul de la pression paroi proprement dite.

Proposition 2.4

Condition limite de paroi mobile linéarisée à une dimension d'espace.

Supposons la paroi mobile d'indice $I + 1/2$. Soit W_I^n l'état de la dernière maille à l'instant $n\Delta t$ considéré, ρ_*^n et c_*^n la densité et la célérité du son de l'état $W_{I+1/2,-}^n$ extrapolé à la paroi avec la méthode Muscl, $f_{I-1/2}^{n+1/2}$ le flux entre l'avant dernière maille (de numéro $I - 1$) et la dernière maille (de numéro I), $p_*^{n+1/2}(0)$ la pression paroi calculée par le schéma numérique lorsque celle-ci est immobile, $s^{n+1/2}$ la vitesse discrète du point paroi et $x_{I+1/2}^{n+1}$ sa position à l'instant $(n+1)\Delta t$. Sous les hypothèses précédentes, écrites une nouvelle fois, à savoir :

$$(2.58) \quad |x_{I+1/2}^{n+1} - L| \ll \Delta x$$

$$(2.59) \quad \left| s^{n+1/2} \equiv \frac{x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}^n}{\Delta t} \right| \ll c_*^n,$$

le flux limite de paroi mobile admet le développement limité suivant :

$$(2.60) \quad F_{I+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} p_*^{n+1/2}(0) (0, 1, s^{n+1/2})^t + \\ + s^{n+1/2} [W_I^n + (0, -\rho_*^n c_*^n, 0)^t] + \\ + \frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L) [f_{I-1/2}^{n+1/2} - (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t] + \\ + O\left(\left(\frac{x_{I+1/2}^{n+1} - L}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{s^{n+1/2}}{c_*^n}\right)^2\right). \end{cases}$$

Preuve de la proposition 2.4

• On injecte les hypothèses (2.58), (2.59) et le développement de la pression paroi $p_{I+1/2}^{n+1/2}$ évaluée à la relation (2.53) au sein de l'expression (2.41). Ceci permet de calculer le flux $F_{I+1/2}^{n+1/2}$ en ne conservant que les termes d'ordres 0 ou 1 par rapport aux deux infiniment petits induits par (2.58) et (2.59), supposés du même ordre. Il vient :

$$F_{I+1/2}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{x_{I+1/2}^{n+1/2} - x_{I+1/2}}{\Delta x}\right) (0, p_*^{n+1/2}(0) - \rho_*^n c_*^n s^{n+1/2}, p_*^{n+1/2}(0) s^{n+1/2})^t \\ + \frac{x_{I+1/2}^{n+1} - x_{I+1/2}}{\Delta x} f_{I-1/2}^{n+1/2} + s^{n+1/2} W_I^n + \left\{ \text{ordre} \geq 2 \right\}$$

c'est à dire :

$$(2.61) \quad F_{I+1/2}^{n+1/2} = \left\{ \begin{array}{l} (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t + \\ + s^{n+1/2} \left[W_I^n + (0, -\rho_*^n c_*^n, p_*^{n+1/2}(0) s^{n+1/2})^t \right] + \\ + \frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L) \left[f_{I-1/2}^{n+1/2} - (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t \right] + \\ + \left\{ \text{ordre} \geq 2 \right\}. \end{array} \right.$$

Cette expression (2.61) fait apparaître le terme d'ordre zéro (cas où la paroi mobile est fixe, c'est à dire $x_{I+1/2} \equiv L$), le terme d'ordre un par rapport à $s^{n+1/2}$ et enfin le terme d'ordre un par rapport à $\frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L)$. Elle est identique à la relation (2.60), ce qui montre la propriété. \square

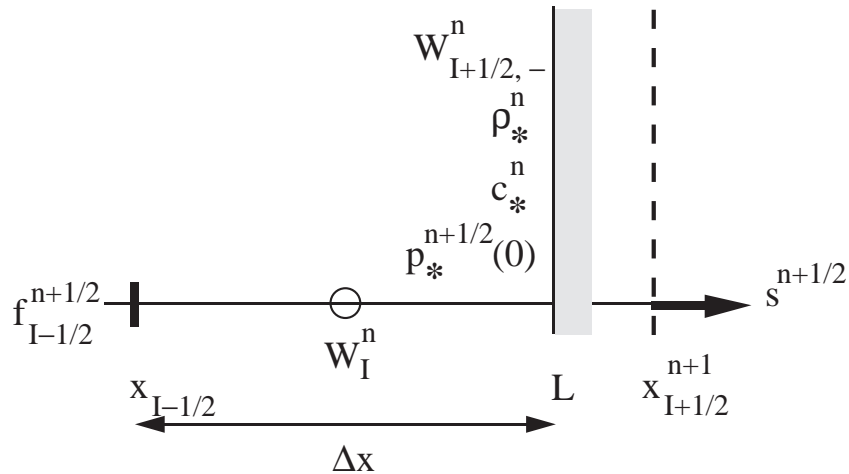


Figure 7 Variables utiles pour le calcul de la condition limite de paroi mobile linéarisée, à une dimension d'espace.

Remarque 2.5

• Les variables utiles pour le calcul de la relation (2.60) sont illustrées à la figure 7. Si on compare la relation (2.60) au savoir-faire décrit dans [RC96] [page 3], on constate que le troisième terme

$$\frac{1}{\Delta x} (x_{I+1/2}^{n+1} - L) \left(f_{I-1/2}^{n+1/2} - (0, p_*^{n+1/2}(0), 0)^t \right)$$

doit être introduit aux travaux antérieurs pour aboutir à notre expression (2.60). La méthodologie employée, fondée sur une intégration de la loi de conservation en espace-temps suivie d'un développement limité par rapport à la vitesse du nœud paroi et à son élongation par rapport à la position nominale, fait apparaître après linéarisation un nouveau terme dans le flux limite de paroi mobile.

3) Etude bidimensionnelle

• 3.1 • Géométrie discrète

• Le domaine d'étude $\Omega(t)$, mobile avec le temps t , est maintenant inclus dans le plan \mathbb{R}^2 . Nous le supposons composé d'une réunion de quadrangles $K_{i,j}$ avec $i \leq I$, $j \in \mathbb{Z}$; chaque quadrangle $K_{i,j}$ est délimité par des sommets $M_{l+1/2, m+1/2}$ ($l \leq I, m \in \mathbb{Z}$) :

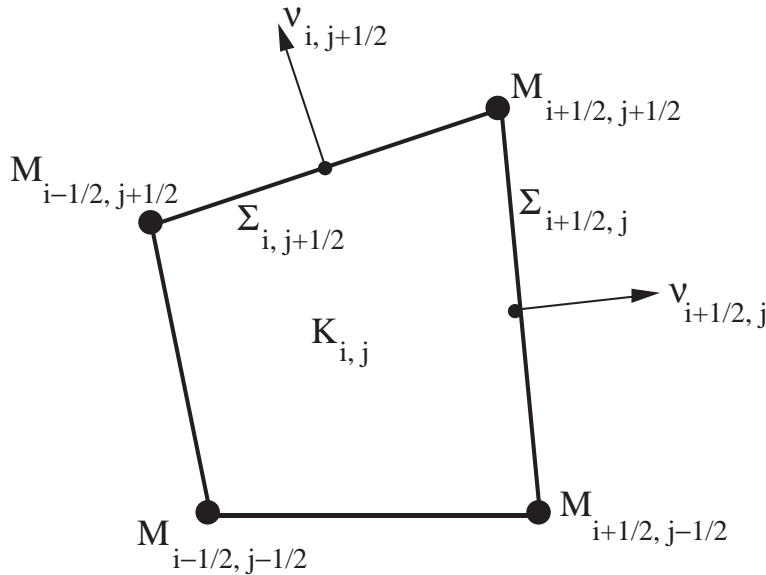


Figure 8 Quadrangle structuré $K_{i,j}$ avec les quatre sommets $M_{l-1/2, j-1/2}$, $M_{l+1/2, j-1/2}$, $M_{l+1/2, j+1/2}$ et $M_{l-1/2, j+1/2}$ dont il est l'enveloppe convexe et deux faces $\Sigma_{i+1/2, j}$ et $\Sigma_{i, j+1/2}$ parmi les quatre de la frontière $\partial K_{i,j}$.

$$(3.1) \quad \partial K_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} [M_{i+1/2, j-1/2}, M_{i+1/2, j+1/2}] \cup \\ [M_{i+1/2, j+1/2}, M_{i-1/2, j+1/2}] \cup \\ [M_{i-1/2, j-1/2}, M_{i-1/2, j+1/2}] \cup \\ [M_{i-1/2, j-1/2}, M_{i+1/2, j-1/2}] \end{array} \right.$$

comme explicité à la figure 8. Nous supposons de plus que les sommets sur la frontière, de numéro avec un premier indice égal à $I+1/2$, sont mobiles au cours du temps, et nous posons :

$$(3.2) \quad M_{I+1/2, j+1/2}(t) = M_{I+1/2, j+1/2} + \delta_{j+1/2}(t), \quad j \in \mathbb{Z}$$

et avec des notations “évidentes”, illustrées figure 9 :

$$(3.3) \quad \partial K_{I,j}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \{ M_{I,j}(\theta, \xi, t) \equiv \theta \xi M_{i+1/2, j+1/2}(t) + \\ \quad + (1-\theta) \xi M_{I-1/2, j+1/2} + \\ \quad + (1-\theta)(1-\xi) M_{I-1/2, j-1/2} + \\ \quad + \theta(1-\xi) M_{I+1/2, j-1/2}, \quad \theta, \xi \in [0, 1] \} \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$(3.4) \quad \Omega(t) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\bigcup_{i \leq I-1} K_{i,j} \right) \cup K_{I,j}(t) \right\}$$

et le domaine $\Omega(t)$ a une frontière $\partial\Omega(t)$ composée de segments de droite :

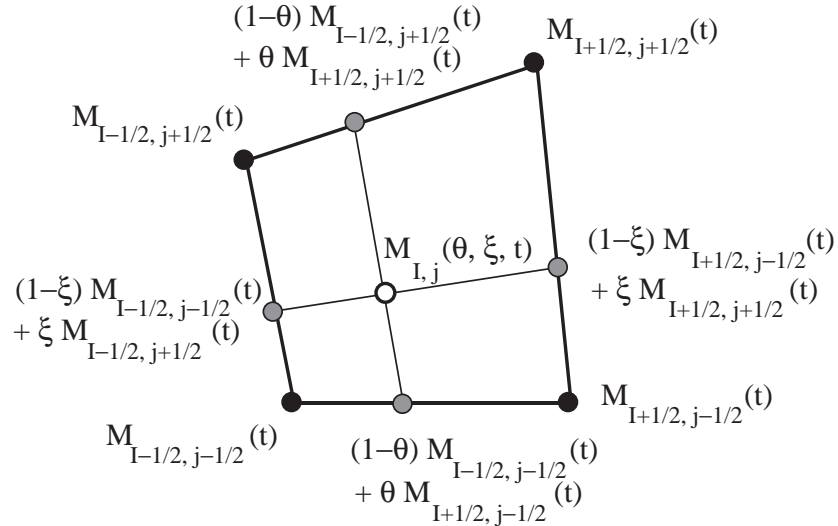


Figure 9 Paramétrage par le triplet (θ, ξ, ζ) des points du quadrangle mobile $K_{i,j}(t)$.

$$(3.5) \quad \partial\Omega(t) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [M_{I+1/2, j-1/2}(t), M_{I+1/2, j+1/2}(t)]$$

qui par hypothèse reste voisine de la frontière de référence $\partial\Omega_0$, avec :

$$(3.6) \quad \partial\Omega_0 = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [M_{I+1/2, j-1/2}, M_{I+1/2, j+1/2}],$$

comme illustré figure 10.

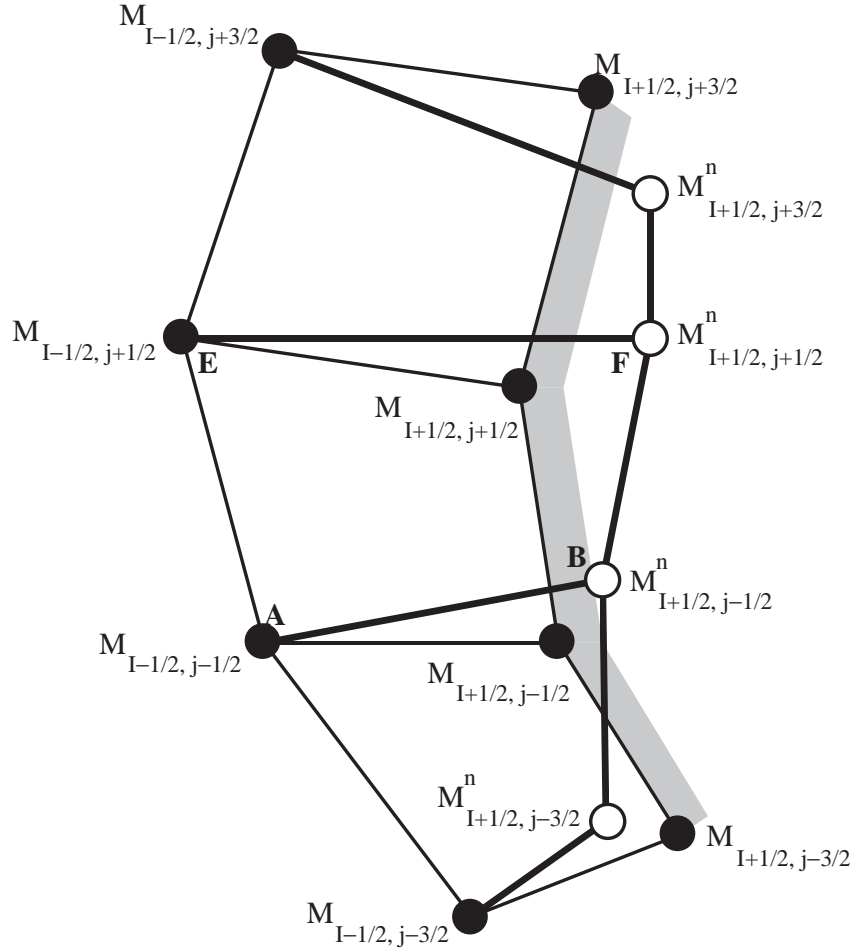


Figure 10 Paroi mobile d'indice $I + 1/2$, à deux dimensions d'espace ; les points d'indice supérieur n sont mobiles au cours du temps.

- La discrétisation temporelle introduit un pas de temps $\Delta t > 0$, des temps discrets t^n ,

$$(3.7) \quad t^n = n \Delta t, \quad n \geq 0$$

et on pose par convention : $M_{I+1/2, j+1/2}^n = M_{I+1/2, j+1/2}(n\Delta t)$

$$(3.8) \quad M_{I+1/2, j+1/2}^n = M_{I+1/2, j+1/2} + \delta_{j+1/2}^n, \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La vitesse du point d'indice $(I + 1/2, j + 1/2)$ entre deux instants $n\Delta t$ et $(n + 1)\Delta t$ est un vecteur $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ calculé comme quotient aux différences finies :

$$(3.9) \quad s_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} - M_{I+1/2, j+1/2}^n \right\} = \frac{1}{\Delta t} (\delta_{j+1/2}^{n+1} - \delta_{j+1/2}^n)$$

et entre les instants t^n et t^{n+1} la cellule $K_{I,j}(t)$ décrit un volume d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$ qu'on peut définir par :

$$(3.10) \quad V_{I,j}^{n+1/2} = \left\{ \left\{ \left(\frac{(n+1)\Delta t - t}{\Delta t} K_{I,j}^n + \frac{t - n\Delta t}{\Delta t} K_{I,j}^{n+1}, t \right), \right. \right. \\ \left. \left. n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \right\} \right\}.$$

- La cellule $V_{I,j}^{n+1/2}$ appartient à un espace-temps tridimensionnel avec un espace bidimensionnel donc est topologiquement de forme cubique (Figure 11). Son bord $\partial V_{I,j}^{n+1/2}$ est composé de six faces d'espace-temps à deux dimensions spatiales : la paroi mobile CDFG, les deux faces latérales BCDA et GFEH, la paroi fixe ADHE de premier indice $I - 1/2$ qui fait face à la paroi mobile, la cellule $K_{I,j}^n = BAEF$ à l'instant $n\Delta t$ et la cellule $K_{I,j}^{n+1} = DCGH$ à l'instant $(n + 1)\Delta t$, comme le suggère la figure 11.

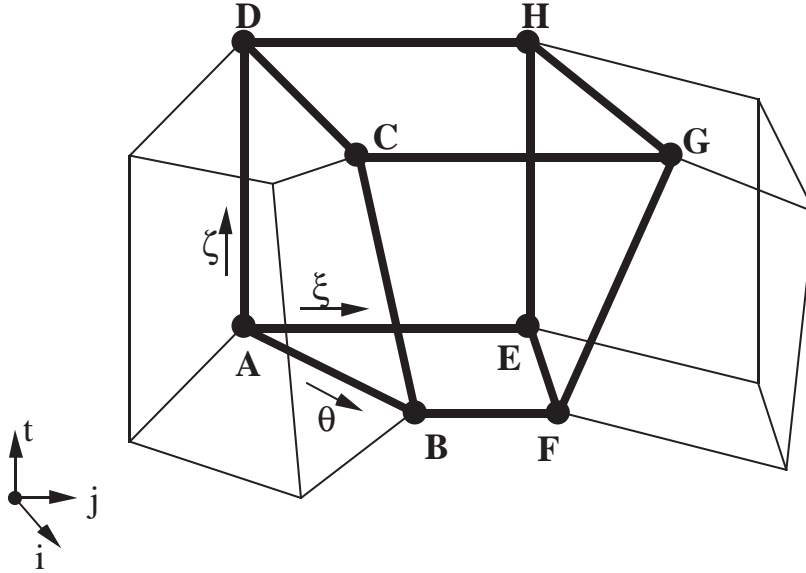


Figure 11 Cellule $V_{I,j}^{n+1/2}$ dans l'espace-temps. Son bord $\partial V_{I,j}^{n+1/2}$ est composé par les six faces CDFG, BCDA, GFEH, ADHE, BAEF et DCGH. Elle est paramétrée par les variables θ (direction i du maillage), ξ (direction j) et ζ (direction temporelle) toutes trois entre 0 et 1 grâce à une interpolation polynomiale transfinie de degré partiel inférieur ou égal à 1.

- Dans la suite de cette troisième section, nous notons $\Sigma_{i+1/2,j}$ (respectivement $\Sigma_{i,j+1/2}$) l'interface $[M_{i+1/2,j-1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}]$ entre $K_{i,j}$ et $K_{i+1,j}$ (respectivement l'interface $[M_{i-1/2,j+1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}]$ entre $K_{i,j}$ et $K_{i,j+1}$) :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \Sigma_{i+1/2,j} &= [M_{i+1/2,j-1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}] = \partial K_{i,j} \cap \partial K_{i+1,j} \\ \Sigma_{i,j+1/2} &= [M_{i-1/2,j+1/2}, M_{i+1/2,j+1/2}] = \partial K_{i,j} \cap \partial K_{i,j+1}. \end{cases}$$

La normale orientée dans le sens des indices croissants entre $K_{i,j}$ et $K_{i+1,j}$ est notée $\nu_{i+1/2,j}$; celle entre $K_{i,j}$ et $K_{i,j+1}$ est notée $\nu_{i,j+1/2}$. Elle est définie par intégration de la normale ν le long de l'interface $\Sigma_{i+1/2,j}$ ou de l'interface $\Sigma_{i,j+1/2}$. On a algébriquement :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \nu_{i+1/2,j} &= \int_{\Sigma_{i+1/2,j}} \nu((1-\xi)M_{i+1/2,j-1/2}J + \xi M_{i+1/2,j+1/2}) d\gamma(\xi) \\ \nu_{i+1/2,j} &= \begin{pmatrix} y_{i+1/2,j+1/2} - y_{i+1/2,j-1/2} \\ - (x_{i+1/2,j+1/2} - x_{i+1/2,j-1/2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où l'on a explicité les coordonnées planes du point courant :

$$(3.13) \quad M_{I+1/2,j+1/2} = (x_{i+1/2,j+1/2}, y_{i+1/2,j+1/2}).$$

De façon analogue, les relations permettant de calculer $\nu_{i,j+1/2}$ s'explicitent par :

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \nu_{i,j+1/2} &= \int_{\Sigma_{i,j+1/2}} \nu((1-\theta)M_{i-1/2,j+1/2}J + \theta M_{i+1/2,j+1/2}) d\gamma(\theta) \\ \nu_{i,j+1/2} &= \begin{pmatrix} - (y_{i+1/2,j+1/2} - y_{i-1/2,j+1/2}) \\ x_{i+1/2,j+1/2} - x_{i-1/2,j+1/2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en remarquant que le signe a changé car la normale $\nu_{i+1/2,j}$ pointe à droite de $\Sigma_{i+1/2,j}$ alors que la normale $\nu_{i,j+1/2}$ pointe à gauche de $\Sigma_{i,j+1/2}$.

- Le volume $|K_{i,j}|$ de la cellule $K_{i,j}$ se calcule par intégration de la représentation proposée en (3.3). Nous introduisons d'abord la notation $\alpha \times \beta$ pour deux vecteurs de \mathbb{R}^2 notés $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ et $\beta = (\beta_x, \beta_y)$:

$$(3.15) \quad \alpha \times \beta = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x.$$

C'est un nombre ($\alpha \times \beta \in \mathbb{R}$) qui permet d'exprimer simplement la surface du quadrangle (α, β) . Bien entendu, si α et β appartiennent à \mathbb{R}^3 , $\alpha \times \beta$ désigne toujours le produit vectoriel usuel.

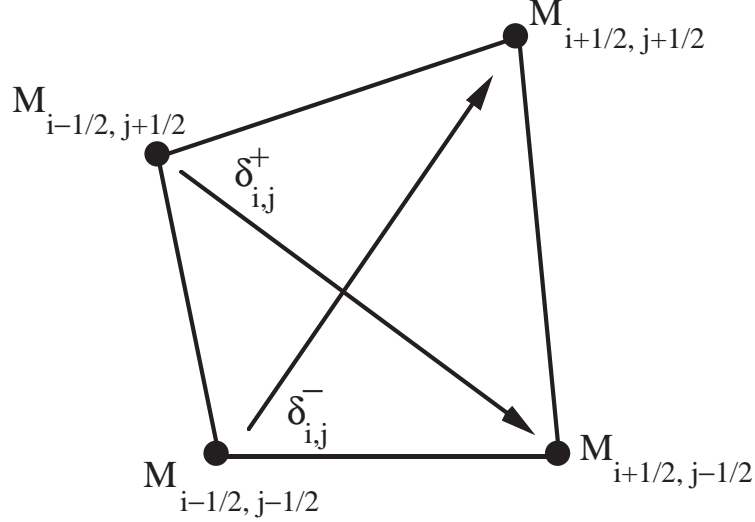


Figure 12 Le volume de la maille $K_{i,j}$ est calculé à l'aide de la relation $|K_{i,j}| = \frac{1}{2}(\delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^-)$

Proposition 3.1 Volume de la cellule $K_{i,j}$.

La cellule $K_{i,j}$ étant définie à la relation (3.3), on pose

$$(3.16) \quad \delta_{i,j}^+ = M_{i+1/2, j-1/2} - M_{i-1/2, j+1/2}$$

$$(3.17) \quad \delta_{i,j}^- = M_{i+1/2, j+1/2} - M_{i-1/2, j-1/2}$$

comme illustré à la figure 12. On a alors :

$$(3.18) \quad |K_{i,j}| = \frac{1}{2}(\delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^-)$$

si le quadrangle $K_{i,j}$ n'est pas une maille croisée.

Preuve de la proposition 3.1.

• Compte-tenu de la représentation (3.3), le point courant $M(\theta, \xi)$ de $K_{i,j}$ est paramétré par la relation :

$$(3.19) \quad \begin{cases} M(\theta, \xi) = \theta \xi M_{i+1/2, j+1/2} + (1 - \theta) \xi M_{i-1/2, j+1/2} + \\ \quad + (1 - \theta)(1 - \xi) M_{i-1/2, j-1/2} + \theta(1 - \xi) M_{i+1/2, j-1/2} \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \xi M_{i+1/2, j+1/2} - \xi M_{i-1/2, j+1/2} - (1 - \xi) M_{i-1/2, j-1/2} + (1 - \xi) M_{i+1/2, j-1/2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \theta M_{i+1/2, j+1/2} + (1-\theta) M_{i-1/2, j+1/2} - (1-\theta) M_{i-1/2, j-1/2} - \theta M_{i+1/2, j-1/2}$$

donc $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ ne dépend pas de θ et de même $\frac{\partial M}{\partial \xi}$ ne dépend pas de ξ . Nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned} |K_{i,j}| &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \xi} \right| d\theta d\xi \\ &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \times \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) d\theta d\xi && \text{si la maille n'est pas croisée} \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial M}{\partial \theta} d\xi \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial M}{\partial \xi} d\theta \right) && \text{vu la remarque précédente} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{i,j}^- + \delta_{i,j}^+) \times \frac{1}{2} (\delta_{i,j}^- - \delta_{i,j}^+) \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^- - \delta_{i,j}^- \times \delta_{i,j}^+) = \frac{1}{2} \delta_{i,j}^+ \times \delta_{i,j}^- \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété. \square

- Dans la suite, nous notons $\tilde{\nu}$ la normale extérieure à la cellule d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$. Compte-tenu des relations (3.3) et (3.10), un point $\widetilde{M}(\theta, \xi, \zeta)$ de cette cellule est défini par le paramétrage suivant, qui sépare espace et temps $t = t^n + \zeta \Delta t$:

$$(3.20) \quad \widetilde{M}(\theta, \xi, \zeta) = ((1-\zeta)M^n(\theta, \xi) + \zeta M^{n+1}(\theta, \xi), t^n + \zeta \Delta t)$$

avec $M^n(\theta, \xi)$ calculé comme à la relation (3.19), mais pour l'instant t^n :

$$(3.21) \quad \begin{cases} M^n(\theta, \xi) = \theta \xi M_{i+1/2, j+1/2}^n + (1-\theta) \xi M_{i-1/2, j+1/2}^n + \\ \quad + (1-\theta)(1-\xi) M_{i-1/2, j-1/2}^n + \theta(1-\xi) M_{i+1/2, j-1/2}^n. \end{cases}$$

La normale extérieure a donc trois composantes :

$$\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_x, \tilde{\nu}_y, \tilde{\nu}_t)$$

ou deux composantes, une spatiale $\tilde{\nu}_e \in \mathbb{R}^2$ et une temporelle $\tilde{\nu}_t$:

$$(3.22) \quad \tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_t).$$

- Pour expliciter le membre de droite de (3.22), il est utile de préciser les notations pour les normales spatiales situées sur les parois mobiles CCFG, BCDA et GFEH. Il convient de faire attention au fait que la normale $\tilde{\nu}$ est orientée et pointe toujours vers l'extérieur du volume $V_{I,j}^{n+1/2}$ alors que les directions normales $\nu_{i+1/2, j}$ et $\nu_{i, j+1/2}$ suivent en espace les lignes d'indices croissants.

Nous explicitons donc dans la suite de ce paragraphe les expressions des six normales extérieures.

Proposition 3.2 Normales extérieures au volume $V_{I,j}^{n+1/2}$.

On pose, compte-tenu de (3.9), (3.12) et (3.14) :

$$(3.23) \quad s_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (s_{j-1/2}^{n+1/2} + s_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(3.24) \quad \nu_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nu_{I+1/2,j}^n + \nu_{I+1/2,j}^{n+1}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(3.25) \quad \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nu_{I,j+1/2}^n + \nu_{I,j+1/2}^{n+1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

L'intégrale sur leur facette respective des six normales extérieures au volume d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$ est calculée à l'aide des expressions suivantes :

$$\int_{CBFG} \tilde{\nu} d\gamma = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

$$(3.26) \quad \int_{CBFG} \tilde{\nu} d\gamma = \Delta t \left(\nu_j^{n+1/2}, -\nu_j^{n+1/2} \bullet s_j^{n+1/2} \right)^t$$

$$\int_{BCDA} \tilde{\nu} d\gamma = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 0, \zeta) d\theta d\zeta$$

$$(3.27) \quad \int_{BCDA} \tilde{\nu} d\gamma = \Delta t \left(-\nu_{j-1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j-1/2}^{n+1/2} \right)^t$$

$$\int_{GFEH} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 1, \zeta) d\theta d\zeta$$

$$(3.28) \quad \int_{GFEH} \tilde{\nu} d\gamma = \Delta t \left(\nu_{j+1/2}^{n+1/2}, -\frac{1}{2} \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j+1/2}^{n+1/2} \right)^t$$

$$\int_{ADHE} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (0, \xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

$$(3.29) \quad \int_{ADHE} \tilde{\nu} d\gamma = -\Delta t \left(\nu_{I-1/2,j}, 0 \right)^t$$

$$\int_{BAEF} \tilde{\nu} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, 0) d\theta d\xi$$

$$(3.30) \quad \int_{BAEF} \tilde{\nu} d\gamma = \left(0, - |K_{I,j}^n| \right)^t$$

$$(3.31) \quad \int_{DCGH} \tilde{v} d\gamma = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, 1) d\theta d\xi$$

$$\int_{DCGH} \tilde{v} d\gamma = \left(0, |K_{I,j}^{n+1}| \right)^t.$$

Preuve de la proposition 3.2.

• Les relations (3.20) et (3.21) permettent le calcul des dérivées partielles utiles dans les définitions associées aux formules non numérotées. On a :

$$(3.32) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \theta} (\theta, \xi, \zeta) = \left(\begin{array}{l} (1 - \zeta) \left[\xi M_{I+1/2, j+1/2}^n - \xi M_{I-1/2, j+1/2}^n \right. \\ \left. - (1 - \xi) M_{I-1/2, j-1/2}^n + (1 - \xi) M_{I+1/2, j-1/2}^n \right] \\ + \zeta \left[\xi M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} - \xi M_{I-1/2, j+1/2}^{n+1} \right. \\ \left. - (1 - \xi) M_{I-1/2, j-1/2}^{n+1} + (1 - \xi) M_{I+1/2, j-1/2}^{n+1} \right], 0 \end{array} \right)^t$$

$$(3.33) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, \zeta) = \left(\begin{array}{l} (1 - \zeta) \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^n + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^n \right. \\ \left. - (1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^n - \theta M_{I+1/2, j-1/2}^n \right] \\ + \zeta \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^{n+1} \right. \\ \left. - (1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^{n+1} - \theta M_{I+1/2, j-1/2}^{n+1} \right], 0 \end{array} \right)^t$$

$$(3.34) \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, \xi, \zeta) = \left(\begin{array}{l} -\xi \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^n + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^n \right] \\ - (1 - \xi) \left[(1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^n + \theta M_{I+1/2, j-1/2}^n \right] \\ + \xi \left[\theta M_{I+1/2, j+1/2}^{n+1} + (1 - \theta) M_{I-1/2, j+1/2}^{n+1} \right] \\ + (1 - \xi) \left[(1 - \theta) M_{I-1/2, j-1/2}^{n+1} + \theta M_{I+1/2, j-1/2}^{n+1} \right], \\ \Delta t \end{array} \right)^t$$

- Les relations non numérotées résultent d'un examen approfondi de la figure 11 et de la remarque suivante, que nous développons pour la face CDFG. On a d'une part :

$$\tilde{\nu}(\xi, \zeta) = \frac{\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta}}{\left| \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} \right|}$$

et d'autre part :

$$d\gamma(\xi, \zeta) = \left| \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} \right| d\xi d\zeta$$

donc le module du produit vectoriel disparaît de toutes les intégrales qu'il faut effectivement calculer.

- Nous terminons la preuve de la relation (3.26) en détaillant les divers calculs pour les six faces du bord du volume d'espace-temps $V_{I,j}^{n+1/2}$. La relation (3.26) s'obtient en faisant $\theta = 1$ au sein des relations (3.33) et (3.34) :

$$\begin{aligned} \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta &= \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} d\xi \right) \\ &= \Delta t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(\nu_{I+1/2,j}^{n,y} + \nu_{I+1/2,j}^{n+1,y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\nu_{I+1/2,j}^{n,x} + \nu_{I+1/2,j}^{n+1,x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2,x} + s_{j-1/2}^{n+1/2,x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2,y} + s_{j-1/2}^{n+1/2,y} \right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \Delta t \begin{pmatrix} -\nu_j^{n+1/2,y} \\ \nu_j^{n+1/2,x} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s_j^{n+1/2,x} \\ s_j^{n+1/2,y} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \Delta t \left(\nu_j^{n+1/2,x}, \nu_j^{n+1/2,y}, -\nu_j^{n+1/2} \bullet s_j^{n+1/2} \right)^t \end{aligned}$$

ce qui établit complètement la relation (3.26).

- La relation (3.27) se montre de façon analogue ; on a :

$$\begin{aligned} \int_{BCDA} \tilde{\nu} d\gamma &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 0, \zeta) d\theta d\zeta \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} (\theta, 0, \zeta) d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 0, \zeta) d\theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\nu_{I, j-1/2}^{n, y} + \nu_{I, j-1/2}^{n+1, y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\nu_{I, j-1/2}^{n, x} + \nu_{I, j-1/2}^{n+1, x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} s_{j-1/2}^{n+1/2, x} \\ \frac{1}{2} s_{j-1/2}^{n+1/2, y} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \Delta t \left(-\nu_{j-1/2}^{n+1/2, x}, -\nu_{j-1/2}^{n+1/2, y}, \frac{1}{2} \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j-1/2}^{n+1/2} \right)^t
 \end{aligned}$$

et cette dernière expression algébrique est identique au membre de droite de la relation (3.27). La relation (3.28) fait appel aux mêmes techniques :

$$\begin{aligned}
 \int_{GFEH} \tilde{v} d\gamma &= - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 1, \zeta) d\theta d\zeta \\
 &= - \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} (\theta, 1, \zeta) d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (\theta, 1, \zeta) d\theta \right) \\
 &= - \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\nu_{I, j+1/2}^{n, y} + \nu_{I, j+1/2}^{n+1, y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\nu_{I, j+1/2}^{n, x} + \nu_{I, j+1/2}^{n+1, x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2, x} \\ \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2, y} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \Delta t \left(\nu_{j+1/2}^{n+1/2, x}, \nu_{j+1/2}^{n+1/2, y}, -\frac{1}{2} \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet s_{j+1/2}^{n+1/2} \right)^t.
 \end{aligned}$$

• Le lecteur sérieux parvenu à ce stade de cette preuve ayant de toute façon sorti son crayon ou son logiciel Maple, la fin est quasi-automatique :

$$\begin{aligned}
 \int_{ADHE} \tilde{v} d\gamma &= - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (0, \xi, \zeta) d\xi d\zeta \\
 &= - \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} (0, \xi, \zeta) d\zeta \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \zeta} (0, \xi, \zeta) d\xi \right) \\
 &= \Delta t \begin{pmatrix} \nu_{I-1/2, j}^y \\ -\nu_{I-1/2, j}^x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= - \Delta t \left(\nu_{I-1/2, j}^x, \nu_{I-1/2, j}^y, 0 \right)^t
 \end{aligned}$$

ce qui établit (3.29),

$$\int_{BAEF} \tilde{v} d\gamma = - \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi} (\theta, \xi, 0) d\theta d\xi$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta}(\theta, \xi, 0) \, d\xi \right) \times \left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi}(\theta, \xi, 0) \, d\theta \right) \\
 &= \Delta t \left(0, - |K_{I,j}^n| \right)^t
 \end{aligned}$$

compte-tenu du calcul effectué lors de la preuve de la proposition 3.1 ; donc la relation (3.30) est démontrée. Enfin, et de manière analogue :

$$\begin{aligned}
 \int_{DCGH} \widetilde{v} \, d\gamma &= \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial \xi}(\theta, \xi, 1) \, d\theta \, d\xi \\
 &= \Delta t \left(0, |K_{I,j}^{n+1}| \right)^t
 \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (3.31). La proposition 3.2 est établie. \square

• 3.2 • Volumes finis pour les équations d'Euler

• Nous disposons, suite au paragraphe précédent, d'un domaine spatial $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ qui dépend du temps ; celui-ci (relation (3.4)) est la réunion des cellules quadrangulaires $K_{i,j}$ avec $i \leq I$ et $j \in \mathbb{Z}$. Le mouvement du domaine $\Omega(t)$ est réduit au mouvement de la famille des mailles $K_{I,j}$, et plus précisément des sommets $M_{I+1/2,j}$ comme l'indique par exemple la figure 10. A partir de cette discrétisation spatiale, une discrétisation temporelle (associée à un pas de temps $\Delta t > 0$ fixe pour simplifier l'exposé) permet de construire (relation (3.10)) des volumes espace-temps $V_{i,j}^{n+1/2}$ par interpolation temporelle entre les mailles $K_{i,j}$ (dont celles de premier numéro $i = I$, rappelons le, dépendent du temps) à l'aide du temps $t^n = n\Delta t$. Nous disposons donc, comme au chapitre 2 relatif à l'étude monodimensionnelle, d'un domaine d'espace-temps Ξ défini par :

$$(3.35) \quad \Xi = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(\bigcup_{i \leq I-1} K_{i,j} \times [t^n, t^{n+1}] \right) \cup V_{I,j}^{n+1/2} \right\}.$$

• Les équations d'Euler de la dynamique des gaz consistent à écrire les lois de conservation fondamentales (masse, impulsion, énergie) de la mécanique des milieux continus ; les variables inconnues sont la densité $[\rho]$, la vitesse $[\tilde{u} = (u, v)]$ et l'énergie totale spécifique $[E]$; on pose

$$(3.36) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t.$$

L'énergie interne spécifique e est définie par soustraction de l'énergie cinétique spécifique de l'énergie totale :

$$(3.37) \quad e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

et le milieu continu est ici un gaz parfait polytropique ; le tenseur des contraintes σ est diagonal :

$$(3.38) \quad \sigma = -pI$$

et la pression p est calculée à l'aide d'une équation d'état bien classique :

$$(3.39) \quad p = (\gamma - 1)\rho e$$

avec $\gamma = 7/5$ pour l'air considéré comme ensemble statistique activant trois degrés de liberté en translation et deux en rotation (molécule bi-atomique).

- L'écriture d'un bilan demande l'introduction des flux numériques (f, g) dans les deux directions de l'espace :

$$(3.40) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uE + pu)^t$$

$$(3.41) \quad g(W) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vE + pv)^t.$$

Le système des équations d'Euler prend alors la forme conservative suivante :

$$(3.42) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[f(W)] + \frac{\partial}{\partial y}[g(W)] = 0;$$

il est utile pour la suite d'introduire le couple constitué par les deux flux :

$$(3.43) \quad \Phi(W) = (f(W), g(W)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$$

et pour une direction spatiale $\nu = (\nu_x, \nu_y) \in \mathbb{R}^2$ le produit scalaire contracté

$$(3.44) \quad \Phi(W) \bullet \nu = f(W)\nu_x + g(W)\nu_y$$

qui appartient à \mathbb{R}^4 .

- Les conditions au bord du domaine Ξ sont de type condition limite et condition initiale. En ce qui concerne les conditions aux limites au bord spatial de Ξ , il suffit d'écrire la non-pénétration du fluide sur les parois mobiles $\Sigma_j^{n+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}, n \geq 0$) définies par les relations suivantes :

$$(3.45) \quad \Sigma_j^n = \left[M_{I+1/2, j-1/2}^n, M_{I+1/2, j+1/2}^n \right], \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

$$(3.46) \quad \Sigma_j^{n+1/2} = \left\{ \left(\frac{(n+1)\Delta t - t}{\Delta t} \Sigma_j^n + \frac{t - n\Delta t}{\Delta t} \Sigma_j^{n+1}, t \right), \right. \\ \left. n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \right\}$$

le long desquelles la vitesse moyenne vaut $s_j^{n+1/2}$ et est calculée à la relation (3.23). La condition de non-pénétration à la paroi (analogue bidimensionnel de la relation (2.12)) s'écrit donc en moyenne sur la surface mobile $\Sigma_j^{n+1/2}$ très simplement :

$$(3.47) \quad \frac{1}{\left| \Sigma_j^{n+1/2} \right|} \int_{\Sigma_j^{n+1/2}} \tilde{u} \bullet \nu_j^{n+1/2} d\gamma = s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

en utilisant la normale moyenne $\nu_j^{n+1/2}$ le long de $\Sigma_j^{n+1/2}$ (voir la relation (3.24)).

- Notons que l'emploi d'indices non bornés pour la géométrie spatiale ($i \leq I, j \in \mathbb{Z}$) évite de poser ici le problème classique de la condition fluide. La condition initiale ne pose pas de problème particulier et la relation (2.10) reste valable.

- La méthode des volumes finis introduit comme inconnue de base le champ $W_{i,j}^n$ des valeurs moyennes des variables conservées (3.36) dans la maille spatiale $K_{i,j}^n$:

$$(3.48) \quad W_{i,j}^n = \frac{1}{\left| K_{i,j}^{n+1/2} \right|} \int_{K_j^{n+1/2}} W(x, t^n) dx.$$

Le schéma numérique consiste à intégrer la loi de conservation (3.42) dans la cellule d'espace-temps $V_{i,j}^{n+1/2}$, définie de manière générale par les relations :

$$(3.49) \quad V_{i,j}^{n+1/2} = \begin{cases} K_{i,j} \times [t^n, t^{n+1}], & i \leq I-1, \quad j \in \mathbb{Z} \\ V_{I,j}^{n+1/2} & , j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On a donc :

$$(3.50) \quad \int_{\partial V_{i,j}^{n+1/2}} \left(W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y \right) (x, t) d\gamma(x, t) = 0.$$

Le bord de $V_{i,j}^{n+1/2}$ est constitué de facettes $\Sigma_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ et $\Sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ en plus des volumes spatiaux $K_{i,j}$. Elles sont définies par :

$$(3.51) \quad \Sigma_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \begin{cases} \Sigma_{i+1/2,j} \times [t^n, t^{n+1}], & i \leq I-1, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \Sigma_j^{n+1/2} & (c.f.(3.45)), \quad i = I, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(3.52) \quad \Sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \Sigma_{i,j+1/2} \times [t^n, t^{n+1}], & i \leq I-1, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \Sigma_{j+1/2}^{n+1/2} & , \quad i = I, \quad j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

avec pour les facettes transversales :

$$(3.53) \quad \Sigma_{j+1/2}^n = \left[M_{I-1/2, j+1/2}^n, M_{I+1/2, j+1/2}^n \right], \quad j \in \mathbf{Z}, \quad n \geq 0$$

$$(3.54) \quad \Sigma_{j+1/2}^{n+1/2} = \left\{ \left(\zeta \Sigma_{j+1/2}^n + (1 - \zeta) \Sigma_{j+1/2}^{n+1}, t^n + \zeta \Delta t \right), 0 \leq \zeta \leq 1 \right\}.$$

Avec des notation naturelles pour les directions normales, à savoir :

$$(3.55) \quad \nu_{i+1/2, j}^{n+1/2} = \begin{cases} \nu_{i+1/2, j} & (c.f.(3.12)), \quad i \leq I - 1, \quad j \in \mathbf{Z} \\ \nu_j^{n+1/2} & (c.f.(3.24)), \quad i = I, \quad j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$(3.56) \quad \nu_{i, j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \nu_{i, j+1/2} & (c.f.(3.14)), \quad i \leq I - 1, \quad j \in \mathbf{Z} \\ \nu_{j+1/2}^{n+1/2} & (c.f.(3.25)), \quad i = I, \quad j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

les flux normaux $(\Phi \bullet \nu)$ dans les deux directions du maillage ont une définition très simple :

$$(3.57) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i+1/2, j}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_{i+1/2, j}^{n+1/2}} \Phi(W(x, t)) \bullet \nu_{i+1/2, j}^{n+1/2} d\gamma(x) dt$$

$$(3.58) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i, j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_{i, j+1/2}^{n+1/2}} \Phi(W(x, t)) \bullet \nu_{i, j+1/2}^{n+1/2} d\gamma(x) dt.$$

- Nous développons maintenant l'intégrale de bord de la relation (3.50). Il vient :

$$(3.59) \quad \int_{\partial V_{i, j}^{n+1/2}} d\sigma(x, t) \equiv \begin{cases} \int_{K_{i, j}^{n+1}} dx - \int_{K_{i, j}^n} dx + \\ + \int_{\Sigma_{i+1/2, j}^{n+1/2}} d\gamma - \int_{\Sigma_{i-1/2, j}^{n+1/2}} d\gamma \\ + \int_{\Sigma_{i, j+1/2}^{n+1/2}} d\gamma - \int_{\Sigma_{i, j-1/2}^{n+1/2}} d\gamma \end{cases}$$

et appliquant l'opérateur (3.59) à la quantité sous le signe "somme" du membre de gauche de (3.50), à savoir $(W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t)$, il vient, compte-tenu des définitions (3.48), (3.57) et (3.58), dans le cas où les mailles sont fixes ($i \leq I - i$)

$$(3.60) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \left(W_{i, j}^{n+1} - W_{i, j}^n \right) + \frac{1}{|K_{i, j}|} \left[(\Phi \bullet \nu)_{i+1/2, j}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{i-1/2, j}^{n+1/2} + \right. \\ \left. + (\Phi \bullet \nu)_{i, j+1/2}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{i, j-1/2}^{n+1/2} \right] = 0, \quad i \leq I - 1, \quad j \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dans le cas d'une maille mobile ($i = I$), l'écriture de la loi de conservation (3.50) est un peu plus compliquée car les facettes $\Sigma_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ et $\Sigma_{I,j+1/2}^{n+1/2}$ ont une normale extérieure $\tilde{\nu}$ qui a une composante temporelle $\tilde{\nu}_t$ (relation (3.22)) non-triviale. Nous détaillons dans la proposition suivante l'algèbre relative à ces différents termes.

Proposition 3.3 **Flux au bord du volume mobile** $V_{I,j}^{n+1/2}$.

Etant donnée une famille $\{W_{l,m}^n, l \leq I, m \in \mathbb{Z}\}$ fixée d'états fluides, on suppose que le schéma numérique de volumes finis permet l'évaluation d'états interpolés $W_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ et $W_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ sur les facettes $\Sigma_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ et $\Sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ comme fonction de ces seules variables, prenant en compte également les données aux limites ($i = I$). On a alors les quatre relations suivantes :

$$(3.61) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma_{I+1/2,j}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ = \Delta t \left[(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} - \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2,j}^{n+1/2} \right] \end{cases}$$

$$(3.62) \quad \int_{\Sigma_{I-1/2,j}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = -\Delta t (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2,j}^{n+1/2}$$

$$(3.63) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma_{I,j+1/2}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ = \Delta t \left[(\Phi \bullet \nu)_{I,j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] \end{cases}$$

$$(3.64) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma_{I,j-1/2}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ = \Delta t \left[-(\Phi \bullet \nu)_{I,j-1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) W_{I,j-1/2}^{n+1/2} \right]. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 3.3.

- Nous montrons d'abord la relation (3.61) en détail. Nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{I+1/2,j}^{n+1/2}} (W \tilde{\nu}_t + f(W) \tilde{\nu}_x + g(W) \tilde{\nu}_y)(x, t) \, d\gamma = \\ & = -\Delta t W_{I+1/2,j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) + \Delta t \left[f \left(W_{I+1/2,j}^{n+1/2} \right) \nu_j^{n+1/2, x} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + g \left(W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right) \nu_j^{n+1/2, y} \right] \quad \text{compte tenu de (3.26)} \\
 = & \Delta t \left[(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} - \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right]
 \end{aligned}$$

compte tenu de (3.43) et (3.44), ce qui montre la première identité.

- Les autres relations résultent du calcul des intégrales des normales extérieures (relations (3.27) à (3.29)) mené à la proposition 3.2 et de l'orientation relative de la normale extérieure $\tilde{\nu}$ au volume mobile $V_{I, j}^{n+1/2}$ d'une part et des normales $\nu_{i+1/2, j}$ et $\nu_{i, j+1/2}$ qui courent le long des lignes de maillage d'autre part. \square

Remarque 3.1

- Dans le cas de la maille mobile $K_{I, j}$, c'est-à-dire du volume dans l'espace-temps $V_{I, j}^{n+1/2}$, l'équation de bilan (3.50) prend la forme suivante, compte-tenu de la définition (3.48), du calcul (3.59) et des relations (3.61) à (3.64) que nous venons d'établir :

$$(3.65) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{\Delta t} \left(|K_{I, j}^{n+1}| W_{I, j}^{n+1} - |K_{I, j}^n| W_{I, j}^n \right) + \\
 & + \left[(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} - \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} \right] \\
 & - (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} \\
 & + \left[(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right] \\
 & - \left[(\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j-1/2}^{n+1/2} \right] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

- Lorsque le volume $K_{I, j}(t)$ est une perturbation d'un volume $K_{I, j}$ de référence, c'est-à-dire lorsque les points mobiles $M_{I+1/2, j+1/2}(t)$ restent voisins de sommets fixes $M_{I+1/2, j+1/2}$, la définition $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ du flux limite de paroi mobile consiste à rendre **identiques** les relations (3.65) et (3.60) avec $i = I$. Ceci est possible car l'expression $[\phi \bullet \nu - (s \bullet \nu) W]_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ ne fait intervenir qu'une pression paroi $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ facilement calculable, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.4 Flux sur la paroi mobile et pression paroi.

On se place dans les mêmes hypothèses que pour la proposition précédente : le schéma numérique de volumes finis est associé à un calcul préalable d'états aux interfaces de la forme $W_{i+1/2, j}^{n+1/2}$ et $W_{i, j+1/2}^{n+1/2}$. Si l'état $W_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ sur la paroi mobile $\Sigma_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ satisfait la condition limite (3.47) de non pénétration à la paroi et admet une pression notée $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$, alors le flux $(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ sur la paroi mobile est calculé par l'expression suivante :

$$(3.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} = \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} + \\ + \left(0, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) \right)^t. \end{array} \right.$$

Preuve de la proposition 3.4.

- Le flux normal à la paroi, compte-tenu de (3.40), (3.41) et (3.44) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi \bullet \nu &= \begin{pmatrix} \rho \tilde{u} \bullet \nu \\ (\rho \tilde{u} \bullet \nu) u + p \nu^x \\ (\rho \tilde{u} \bullet \nu) v + p \nu^y \\ (\rho \tilde{u} \bullet \nu) E + p (\tilde{u} \bullet \nu) \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{u} \bullet \nu) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \nu \\ p (\tilde{u} \bullet \nu) \end{pmatrix} \\ &= \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) W_{I+1/2, j}^{n+1/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

compte-tenu de la relation (3.47), ce qui établit complètement la relation (3.66) et la proposition. \square

Proposition et définition 3.5 Flux limite de paroi mobile.

Sous les mêmes hypothèses que pour les propositions précédentes, on définit par $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ l'expression algébrique qui permet de remplacer l'écriture de la loi de bilan (3.65) sur maillage mobile par une expression algébrique de type (3.60) relative à un maillage fixe :

$$(3.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \left(W_{I,j}^{n+1} - W_{I,j}^n \right) + \\ + \frac{1}{|K_{I,j}|} \left[(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2,j}^{n+1/2} + \right. \\ \left. + (\Phi \bullet \nu)_{I,j+1/2}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{I,j-1/2}^{n+1/2} \right] = 0, \\ i = I, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ est donc défini par l'expression suivante :

$$(3.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 0 \\ p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2,j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \end{array} \right) + \\ + \frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right) W_{I+1/2,j}^{n+1/2} + \\ + \left(\frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{|K_{I,j}|} - 1 \right) (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2,j}^{n+1/2} \\ + \left[\left((\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right)_{I,j+1/2}^{n+1/2} - \frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{|K_{I,j}|} (\Phi \bullet \nu)_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] \\ - \left[\left((\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right)_{I,j-1/2}^{n+1/2} - \frac{|K_{I,j}^{n+1}|}{|K_{I,j}|} (\Phi \bullet \nu)_{I,j-1/2}^{n+1/2} \right] \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Remarque 3.2

• On veillera à ne pas confondre d'une part l'expression (3.66) qui représente le flux sur la paroi mobile et d'autre part l'expression (3.68), nommée ici flux limite de paroi mobile. Cette confusion possible consiste à ne **pas** écrire la loi de conservation (3.65) qui représente le bilan physique dans le domaine mobile $V_{I,j}^{n+1/2}$ mais le schéma usuel (3.60), non valable en toute rigueur dans cette région d'espace-temps si on ne modifie convenablement le flux sur la paroi mobile. Une difficulté vient du fait que ces deux objets portent *a priori* le même nom $(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$. Rappelons que le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ tel que défini ici est simplement un artifice algébrique pour donner à la loi de conservation en domaine mobile les apparences d'un bilan en maillage fixe [Du98].

Preuve de la proposition 3.5.

- On explicite le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ en le tirant de la relation (3.67) ; il vient :

$$(3.69) \quad \left\{ \begin{aligned} (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= -\frac{|K_{I, j}|}{\Delta t} \left(W_{I, j}^{n+1} - W_{I, j}^n \right) + (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} \\ &\quad - (\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} + (\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right.$$

puis on remplace l'état $W_{I, j}^{n+1}$ par sa valeur tirée de l'expression (3.65), c'est-à-dire, compte-tenu de la relation (3.66) :

$$(3.70) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{I, j}^{n+1} &= \frac{|K_{I, j}^n|}{|K_{I, j}^{n+1}|} W_{I, j}^n + \frac{\Delta t}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left\{ - \begin{pmatrix} 0 \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad + (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} - \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad \left. + \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

On reporte l'expression (3.70) au sein de la relation (3.69). Il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= \frac{|K_{I, j}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I, j}^n|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) W_{I, j}^n + \\ &\quad + \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} \\ p_{I+1/2, j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \left(1 - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) (\Phi \bullet \nu)_{I-1/2, j}^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2} - (\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)W \right]_{I, j-1/2}^{n+1/2} + (\Phi \bullet \nu)_{I, j-1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \right.$$

Cette relation est, à la présentation algébrique près, identique à la relation (3.68), ce qui montre la proposition 3.5. \square

4) Développements algébriques

• 4.1 • Introduction

• La relation (3.68) définit le flux limite de paroi mobile et permet un calcul *a priori* exact du bilan de masse, d'impulsion et d'énergie dans une maille $K_{I,j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) variable dans le temps par l'intermédiaire de ses sommets $M_{I+1/2, j+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}$), tout en n'utilisant près de la paroi mobile que le schéma (3.67) valable *a priori* au point courant seulement. Nous détaillons dans ce qui suit l'expression algébrique de diverses grandeurs en vue du développement limité de l'expression (3.68), sous les hypothèses de points $M_{I+1/2, j+1/2}$ lentement variables au cours du temps c'est à dire dont la vitesse $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ est petite devant la vitesse locale du son.

$$(4.1) \quad \left| s_{j+1/2}^{n+1/2} \right| \ll c_{I,j}, c_{I,j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et tels que l'élongation $\delta_{j+1/2}^n$ définie par

$$(4.2) \quad M_{I+1/2, j+1/2}^n = M_{I+1/2, j+1/2} + \delta_{j+1/2}^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

reste petite devant les distances typiques au sein de la maille $K_{I,j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) :

$$(4.3) \quad \left| \delta_{j+1/2}^n \right| \ll \left| \delta_{I,j}^+ \right|, \left| \delta_{I,j}^- \right|, \left| \delta_{I,j+1}^+ \right|, \left| \delta_{I,j+1}^- \right|, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

• Nous devons donc évaluer en fonction de ces deux (!) infiniment petits le volume $|K_{I,j}|$ de la maille à la paroi au temps $n \Delta t$, la normale spatiale $\nu_j^{n+1/2}$ le long de la paroi mobile et la normale spatiale $\nu_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ le long de la facette transversale d'indice $(I, j + 1/2)$; ces données sont utiles pour développer ensuite les champs physiques tels que la pression paroi $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$, le flux numérique $(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ le long des faces transversales $\Sigma_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ et le flux dynamique $\left[(\Phi \bullet \nu) - \frac{s \bullet \nu}{2} W \right]_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ le long de ces mêmes faces. Nous détaillons dans la suite le calcul de chacun de ces termes au premier ordre de précision par rapport à $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ et $\delta_{l+1/2}^{n+1/2}$ avant de les regrouper pour expliciter une expression approchée du flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ (relation (3.68)).

• 4.2 • Volume mobile

Proposition 4.1

Développement limité du volume de la maille mobile.

Le volume $|K_{I,j}|$ de la maille mobile $K_{I,j}$ à l'instant $n \Delta t$ est développé au premier ordre par l'expression suivante :

$$(4.4) \quad |K_{I,j}^n| = |K_{I,j}| + \frac{1}{2} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n \right) + (\text{ordre} \geq 2)$$

où $\delta_{I,j}^+$ et $\delta_{I,j}^-$ ont été définis aux relations (3.16) et (3.17), $\delta_{j+1/2}^n$ à la relation (4.2) et le produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 énoncé en (3.15).

• Remarque 4.1

• Compte tenu du calcul (4.4), on établit que le terme $\frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right)$ en facteur devant $W_{I,j}^n$ dans la relation (3.68) est donné par le développement qui suit :

$$(4.5) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right) = \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left[\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right] + \text{ordre} \geq 2.$$

Preuve de la proposition 4.1 et de la remarque 4.1.

• On part de l'expression (3.18) (proposition 3.1) qui permet le calcul du volume $|K_{I,j}|$ et on remplace les bras $\delta_{I,j}^+$ et $\delta_{I,j}^-$ par leur valeur à l'instant courant. Il vient :

$$\begin{aligned} |K_{I,j}^n| &= \frac{1}{2} \left(M_{I+1/2,j-1/2}^n - M_{I-1/2,j+1/2}^n \right) \times \left(M_{I+1/2,j+1/2}^n - M_{I-1/2,j-1/2}^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{j-1/2}^n + \delta_{I,j}^+ \right) \times \left(\delta_{j+1/2}^n + \delta_{I,j}^- \right) \\ &= |K_{I,j}| + \frac{1}{2} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n \right) - \left(\delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n \right) + \frac{1}{2} \delta_{j-1/2}^n \times \delta_{j+1/2}^n \end{aligned}$$

ce qui montre la relation (4.4) compte tenu de l'hypothèse (4.3).

• La relation (4.5) s'établit de façon analogue ; on a :

$$\begin{aligned} \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} &= \frac{1 + \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n \right) + \text{ordre} \geq 2}{1 + \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left(\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^{n+1} - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^{n+1} \right) + \text{ordre} \geq 2} \\ &= 1 + \frac{1}{2|K_{I,j}|} \left[\delta_{I,j}^+ \times \left(\delta_{j+1/2}^n - \delta_{j+1/2}^{n+1} \right) - \delta_{I,j}^- \times \left(\delta_{j-1/2}^n - \delta_{j-1/2}^{n+1} \right) \right] + \text{ordre} \geq 2 \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\Delta t}{2|K_{I,j}|} \left[\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right] + \text{ordre} \geq 2$$

et cette relation démontre le développement (4.5). \square

Proposition 4.2 **Vecteur normal le long de la face transversale.**

La normale $\nu_{j+1/2}^{n+1/2}$ le long de la face transversale $\Sigma_{j+1/2}^{n+1/2}$ a par définition un module égal à la longueur $|\Sigma_{j+1/2}^{n+1/2}|$ de cette face. Son expression algébrique est donnée par les relations suivantes :

$$(4.6) \quad \delta_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\delta_{j+1/2}^n + \delta_{j+1/2}^{n+1})$$

$$(4.7) \quad \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \nu_{I,j+1/2} + (k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}),$$

où k est le vecteur de \mathbb{R}^3 qui pointe normalement au plan du domaine Ω ($k = (0, 0, 1)^t$) et \times désigne le produit vectoriel habituel.

Preuve de la proposition 4.2.

- On part de la relation (3.14) qui prend ici la forme :

$$\begin{aligned} \nu_{I,j+1/2}^n &= \left(- \left(y_{I+1/2,j+1/2}^n - y_{I-1/2,j+1/2}^n \right), \left(x_{I+1/2,j+1/2}^n - x_{I-1/2,j+1/2}^n \right) \right)^t \\ &= \nu_{I,j+1/2} + \left(-\delta_{j+1/2,y}^n, \delta_{j+1/2,x}^n \right)^t \\ &= \nu_{I,j+1/2} + (k \times \delta_{j+1/2}^n) \end{aligned}$$

et la fin résulte de la relation (3.24) qui permet de faire la demi-somme entre les instants t^n et t^{n+1} . \square

Proposition 4.3 **Vecteur normal le long de la paroi mobile.**

La normale $\nu_j^{n+1/2}$ le long de la face de paroi mobile $\Sigma_j^{n+1/2}$ a par définition un module égal à la longueur $|\Sigma_j^{n+1/2}|$ de cette face. Son développement est calculé grâce aux relations suivantes :

$$(4.8) \quad \epsilon_j^{n+1/2} = \delta_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

$$(4.9) \quad \nu_j^{n+1/2} = \nu_{I+1/2,j} + \left(\epsilon_j^{n+1/2} \times k \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

avec les mêmes notations que pour la proposition précédente. Si on introduit la normale unitaire fixe ou mobile avec le symbole “tilda”, c’est à dire

$$(4.10) \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{|\nu|}, \quad \nu = \nu_{I+1/2, j} \text{ ou } \nu = \nu_j^{n+1/2},$$

on a alors à l'ordre 1 de précision :

$$(4.11) \quad \tilde{\nu}_j^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\nu_{I+1/2, j}}{|\nu_{I+1/2, j}|^2} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) \tilde{\nu}_{I+1/2, j} + \left(\frac{\epsilon_j^{n+1/2}}{|\nu_{I+1/2, j}|} \times k \right)$$

comme illustré Figure 13.

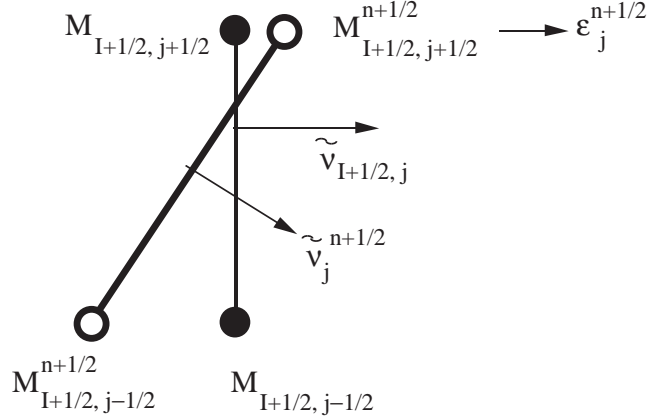


Figure 13 L'écart sur les normales unitaires dans le mouvement des points de la paroi contient un terme colinéaire à la normale unitaire et un second terme orthogonal à la différence $\epsilon_j^{n+1/2}$ des perturbations entre les deux points de la facette $\Sigma_{I, j+1/2}$ (relation (4.11)).

Preuve de la proposition 4.3.

- De même qu'à la proposition précédente, la relation (3.12) prend ici la forme :

$$\begin{aligned} \nu_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= \left(y_{I+1/2, j+1/2}^{n+1/2} - y_{I+1/2, j-1/2}^{n+1/2}, -x_{I+1/2, j+1/2}^{n+1/2} + x_{I+1/2, j-1/2}^{n+1/2} \right)^t \\ &= \nu_{I+1/2, j} + \left(\delta_{j+1/2, y}^{n+1/2} - \delta_{j-1/2, y}^{n+1/2}, -\delta_{j+1/2, x}^{n+1/2} + \delta_{j-1/2, x}^{n+1/2} \right)^t \\ &= \nu_{I+1/2, j} + \left(\epsilon_{j, y}^{n+1/2}, -\epsilon_{j, x}^{n+1/2} \right)^t \\ &= \nu_{I+1/2, j} + \left(\epsilon_j^{n+1/2} \times k \right), \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (4.9).

- Le calcul de la normale unitaire demande d'évaluer au préalable le module de l'expression (4.9). On a :

$$\left| \nu_j^{n+1/2} \right|^2 = \left| \nu_{I+1/2, j} \right|^2 + 2 \left(\nu_{I+1/2, j} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) + (\text{ordre} \geq 2)$$

donc

$$\frac{1}{|\nu_j^{n+1/2}|} = \frac{1}{|\nu_{I+1/2,j}|} \left(1 - \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|^2} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) + (\text{ordre} \geq 2)$$

et la relation (4.11) résulte du produit de cette dernière relation par l'expression (4.9). \square

• 4.3 • Décomposition de flux

• L'évaluation de la pression paroi $p_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ demande d'entrer dans le détail de la méthode numérique "Muscl" [vL79]. Rappelons qu'à partir des états $\{W_{k,l}^n, k \leq I, l \in \mathbb{Z}\}$, la méthode Muscl propose de calculer des états extrapolés au bord des différentes faces ; nous notons $W_{i,j+1/2,-}^n$ et $W_{i,j+1/2,+}^n$ les deux états de part et d'autre de la face $\Sigma_{i,j+1/2}$ alors que $W_{i+1/2,j,-}^n$ et $W_{i+1/2,j,+}^n$ désignent les deux états de part et d'autre de la face $\Sigma_{i+1/2,j}$; nous renvoyons à la figure 14 pour une illustration de ce point. Les flux $(\Phi \bullet \nu)_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ et $(\Phi \bullet \nu)_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ sont calculés en utilisant une résolution approchée du problème de Riemann entre les états $W_{i,j+1/2,-}^n$ et $W_{i,j+1/2,+}^n$ le long de la normale $\nu_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ d'une part, entre les états $W_{i+1/2,j,-}^n$ et $W_{i+1/2,j,+}^n$ le long de la normale $\nu_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ d'autre part. Comme pour la relation (2.24), nous avons donc :

$$(4.12) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \Psi \left(W_{i,j+1/2,-}^n, \nu_{i,j+1/2}^{n+1/2}, W_{i,j+1/2,+}^n \right)$$

$$(4.13) \quad (\Phi \bullet \nu)_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \Psi \left(W_{i+1/2,j,-}^n, \nu_{i+1/2,j}^{n+1/2}, W_{i+1/2,j,+}^n \right)$$

et le choix du flux splitting de van Leer pour évaluer la fonction $\Psi(W_g, \nu, W_d)$ est explicité dans le sous-paragraphe suivant.

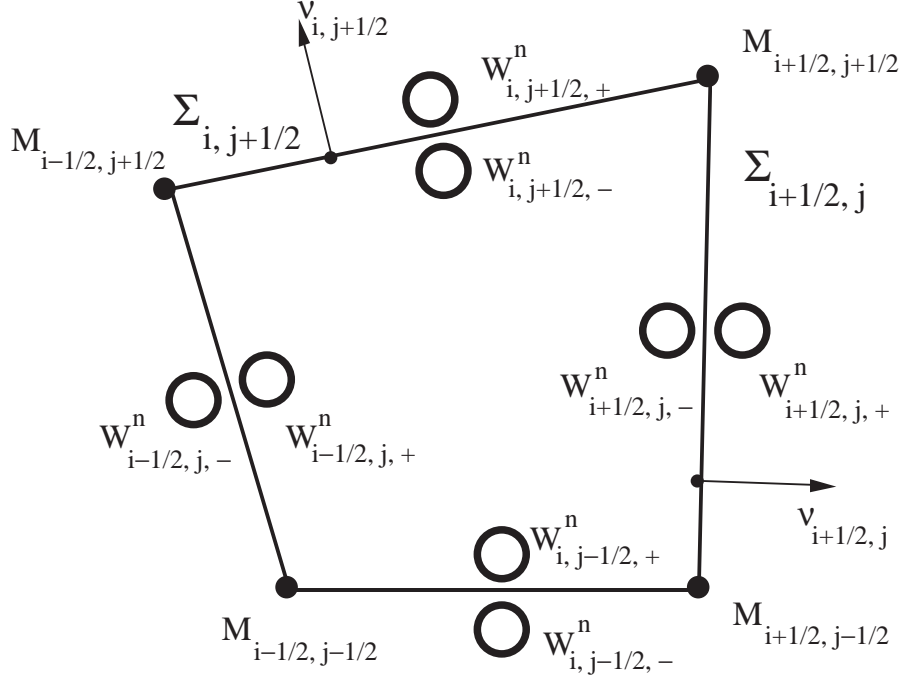


Figure 14 Ensemble des états extrapolés pour le calcul des flux $(\Phi \cdot \nu)_{i, j \pm 1/2}$ et $(\Phi \cdot \nu)_{i \pm 1/2, j}$ autour du volume $K_{i, j}$.

- Le calcul du flux de van Leer à deux dimensions d'espace (relations (4.12) et (4.13)) prend la forme simple

$$(4.14) \quad \Psi(W_g, \nu, W_d) = \Phi^+(W_g) \cdot \nu + \Phi^-(W_d) \cdot \nu$$

et compte tenu de la définition (3.44), on a, pour

$$(4.15) \quad W = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho E \equiv \rho \left(e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) \right)^t$$

$$(4.16) \quad M_\nu = \frac{u\nu_x + v\nu_y}{c |\nu|}, \quad p = (\gamma - 1)\rho e, \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho},$$

la relation suivante

$$(4.17) \quad \Phi^+(W) \cdot \nu = \begin{cases} 0 & \text{si } M_\nu \leq -1 \\ \Phi(W) \cdot \nu & \text{si } M_\nu \geq 1. \end{cases}$$

Lorsque $|M_\nu| \leq 1$, l'extension bidimensionnelle des relations (2.28) à (2.30) s'écrit :

$$(4.18) \quad \Phi^+(W) \cdot \nu = |\nu| \left(f_m^+(W, \nu), f_x^+(W, \nu), f_y^+(W, \nu), f_e^+(W, \nu) \right)^t$$

avec

$$(4.19) \quad f_m^+(W, \nu) = \rho c \left(\frac{M_\nu + 1}{2} \right)^2$$

$$(4.20) \quad f_n^+(W, \nu) = f_m^+(W, \nu) \frac{(\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c}{\gamma}$$

$$(4.21) \quad f_\tau^+(W, \nu) = f_m^+(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})$$

$$(4.22) \quad f_e^+(W, \nu) = f_m^+(W, \nu) \frac{((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}$$

$$(4.23) \quad \begin{cases} \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} = \frac{1J}{|\nu|} (u\nu_x + v\nu_y) & \equiv u \cos \theta + v \sin \theta \\ \tilde{u} \bullet \tilde{\tau} = \frac{1J}{|\nu|} (-u\nu_y + v\nu_x) & \equiv -u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

$$(4.24) \quad f_x^+(W, \nu) = f_n^+(W, \nu) \cos \theta - f_\tau^+(W, \nu) \sin \theta$$

$$(4.25) \quad f_y^+(W, \nu) = f_n^+(W, \nu) \sin \theta + f_\tau^+(W, \nu) \cos \theta.$$

De même, le flux “négatif” $\Phi^-(W) \bullet \nu$ est une généralisation naturelle des relations (2.33) à (2.35). Il vient :

$$(4.26) \quad \Phi^-(W) \bullet \nu = \begin{cases} \Phi(W) \bullet \nu & \text{si } M_\nu \leq -1 \\ |\nu| \left(f_m^-(W, \nu), f_x^-(W, \nu), f_y^-(W, \nu), f_e^-(W, \nu) \right)^t & \text{si } |M_\nu| \leq 1 \\ 0 & \text{si } M_\nu \geq 1 \end{cases}$$

avec, compte tenu de (4.23), les relations

$$(4.27) \quad f_m^-(W, \nu) = -\rho c \left(\frac{M_\nu - 1}{2} \right)^2$$

$$(4.28) \quad f_n^-(W, \nu) = f_m^-(W, \nu) \frac{(\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - 2c}{\gamma}$$

$$(4.29) \quad f_\tau^-(W, \nu) = f_m^-(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})$$

$$(4.30) \quad f_e^-(W, \nu) = f_m^-(W, \nu) \frac{((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)}$$

$$(4.31) \quad f_x^-(W, \nu) = f_n^-(W, \nu) \cos \theta - f_\tau^-(W, \nu) \sin \theta$$

$$(4.32) \quad f_y^-(W, \nu) = f_n^-(W, \nu) \sin \theta + f_\tau^-(W, \nu) \cos \theta.$$

qui permettent de généraliser la relation (2.26) sous la forme

$$(4.33) \quad \Phi(W) \bullet \nu = \Phi^+(W) \bullet \nu + \Phi^-(W) \bullet \nu, \quad \forall W, \quad \forall \nu.$$

• 4.4 • Pression paroi.

• La pression à la paroi s'obtient par une approche analogue au cas monodimensionnel ; on évalue d'abord la pression à vitesse nulle $p_{\star,j}^{n+1/2}(0)$, avec une notation quasiment analogue à celle du cas monodimensionnel, puis on la corrige avec d'une part l'effet dû à la vitesse de la paroi et d'autre part l'effet dû à la variation du vecteur normal. La pression paroi à vitesse nulle se calcule en utilisant dans le problème de Riemann relatif à la face $\Sigma_{I+1/2,j}$ la donnée à gauche égale à $W_{i+1/2,j,-}^n$ et pour donnée à droite son état miroir :

$$(4.34) \quad W_{i+1/2,j,+}^n = \mu \left(W_{i+1/2,j,-}^n \right)$$

qui a même thermodynamique que l'état $W_{i+1/2,j,-}^n$, même vitesse tangentielle $\tilde{u}_{\star,j} \cdot \tilde{\tau}$ mais une vitesse normale $\tilde{u}_{\star,j} \cdot \tilde{\nu}$ opposée. Nous avons :

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n) \right) = \rho_{\star,j}^n \equiv \rho \left(W_{i+1/2,j,-}^n \right) \\ \tilde{u} \left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n) \right) \cdot \tilde{\nu} = -\tilde{u}_{\star,j}^n \cdot \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|} \\ \tilde{u} \left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n) \right) \cdot \tilde{\tau} = \tilde{u}_{\star,j}^n \cdot \left(k \times \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|} \right) = \tilde{u}_{\star,j}^n \cdot \tilde{\tau} \\ (\rho E) \left(\mu(W_{i+1/2,j,-}^n) \right) = (\rho E) \left(W_{i+1/2,j,-}^n \right) \end{array} \right.$$

de sorte que le flux décomposé entre $W_{i+1/2,j,-}^n$ et son miroir $\mu(W_{i+1/2,j,-}^n)$ est toujours de la forme

$$(4.36) \quad (\Phi \cdot \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = (0, p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j}, 0)^t, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

avec

$$(4.37) \quad p_{\star,j}^{n+1/2}(0) = 2 f_m^+ \left(W_{i+1/2,j,-}^n, \nu_{I+1/2,j} \right) \frac{(\gamma - 1) (\tilde{u}_{\star,j}^n \cdot \tilde{\nu}) + 2c_{\star,j}^n}{\gamma}$$

lorsque le nombre de Mach normal $M_{\nu,\star,j}^n$ défini par les relations

$$(4.38) \quad \tilde{\nu}_{I+1/2,j} = \frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|}$$

$$(4.39) \quad M_{\nu,\star,j}^n = \frac{\tilde{u}_{\star,j}^n \cdot \tilde{\nu}_{I+1/2,j}}{c_{\star,j}^n}$$

est inférieur ou égal à 1 en module.

Proposition 4.4 Pression paroi à vitesse nulle.

Lorsque l'élément de surface discrète $\Sigma_{I+1/2, j}$ est immobile dans sa position initiale (i.e. $s_{j+1/2}^{n+1/2} = s_{j-1/2}^{n+1/2} = 0$, $\delta_{j+1/2}^n = \delta_{j-1/2}^n = 0$), le flux $(\Phi \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ définit, grâce à la relation (4.36), une pression paroi $p_{\star, j}^{n+1/2}(0)$ qui se calcule à partir du nombre de Mach normal $M_{\nu, \star, j}^n$, de la célérité du son $c_{\star, j}^n$ et de la vitesse normale $\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}$ de l'état extrapolé $W_{i+1/2, j, -}^n$ près de la paroi, à l'aide de la relation (4.37) lorsque $|M_{\nu, \star, j}^n| \leq 1$.

Preuve de la proposition 4.4.

- Elle a essentiellement été faite ci-dessus ; comme la vitesse normale $\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}$ change de signe, on a

$$f_m^+(W_{i+1/2, j, -}^n) + f_m^-(\mu(W_{i+1/2, j, -}^n)) = 0$$

donc les flux de masse et d'énergie totaux sont nuls compte tenu de la relation (4.14). Le flux d'impulsion tangentiel global est nul également, compte tenu de (4.21), (4.29), (4.35) et de la relation précédente. Le flux d'impulsion normal de l'état miroir, compte tenu de (4.28) et (4.35) est exactement égal au flux d'impulsion normal de l'état extrapolé $W_{i+1/2, j, -}^n$, ce qu'exprime finalement la relation (4.37), compte tenu de (4.20) et de la rotation d'angle θ (4.24)(4.25) qui permet de le calculer. La proposition est établie. \square

Proposition 4.5 Calcul approché de la pression paroi.

La pression $p_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ présente dans la relation (3.68) qui définit le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ admet au premier ordre de précision par rapport à la vitesse $s_j^{n+1/2}$ de l'interface mobile et par rapport aux écarts $\delta_{j-1/2}^{n+1/2}$ et $\delta_{j+1/2}^{n+1/2}$ le développement limité suivant :

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{I+1/2, j}^{n+1/2} = p_{\star, j}^{n+1/2}(0) - \rho_{\star, j}^n c_{\star, j}^n (s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}) + \\ + \frac{[3(\gamma - 1)(\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}) + (\gamma + 3)c_{\star, j}^n][p_{\star, j}^{n+1/2}(0)]}{[(\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}) + c_{\star, j}^n][(\gamma - 1)(\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \tilde{\nu}) + 2c_{\star, j}^n]} (\tilde{u}_{\star, j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}) \\ + (\text{ordre} \geq 2) \end{array} \right.$$

où

$$(4.41) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{u}_{*,j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2} &= - \left(\frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|^2} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) (\tilde{u}_{*,j}^n \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j}) \\ &+ \left(\tilde{u}_{*,j}^n \times \frac{\epsilon_j^{n+1/2}}{|\nu_{I+1/2,j}|} \right) + \text{ordre} \geq 2, \end{aligned} \right.$$

$p_{*,j}^{n+1/2}(0)$ est la pression paroi à vitesse nulle calculée à l'aide du schéma numérique (4.37), $\rho_{*,j}^n$ la densité de l'état extrapolé $W_{i+1/2,j,-}^n$, $c_{*,j}^n$ la célérité du son de ce même état, $\tilde{u}_{*,j}^n$ sa vitesse et $\epsilon_j^{n+1/2}$ l'infiniment petit calculé à la relation (4.8).

Preuve de la proposition 4.5.

- Comme pour le cas monodimensionnel, il faut évaluer la pression non à vitesse nulle, mais sur le point de la 1-onde issue de $W_{i+1/2,j,-}^n$ et de vitesse normale égale à $s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$. Le premier terme complémentaire est donc dû à cet effet et l'analyse monodimensionnelle effectuée à la proposition 2.3 est encore valable. Nous renvoyons le lecteur aux relations (2.54) et (2.55).

- Le terme suivant, dû à la géométrie, tient à la distorsion de la paroi liée à l'ensemble du mouvement des points mobiles qui change la direction de la normale. La pression à vitesse nulle est à prendre pour une normale déformée $\nu_j^{n+1/2}$ et on doit développer au premier ordre par rapport à $\delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$ (calculé à l'expression (4.11)) une pression $p_{*,j}^{n+1/2}(\delta \tilde{\nu})$ donnée par :

$$(4.42) \quad p_{*,j}^{n+1/2}(\delta \tilde{\nu}) = 2 f_m^+ \left(W_{i+1/2,j,-}^n, \tilde{\nu}_j^{n+1/2} \right) \frac{(\gamma - 1) (\tilde{u}_{*,j}^n \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}) + 2c_{*,j}^n}{\gamma}.$$

Compte tenu des relations (4.19) et (4.23), on a :

$$\begin{aligned} \delta p_{*,j}^{n+1/2} &= \left[2 \frac{2 f_m^+}{(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + c} \frac{(\gamma - 1)(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + 2c}{\gamma} + 2 f_m^+ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right] \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \\ &= p_{*,j}^{n+1/2}(0) \left[\frac{2}{(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + c} + \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 1)(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + 2c} \right] (\tilde{u} \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}) \end{aligned}$$

avec une notation quelque peu simplifiée pour ne pas allonger les expressions algébriques. La relation (4.40) est donc établie.

- Il reste à préciser (4.41) ; compte tenu du développement (4.11), il vient :

$$\tilde{u} \bullet \delta \tilde{\nu} = - \left(\frac{\nu}{|\nu|^2} \times \epsilon \right) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + \left(\tilde{u}, \frac{\epsilon}{|\nu|} \times k \right) + \text{ordre} \geq 2$$

$$= -\left(\frac{\nu}{|\nu|^2} \times \epsilon\right) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + \left(\tilde{u} \times \frac{\epsilon}{|\nu|}\right) + \text{ordre} \geq 2$$

et, aux notations près, la relation (4.41) est établie. \square

• 4.5 • Flux transversal.

• La relation (3.68) qui permet de définir le flux limite de paroi mobile fait apparaître un flux transversal $(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ qu'il convient de calculer ainsi qu'une expression dynamique issue de ce flux, à savoir

$$(4.43) \quad \Psi\left(\frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}\right) \equiv (\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2} W_{I, j+1/2}^{n+1/2}.$$

Il faut préciser que dans l'expression (4.43), l'état $W_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ est un état vivant sur la direction d'espace-temps de vitesse normale égale à $\frac{1}{2}(s \bullet \tilde{\nu})_{j+1/2}^{n+1/2}$ dans la résolution du problème de Riemann (voir la figure 15) et le flux $(\Phi \bullet \nu)_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ est à prendre le long de cette même direction d'espace-temps de vitesse normale $\frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}$.

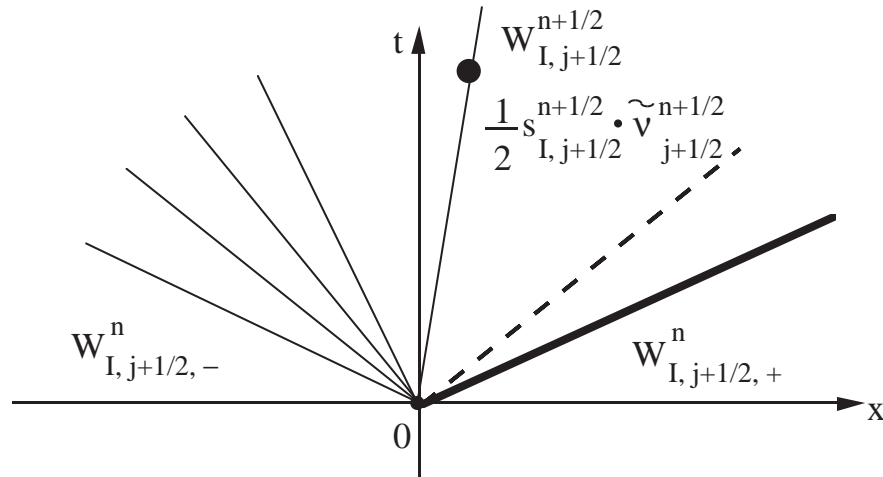


Figure 15 Dans le problème de Riemann entre les états fluides $W_{I, j+1/2, -}^n$ et $W_{I, j+1/2, +}^n$, il faut évaluer le flux (4.43) au point de vitesse normale $\frac{1}{2}(s \bullet \tilde{\nu})_j^{n+1/2}$.

- La décomposition de flux de van Leer a les inconvénients de ses avantages ; l'expression (4.14) qui permet le calcul approché de la solution du problème de Riemann est simple mais il est impossible, dans l'état actuel de nos connaissances et malgré une tentative infructueuse menée lors de cette étude (mai 1997), de proposer une décomposition "naturelle" de l'expression $\Psi(s \bullet \nu)$ de la relation (4.14) qui permette de retrouver les relations (4.17) à (4.33) lorsque $s \bullet \nu = 0$. Nous optons donc pour la **modélisation numérique** qui suit, approche qui étend ce qui a été proposé plus haut pour le champ de pression.
- Nous nous plaçons d'abord à une dimension d'espace et supposons le problème de Riemann entre W_g et W_d résolu exactement grâce au schéma de Godunov. Alors l'expression (4.43) a un développement qui s'exprime simplement en fonction du flux numérique (à vitesse nulle), de la vitesse de mobilité infiniment petite s et de l'état $W(0)$ présent à l'interface lors de la résolution exacte de ce problème autosemblable. La proposition qui suit précise ce point.

Proposition 4.6 Flux numérique à vitesse variable.

Soient W_g et W_d deux états monodimensionnels (relation (2.5)), $V(W_g, \xi, W_d)$ la solution entropique autosemblable du problème de Riemann entre W_g et W_d . Alors on a les deux résultats suivants : **(i)** le flux du schéma de Godunov $\Psi(W_g, W_d)$ est calculé simplement par la relation

$$(4.44) \quad \Psi(W_g, W_d) = f(V(W_g, 0, W_d))$$

où $f(\bullet)$ est définie à la relation (2.8), **(ii)** pour $\xi \in \mathbb{R}$ infiniment petit, l'expression $\Psi(W_g, \xi, W_d)$ définie comme en (4.43) par la relation

$$(4.45) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) \equiv f(V(W_g, \xi, W_d)) - \xi V(W_g, \xi, W_d)$$

admet le développement suivant :

$$(4.46) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) = \Psi(W_g, W_d) - \xi V(W_g, 0, W_d) + \text{ordre}(\xi^2).$$

Preuve de la proposition 4.6.

- Nous supposons le lecteur familier de la résolution du problème de Riemann pour la dynamique des gaz et renvoyons dans le cas contraire à l'ouvrage de Courant et Friedrichs [CF48]. La figure 16 illustre une configuration typique pour le problème de Riemann : l'espace-temps $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ est divisé en secteurs angulaires où la variable $\xi = \frac{x}{t}$ permet de paramétrer l'état $V(W_g, \xi, W_d)$ solution entropique du problème de tube à choc. Dans ce cas de figure, quatre valeurs de ξ sont critiques : la valeur $\xi = \lambda_1(W_g)$ qui permet de "commencer" la 1-onde de détente, la valeur $\xi = \lambda_1(W_1^*)$ du premier

état intermédiaire qui termine cette 1-onde et débute la plage du premier état intermédiaire, la valeur $\xi = u^*$ où u^* est la valeur commune des vitesses de W_1^* et W_2^* et enfin la valeur $\xi = \sigma_3$ de la célérité d'un 3-choc entre le second état intermédiaire W_2^* et l'état de droite W_d de ce problème. Nous avons donc (dans ce cas de figure au moins) :

$$(4.47) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) = \begin{cases} f(W_g) - \xi W_g, & \xi < \lambda_1(W_g) \\ f(V(W_g, \xi, W_d)) - \xi V(W_g, \xi, W_d), & \lambda_1(W_g) < \xi < \lambda_1(W_1^*) \\ f(W_1^*) - \xi W_1^*, & \lambda_1(W_1^*) < \xi < u^* \\ f(W_2^*) - \xi W_2^*, & u^* < \xi < \sigma_3 \\ f(W_d) - \xi W_d, & \xi > \sigma_3. \end{cases}$$

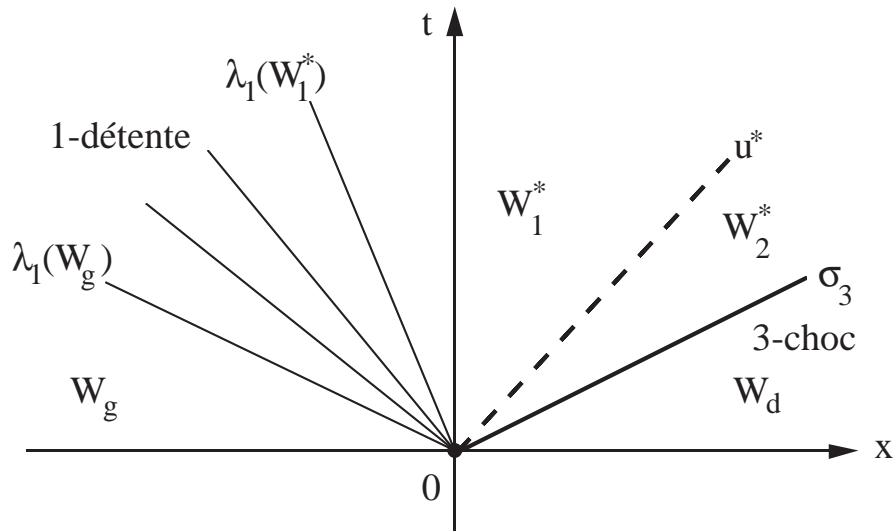


Figure 16 Solution typique du problème de Riemann.

- Dans la 1-onde de détente ($\lambda_1(W_g) < \xi < \lambda_1(W_1^*)$), la fonction $\xi \mapsto \Psi(W_g, \xi, W_d)$ est dérivable et on a :

$$(4.48) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi(W_g, \xi, W_d) = -V(W_g, \xi, W_d).$$

En effet, le long de cette onde de détente, l'état $V(W_g, \xi, W_d)$ vérifie :

$$(4.49) \quad \left[df(V(W_g, \xi, W_d)) - \xi \right] \frac{\partial V}{\partial \xi}(W_g, \xi, W_d) = 0$$

et la propriété (4.48) résulte d'une dérivation par rapport à ξ de la relation (4.45) et de la relation (4.49). Si la 1-onde de détente contient le point d'origine

$\xi = 0$, la relation (4.46) résulte alors du développement de Taylor à l'ordre 1 de $\Psi(W_g, \xi, W_d)$ et de la relation (4.48).

- Pour un état constant V , l'expression (4.45) est une simple fonction affine de ξ (*c.f.* (4.47)) et si c'est le cas autour de $\xi = 0$, alors le développement (4.46) est en fait exact.

- Pour la 3-onde de choc (avec $\xi = \sigma_3$) ou la 2-discontinuité de contact ($\xi = u^*$), on a deux états constants W_- et W_+ de part et d'autre de la discontinuité et la relation de Rankine-Hugoniot s'exprime sous la forme

$$(4.50) \quad f(W_+) - f(W_-) = \sigma(W_+ - W_-)$$

qui entraîne clairement la continuité de la fonction $\Psi(W_g, \bullet, W_d)$ au voisinage de $\xi = \sigma$:

$$(4.51) \quad \Psi(W_g, \xi = \sigma - 0, W_d) = \Psi(W_g, \xi = \sigma + 0, W_d).$$

Compte tenu de l'expression affine de $\Psi(W_g, \bullet, W_d)$ au voisinage de $\xi = \sigma$:

$$(4.52) \quad \Psi(W_g, \xi, W_d) = \begin{cases} \Psi(W_g, \sigma, W_d) - (\xi - \sigma)W_- , & \xi < \sigma \\ \Psi(W_g, \sigma, W_d) - (\xi - \sigma)W_+ , & \xi > \sigma , \end{cases}$$

nous concluons que le développement (4.46) est valable si $\sigma = 0$, à cette réserve près que la dérivée de $\Psi(W_g, \bullet, W_d)$ ayant un saut, l'état $V(W_g, 0, W_d)$ dépend du signe avec lequel ξ tend vers zéro. La propriété en résulte. \square

- La proposition 4.6 permet de calculer le flux de paroi transversal (4.43) lorsqu'on utilise le schéma de Godunov. Le premier terme de la relation (4.46), noté dans la suite $(\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2})$ correspond au flux classique lorsque la vitesse est nulle (ce qui n'exclut pas une modification de la direction normale !) et le second permet d'utiliser un état $V_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ présent à l'interface (de vitesse nulle) dans le problème de Riemann, au lieu de l'état $W_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ présent sur une direction d'espace-temps de célérité non nulle. Nous avons donc :

$$(4.53) \quad \left\{ \Psi\left(\frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}\right) = (\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2}) - \frac{1}{2}(s \bullet \nu)_{j+1/2}^{n+1/2} V_{I, j+1/2}^{n+1/2} + (\text{ordre} \geq 2) \right.$$

- Le développement limité se poursuit clairement : il faut d'une part développer le premier terme, flux de van Leer qui approche le schéma de Godunov lorsque la normale $\nu_{j+1/2}^{n+1/2}$ est issue de la normale fixe $\nu_{I, j+1/2}$ par la relation (4.7). Ce calcul est possible car le flux de van Leer est une fonction dérivable ; nous le présentons au paragraphe suivant. Il faut d'autre part évaluer

le second terme de la relation (4.53) : comme $s_j^{n+1/2}$ est un infiniment petit du problème, on néglige au premier ordre la variation de la normale $\nu_j^{n+1/2}$. De plus, l'état de vitesse nulle $V_{I,j+1/2}^{n+1/2}$ dans le schéma de Godunov peut être obtenu en prenant pour direction normale de ce problème de Riemann la direction fixe $\nu_{I,j+1/2}$, négligeant une nouvelle fois la variation (4.7) de cette normale. Nous effectuons aussi l'approximation (modélisation numérique !) qui consiste à utiliser la résolution approchée de Roe [Roe81] notée ici et plus loin $V_{I,j+1/2}^{R,n}$ à la place de la résolution exacte de Godunov entre les états $W_{I,j+1/2,-}^n$ et $W_{I,j+1/2,+}^n$ de part et d'autre de l'interface $\Sigma_{I,j+1/2}$. Le flux transversal $\Psi(s \cdot \nu)$, défini à la relation (4.43) admet donc le développement suivant :

$$(4.54) \quad \left\{ \Psi\left(\frac{1}{2}(s \cdot \nu)_{j+1/2}^{n+1/2}\right) = \left(\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2}\right) - \frac{1}{2}(s \cdot \nu)_{j+1/2}^{n+1/2} V_{I,j+1/2}^{R,n} + (\text{ordre} \geq 2). \right.$$

- Le paragraphe 4.6 est consacré au développement du premier terme du membre de droite de la relation (4.54) $\left(\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2}\right)$ pour prendre en compte la variation (4.7) de la direction normale ; le paragraphe 4.7 explicite le calcul de la moyenne de Roe $V_{I,j+1/2}^{R,n}$ dans le cas bidimensionnel.

• 4.6 • Sensibilité du flux de van Leer à une variation de la direction normale.

- Le flux numérique transversal $\left(\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2}\right)$ est calculé selon Bram van Leer ([vL79], [vL82]) avec le schéma (4.14), joint avec une extrapolation, c'est à dire :

$$(4.55) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2} &= \Phi^+(W_{I,j+1/2,-}^n) \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2} + \\ &+ \Phi^-(W_{I,j+1/2,+}^n) \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \right.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous explicitons la variation $\delta\Phi^+$ (respectivement $\delta\Phi^-$) du flux numérique $\Phi^+(W) \cdot \nu$ (respectivement $\Phi^-(W) \cdot \nu$) dans une variation $\delta\nu = k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}$ de la direction normale (relation (4.7)), afin de développer le flux (4.55) lorsque la position du sommet frontière $M_{I+1/2,j+1/2}$ varie de $\delta_{j+1/2}^{n+1/2}$ au cours du temps.

- Nous commençons par évaluer la variation $\delta\tilde{\nu}$ de la normale unitaire lorsque la normale non unitaire ν de mesure égale à celle de la facette $\Sigma_{I, j+1/2}$ varie de $\delta\nu$.

Proposition 4.7 Variation de la normale unitaire.

Lorsque la normale ν varie de $\delta\nu$, la normale unitaire $\tilde{\nu}$ définie par

$$(4.56) \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{|\nu|}$$

varie de $\delta\tilde{\nu}$, avec

$$(4.57) \quad \delta\tilde{\nu} = \frac{1}{|\nu|} \delta\nu - \frac{1}{|\nu|^3} (\nu, \delta\nu) \nu.$$

Dans le cas de la relation (4.7) où $\delta\nu$ s'écrit $\delta\nu_{j+1/2}^{n+1/2} = k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}$, on a simplement

$$(4.58) \quad \delta\tilde{\nu}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{(\nu_{I, j+1/2} \bullet \delta_{j+1/2}^{n+1/2})}{|\nu|^3} (k \times \nu_{I, j+1/2}).$$

Preuve de la proposition 4.7.

- La relation (4.57) est une simple dérivation de (4.56), compte tenu de la définition de la norme $|\nu|$ en fonction du produit scalaire (ν, ν) . Lorsque $\delta\nu = k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2}$, on a alors

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\nu} &= \frac{1}{|\nu|^3} \left[(\nu_x^2 + \nu_y^2) \begin{pmatrix} -\delta_y \\ \delta_x \end{pmatrix} - (-\nu_x \delta_y + \nu_y \delta_x) \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{|\nu|^3} \begin{pmatrix} -\nu_y^2 \delta_y - \nu_x \nu_y \delta_x \\ \nu_x^2 \delta_x + \nu_x \nu_y \delta_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\nu \bullet \delta_{j+1/2}^{n+1/2})}{|\nu|^3} \begin{pmatrix} -\nu_y \\ \nu_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre la relation (4.58). □

Proposition 4.8 Sensibilité de la contribution positive du flux.

Soit W un état (relation (4.15)) pour la résolution des équations d'Euler de la dynamique des gaz, ν une direction normale de l'espace et $\tilde{\nu} = \nu / |\nu|$ la direction unitaire associée. On suppose que le nombre de Mach normal M_ν défini à la relation (4.16) est plus petit que 1 en module :

$$(4.59) \quad \left| M_\nu \equiv \frac{\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}}{c} \right| \leq 1.$$

Alors le flux $\Phi^+(W) \bullet \nu$, défini aux relations (4.18) à (4.25) admet le développement suivant :

$$(4.60) \quad \delta(\Phi^+(W) \bullet \nu) = (\delta\Phi_m^+, \delta\Phi_x^+, \delta\Phi_y^+, \delta\Phi_e^+)^t$$

avec

$$(4.61) \quad \delta\Phi_m^+ = \frac{2}{1 + M_\nu} f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \times \tilde{u}}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta)$$

$$(4.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_x^+ = \left[\left(v - \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_x \right) f_m^+(W, \nu) + \right. \\ \left. + \frac{2}{1 + M_\nu} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_x^+(W, \nu) - f_y^+(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_y^+ = \left[- \left(u + \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_y \right) f_m^+(W, \nu) + \right. \\ \left. + f_x^+(W, \nu) + \frac{2}{1 + M_\nu} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_y^+(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.64) \quad \delta\Phi_e^+ = \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} f_n^+(W, \nu) + \frac{2}{(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) + c} f_e^+(W, \nu) \right] (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|}$$

lorsque, toutes choses égales par ailleurs, la normale ν subit une variation $\delta\nu$ donnée par

$$(4.65) \quad \delta\nu = k \times \delta.$$

Preuve de la proposition 4.8.

• Compte tenu de la relation (4.58) et de la forme algébrique particulière des flux $f_m^+(W, \nu)$, $f_x^+(W, \nu)$, $f_y^+(W, \nu)$ et $f_e^+(W, \nu)$ à dériver (relations (4.19) à (4.25)), on commence par dériver le nombre de Mach normal. On a :

$$\begin{aligned} \delta M_\nu &= \frac{1}{c} \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) = \frac{1}{c} \tilde{u} \bullet \delta\tilde{\nu} \\ &= \frac{1}{c |\nu|^3} (\nu \bullet \delta) (\tilde{u} \bullet (k \times \nu)) \quad \text{compte tenu de (4.58)} \\ &= \frac{\nu \times \tilde{u}}{c |\nu|^3} (\nu \bullet \delta) = \frac{\tilde{\nu} \times \tilde{u}}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta) \end{aligned}$$

$$(4.66) \quad \delta M_\nu = \frac{1}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \times \tilde{u}) (\tilde{\nu} \bullet \delta) = \frac{1}{c |\nu|} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) (\tilde{\nu} \bullet \delta).$$

• Il suffit ensuite de dériver l'expression (4.19) par rapport au nombre de Mach normal :

$$\delta\Phi_m^+ = 2\rho c \frac{(1+M_\nu)}{4} \delta M_\nu = 2f_m^+(W, \nu) \frac{\delta M_\nu}{1+M_\nu}$$

ce qui montre la relation (4.61).

• On dérive ensuite le flux d'impulsion normal $f_n^+(W, \nu)$ calculé à la relation (4.20) ; il vient

$$\begin{aligned} \delta f_n^+(W, \nu) &= \delta\Phi_m^+ \frac{(\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) + 2c}{\gamma} + f_m^+(W, \nu) \frac{\gamma-1}{\gamma} \delta(\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \\ &= \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_m^+(W, \nu) \frac{(\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) + 2c}{\gamma} + f_m^+(W, \nu) \frac{\gamma-1}{\gamma} c \right] \delta M_\nu \end{aligned}$$

$$(4.67) \quad \delta f_n^+(W, \nu) = \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_n^+(W, \nu) + \frac{\gamma-1}{\gamma} c f_m^+(W, \nu) \right] \delta M_\nu$$

$$(4.68) \quad \delta f_n^+(W, \nu) = \frac{1}{\gamma(1+M_\nu)} \left[3(\gamma-1)(\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) + (\gamma+3)c \right] f_m^+(W, \nu) \delta M_\nu.$$

• Il est également utile de maîtriser la dérivée de la vitesse tangentielle $\tilde{u} \cdot \tilde{\tau} = \tilde{\nu} \times \tilde{u}$:

$$\delta(\tilde{\nu} \times \tilde{u}) = (\delta\tilde{\nu}) \times \tilde{u} = \frac{\nu \cdot \delta}{|\nu|^3} (k \times \nu) \times \tilde{u} = -\frac{\nu \cdot \delta}{|\nu|^3} (\tilde{u} \cdot \nu)$$

$$(4.69) \quad \delta(\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) = \delta(\tilde{\nu} \times \tilde{u}) = -\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}).$$

La dérivée du flux d'impulsion tangentiel (relation (4.21)) est donc simple :

$$\begin{aligned} \delta f_\tau^+(W, \nu) &= \delta\Phi_m^+ (\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) + f_m^+(W, \nu) \delta(\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) \\ &= f_m^+(W, \nu) \left[\frac{2(\tilde{u} \cdot \tilde{\tau})}{1+M_\nu} \delta M_\nu - \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \cdot \delta) \right] \\ (4.70) \quad \delta f_\tau^+(W, \nu) &= \frac{2}{1+M_\nu} f_\tau^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \cdot \delta). \end{aligned}$$

• On combine ensuite les relations (4.67) et (4.70) pour dériver, à l'aide de (4.25) et (4.26), les deux composantes cartésiennes du flux d'impulsion. Il vient :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_x^+ &= \delta(f_n^+(W, \nu) \tilde{\nu}_x - f_\tau^+(W, \nu) \tilde{\nu}_y) \\ &= (\delta f_n^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_x + f_n^+(W, \nu) (\delta\tilde{\nu}_x) - (\delta f_\tau^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_y - f_\tau^+(W, \nu) (\delta\tilde{\nu}_y). \end{aligned}$$

Compte tenu de (4.58), on a

$$(4.71) \quad \delta\tilde{\nu}_x = -\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \tilde{\nu}_y \quad ; \quad \delta\tilde{\nu}_y = \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \tilde{\nu}_x$$

et le calcul se déroule, suite à (4.61), (4.67), (4.70), (4.71), (4.23), (4.24) et (4.25) :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_x^+ &= \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_n^+(W, \nu) + \frac{\gamma-1}{\gamma} c f_m^+(W, \nu) \right] \delta M_\nu \cos \theta \\
 &\quad + f_n^+(W, \nu) \left(-\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \sin \theta \right) - f_\tau^+(W, \nu) \left(\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \cos \theta \right) \\
 &\quad - \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_\tau^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \cdot \delta) \right] \sin \theta \\
 &= \frac{2}{1+M_\nu} f_x^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_y^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \\
 &\quad + f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} (\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) \cos \theta + (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \sin \theta \right) \\
 &= \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_x^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{c} - f_y^+(W, \nu) + f_m^+(W, \nu) \left(v - \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{\gamma} \tilde{\nu}_x \right) \right]
 \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (4.62). On procède de même pour la seconde composante :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_y^+ &= \delta (f_n^+(W, \nu) \tilde{\nu}_y + f_\tau^+(W, \nu) \tilde{\nu}_x) \\
 &= (\delta f_n^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_y + f_n^+(W, \nu) (\delta \tilde{\nu}_y) + (\delta f_\tau^+(W, \nu)) \tilde{\nu}_x + f_\tau^+(W, \nu) (\delta \tilde{\nu}_x) . \\
 &= \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_n^+(W, \nu) + \frac{\gamma-1}{\gamma} c f_m^+(W, \nu) \right] \delta M_\nu \sin \theta \\
 &\quad + f_n^+(W, \nu) \left(\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \cos \theta \right) - f_\tau^+(W, \nu) \left(\frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \sin \theta \right) \\
 &\quad + \left[\frac{2}{1+M_\nu} f_\tau^+(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}}{|\nu|} (\tilde{\nu} \cdot \delta) \right] \cos \theta \\
 &= \frac{2}{1+M_\nu} f_y^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{c} \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} + f_x^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \\
 &\quad + f_m^+(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} (\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) \sin \theta - (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \cos \theta \right) \\
 &= \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left[f_x^+(W, \nu) + \frac{2}{1+M_\nu} f_y^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{c} - f_m^+(W, \nu) \left(u + \frac{\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}}{\gamma} \sin \theta \right) \right]
 \end{aligned}$$

et la relation (4.63) en découle.

- La dérivation du flux d'énergie positive est menée par dérivation de la relation (4.22). il vient :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_e^+ &= \delta f_m^+(W, \nu) \frac{((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \\
 &\quad + f_m^+(W, \nu) \frac{2(\gamma - 1) ((\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + 2c)}{2(\gamma^2 - 1)} \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \\
 &= \frac{2}{1 + M_\nu} f_e^+(W, \nu) \frac{\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}}{c} \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} f_n^+(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|}
 \end{aligned}$$

et l'établissement de la relation (4.64) achève la preuve de la proposition 4.8. \square

Proposition 4.9 Sensibilité de la contribution négative du flux.

Sous les mêmes hypothèses qu'à la proposition 4.8, le flux $\Phi^-(W) \bullet \nu$ défini aux relations (4.27) à (4.32) admet, lorsque la direction normale ν subit une variation $\delta\nu$ de la forme (4.65), c'est à dire $\delta\nu = k \times \delta$, le développement au premier ordre suivant :

$$(4.72) \quad \delta(\Phi^-(W) \bullet \nu) = (\delta\Phi_m^-, \delta\Phi_x^-, \delta\Phi_y^-, \delta\Phi_e^-)^t$$

avec

$$(4.73) \quad \delta\Phi_m^- = \frac{2}{M_\nu - 1} f_m^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \times \tilde{u}}{c |\nu|} (\tilde{\nu} \bullet \delta)$$

$$(4.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_x^- = \left[\left(v - \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_x \right) f_m^-(W, \nu) + \right. \\ \left. + \frac{2}{M_\nu - 1} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_x^-(W, \nu) - f_y^-(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\Phi_y^- = \left[- \left(u + \frac{1}{\gamma} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \tilde{\nu}_y \right) f_m^-(W, \nu) + \right. \\ \left. + f_x^-(W, \nu) + \frac{2}{M_\nu - 1} \frac{(\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})}{c} f_y^-(W, \nu) \right] \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} \end{array} \right.$$

$$(4.76) \quad \delta\Phi_e^- = \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} f_n^-(W, \nu) + \frac{2}{(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) - c} f_e^-(W, \nu) \right] (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \frac{(\tilde{\nu} \bullet \delta)}{|\nu|} .$$

Preuve de la proposition 4.9.

- On commence par dériver la relation (4.27) relative au flux de masse :

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi_m^- &= \delta \left[-\rho c \left(\frac{M_\nu - 1}{2} \right)^2 \right] \\
 &= (-\rho c) \frac{1}{4} 2(M_\nu - 1) \delta M_\nu
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{M_\nu - 1} f_m^-(W, \nu) \delta M_\nu$$

ce qui établit la relation (4.73).

- On dérive ensuite le flux d'impulsion normale (relation (4.28)) et le flux d'impulsion tangentielle (relation (4.29)) ; on obtient :

$$\begin{aligned} \delta f_n^-(W, \nu) &= \delta \Phi_m^- \frac{(\gamma - 1) \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - 2c}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} f_m^-(W, \nu) \delta(\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \\ &= \frac{2}{M_\nu - 1} f_n^-(W, \nu) \delta M_\nu + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^-(W, \nu) \delta M_\nu \\ (4.77) \quad \delta f_n^-(W, \nu) &= \left[\frac{2}{M_\nu - 1} f_n^-(W, \nu) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^-(W, \nu) \right] \delta M_\nu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta f_\tau^-(W, \nu) &= \delta \Phi_m^- (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) + f_m^-(W, \nu) \delta(\tilde{\nu} \times \tilde{u}) \\ (4.78) \quad \delta f_\tau^-(W, \nu) &= \frac{2}{M_\nu - 1} f_\tau^-(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^-(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|}. \end{aligned}$$

- Jointes à (4.31), (4.32) et (4.71), on déduit des relations (4.77) et (4.78) la dérivée des deux composantes cartésiennes du flux d'impulsion. Pour l'axe des x ,

$$\begin{aligned} \delta \Phi_x^- &= \delta f_n^-(W, \nu) \cos \theta - f_n^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \sin \theta \\ &\quad - \delta f_\tau^-(W, \nu) \sin \theta - f_\tau^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \cos \theta \\ &= \left[\frac{2}{M_\nu - 1} f_n^-(W, \nu) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^-(W, \nu) \right] \delta M_\nu \cos \theta - f_y^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \\ &\quad - \left[\frac{2}{M_\nu - 1} f_\tau^-(W, \nu) \delta M_\nu - f_m^-(W, \nu) (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \right] \sin \theta \\ &= \frac{2}{M_\nu - 1} f_x^-(W, \nu) \delta M_\nu - f_y^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \\ &\quad + f_m^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) \cos \theta + (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \sin \theta \right] \end{aligned}$$

et la relation (4.74) s'en déduit. Pour l'axe des y ,

$$\delta \Phi_y^- = \delta f_n^-(W, \nu) \sin \theta + f_n^-(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \bullet \delta}{|\nu|} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta f_{\tau}^{-}(W, \nu) \cos \theta - f_{\tau}^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \sin \theta \\
 = & \left[\frac{2}{M_{\nu} - 1} f_n^{-}(W, \nu) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} c f_m^{-}(W, \nu) \right] \delta M_{\nu} \sin \theta + f_x^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \\
 & + \left[\frac{2}{M_{\nu} - 1} f_{\tau}^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu} - f_m^{-}(W, \nu) (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \right] \cos \theta \\
 = & \frac{2}{M_{\nu} - 1} f_y^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu} + f_x^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \\
 & + f_m^{-}(W, \nu) \frac{\tilde{\nu} \cdot \delta}{|\nu|} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) (\tilde{u} \cdot \tilde{\tau}) \sin \theta - (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

et la relation (4.75) est établie.

- La dérivation du flux d'énergie négative se mène sans difficulté ; on a :

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi_e^{-} & = \delta \Phi_m^{-} \frac{((\gamma - 1) (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) - 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \\
 & \quad + f_m^{-}(W, \nu) \frac{2(\gamma - 1)}{2(\gamma^2 - 1)} ((\gamma - 1) (\tilde{u} \cdot \tilde{\nu}) - 2c) c \delta M_{\nu} \\
 & = \frac{2}{M_{\nu} - 1} f_e^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu} + \frac{\gamma c}{\gamma + 1} f_n^{-}(W, \nu) \delta M_{\nu}
 \end{aligned}$$

et la relation (4.76) résulte alors simplement de (4.66), ce qui termine d'établir la proposition 9. \square

• 4.7 • Moyenne de Roe bidimensionnelle.

- Le paragraphe 4.5 relatif à l'étude du flux transversal (4.3) nous a montré qu'on peut le développer au second ordre sous la forme (4.53). Au paragraphe 4.6 qui vient de s'achever, nous avons explicité l'outillage technique qui permet de développer le premier terme du membre de droite de la relation (4.53), c'est à dire $(\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \cdot \nu_{j+1/2}^{n+1/2})$ lorsque la normale $\nu_{I, j+1/2}^{n+1/2}$ est une perturbation du premier ordre de la normale "fixe" $\nu_{I, j+1/2}$ donnée à l'aide de la relation (4.7). Il convient maintenant de s'intéresser au second terme du membre de droite de la relation (4.53), lequel se présente déjà sous la forme d'une perturbation du premier ordre et peut donc être approchée par la relation (4.54). Le problème qui reste à résoudre est de calculer la moyenne de Roe, notée $V_{I, j+1/2}^{R, n}$ sur l'interface

$\Sigma_{I,j+1/2}$ transverse à la paroi mobile, entre les états $W_{I,j+1/2,-}^n$ et $W_{I,j+1/2,+}^n$ de part et d'autre de cette interface (voir la figure 13 pour une explicitation de la géométrie).

- Pour éviter des notations trop lourdes dans le corps de ce paragraphe, nous cherchons donc à évaluer la moyenne de Roe entre deux états W_g ($\equiv W_{I,j+1/2,-}^n$ ici) et W_d ($W_d = W_{I,j+1/2,+}^n$ dans notre cas de figure) séparés par une interface de normale unitaire $\tilde{\nu}$ ($\tilde{\nu} = \frac{\nu_{I,j+1/2}}{|\nu_{I,j+1/2}|}$ pour le calcul de $V_{I,j+1/2}^{R,n}$). Nous posons donc :

$$(4.79) \quad V_{I,j+1/2}^{R,n} = R\left(W_{I,j+1/2,-}^n, \tilde{\nu}_{I,j+1/2}, W_{I,j+1/2,+}^n\right)$$

et nous explicitons à la proposition suivante le calcul de la moyenne de Roe bidimensionnelle $R(W_g, \tilde{\nu}, W_d)$ entre deux états W_g et W_d séparés par une normale unitaire $\tilde{\nu}$.

Proposition 4.10 Moyenne de Roe bidimensionnelle.

- Soient W_g et W_d deux états fluides à quatre composantes scalaires (explicitées génériquement à la relation (4.15)) et $\tilde{\nu}$ une normale unitaire fixée. On définit l'état d'interface $W^*(W_g, W_d)$ à l'aide de sa densité ρ^* , de sa vitesse $\tilde{u} = (u^*, v^*)$ et de son enthalpie totale H^* , calculés par les (célèbres) relations de moyenne [Roe81] :

$$(4.80) \quad H_b = \frac{1}{\gamma - 1} (c_b)^2 + \frac{1}{2}(u_b^2 + v_b^2), \quad b = g \text{ ou } d$$

$$(4.81) \quad \rho^* = \sqrt{\rho_g \rho_d}$$

$$(4.82) \quad u^* = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.83) \quad v^* = \frac{\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.84) \quad H^* = \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}.$$

- La matrice de Roe $A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu})$ est calculée en posant $W = W^*(W_g, W_d)$ dans l'expression de la matrice jacobienne $A(W, \tilde{\nu})$ des équations (3.42) de la dynamique des gaz. La matrice $A(W, \tilde{\nu})$ est définie par la relation suivante

$$(4.85) \quad A(W, \tilde{\nu}) = df(W) \tilde{\nu}_x + dg(W) \tilde{\nu}_y$$

à partir des flux $f(\bullet)$ et $g(\bullet)$ et qui a une expression explicitée ci-dessous :

$$(4.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(W, \tilde{\nu}) = \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \tilde{\nu}_x & \tilde{\nu}_y & 0 \\ (\gamma-1)H\tilde{\nu}_x - c^2\tilde{\nu}_x & (2-\gamma)u\tilde{\nu}_x & -(\gamma-1)v\tilde{\nu}_x & (\gamma-1)\tilde{\nu}_x \\ -u(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & +(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & +u\tilde{\nu}_y & \\ (\gamma-1)H\tilde{\nu}_y - c^2\tilde{\nu}_y & v\tilde{\nu}_x & (2-\gamma)v\tilde{\nu}_y & (\gamma-1)\tilde{\nu}_y \\ -v(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & -(\gamma-1)u\tilde{\nu}_y & +(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & \\ (\gamma-\frac{2}{\gamma})H(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & H\tilde{\nu}_x & H\tilde{\nu}_y & \gamma(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) \\ -c^2(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & -(\gamma-1)u(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & -(\gamma-1)v(\tilde{u}\bullet\tilde{\nu}) & \end{array} \right) \end{array} \right. .$$

- La famille de matrices $A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu})$ vérifie les relations constitutives de Roe :

$$(4.87) \quad df(W_d) - df(W_g) = df(W^*(W_g, W_d)) \bullet (W_d - W_g)$$

$$(4.88) \quad dg(W_d) - dg(W_g) = dg(W^*(W_g, W_d)) \bullet (W_d - W_g)$$

et par linéarité toute relation de la forme

$$(4.89) \quad \Phi(W_d) \bullet \tilde{\nu} - \Phi(W_g) \bullet \tilde{\nu} = A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu}) \bullet (W_d - W_g).$$

- L'état $R(W_g, \tilde{\nu}, W_d)$ est par définition la solution stationnaire du problème de Riemann linéarisé de matrice $A(W^*(W_g, W_d), \tilde{\nu})$. Son expression est paramétrée par les valeurs propres de cette matrice, à savoir les "trois" ondes de célérité $\lambda_j(W^*, \tilde{\nu})$ ($j = 1$ à $4!$) qui s'explicitent ainsi :

$$(4.90) \quad \lambda_1(W^*, \tilde{\nu}) = \tilde{u}\bullet\tilde{\nu} - c^*$$

$$(4.91) \quad \lambda_2(W^*, \tilde{\nu}) = \lambda_3(W^*, \tilde{\nu}) = \tilde{u}\bullet\tilde{\nu}$$

$$(4.92) \quad \lambda_4(W^*, \tilde{\nu}) = \tilde{u}\bullet\tilde{\nu} + c^*$$

où c^* est calculée en cohérence avec les relations (4.80) à (4.84) :

$$(4.93) \quad \frac{1}{\gamma-1} (c^*)^2 = H^* - \frac{1}{2} [(u^*)^2 + (v^*)^2].$$

On a :

$$(4.94) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(W_g, \tilde{\nu}, W_d) = \\ \left\{ \begin{array}{l} W_g \\ W_g + \frac{1}{2(c^*)^2} [(p_d - \rho^* c^* \tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) - (p_g - \rho^* c^* \tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu})] r_1(W^*, \tilde{\nu}) \\ W_d - \frac{1}{2(c^*)^2} [(p_d + \rho^* c^* \tilde{u}_d \bullet \tilde{\nu}) - (p_g + \rho^* c^* \tilde{u}_g \bullet \tilde{\nu})] r_4(W^*, \tilde{\nu}) \\ W_d \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - c^* > 0 \\ \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} - c^* \leq 0 < \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} \\ \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} \leq 0 < \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + c^* \\ \text{si } \tilde{u} \bullet \tilde{\nu} + c^* \leq 0 \end{array}$$

où les vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ vérifient bien sûr

$$(4.95) \quad A(W^*, \tilde{\nu}) \bullet r_j(W^*, \tilde{\nu}) = \lambda_j(W^*, \tilde{\nu}) r_j(W^*, \tilde{\nu})$$

et ont une expression qui se calcule sans difficulté :

$$(4.96) \quad r_1(W^*, \tilde{\nu}) = (1, u^* - c^* \tilde{\nu}_x, v^* - c^* \tilde{\nu}_y, H^* - (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) c^*)^t$$

$$(4.97) \quad r_2(W^*, \tilde{\nu}) = (1, (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \tilde{\nu}_x, (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) \tilde{\nu}_y, \frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu})^2 - \frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau})^2)^t$$

$$(4.98) \quad r_3(W^*, \tilde{\nu}) = (0, -c^* \tilde{\nu}_y, c^* \tilde{\nu}_x, (\tilde{u} \bullet \tilde{\tau}) c^*)^t$$

$$(4.99) \quad r_4(W^*, \tilde{\nu}) = (1, u^* + c^* \tilde{\nu}_x, v^* + c^* \tilde{\nu}_y, H^* + (\tilde{u} \bullet \tilde{\nu}) c^*)^t.$$

Preuve de la proposition 4.10.

• Le calcul de la matrice jacobienne demande simplement de dériver les flux $f(\bullet)$ et $g(\bullet)$ des relations (3.40) et (3.41) relativement à l'état W explicité en (3.36) et à l'aide des équations d'état (3.37) et (3.39). On a par exemple

$$p = (\gamma - 1) \left[(\rho E) - \frac{1}{2\rho} ((\rho u)^2 + (\rho v)^2) \right]$$

donc

$$(4.100) \quad \frac{\partial p}{\partial W} = ((\gamma - 1) H - c^2, -(\gamma - 1) u, -(\gamma - 1) v, (\gamma - 1)).$$

De façon analogue,

$$\frac{\partial}{\partial W} (\rho u) = u \frac{\partial p}{\partial W} + p \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{\rho u}{\rho} \right) = u \frac{\partial p}{\partial W} + p \left(-\frac{u}{\rho}, \frac{1}{\rho}, 0, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial W} (\rho u E + p u) &= \frac{\partial}{\partial W} \left(\rho E \frac{\rho u}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial W} (p u) \\ &= (-E u, E, 0, u) + u \frac{\partial p}{\partial W} + \frac{p}{\rho} (-u, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial W} (\rho u E + p u) &= \left(-\left(H - \frac{p}{\rho}\right) u, H - \frac{p}{\rho}, 0, u \right) + u \frac{\partial p}{\partial W} + \frac{p}{\rho} (-u, 1, 0, 0) \\
 (4.101) \quad \frac{\partial}{\partial W} (\rho u H) &= \left((\gamma-2) H u - u c^2, H - (\gamma-1) u^2, -(\gamma-1) u v, \gamma u \right)
 \end{aligned}$$

compte tenu de (4.100) et de l'expression de la dérivée de pu . Il vient alors, par dérivation très élémentaire de la relation (3.40) :

$$(4.102) \quad df(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\gamma-1) H - u^2 - c^2 & (3-\gamma) u & (1-\gamma) v & (\gamma-1) \\ -u v & v & u & 0 \\ (\gamma-2) H u - u c^2 & H - (\gamma-1) u^2 & (1-\gamma) u v & \gamma u \end{pmatrix}$$

et un calcul très analogue, avec l'aide de (4.100) et (4.101), permet d'expliciter la dérivée de la relation (3.41) :

$$(4.103) \quad dg(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u v & v & u & 0 \\ (\gamma-1) H - v^2 - c^2 & (1-\gamma) u & (3-\gamma) v & (\gamma-1) \\ (\gamma-2) H v - v c^2 & (1-\gamma) u v & H - (\gamma-1) v^2 & \gamma v \end{pmatrix}.$$

La relation (4.86) résulte alors de (4.85) et de l'explicitation (4.102)-(4.103) des deux contributions.

- La vérification des relations (4.87) et (4.88) qui sont constitutives de la matrice de Roe demandent un peu de travail algébrique que nous explicitons ci-dessus pour la seconde ligne de (4.87).

$$\begin{aligned}
 A &\equiv [(\gamma-1) H^* - (u^*)^2 - (c^*)^2] (\rho_d - \rho_g) + (3-\gamma) u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\
 &\quad + (1-\gamma) v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (\gamma-1) (\rho_d E_d - \rho_g E_g) \\
 &= \left[\frac{\gamma-3}{2} (u^*)^2 + \frac{\gamma-1}{2} (v^*)^2 \right] (\rho_d - \rho_g) + (3-\gamma) u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\
 &\quad + (1-\gamma) v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \\
 &\quad + (\gamma-1) \left[\rho_d e_d + \frac{\rho_d}{2} ((u_d)^2 + (v_d)^2) - \rho_g e_g - \frac{\rho_g}{2} ((u_g)^2 + (v_g)^2) \right] \\
 &= \frac{\gamma-3}{2} (u^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - (\gamma-3) u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \frac{\gamma-1}{2} (\rho_d u_d^2 - \rho_g u_g^2) + \\
 &\quad + \frac{\gamma-1}{2} \left[(v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (\rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2) \right] + \\
 &\quad + p_d - p_g.
 \end{aligned}$$

Nous calculons alors séparément les termes en v et en u dans cette dernière expression. On a en effet

$$\begin{aligned}
 & \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}) v^* (\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d) \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 + v^* \left[(\rho_g + \sqrt{\rho_g \rho_d}) v_g - (\rho_d + \sqrt{\rho_g \rho_d}) v_d \right] \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 + v^* (\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}) (\sqrt{\rho_g} v_g - \sqrt{\rho_d} v_d) \\
 &= \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 + (\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d) (\sqrt{\rho_g} v_g - \sqrt{\rho_d} v_d) = 0
 \end{aligned}$$

compte tenu de (4.83). Nous retenons

$$(4.104) \quad \rho_d v_d^2 - \rho_g v_g^2 - 2v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + (v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) = 0$$

et de manière analogue pour la première composante de la vitesse :

$$(4.105) \quad \rho_d u_d^2 - \rho_g u_g^2 - 2u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + (u^*)^2 (\rho_d - \rho_g) = 0.$$

Quand on injecte les relations (4.104) et (4.105) dans le calcul qui explicite la seconde ligne de la relation matricielle (4.87), il vient alors facilement :

$$A = (\rho_d u_d^2 + p_d) - (\rho_g u_g^2 + p_g)$$

c'est à dire le résultat recherché.

• On étudie maintenant la troisième ligne de la relation (4.87). On a

$$\begin{aligned}
 B &\equiv -u^* v^* (\rho_d - \rho_g) + v^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) \\
 &= v^* \left[\rho_d u_d - \rho_g u_g - (\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}) (\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d) \right] + u^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) \\
 &= v^* \sqrt{\rho_g \rho_d} (-u_g + u_d) + u^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \left[\sqrt{\rho_g \rho_d} (u_d - u_g) (\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d) + \right. \\
 &\quad \left. + (\rho_d v_d - \rho_g v_g) (\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} (\rho_d u_d v_d - \rho_g u_g v_g) (\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}) \\
 &= \rho_d u_d v_d - \rho_g u_g v_g
 \end{aligned}$$

ce qui établit également la seconde ligne de la relation (4.88). Il reste à traiter l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 C &\equiv ((\gamma - 2) H^* - (c^*)^2) u^* (\rho_d - \rho_g) + (H^* - (\gamma - 1) (u^*)^2) (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\
 &\quad - (\gamma - 1) u^* v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \gamma u^* (\rho_d E_d - \rho_g E_g) \\
 &= \left(\frac{\gamma - 1}{2} ((u^*)^2 + (v^*)^2) - H^* \right) u^* (\rho_d - \rho_g) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (H^* - (\gamma - 1)(u^*)^2) (\rho_d u_d - \rho_g u_g) - (\gamma - 1) u^* v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \\
 & + (\gamma - 1) u^* (\rho_d E_d - \rho_g E_g) + u^* (\rho_d H_d - p_d - \rho_g H_g + p_g) \\
 = & \frac{\gamma - 1}{2} u^* \left[(u^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - 2 u^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \rho_d (u_d)^2 - \rho_g (u_g)^2 \right] + \\
 & + \frac{\gamma - 1}{2} u^* \left[(v^*)^2 (\rho_d - \rho_g) - 2 v^* (\rho_d v_d - \rho_g v_g) + \rho_d (v_d)^2 - \rho_g (v_g)^2 \right] \\
 & - H^* u^* (\rho_d - \rho_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g).
 \end{aligned}$$

Les deux premières lignes de cette expression de C sont nulles compte tenu des relations (4.104) et (4.105). La troisième se simplifie ; nous avons en effet

$$\begin{aligned}
 D & \equiv -H^* u^* (\rho_d - \rho_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g) \\
 & = -u^* (\sqrt{\rho_d} H_d + \sqrt{\rho_g} H_g) (\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + \\
 & \quad + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g) \\
 & = u^* \sqrt{\rho_g \rho_d} (H_d - H_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \left[\sqrt{\rho_g \rho_d} (\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d) (H_d - H_g) + \right. \\
 & \quad \left. + (\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d) (\rho_d u_d - \rho_g u_g) \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} (\rho_d u_d H_d - \rho_g u_g H_g) (\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}) \\
 & = \rho_d u_d H_d - \rho_g u_g H_g
 \end{aligned}$$

ce qui établit la quatrième ligne de la relation (4.87). La quatrième ligne de la relation (4.88) s'obtient par un calcul analogue. Nous retenons la forme algébrique simple pour l'expression de D :

$$(4.106) \quad \begin{cases} -H^* u^* (\rho_d - \rho_g) + H^* (\rho_d u_d - \rho_g u_g) + u^* (\rho_d H_d - \rho_g H_g) = \\ = \rho_d u_d H_d - \rho_g u_g H_g \end{cases}$$

et une expression analogue obtenue en changeant partout la lettre u en la lettre v dans (4.106).

• Le calcul de l'état $R(W_g, \tilde{v}, W_d)$ demande de résoudre un problème de Riemann linéaire entre W_g et W_d avec comme opérateur la matrice $A(W^*, \tilde{v})$. Il suffit pour cela d'expliciter les vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{v})$ de cette matrice, les composantes "caractéristiques" φ_j de la différence $W_d - W_g$ dans cette base :

$$(4.107) \quad W_d - W_g = \sum_{j=1}^4 \varphi_j r_j(W^*, \tilde{v})$$

et de remarquer que dans le cas d'un système linéaire, la solution autosemblable $W(\xi)$ ($\xi = \frac{x}{t}$, $-\infty < \xi < \infty$) du problème de Riemann entre W_g et W_d s'explique par :

$$(4.108) \quad W(\xi) = \begin{cases} W_g + \sum_{j, \lambda_j(W^*, \tilde{\nu}) < \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}) \\ W_d - \sum_{j, \lambda_j(W^*, \tilde{\nu}) > \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}) \end{cases}$$

sauf pour les valeurs exceptionnelles de ξ égales aux valeurs propres $\lambda_j(W^*, \tilde{\nu})$ de la matrice $A(W^*, \tilde{\nu})$ où la matrice autosemblable est discontinue. L'état $R(W_g, \tilde{\nu}, W_d)$ est égal à $W(\xi = 0)$ et la relation (4.94) résulte alors simplement d'une part de l'explicitation des variables caractéristiques φ_1 et φ_4 de la relation (4.107) et d'autre part de (4.108) appliquée avec $\xi = 0$ (voir la figure 17).

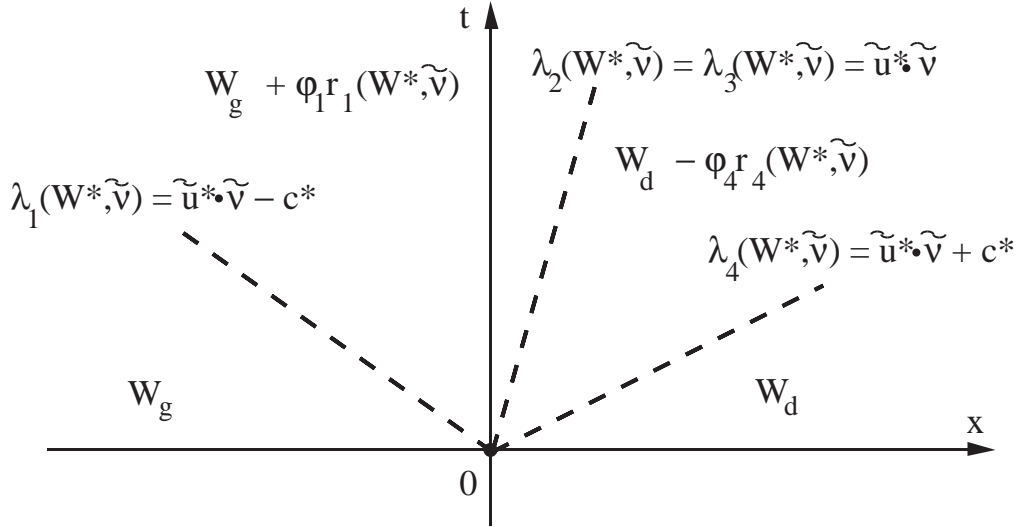


Figure 17 Solution $W(\xi)$ du problème de Riemann pour la matrice de Roe $A(W^*, \tilde{\nu})$. On a

$$W(\xi) = W_g + \sum_{j, \lambda_j < \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}) = W_d - \sum_{j, \lambda_j > \xi} \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu}).$$

- On calcule dans un premier temps l'expression des vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ de la matrice $A(W^*, \tilde{\nu})$ de la relation (4.86), en se contentant en fait de vérifier les relations (4.95) pour $j = 1$ à 4 lorsque $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ prend successivement les expressions (4.96) à (4.99) et $\lambda_j(W^*, \tilde{\nu})$ celles proposées en (4.90) à (4.92). Livrons nous à cet exercice de style [ν est dans la suite une normale unitaire] :

- \circ 1^{ière} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = \nu_x (u - c\nu_x) + \nu_y (v - c\nu_y)$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu) - c = \lambda_1 (1^{\text{ière}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)).$
- \circ 2^{ième} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = [((\gamma-1)H - u^2 - c^2)\nu_x - uv\nu_y] +$
 $+ [(2-\gamma)u\nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu)](u - c\nu_x) + [-(\gamma-1)v\nu_x + u\nu_y](v - c\nu_y) +$
 $+ (\gamma-1)\nu_x [H - uc\nu_x - vc\nu_y]$
 $= [(\gamma-3)uc - (\gamma-1)uc](\nu_x)^2 + [-cv + (\gamma-1)cv - (\gamma-1)cv]\nu_x\nu_y +$
 $- (uc)(\nu_y)^2 + [2(\gamma-1)H - u^2 - c^2 + (3-\gamma)u^2 - (\gamma-1)v^2]\nu_x + (uv)\nu_y$
 $= -2uc(\nu_x)^2 - cv\nu_x\nu_y - uc(\nu_y)^2 + (u^2 + c^2)\nu_x + uv\nu_y$
 $= -uc - c\nu_x(\tilde{u} \bullet \nu) + (u^2 + c^2)\nu_x + uv\nu_y$
 $= -uc - c\nu_x(\tilde{u} \bullet \nu) + u(\tilde{u} \bullet \nu) + c^2\nu_x = ((\tilde{u} \bullet \nu) - c)(u - c\nu_x)$
 $= \lambda_1 (2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)).$
- \circ 3^{ième} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = [-uv\nu_x + ((\gamma-1)H - v^2 - c^2)\nu_y]$
 $+ (v\nu_x - (\gamma-1)u\nu_y)(u - c\nu_x) + (u\nu_x + (3-\gamma)v\nu_y)(v - c\nu_y) +$
 $+ (\gamma-1)\nu_y (H - uc\nu_x - vc\nu_y)$
 $= -vc(\nu_x)^2 - uc\nu_x\nu_y - 2vc(\nu_y)^2 + uv\nu_x + (v^2 + c^2)\nu_y$
 $= -vc - c\nu_y(\tilde{u} \bullet \nu) + v(\tilde{u} \bullet \nu) + c^2\nu_y = ((\tilde{u} \bullet \nu) - c)(v - c\nu_y)$
 $= \lambda_1 (3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)).$
- \circ 4^{ième} composante de $A \bullet r_1(W^*, \nu) = [(\gamma-2)H - c^2](\tilde{u} \bullet \nu) +$
 $+ [H\nu_x - (\gamma-1)u(\tilde{u} \bullet \nu)](u - c\nu_x) +$
 $+ [H\nu_y - (\gamma-1)v(\tilde{u} \bullet \nu)](v - c\nu_y) + \gamma(\tilde{u} \bullet \nu)(H - (\tilde{u} \bullet \nu)c)$
 $= H(\tilde{u} \bullet \nu)(\gamma-1+\gamma) - Hc - (\gamma-1)(\tilde{u} \bullet \nu)(u^2 + v^2) + (\tilde{u} \bullet \nu)^2 c(\gamma-1-\gamma)$
 $= H(\tilde{u} \bullet \nu)(2\gamma-1-2(\gamma-1)) - Hc + c^2(\tilde{u} \bullet \nu) - c(\tilde{u} \bullet \nu)^2$
 $= ((\tilde{u} \bullet \nu) - c)(H - (\tilde{u} \bullet \nu)c)$

$$= \lambda_1 (4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_1(W^*, \nu)),$$

donc $A \bullet r_1(W^*, \nu) = \lambda_1 r_1(W^*, \nu)$.

• On continue avec la valeur propre (double) $\lambda_2 = \lambda_3 = \tilde{u} \bullet \nu$. On a

○ 1^{ière} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = \nu_x (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_x + \nu_y (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y = \tilde{u} \bullet \nu$
 $= \lambda_2 (1^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu)).$

○ 2^{ème} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = [((\gamma-1)H - u^2 - c^2) \nu_x - uv \nu_y] +$
 $+ [(2-\gamma)u \nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu)] (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_x + [-(\gamma-1)v \nu_x + u \nu_y] (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y +$
 $+ \frac{\gamma-1}{2} \nu_x [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= \frac{\gamma-1}{2} [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 + (\tilde{u} \bullet \tau)^2] \nu_x - u^2 \nu_x - uv \nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu) [u + (2-\gamma)(\tilde{u} \bullet \nu) \nu_x]$
 $+ \frac{\gamma-1}{2} [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu)^2 \nu_x = \lambda_2 (2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu)).$

○ 3^{ème} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = [-uv \nu_x + ((\gamma-1)H - v^2 - c^2) \nu_y] +$
 $+ (v \nu_x - (\gamma-1)u \nu_y) (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_x + [(2-\gamma)v \nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu)] (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y +$
 $+ \frac{\gamma-1}{2} \nu_y [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= -(\tilde{u} \bullet \nu) v + \frac{\gamma-1}{2} [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 + (\tilde{u} \bullet \tau)^2] \nu_y + \frac{\gamma-1}{2} \nu_y [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2] +$
 $+ (\tilde{u} \bullet \nu) (v + (2-\gamma)(\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y)$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu)^2 \nu_y = \lambda_2 (3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu)).$

○ 4^{ème} composante de $A \bullet r_2(W^*, \nu) = [(\gamma-2)H - c^2] (\tilde{u} \bullet \nu) +$
 $+ [H \nu_x - (\gamma-1)u(\tilde{u} \bullet \nu)] (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_x + [H \nu_y - (\gamma-1)v(\tilde{u} \bullet \nu)] (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y +$
 $+ \frac{\gamma}{2} (\tilde{u} \bullet \nu) [(\tilde{u} \bullet \nu)^2 - (\tilde{u} \bullet \tau)^2]$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu) \left[(\gamma-2)H - c^2 + H - (\gamma-1)(\tilde{u} \bullet \nu)^2 + \frac{\gamma}{2} (\tilde{u} \bullet \nu)^2 - \frac{\gamma}{2} (\tilde{u} \bullet \tau)^2 \right]$

$$= (\tilde{u} \bullet \nu) \left[\frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \nu)^2 - \frac{1}{2} (\tilde{u} \bullet \tau)^2 \right] = \lambda_2 (4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_2(W^*, \nu))$$

et $A \bullet r_2(W^*, \nu) = \lambda_2 r_2(W^*, \nu)$.

- 1^{ière} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \nu_x (-c \nu_y) + \nu_y (c \nu_x) = 0$
 $= \lambda_3 (1^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu))$

- 2^{ième} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \left[(2 - \gamma) u \nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (-c \nu_y) +$
 $+ \left[-(\gamma - 1) v \nu_x + u \nu_y \right] (c \nu_x) + (\gamma - 1) \nu_x c (-u \nu_y + v \nu_x)$
 $= c \nu_y \left[(\gamma - 2) u \nu_x - (\tilde{u} \bullet \nu) + u \nu_x - (\gamma - 1) u \nu_x \right] + 0 (\nu_x)^2$
 $= -c (\tilde{u} \bullet \nu) \nu_y = \lambda_3 (2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu))$

- 3^{ième} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \left[v \nu_x - (\gamma - 1) u \nu_y \right] (-c \nu_y) +$
 $+ \left[(2 - \gamma) v \nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (c \nu_x) + (\gamma - 1) \nu_y c (-u \nu_y + v \nu_x)$
 $= (c \nu_x) \left[-v \nu_y + (2 - \gamma) v \nu_y + (\tilde{u} \bullet \nu) + (\gamma - 1) v \nu_y \right] + 0 (\nu_y)^2$
 $= c \nu_x (\tilde{u} \bullet \nu) = \lambda_3 (3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu))$

- 4^{ième} composante de $A \bullet r_3(W^*, \nu) = \left[H \nu_x - (\gamma - 1) u (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (-c \nu_y) +$
 $+ \left[H \nu_y - (\gamma - 1) v (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (c \nu_x) + \gamma (\tilde{u} \bullet \nu) c (-u \nu_y + v \nu_x)$
 $= c (\tilde{u} \bullet \nu) \left[(\gamma - 1) (u \nu_y - v \nu_x) + \gamma (\tilde{u} \bullet \tau) \right] = c (\tilde{u} \bullet \nu) (\tilde{u} \bullet \tau)$
 $= \lambda_3 (4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_3(W^*, \nu)) \text{ et } A \bullet r_3(W^*, \nu) = \lambda_3 r_3(W^*, \nu).$

- 1^{ière} composante de $A \bullet r_4(W^*, \nu) = \nu_x (u + c \nu_x) + \nu_y (v + c \nu_y)$
 $= (\tilde{u} \bullet \nu) + c = \lambda_4 (1^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu))$

- 2^{ième} composante de $A \bullet r_4(W^*, \nu) = \left[(\gamma - 1) H \nu_x - c^2 \nu_x - u (\tilde{u} \bullet \nu) \right] +$
 $+ \left[(2 - \gamma) u \nu_x + (\tilde{u} \bullet \nu) \right] (u + c \nu_x) + \left[-(\gamma - 1) v \nu_x + u \nu_y \right] (v + c \nu_y) +$
 $+ (\gamma - 1) \nu_x (H + (\tilde{u} \bullet \nu) c)$

$$\begin{aligned}
 &= 2uc(\nu_x)^2 + cv\nu_x\nu_y + uc(\nu_y)^2 + (u^2 + c^2)\nu_x + uv\nu_y \\
 &= uc + c\nu_x(\tilde{u} \bullet \nu) + c^2\nu_x + u(\tilde{u} \bullet \nu) = ((\tilde{u} \bullet \nu) + c)(u + c\nu_x) \\
 &= \lambda_4(2^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad &3^{\text{ième}} \text{ composante de } A \bullet r_4(W^*, \nu) = \left[-uv\nu_x + ((\gamma - 1)H - v^2 - c^2)\nu_y \right] + \\
 &\quad + (v\nu_x - (\gamma - 1)u\nu_y)(u + c\nu_x) + (u\nu_x + (3 - \gamma)v\nu_y)(v + c\nu_y) + \\
 &\quad + (\gamma - 1)\nu_y(H + uc\nu_x + vc\nu_y) \\
 &= vc(\nu_x)^2 + uc\nu_x\nu_y + 2vc(\nu_y)^2 + uv\nu_x + (v^2 + c^2)\nu_y \\
 &= vc + c\nu_y(\tilde{u} \bullet \nu) + c^2\nu_y + v(\tilde{u} \bullet \nu) = ((\tilde{u} \bullet \nu) + c)(v + c\nu_y) \\
 &= \lambda_4(3^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad &4^{\text{ième}} \text{ composante de } A \bullet r_4(W^*, \nu) = \left[(\gamma - 2)H - c^2 \right] (\tilde{u} \bullet \nu) + \\
 &\quad + \left[H\nu_x - (\gamma - 1)u(\tilde{u} \bullet \nu) \right] (u + c\nu_x) + \\
 &\quad + \left[H\nu_y - (\gamma - 1)v(\tilde{u} \bullet \nu) \right] (v + c\nu_y) + \\
 &\quad + \gamma(\tilde{u} \bullet \nu) \left[H + (\tilde{u} \bullet \nu)c \right] \\
 &= H(\tilde{u} \bullet \nu)(2\gamma - 1) - c^2(\tilde{u} \bullet \nu) + Hc - (\gamma - 1)(\tilde{u} \bullet \nu)(u^2 + v^2) + (\tilde{u} \bullet \nu)^2 c \\
 &= H(\tilde{u} \bullet \nu) + Hc + c^2(\tilde{u} \bullet \nu) + c(\tilde{u} \bullet \nu)^2 = ((\tilde{u} \bullet \nu) + c)(H + (\tilde{u} \bullet \nu)c) \\
 &= \lambda_4(4^{\text{ième}} \text{ composante de } r_4(W^*, \nu)) \\
 \text{et } &A \bullet r_4(W^*, \nu) = \lambda_4 r_4(W^*, \nu), \text{ ce qui établit finalement la relation (4.95).}
 \end{aligned}$$

• Pour terminer la preuve, il suffit d'expliciter les variables caractéristiques φ_j qui sont les composantes de la différence $W_d - W_g$ sur les vecteurs propres $r_j(W^*, \tilde{\nu})$ de l'état intermédiaire de Roe :

$$(4.109) \quad W_d - W_g = \sum_{j=1}^4 \varphi_j r_j(W^*, \tilde{\nu})$$

• Compte tenu des expressions (4.96) à (4.99) des vecteurs propres, les variables caractéristiques φ_j sont donc solution du système linéaire suivant :

$$(4.110) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4 = \rho_d - \rho_g$$

$$(4.111) \quad \begin{cases} (u^* - c^* \tilde{v}_x) \varphi_1 + (\tilde{u}^* \bullet \nu) \tilde{v}_x \varphi_2 - c^* \tilde{v}_y \varphi_3 + (u^* + c^* \tilde{v}_x) \varphi_4 = \\ = \rho_d u_d - \rho_g u_g \end{cases}$$

$$(4.112) \quad \begin{cases} (v^* - c^* \tilde{v}_y) \varphi_1 + (\tilde{u}^* \bullet \nu) \tilde{v}_y \varphi_2 + c^* \tilde{v}_x \varphi_3 + (v^* + c^* \tilde{v}_y) \varphi_4 = \\ = \rho_d v_d - \rho_g v_g \end{cases}$$

$$(4.113) \quad \begin{cases} (H^* - (\tilde{u}^* \bullet \tilde{v}) c^*) \varphi_1 + \frac{1}{2} [(\tilde{u}^* \bullet \tilde{v})^2 - (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\tau})^2] \varphi_2 + (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\tau}) c^* \varphi_3 + \\ + (H^* + (\tilde{u}^* \bullet \tilde{v}) c^*) \varphi_4 = \rho_d E_d - \rho_g E_g. \end{cases}$$

On multiplie l'équation (4.111) par \tilde{v}_x , (4.112) par \tilde{v}_y et on additionne ; il vient

$$\left((\tilde{u}^* \bullet \tilde{v}) - c^* \right) \varphi_1 + (\tilde{u}^* \bullet \tilde{v}) \varphi_2 + \left((\tilde{u}^* \bullet \tilde{v}) + c^* \right) \varphi_4 = \rho_d (\tilde{u}_d \bullet \tilde{v}) - \rho_g (\tilde{u}_g \bullet \tilde{v}) ;$$

on recommence avec $(-u^*)$ en facteur de (4.111) et $(-v^*)$ en facteur de (4.112). Après addition avec (4.113) , on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{(c^*)^2}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \left((u^*)^2 + (v^*)^2 \right) \right) \varphi_1 - \frac{1}{2} \left((u^*)^2 + (v^*)^2 \right) \varphi_2 + \\ + \left(\frac{(c^*)^2}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \left((u^*)^2 + (v^*)^2 \right) \right) \varphi_4 = \\ = \rho_d E_d - \rho_g E_g - \rho_d (u_d u^* + v_d v^*) + \rho_g (u_g u^* + v_g v^*). \end{aligned}$$

Compte tenu de (4.81), (4.82), (4.83) et (4.110), la première relation peut s'écrire

$$(4.114) \quad c^* (\varphi_4 - \varphi_1) = \rho^* \left[(\tilde{u}_d \bullet \tilde{v}) - (\tilde{u}_g \bullet \tilde{v}) \right]$$

et à l'aide de (4.104), (4.105) et (4.110), la seconde prend la forme plus simple

$$(4.115) \quad (c^*)^2 (\varphi_4 + \varphi_1) = p_d - p_g .$$

On en tire immédiatement une expression des variables caractéristiques sur les deux ondes non-linéaires :

$$(4.116) \quad \varphi_1 = \frac{1}{2(c^*)^2} \left[\left(p_d - \rho^* c^* (\tilde{u}_d \bullet \tilde{v}) \right) - \left(p_g - \rho^* c^* (\tilde{u}_g \bullet \tilde{v}) \right) \right]$$

$$(4.117) \quad \varphi_4 = \frac{1}{2(c^*)^2} \left[\left(p_d + \rho^* c^* (\tilde{u}_d \bullet \tilde{v}) \right) - \left(p_g + \rho^* c^* (\tilde{u}_g \bullet \tilde{v}) \right) \right] .$$

• L'expression de φ_2 et φ_3 n'est pas stricto-sensu indispensable à la preuve de la proposition 4.10. Nous achevons tout de même ce calcul. On tire φ_2 de (4.110) et (4.115) :

$$(4.118) \quad \varphi_2 = -\frac{1}{(c^*)^2} \left[\left(p_d - p_g - (c^*)^2 (\rho_d - \rho_g) \right) \right]$$

et on reconnaît au membre de droite de (4.118) le saut d'entropie linéarisée entre les deux états W_g et W_d . On exprime enfin la variable φ_3 à partir de (4.111)

multipliée par $-(\tilde{\nu}_y)$ et (4.112) multipliée par $(\tilde{\nu}_x)$, compte tenu de (4.115) une nouvelle fois. Il vient

$$(4.119) \quad \varphi_3 = \frac{1}{c^*} \left[\rho_d (\tilde{u}_d \bullet \tilde{\tau}) - \rho_g (\tilde{u}_g \bullet \tilde{\tau}) \right] - \frac{p_d - p_g}{(c^*)^3} (\tilde{u}^* \bullet \tilde{\tau}).$$

La proposition 4.10 est démontrée. \square

Comme l'exprimait Laurent Schwartz dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* [Sc67] : ouf ! Et il ajoutait : ouf ! ouf !

5) Linéarisation du flux limite de paroi mobile.

• 5.1 • Introduction.

• Rappelons que l'on étudie la résolution numérique des équations d'Euler de la dynamique des gaz dans un domaine Ω variable au cours du temps. Seuls les nœuds $M_{I+1/2, j+1/2}$ (pour j entier positif ou négatif) de la paroi (située à l'indice $I+1/2$) sont mobiles et l'on suppose d'une part que l'élongation $\delta_{j+1/2}^n$ des nœuds au temps $n \Delta t$ est petite devant la dimension caractéristique de la maille et d'autre part que la vitesse

$$(5.1) \quad s_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\delta_{j+1/2}^{n+1} - \delta_{j+1/2}^n \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

du nœud $M_{I+1/2, j+1/2}$ est petite devant la célérité du son du fluide proche de la paroi.

• Le flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2}$ permet de calculer un flux sur la facette mobile à la paroi afin qu'une écriture classique (*c.f.* (3.67)) du bilan de masse, impulsion, énergie prenne en compte la variation (imposée) de la géométrie. L'expression (3.68) qui est exacte peut être approchée au premier ordre par rapport aux deux infiniment petits rappelés ci-dessus.

• **5.2 • Flux linéarisé de paroi mobile.**

• Avec des notations que nous allons expliciter dans la suite de ce paragraphe, le flux limite de paroi mobile calculé en (3.68) selon l'expression algébrique

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{aligned} & (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} = \\ & = \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left(0, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, p_{I+1/2, j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) \right)^t \\ & + \frac{|K_{I, j}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I, j}^n|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) W_{I, j}^n + \left(1 - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \right) \Phi_{I-1/2, j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2, j} \\ & + \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I, j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j+1/2}^{n+1/2} \right] - \Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \\ & - \frac{|K_{I, j}|}{|K_{I, j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I, j-1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j-1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) W_{I, j-1/2}^{n+1/2} \right] + \Phi_{I, j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right.$$

admet au second ordre de précision le développement limité suivant :

$$(5.3)(\text{début}) \quad \left\{ \begin{aligned} & (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} = (0, p_{\star, j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2, j}, 0)^t \\ & + (0, \delta p_{\star, j}^{n+1/2} \nu_{I+1/2, j} + p_{\star, j}^{n+1/2}(0) \delta \nu_j^{n+1/2}, 0)^t \\ & + (0, 0, p_{\star, j}^{n+1/2}(0) (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_{I+1/2, j}))^t \\ & - \frac{\delta K_{I, j}^n}{|K_{I, j}|} \left[(0, p_{\star, j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2, j}, 0)^t - \Phi_{I-1/2, j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I+1/2, j} + \right. \\ & \quad \left. + \Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I, j+1/2} - \Phi_{I, j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I, j-1/2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(5.3)(\text{fin}) \left\{ \begin{array}{l} \dots + \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] - \delta \left[\Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right] W_{I,j}^n \\ - \frac{1}{2} (s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2}) V_{I,j+1/2}^{R,n} + \frac{1}{2} (s_{j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j-1/2}) V_{I,j-1/2}^{R,n} \\ + \left[\text{ordre} \geq 2 \text{ par rapport à } \delta_{\bullet}^{n+1/2} \text{ et } s_{\bullet}^{n+1/2} \right]. \end{array} \right.$$

- Il y a dans l'expression précédente des variables **géométriques statiques** comme d'une part le volume $|K_{I,j}|$ de la maille de numéro (I, j) :

$$(5.4) \quad |K_{I,j}| = \frac{1}{2} \delta_{I,j}^+ \times \delta_{I,j}^-$$

où $\delta_{I,j}^{\pm}$ sont les vecteurs représentés figure 12 et calculés explicitement aux relations (3.16)-(3.17) ou d'autre part les normales (de module égal à la mesure de l'arête afférente) $\nu_{I+1/2,j}$ et $\nu_{I,j+1/2}$ orientées par les lignes de maillage (voir la figure 13) et évaluées algébriquement aux relations (3.12) et (3.14).

- Il importe également de remarquer les variables **fluides statiques** comme la pression paroi de vitesse nulle $p_{*,j}^{n+1/2}(0)$ évaluée par la relation (4.37) dans le cas le plus courant pour le schéma de van Leer, les flux $\Phi_{I-1/2,j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2,j}$, $\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2}$ et $\Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j-1/2}$ sur les trois autres faces du volume $K_{I,j}$ pour lesquels les relations (4.12) et (4.13) donnent le point de départ en vue de leur calcul numérique et l'état $W_{I,j}^n$ dans la maille qui touche la facette frontière.

- Les variables **géométriques dynamiques** sont induites par la variation $\delta_{j+1/2}^n$ des points de la paroi. Rappelons d'abord quelles sont les notations utilisées. Elles partent toutes de la donnée des vecteurs $\delta_{j+1/2}^n$ pour $n \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$ et uniquement de ces variables. Nous avons ensuite :

$$(5.5) \quad \delta_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\delta_{j+1/2}^n + \delta_{j+1/2}^{n+1}), \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(5.6) \quad \epsilon_j^{n+1/2} = \delta_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(5.7) \quad \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \equiv \nu_{I,j+1/2} + \delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \nu_{I,j+1/2} + \left(k \times \delta_{j+1/2}^{n+1/2} \right)$$

$$(5.8) \quad \nu_j^{n+1/2} \equiv \nu_{I+1/2,j} + \delta \nu_j^{n+1/2} = \nu_{I+1/2,j} + \left(\epsilon_j^{n+1/2} \times k \right).$$

Ces dernières relations, explicitées en (4.7) et (4.9) utilisent le produit vectoriel avec une direction k perpendiculaire à la direction du plan d'étude. Les vitesses $s_{j+1/2}^{n+1/2}$ des points de paroi sont naturellement définies à la relation (5.1), mais on utilise aussi le long de la facette la vitesse

$$(5.9) \quad s_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(s_{j-1/2}^{n+1/2} + s_{j+1/2}^{n+1/2} \right), \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La variation relative du volume $|K_{I,j}|$ a une expression simple :

$$(5.10) \quad \frac{\delta K_{I,j}}{|K_{I,j}|} = \frac{\delta_{I,j}^+ \times \delta_{j+1/2}^n - \delta_{I,j}^- \times \delta_{j-1/2}^n}{\delta_{I,j}^+ \times \delta_{I,j}^-}$$

ainsi qu'annoncé à la relation (4.4). On a également vu en (4.5) l'expression développée du préfacteur de $W_{I,j}^n$ pour la relation (5.2) :

$$(5.11) \quad \frac{|K_{I,j}|}{\Delta t} \left[1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right] = \frac{1}{2} \left(\delta_{I,j}^+ \times s_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta_{I,j}^- \times s_{j-1/2}^{n+1/2} \right).$$

- On trouve enfin les variables **fluides dynamiques** comme la variation $\delta p_{\star,j}^{n+1/2}$ de pression à la paroi, la sensibilité $\delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right]$ du flux numérique de van Leer dans la variation (5.7) de la direction normale et les états de Roe $V_{I,j+1/2}^{R,n}$ définis sur les facettes transverses à la paroi mobile (ces facettes sont mobiles elles aussi !). Dans le cas où l'on emploie le flux de van Leer et dans l'hypothèse où le nombre de Mach normal de l'état extrapolé $W_{I+1/2,j,-}^n$ est plus petit que 1 en module, c'est à dire

$$(5.12) \quad \left| M_{\nu_{\star,j}}^n \equiv \frac{\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j}}{c_{\star,j}^n} \right| \leq 1,$$

la linéarisation de la représentation (4.37), développée aux relations (4.40) et (4.41), prend ici la forme intermédiaire :

$$(5.13) \quad \begin{cases} \tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2} = - \left(\frac{\nu_{I+1/2,j}}{|\nu_{I+1/2,j}|} \times \epsilon_j^{n+1/2} \right) \left(\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j} \right) + \\ + \left(\tilde{u}_{\star,j}^n \times \frac{\epsilon_j^n}{|\nu_{I+1/2,j}|} \right) + (\text{ordre} \geq 2) \end{cases}$$

où $\delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$ est la variation de la normale unitaire à la paroi. On en déduit l'expression de la variation $\delta p_{\star,j}^{n+1/2}$ de la pression paroi (voir aussi la relation (4.40)) :

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta p_{*,j}^{n+1/2} = -\rho_{*,j}^n c_{*,j}^n \left(s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j} \right) + \\ + p_{*,j}^{n+1/2}(0) c_{*,j}^n \frac{\left(3(\gamma-1) M_{\nu_{*,j}}^n + (\gamma+3) \right)}{\left(1 + M_{\nu_{*,j}}^n \right) \left(2 + (\gamma-1) + M_{\nu_{*,j}}^n \right)} \left(\tilde{u}_{*,j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2} \right) \\ + (\text{ordre} \geq 2). \end{array} \right.$$

La sensibilité du flux $\delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right]$ dans la variation de la direction normale est donnée par

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] = \\ \delta \left[\Phi^+ (W_{I,j+1/2,-}^n) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] + \delta \left[\Phi^- (W_{I,j+1/2,+}^n) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right], \end{array} \right.$$

où les sensibilités $\delta [\Phi^+ \bullet \nu]$ et $\delta [\Phi^- \bullet \nu]$ sont calculées aux relations (4.60) à (4.64) et (4.72) à (4.76) respectivement.

- Les états de Roe $V_{I,j+1/2}^{R,n}$ ($j \in \mathbb{Z}$) sur les facettes transverses à la paroi s'écrivent simplement

$$(5.16) \quad V_{I,j+1/2}^{R,n} = R \left(W_{I,j+1/2,-}^n, \tilde{\nu}_{I,j+1/2}, W_{I,j+1/2,+}^n \right), \quad j \in \mathbb{Z}$$

et cette fonction (assez classique) est calculée aux relations (4.80) à (4.99) de la proposition 4.10 : on évalue d'abord (à l'aide de racines carrées) une densité, une vitesse et une enthalpie totale intermédiaires entre les deux états de part et d'autre de la facette numéro $(I, j + 1/2)$ avant de calculer les vecteurs propres de la matrice jacobienne associée (c'est la matrice de Roe), lesquels donnent une base naturelle pour résoudre le problème de Riemann linéarisé (relation (4.94)).

• 5.3 • Preuve du développement limité.

- La relation (5.2) met en évidence cinq termes, à savoir

$$(5.17) \quad f^1 = \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left(0, p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \left(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2} \right) \right)^t$$

$$(5.18) \quad f^2 = \frac{|K_{I,j}|}{\Delta t} \left(1 - \frac{|K_{I,j}^n|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \right) W_{I,j}^n$$

$$(5.19) \quad f^3 = \left(1 - \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|}\right) \Phi_{I-1/2,j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2,j}$$

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^4 = \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] - \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \end{array} \right.$$

$$(5.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^5 = -\frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left[\Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right) W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right] + \Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j-1/2} \end{array} \right.$$

et l'on a

$$(5.22) \quad (F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = \sum_{k=1}^5 f^k .$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous concentrons successivement sur ces divers termes.

• Nous remarquons qu'au sein de la composante "énergie" (la troisième en partant de la gauche) du vecteur f^1 , le facteur $(s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2})$ est un infiniment petit d'ordre supérieur ou égal à 1 à cause du terme $s_j^{n+1/2}$; ceci permet de ne considérer les autres facteurs qu'à l'ordre zéro de précision (puisqu'on cherche un résultat à l'ordre au plus 2). On en déduit :

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} p_{I+1/2,j}^{n+1/2} (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_j^{n+1/2}) = \\ = p_{\star,j}^{n+1/2}(0) (s_j^{n+1/2} \bullet \nu_{I+1/2,j}) + (\text{ordre} \geq 2) \end{array} \right.$$

et nous venons de mettre en évidence le troisième terme de la relation (5.3). Nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned} & \frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2} = \\ & = \left(1 - \frac{\delta K_{I,j}}{|K_{I,j}|}\right) \left(p_{\star,j}^{n+1/2}(0) + \delta p_{\star,j}^{n+1/2}\right) \left(\nu_{I+1/2,j} + \epsilon_j^{n+1/2} \times k\right) + (\text{ordre} \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j} + \delta p_{\star,j}^{n+1/2} \nu_{I+1/2,j} + p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \delta \nu_j^{n+1/2} \\
 &\quad - \frac{\delta K_{I,j}}{|K_{I,j}|} p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j} + (\text{ordre} \geq 2)
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(5.24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{|K_{I,j}|}{|K_{I,j}^{n+1}|} \left(0, p_{I+1/2,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2}, 0 \right)^t = \left(0, p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j}, 0 \right)^t \\ &+ \left(0, \delta p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j} + p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \delta \nu_j^{n+1/2}, 0 \right)^t \\ &- \frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \left(0, p_{\star,j}^{n+1/2}(0) \nu_{I+1/2,j}, 0 \right)^t + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned} \right.$$

Les trois premiers termes du membre de droite de la relation (5.24) sont identiques aux deux premiers termes de la relation (5.3). Le quatrième terme (en $\delta K/|K|$) se retrouve comme le premier des quatre sous-termes du quatrième terme du second membre de la relation (5.3).

- Le second terme f^2 s'explique très simplement compte tenu de la relation (5.11). On le retrouve comme sixième terme de (5.3). Pour l'étude du troisième terme (relation (5.19)), on remarque une nouvelle fois que la présence en facteur d'un infiniment petit simplifie le calcul. On trouve :

$$(5.25) \quad f^3 = \frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \Phi_{I-1/2,j}^{n+1/2} \bullet \nu_{I-1/2,j} + (\text{ordre} \geq 2)$$

et cette expression constitue le second sous-terme du quatrième terme du second membre de la relation (5.3).

- L'étude du terme transversal a été commencée à la relation (4.54) et nous la réexplicitons :

$$(5.26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2}, \frac{1}{2} s_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} = \Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \right) V_{I,j+1/2}^{R,n} + (\text{ordre} \geq 2) \end{aligned} \right.$$

et l'insertion de cette dernière relation au sein de l'expression (5.20) conduit au calcul suivant :

$$f^4 = \left(1 - \frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \right) \Phi \left(W_{I,j+1/2}^{n+1/2} \right) \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} + \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \right) V_{I,j+1/2}^{R,n} - \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} + (\text{ordre} \geq 2) \\
 (5.27) \quad & \left\{ \begin{aligned} f^4 &= -\frac{\delta K_{I,j}^n}{|K_{I,j}|} \Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} + \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] \\ & -\frac{1}{2} \left(s_{j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{I,j+1/2} \right) V_{I,j+1/2}^{R,n} + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de (5.27) se retrouve comme troisième sous-terme du quatrième terme du membre de droite de la relation (5.3). Le second terme de (5.27) est égal au premier terme de la cinquième ligne de (5.3) et le troisième de (5.27) (avec l'état de Roe $V_{I,j+1/2}^{R,n}$) constitue le premier de la septième ligne du développement (5.3).

- Le développement de f^5 est analogue à f^4 , au changement de signe et à la modification de $(j+1/2)$ en $(j-1/2)$ près. Il permet de clore le quatrième terme de (5.3) ainsi que la fin des cinquièmes et septièmes lignes. La relation (5.3) est bien identique à (5.2), au second ordre de précision près, ce qui achève la démonstration de la propriété. \square

• 5.4 • Une autre linéarisation de la pression paroi.

- On pourra trouver que l'expression (5.14) qui permet d'évaluer l'incrément de pression à la paroi est trop compliquée algébriquement et de toute façon limitée à l'emploi du flux de van Leer pour résoudre le schéma fluide. Nous proposons ici une autre expression approchée qui n'est pas obtenue par linéarisation rigoureuse du flux numérique mais par une analyse du problème de Riemann, ainsi que menée aux relations (2.39) et (2.40) de la proposition 2.2.

- Rappelons que, si l'on utilise le schéma de Godunov, la pression $p_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ de la relation (5.2) est l'état situé sur la 1-onde issue de l'état $W_{I+1/2,j}^n$ et de vitesse normale égale à

$$(5.28) \quad \sigma_j^{n+1/2} = s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}.$$

On pose donc

$$(5.29) \quad w_{*,j}^n = \tilde{u}_{*,j}^n \bullet \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$$

et séparant le cas d'une détente ($\sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n \geq 0$) de celui d'un choc ($\sigma_j^{n+1/2} - w_{*,j}^n \leq 0$), les relations (2.39) et (2.40) dans notre contexte bidimensionnel expriment que la pression $p_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ est solution de l'une des deux équations suivantes

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_j^{n+1/2} - w_{\star,j}^n + \frac{2}{\gamma-1} c_\star^n \left[\left(\frac{p_{I+1/2,j}^{n+1/2}}{p_\star^n} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = 0 \\ \text{si } \sigma_j^{n+1/2} - w_{\star,j}^n \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_j^{n+1/2} - w_{\star,j}^n + \frac{\sqrt{2} (p_{I+1/2,j}^{n+1/2} - p_\star^n)}{\sqrt{\rho_\star^n ((\gamma+1) p_{I+1/2,j}^{n+1/2} + (\gamma-1) p_\star^n)}} \\ \text{si } \sigma_j^{n+1/2} - w_{\star,j}^n \leq 0. \end{array} \right.$$

- Nous résolvons le système (5.30)-(5.31) de façon approchée grâce au raisonnement suivant : lorsque $s_j^{n+1/2} = 0$ et $\nu_j^{n+1/2} = \nu_{I+1/2,j}$, la solution est celle du schéma numérique associé à une vitesse nulle pour la paroi, c'est à dire $p_{\star,j}^{n+1/2}(0)$. Cette pression paroi est, par hypothèse de travail, supposée correctement calculée grâce au flux de van Leer (relation (4.37)). Lorsque la paroi est mobile, le mouvement reste modéré et l'écart de pression $\delta p_{\star,j}^{n+1/2}$ est obtenu en linéarisant l'une des deux relations (5.30) ou (5.31). Comme ces deux courbes de choc et de détente ont mêmes éléments de contact au second ordre inclus [CF48], il vient

$$(5.32) \quad \delta(\sigma_j^{n+1/2} - w_{\star,j}^n) + \frac{1}{\rho_\star^n c_\star^n} \delta p_{\star,j}^{n+1/2} = 0$$

compte tenu des relations classiques entre densité, pression et vitesse du son de l'état extrapolé à la paroi. On déduit de (5.28), (5.29) et (5.32) :

$$(5.33) \quad \delta p_{\star,j}^{n+1/2} = -\rho_\star^n c_\star^n \left(s_j^{n+1/2} \bullet \tilde{\nu}_{I+1/2,j} \right) + \rho_\star^n c_\star^n \left(\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2} \right).$$

Cette relation permet un autre calcul de l'écart de pression à la paroi et ne diffère de la relation (5.14) que par le coefficient de $\tilde{u}_{\star,j}^n \bullet \delta \tilde{\nu}_j^{n+1/2}$.

• 5.5 • De une à deux dimensions.

- La comparaison des relations (5.3) (cas bidimensionnel) et (2.60) (cas monodimensionnel) montre l'extension de la structure quand on change de dimension. Le premier terme correspond toujours au flux limite de paroi fixe, c'est à dire au flux initial et il convient d'y rajouter le flux d'énergie correspondant induit par le travail de cette pression lors du mouvement de la paroi. Le

terme $-s^{n+1/2} (0, \rho_\star^n c_\star^n, 0)^t$ de la relation (2.60) donne naissance au second terme de la relation (5.3) qui est une simple linéarisation du flux d'impulsion $\delta(p_{\star,j}^{n+1/2} \nu_j^{n+1/2})$; notons que cette variation comporte deux termes dont un $(\delta \nu_j^{n+1/2})$ est bien entendu invisible à une dimension d'espace alors que le second (relations (5.14), (5.15) et (5.33)) doit prendre en compte la variation de la normale pour une évaluation correcte dans le cas bidimensionnel.

- Le terme $s^{n+1/2} W_I^n$ donne naissance aux trois dernières lignes du développement (5.3), avec un couplage géométrie-cinématique non trivial pour le terme en W_I^n et la nécessité d'évaluer correctement un état intermédiaire sur les facettes $\Sigma_{I,j+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}$) transversales à la paroi.

- Enfin, le dernier terme de (2.60) et le quatrième de (5.3) représentent tous deux la variation

$$(5.34) \quad \delta W_{I,j}^\star = \delta K_{I,j}^n \frac{W_{I,j}^\star - W_{I,j}^n}{\Delta t}$$

où $W_{I,j}^\star$ est l'état qu'on obtiendrait dans la maille $K_{I,j}$ en utilisant une paroi fixe. En effet, ces deux termes forment un bilan de flux qu'il est facile ensuite d'interpréter ensuite comme une dérivée temporelle.

• 5.6 • Lien avec la condition de transpiration classique.

- L'approche discrète que nous avons suivie est différente de celle, continue, suivie par d'autres auteurs de la communauté (voir par exemple Mortchélévicz [Mo89] ou Piperno [Pi95]). La proposition qui suit fait le lien entre ce travail et l'expression du flux utilisé comme condition de transpiration dans les travaux antérieurs à l'Aérospatiale [RC96].

Proposition 5.1 **Simplification extrême.**

Si, dans la relation (5.3) qui permet le calcul du flux limite de paroi mobile au premier ordre de précision, on fait les hypothèses suivantes :

$$(5.35) \quad \delta p_{\star,j}^{n+1/2} = 0$$

$$(5.36) \quad \delta K_{I,j}^n = 0$$

$$(5.37) \quad W_{I,j}^n = V_{I,j+1/2}^{R,n} = V_{I,j-1/2}^{R,n} \equiv W^\star$$

$$(5.38) \quad s_{j+1/2}^{n+1/2} = s_{j-1/2}^{n+1/2} \equiv s$$

$$(5.39) \quad p_{*,j}^{n+1/2} = p(W^*) \equiv p^*$$

$$(5.40) \quad \tilde{u}_{*,j}^n = \tilde{u}(W^*) \equiv \tilde{u}^*$$

alors l'expression (5.3) du flux limite de paroi mobile $(F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2}$ se calcule par les relations algébriques suivantes :

$$(5.41) \quad \delta \left[\Phi_{I,j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] = \Phi(W^*) \bullet \delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2}$$

$$(5.42) \quad \delta \left[\Phi_{I,j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right] = \Phi(W^*) \bullet \delta \nu_{j-1/2}^{n+1/2}$$

$$(5.43) \quad q_j^{n+1/2} = s \bullet \nu_{I+1/2,j} - \tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}$$

$$(5.44) \quad (F \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = q_j^{n+1/2} W^* + p^* (0, \nu_{I+1/2,j}, q_j^{n+1/2})^t + \text{ordre} \geq 2.$$

L'expression (5.44) est, au second ordre près, analogue à l'expression algébrique utilisée dans [RC96], à savoir

$$(5.45) \quad q(t) = s \bullet \nu_j^{n+1/2} - \tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}$$

$$(5.46) \quad (\Phi \bullet \nu)_{I+1/2,j}^{n+1/2} = q(t) W^* + p^* (0, \nu_{I+1/2,j}, q(t))^t.$$

Preuve de la proposition 5.1.

• On évalue d'abord avec soin le coefficient λ qui figure explicitement devant l'état W^* par regroupement des trois derniers termes de la relation (5.3). On a :

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{1}{2} \left[\delta_{I,j}^+ \times s - \delta_{I,j}^- \times s \right] - \frac{1}{2} s \bullet \nu_{I,j+1/2} + \frac{1}{2} s \bullet \nu_{I,j-1/2} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{I,j}^+ - \delta_{I,j}^-)_x s_y - \frac{1}{2} (\delta_{I,j}^+ - \delta_{I,j}^-)_y s_x + \frac{1}{2} s \bullet (\nu_{I,j-1/2} - \nu_{I,j+1/2}) \\ &= \frac{1}{2} s_x \left(y_{I+1/2,j+1/2} - y_{I-1/2,j-1/2} - y_{I+1/2,j-1/2} + y_{I-1/2,j+1/2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} s_y \left(x_{I+1/2,j-1/2} - x_{I-1/2,j+1/2} - y_{I+1/2,j+1/2} + y_{I-1/2,j+1/2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} s \bullet (\nu_{I,j-1/2} - \nu_{I,j+1/2}) \\ &\quad \text{compte tenu des expressions (3.16) et (3.17) de } \delta_{I,j}^+ \text{ et } \delta_{I,j}^- \\ &= \frac{1}{2} s \bullet (\nu_{I+1/2,j} + \nu_{I-1/2,j} + \nu_{I,j-1/2} - \nu_{I,j+1/2}) \end{aligned}$$

compte tenu de la relation (3.12)

$$(5.47) \quad \lambda = s \bullet \nu_{I+1/2, j}$$

car l'intégrale sur le contour de $K_{I, j}$ de la normale extérieure est nulle et s'exprime par

$$(5.48) \quad \nu_{I+1/2, j} - \nu_{I-1/2, j} + \nu_{I, j+1/2} - \nu_{I, j-1/2} = 0.$$

• Quand on prend une variation finie de ces normales associée aux hypothèses géométriques de flux limite de paroi mobile (les nœuds $M_{I-1/2, j+1/2}$ ($j \in \mathbb{Z}$) ne bougent pas), il vient

$$(5.49) \quad \delta \nu_j^{n+1/2} + \delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta \nu_{j-1/2}^{n+1/2} = 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse (5.41)(5.42), nous en déduisons

$$\begin{aligned} \delta \left[\Phi_{I, j+1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j+1/2}^{n+1/2} \right] - \delta \left[\Phi_{I, j-1/2}^{n+1/2} \bullet \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right] &= \Phi(W^*) \bullet \left(\delta \nu_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta \nu_{j-1/2}^{n+1/2} \right) \\ &= -\Phi(W^*) \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \quad \text{au vu de (5.49)} \\ &= -\left(\tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \right) W^* + p^* \left(0, -\delta \nu_j^{n+1/2}, -(\tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}) \right)^t. \end{aligned}$$

On reporte cette dernière expression, jointe à la relation (5.47), au sein de (5.3). Il vient, compte tenu des hypothèses (5.35) à (5.40) :

$$\begin{aligned} (F \bullet \nu)_{I+1/2, j}^{n+1/2} &= \left(0, p^* \left(\nu_{I+1/2, j} + \delta \nu_j^{n+1/2} \right), p^* \left(s \bullet \nu_{I+1/2, j} \right) \right)^t \\ &\quad - \left(\tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \right) W^* - p^* \left(0, \delta \nu_j^{n+1/2}, \tilde{u}^* \bullet \delta \nu_j^{n+1/2} \right)^t \\ &\quad + s \bullet \nu_{I+1/2, j} W^* + (\text{ordre} \geq 2) \\ &= q_j^{n+1/2} W^* + p^* \left(0, \nu_{I+1/2, j}, q_j^{n+1/2} \right)^t + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned}$$

ce qui montre la relation (5.44). La seule différence entre les expressions (5.43) (5.44) et (5.45)(5.46) tient à l'unique point suivant :

$$(5.50) \quad q(t) - q_j^{n+1/2} = s \bullet \delta \nu_j^{n+1/2}$$

lequel est un infiniment petit du second ordre compte tenu des hypothèses faites pour établir la relation (5.3). La proposition en résulte. \square

6) Conclusion.

- Nous avons montré que si un fluide considéré comme non visqueux est limité par une structure lentement variable et qui se déplace d'une faible amplitude dans l'espace, il est possible au premier ordre de remplacer une modélisation géométrique de ce mouvement par un flux limite de paroi mobile sur les facettes qui relient le fluide et la structure. L'évaluation numérique du flux limite de paroi mobile demande, dans le cas où l'on utilise la méthode Muscl de van Leer avec le choix fait aux Mureaux d'un maillage structuré, une évaluation précise de la normale au cours du temps, une mise en mémoire de l'état extrapolé à la paroi, une évaluation de la dérivée de la pression paroi, la maîtrise de la dérivée du flux de van Leer par rapport aux états fluides et une résolution approchée de la discontinuité sur les facettes transversales avec un schéma de Roe. Il s'agit de calculs de mise en œuvre délicate mais qui ne doivent entraîner qu'un surcoût modique à l'exploitation.

- La suite naturelle de ce travail pourrait être la suivante : **(i)** mise en œuvre du flux linéarisé de paroi mobile dans une maquette logicielle jointe à une extension tridimensionnelle des développements algébriques formels contenus dans ce mémoire, **(ii)** validation par rapport à l'expérience industrielle, **(iii)** insertion du module ainsi développé au sein d'un logiciel tridimensionnel opérationnel. De façon plus générale, ce travail s'insère dans une réflexion globale sur le couplage aéroélastique et le besoin opérationnel de disposer pour les études systèmes d'un logiciel de simulation couplant aérodynamique et élastodynamique.

Condition d'entropie multidimensionnelle

Nous présentons une approche générale pour exprimer la condition d'entropie dans le cas de l'approximation de systèmes hyperboliques de lois de conservation par un schéma continu en temps et discret en espace avec la méthode des volumes finis mutidimensionnels. Nous établissons le lien avec le schéma de Godunov dans le cas de la dynamique des gaz.

1) Introduction.

- Nous étudions un système hyperbolique de lois de conservation

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} f(W) = 0$$

muni d'une entropie de Lax η , de sorte que nous cherchons les solutions entropiques du système (1) qui vérifient de plus au sens des distributions

$$(2) \quad \frac{\partial \eta(W)}{\partial t} + \operatorname{div} \xi(W) \leq 0$$

où $\xi(W)$ est le flux d'entropie associé à l'entropie η et au flux f du système (1).

- Nous étudions une semi-discrétisation en espace du système (1) par la méthode des volumes finis ; les inconnues sont les valeurs moyennes des variables conservées W :

Rapport de recherche Aérospatiale Lanceurs, mai 1992. Révision juillet 2003. Edition février 2011 ; 13 pages.

$$(3) \quad W_K = \frac{1}{|K|} \int_K W(x) dx$$

et l'intégration en espace de la loi de conservation (1) fait apparaître un flux $\Phi(n)$ à l'interface de normale n entre deux volumes de contrôle :

$$(4) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + \int_{\partial K} \Phi(n) d\gamma = 0.$$

Le choix du flux numérique $\Phi(n)$ définit complètement le schéma en espace. Il importe de le choisir de façon à satisfaire un analogue discret de l'inégalité d'entropie (2) du type

$$(5) \quad |K| \frac{d}{dt} \eta(W_K) + \int_{\partial K} \xi(n) d\gamma \leq 0,$$

où $\xi(n)$ est un flux numérique d'entropie à déterminer.

- Nous proposons dans cette note une méthode pour déterminer le flux d'entropie dans un cadre très général qui, moyennant une condition sur le flux numérique $\Phi(n)$, assure que l'inégalité d'entropie (5) est satisfaite. Il s'agit d'une généralisation de travaux menés à une dimension d'espace par Osher [Os84], Tadmor [Ta87] et Khalfallah-Lerat [KL89].

- Nous introduisons les variables entropiques φ définies par :

$$(6) \quad \varphi = \eta'(W)$$

et le changement de fonction réciproque $\varphi \longmapsto W$ est bien défini compte tenu de la stricte convexité de η . Nous introduisons également une transformée $\psi(\bullet)$ du flux d'entropie :

$$(7) \quad \psi \equiv \varphi f(W) - \xi(W)$$

et, pour un couple (φ, W) vérifiant la relation (6), il est clair que ψ ne dépend que de la variable entropique φ et vérifie :

$$(8) \quad d\psi = d\varphi \bullet f(W(\varphi)).$$

2) Flux d'entropie.

- Pour une interface F de normale $n(F)$ supposée intérieure au domaine de calcul Ω , nous disposons d'un volume K_g à sa gauche et d'un volume de contrôle K_d à sa droite (figure 1).

- Nous calculons d'abord le flux d'entropie de part et d'autre de l'interface F à partir de la valeur au centre des deux mailles voisines et d'extrapolations

d'ordre un. Rappelons d'abord que nous avons la relation suivante, qui caractérise un flux d'entropie :

$$(9) \quad d\xi(W) = \eta'(W) df(W) = \varphi(W) df(W).$$

Il est donc naturel d'extrapoler le flux $\xi \bullet n$ à gauche de l'interface par la relation

$$(10) \quad (\xi \bullet n)(F, g) = \xi_g \bullet n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \bullet n)$$

où l'indice g dans le second membre de la relation (10) signifie qu'on prend le flux d'entropie $\xi \bullet n$, la variable entropique φ et le flux f relativement à l'état à gauche de l'interface F . Nous avons une relation analogue pour l'autre côté de l'interface :

$$(11) \quad (\xi \bullet n)(F, d) = \xi_d \bullet n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \bullet n)$$

et nous calculons le flux d'entropie numérique $\xi(n)$ en pondérant les relations (10) et (11) très simplement :

$$(12) \quad \xi(n) = \frac{1}{2} \left(\xi_g \bullet n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \bullet n) + \xi_d \bullet n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \bullet n) \right).$$

Pour faire apparaître le flux d'entropie de la relation (12), nous multiplions la relation (4) par $\eta'(W_K) = \varphi_K$, remarquons que l'on a identiquement

$$(13) \quad \int_{\partial K} f(W_K) \bullet n \, d\gamma = 0$$

donc nous avons

$$(14) \quad |K| \frac{d}{dt} \eta(W_K) + \sum_{F \in \partial K} \int_F \varphi_K (\Phi(n) - f_K \bullet n) \, d\gamma = 0.$$

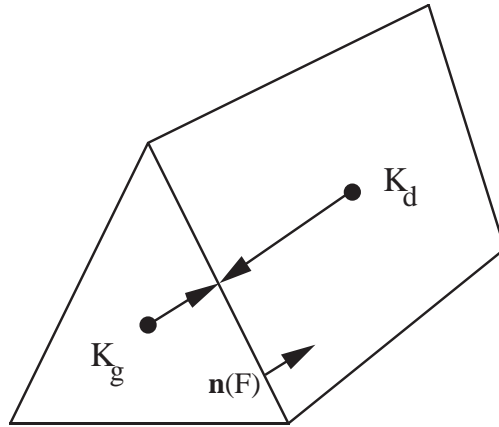


Figure 1 Notations.

• Nous avons identité complète entre l'élément K et l'élément à gauche K_g des diverses interfaces F puisque nous supposons la normale n orientée vers l'extérieur de l'élément. Donc nous avons le calcul élémentaire suivant :

$$(15) \quad \varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\xi_g \cdot n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \cdot n)) - \xi_g \cdot n \\ + \frac{1}{2} (\xi_d \cdot n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \cdot n)) \\ + \frac{1}{2} \left[\xi_g \cdot n + \varphi_g (\Phi(n) - f_g \cdot n) \right. \\ \left. - (\xi_d \cdot n + \varphi_d (\Phi(n) - f_d \cdot n)) \right] \end{cases}$$

$$(16) \quad \varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) = \xi(n) - \frac{1}{2} ((\varphi_d - \varphi_g) \Phi(n) + \psi_g \cdot n - \psi_d \cdot n) - \xi_g \cdot n$$

qui nous conduit à poser

$$(17) \quad \mathcal{D}(F) = (\varphi_d - \varphi_g) \Phi(n) + \psi_g \cdot n - \psi_d \cdot n.$$

Nous pouvons réécrire la relation (16) sous la forme

$$(18) \quad \varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) = \xi(n) - \frac{1}{2} \mathcal{D}(F) - \xi_K \cdot n.$$

Nous intégrons la relation (18) sur le bord ∂K de l'élément K , remarquons que nous avons identiquement

$$(19) \quad \int_{\partial K} \xi_K \cdot n \, d\gamma = 0$$

et, compte tenu de la relation (14), nous en déduisons la relation fondamentale suivante

$$(20) \quad |K| \frac{d}{dt} \eta(W_K) + \int_{\partial K} \xi(n) \, d\gamma = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \mathcal{D}(F) \, d\gamma.$$

Lorsque l'élément K est au bord du domaine d'étude Ω , un état W_0 permet de prendre en compte les conditions aux limites relatives au problème (1) (voir les détails par exemple dans [DLf88] et [DLf89]) et il est naturel de définir le flux d'entropie à la frontière par la relation

$$(21) \quad \xi(n) = \frac{1}{2} \left(\varphi_K (\Phi(n) - f_K \cdot n) + \xi_0 \cdot n + \varphi_0 (\Phi(n) - f_0 \cdot n) \right).$$

3) Inégalité d'entropie.

• La relation (20) qui permet de préciser l'évolution de l'entropie dans la maille K est très générale. L'inégalité d'entropie (5) est donc satisfaite sous la condition suffisante

$$(22) \quad \mathcal{D}(F) \leq 0$$

et le schéma associé au flux numérique $\Phi(n)$ est alors dit "à solutions stationnaires entropiques".

- Nous remarquons que dans le changement de la direction de la normale, c'est à dire de n en $-n$, la conservativité du schéma impose

$$(23) \quad \Phi(-n) = -\Phi(n)$$

et que nous avons également, compte tenu de la relation (12) :

$$(24) \quad \xi(-n) = -\xi(n)$$

alors que la dépendance par rapport à la direction normale n'est pas explicitée dans la définition (17) de la dissipation d'entropie. En effet, si on change n en $-n$, il convient aussi d'échanger gauche et droite qui ne sont définis que relativement au choix d'une direction normale, ce qui laisse inchangée l'expression de $\mathcal{D}(F)$, compte tenu des relations (23) et (24).

4) Equations d'Euler de la dynamique des gaz.

- Nous considérons maintenant le cas des équations d'Euler de la dynamique des gaz, à deux dimensions d'espace pour fixer les idées. Les variables conservées de masse, impulsion et énergie se définissent par

$$(25) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t$$

et les variables entropiques prennent une forme simple en fonction de la thermodynamique (voir Godunov et al [GZIKP79]) :

$$(26) \quad \varphi = \left(\frac{1}{T} \left(\mu - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right), \frac{u}{T}, \frac{v}{T}, -\frac{1}{T} \right),$$

où ρ, u, v, E, T et μ désignent respectivement la densité, les composantes selon x et y de la vitesse, l'énergie totale spécifique, la température et le potentiel chimique. Les flux f_x et f_y ont la forme bien classique

$$(27) \quad f_x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(28) \quad f_y = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t.$$

Nous pouvons expliciter la forme de la condition d'entropie (22) lorsque l'interface F est une paroi solide. Dans ce cas, la condition limite continue s'écrit physiquement

$$(29) \quad u \bullet n = 0$$

ce qui impose un flux limite faisant apparaître une pression :

$$(30) \quad \Phi(n) = (0, p^* n_x, p^* n_y, 0)^t.$$

L'état W_0 de la relation (21) est alors le "miroir" de l'état W_K dans la maille contenant l'interface F , c'est à dire, en notant τ le vecteur unitaire déduit de la direction normale n par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$:

$$(31) \quad W_0 = \left(\rho, \rho \left((-u \cdot n) n + (u \cdot \tau) \tau \right), \rho E \right)^t.$$

L'état W_0 a même vitesse tangentielle et même thermodynamique que l'état W_K , mais une vitesse normale opposée. On a par ailleurs

$$(32) \quad \xi_K \cdot n = \frac{p_K}{T_K} u \cdot n$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour la dissipation de l'entropie :

$$(33) \quad \mathcal{D}(F) = \frac{2}{T_K} (u \cdot n) (p_K - p^*).$$

- Nous terminons ce paragraphe par le théorème suivant, énoncé dans un cadre monodimensionnel, mais dont la généralisation à deux ou trois dimensions d'espace est immédiate.

Théorème 1.

Le schéma de Godunov est entropique au sens de l'inégalité (22) pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz.

Preuve du théorème 1.

- Il faut montrer que, pour W_g et W_d états donnés et $\Phi(n)$ flux de la solution en $x = 0$ du problème de Riemann posé entre W_g et W_d , la dissipation d'entropie $\mathcal{D}(F)$ est négative. Rappelons que la solution du problème de Riemann comporte une 1-onde (de choc ou de détente) suivie d'un premier état intermédiaire W_1 , d'une 2-discontinuité de contact, d'un second état intermédiaire W_2 et d'une 3-onde de choc ou de détente (figure 2). Nous appelons "état de Godunov" l'état $W(x = 0)$ qui permet de calculer le flux numérique.

- Nous rappelons qu'à travers une 1-onde de choc de célérité σ_1 , le saut d'entropie est donné par la relation

$$(34) \quad \xi_1 - \xi_g - \sigma_1 (\eta_1 - \eta_g) = -m_1 (s_1 - s_g)$$

où s désigne l'entropie spécifique et $m_1 \equiv \rho_1 (u_1 - \sigma_1) = \rho_g (u_g - \sigma_1)$ le flux de masse (positif) qui traverse le 1-choc. De même, à travers un 3-choc de célérité σ_3 , nous avons

$$(35) \quad \xi_d - \xi_2 - \sigma_3 (\eta_d - \eta_2) = -m_3 (s_d - s_2)$$

où le flux de masse $m_3 \equiv \rho_2 (u_2 - \sigma_3) = \rho_d (u_d - \sigma_3)$ est maintenant négatif. Les seconds membres de (34) et (35) sont négatifs puisque la solution recherchée est entropique au sens de Lax et ainsi nous avons

$$(36) \quad s_1 \geq s_g$$

$$(37) \quad s_2 \geq s_d$$

et l'entropie spécifique croît toujours à la traversée d'une onde de choc.

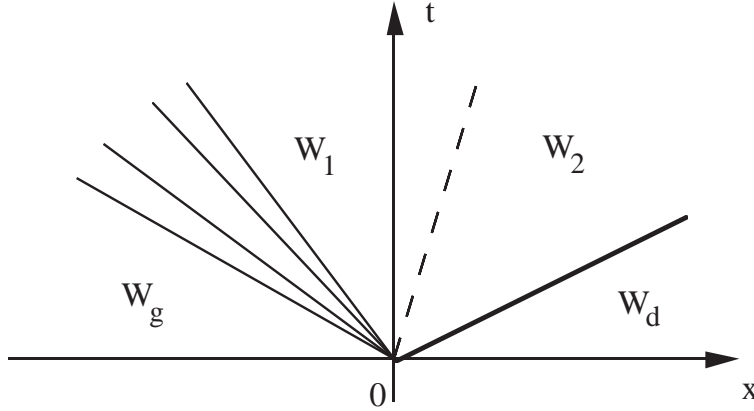


Figure 2 Problème de Riemann.

- Nous décomposons la dissipation (17) de façon à mettre en évidence ce qui vient de la gauche et ce qui vient de la droite. Nous avons, en notant sans le moindre indice l'état de Godunov,

$$(38) \quad \mathcal{D}(F) = (\xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g)) + (\xi_d - \xi + \varphi_d(\Phi - f_d)).$$

Nous montrons ici, en suivant en fait une démarche initiée par l'équipe de Mazet [BDM89], qu'on a en fait simultanément

$$(39) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq 0$$

$$(40) \quad \xi_d - \xi + \varphi_d(\Phi - f_d) \leq 0.$$

La première inégalité (39) peut s'interpréter comme une inégalité d'entropie à la limite. Nous l'avons proposée avec P. Le Floch [DLf88] et elle a été établie théoriquement par Benabdallah-Serre [BS87]. Nous la détaillons avec des arguments élémentaires dans le paragraphe qui suit.

- Preuve de l'inégalité (39).

Nous distinguons divers cas, selon que dans le quadrant $\zeta \equiv \frac{x}{t} \leq 0$ (*c.f.* figure 2), nous disposons de zéro, une, deux ou trois ondes autosemblables. S'il n'y a pas d'onde dans le quadrant $\frac{x}{t} \leq 0$, nous avons alors simplement

$$(41) \quad \Phi = f_g, \quad \xi = \xi_g$$

et l'inégalité (39) est dans ce cas une égalité.

- Si l'état de Godunov est sonique dans la 1-onde, nous disposons d'une 1-détente entre $\zeta = \zeta_g$ et $\zeta = 0$, qui vérifie donc

$$(42) \quad \frac{df}{d\zeta} = \zeta \frac{dW}{d\zeta}$$

$$(43) \quad \frac{d\xi}{d\zeta} = \zeta \frac{d\eta(W)}{d\zeta}.$$

On tire de ces égalités

$$(44) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \int_{\zeta_g}^0 \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta.$$

La fonction $\zeta \mapsto \zeta$ est croissante négative donc d'après la seconde formule de la moyenne, il existe $\zeta^* \leq 0$ de sorte que

$$\int_{\zeta_g}^0 \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta = \zeta_g \int_{\zeta_g}^{\zeta^*} \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta$$

$$(45) \quad \int_{\zeta_g}^0 \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta = \zeta_g \left(\eta(W(\zeta^*)) - \eta_g - \varphi_g (W(\zeta^*) - W_g) \right)$$

et l'inégalité (39) est une conséquence de la convexité de la fonction $W \mapsto \eta(W)$ et de l'hypothèse $\zeta_g \leq 0$.

- Si l'état de Godunov est le premier état intermédiaire W_1 et si la 1-onde est une onde de détente, le raisonnement précédent s'applique sans modification. Si c'est une 1-onde de choc, la relation de Rankine et Hugoniot

$$(46) \quad f_1 - f_g = \sigma_1 (W_1 - W_g)$$

jointe à l'inégalité d'entropie issue de (34) montre que nous avons

$$(47) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \sigma_1 (\eta_1 - \eta_g - \varphi_g (W_1 - W_g))$$

et la conclusion est conséquence de la convexité de $\eta(\bullet)$ et de l'hypothèse $\sigma_1 \leq 0$.

- Si l'état de Godunov est le second état intermédiaire W_2 , nous disposons d'une 1-onde de choc ou de détente suivie par une discontinuité de contact de célérité $\sigma_2 \leq 0$ entre les états W_1 et W_2 :

$$(48) \quad f_2 - f_1 = \sigma_2 (W_2 - W_1)$$

$$(49) \quad \xi_2 - \xi_1 = \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1).$$

Nous avons

$$(50) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g (W_2 - W_1)) + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g (f_1 - f_g)).$$

Si la 1-onde est un choc de célérité $\sigma_1 \leq \sigma_2$, nous déduisons de (50) et (47) l'inégalité suivante

$$(51) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \begin{cases} \sigma_2 (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g (W_2 - W_g)) \\ + (\sigma_1 - \sigma_2) (\eta_1 - \eta_g - \varphi_g (W_1 - W_g)) \end{cases}$$

qui montre la propriété, au vu de la convexité de l'entropie mathématique et des hypothèses sur les célérités. Si la 1-onde est une détente, compte tenu de (50) et (45), nous avons, en notant ζ_1 la valeur de $u - c$ pour le premier état intermédiaire,

$$(52) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} \sigma_2 (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ + \int_{\zeta_g}^{\zeta_1} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{cases}$$

et la conclusion tombe comme dans les cas précédents.

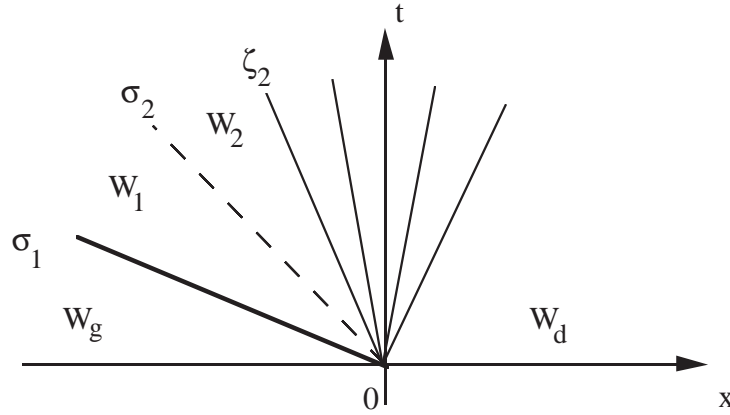


Figure 3 Etat de Godunov sonique dans la 3-détente.

- Si l'état de Godunov est l'état sonique dans la 3-détente et ce cas est illustré à la figure 3, nous avons la décomposition

$$\xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} (\xi - \xi_2 - \varphi_g(\Phi - f_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g(f_1 - f_2)) \end{cases}$$

qui, compte tenu de calculs analogues à ceux de la relation (45), permet d'écrire, en notant ζ_2 la célérité au début de la 3-détente,

$$(53) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} \zeta_2 (\eta^* - \eta_2 - \varphi_g(W^* - W_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g(f_1 - f_g)) \end{cases}$$

Si la 1-onde est un choc, comme pour l'inégalité (45), nous avons :

$$(54) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \begin{cases} \zeta_2 (\eta^* - \eta_g - \varphi_g(W^* - W_g)) \\ + (\sigma_2 - \zeta_2) (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ + (\sigma_1 - \sigma_2) (\eta_1 - \eta_g - \varphi_g(W_1 - W_g)) \end{cases}$$

et le résultat est une conséquence des inégalités sur les vitesses d'ondes (voir la figure 3) et de la convexité de l'entropie $\eta(\bullet)$. Dans le cas où la 1-onde est une détente, on adapte la relation (52) en tenant compte de la relation (53) et il vient

$$(55) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) = \begin{cases} \zeta_2 (\eta^* - \eta_g - \varphi_g(W^* - W_g)) \\ \quad + (\sigma_2 - \zeta_2) (\eta_2 - \eta_g - \varphi_g(W_2 - W_g)) \\ \quad + \int_{\zeta_g}^{\zeta_1} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_g \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{cases}$$

et la propriété en résulte.

- Si l'état de Godunov est l'état de droite et si la 3-onde est une détente, la démonstration précédente est inchangée. S'il s'agit d'une onde de choc, compte tenu de l'inégalité d'entropie issue de la relation (35), nous avons

$$(56) \quad \xi - \xi_g - \varphi_g(\Phi - f_g) \leq \begin{cases} \sigma_3 (\eta_d - \eta_2 - \varphi_g(W_d - W_2)) \\ \quad + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_g(W_2 - W_1)) \\ \quad + (\xi_1 - \xi_g - \varphi_g(f_1 - f_g)) \end{cases}$$

et la preuve s'achève comme dans les autres cas. Ceci termine la démonstration de l'inégalité (39).

- Preuve de l'inégalité (40).

Nous la menons en suivant un plan analogue à celui proposé pour l'inégalité d'entropie (39). S'il n'y a pas d'onde dans le quadrant $\zeta \geq 0$, on a alors

$$(57) \quad \Phi = f_d, \quad \xi = \xi_d$$

et l'inégalité (40) est triviale. Si l'état de Godunov est sonique dans la 3-détente, on a, d'après (42) et (43) :

$$(58) \quad \begin{aligned} \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) &= \int_0^{\zeta_d} \zeta \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \\ \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) &= \zeta_d \int_{\zeta^*}^{\zeta_d} \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{aligned}$$

compte tenu de la seconde formule de la moyenne, pour une célérité ζ^* positive. Nous pouvons calculer exactement l'intégrale du second membre de la relation (58), et nous avons

$$(59) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = (-\zeta_d) \left(\eta(W(\zeta^*)) - \eta_d - \varphi_d(W(\zeta^*) - W_d) \right)$$

ce qui montre l'inégalité (40) dans ce cas particulier.

• Si l'état de Godunov est le second état intermédiaire et si la 3-onde est une détente, les relations (58) et (59) s'appliquent sans modification, ce qui montre la propriété dans ce cas. Si la 3-onde est une onde de choc, la relation de Rankine et Hugoniot s'écrit ici

$$(60) \quad f_d - f_2 = \sigma_3 (W_d - W_2)$$

et l'égalité (35) fournit, compte tenu du second principe de la thermodynamique, une inégalité analogue pour le flux d'entropie. Nous en déduisons

$$(61) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \sigma_3 (\eta_d - \eta_2 - \varphi_d(W_d - W_2))$$

et l'inégalité (40) est conséquence de la convexité de $\eta(\bullet)$ (la valeur de l'entropie en W_2 est "au dessus" du plan tangent au point W_d) et de l'hypothèse $\sigma_3 \geq 0$.

• Si l'état de Godunov est le premier état intermédiaire W_1 , nous devons prendre en compte les relations (48) et (49). Nous avons alors :

$$(62) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \xi_d - \xi_2 - \varphi_d(f_d - f_2) + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_d(W_2 - W_1)).$$

Si la 3-onde est un choc, nous déduisons de (61) et (62) :

$$(63) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} (\sigma_3 - \sigma_2) (\eta_d - \eta_2 - \varphi_d(W_d - W_2)) \\ + \sigma_2 (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \end{cases}$$

et la relation (40) est alors conséquence de la convexité de la fonction $\eta(\bullet)$ et des relations $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq 0$. Si la 3-onde est une détente, nous avons, compte tenu de la relation (58)

$$(64) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \begin{cases} \int_{\zeta_3}^{\zeta_d} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \\ + \sigma_2 (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \end{cases}$$

et la seconde formule de la moyenne jointe au fait que la fonction $\zeta \mapsto (\zeta - \sigma_2)$ est croissante positive, nous avons

$$(65) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) = \begin{cases} (\zeta_d - \sigma_2) \int_{\zeta^*}^{\zeta_d} \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \\ + \sigma_2 (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \end{cases}$$

et la propriété cherchée résulte des mêmes arguments que précédemment.

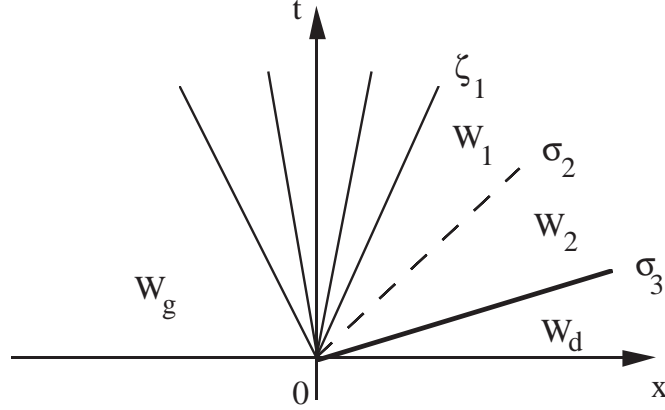


Figure 4 Etat de Godunov sonique dans la 1-détente.

- Si l'état de Godunov est sonique dans la 1-détente, les notations sont celles de la figure 4. Comme pour établir la relation (53), nous avons

$$(66) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ \quad + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_d(W_2 - W_1)) \\ \quad + (\xi_d - \xi_2 - \varphi_d(f_d - f_2)) \end{cases}$$

où ζ_1 désigne la valeur de la 1-célérité pour l'état W_1 . Si la 3-onde est un choc, on regroupe les deux derniers termes du membre de droite de (66) comme à la relation (63), ce qui entraîne :

$$(67) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ \quad + (\sigma_2 - \zeta_1) (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \\ \quad + (\sigma_3 - \sigma_2) (\eta_d - \eta_2 - \varphi_d(W_d - W_2)) \end{cases}$$

et l'inégalité (40) en résulte. Si la 3-onde est une détente, nous avons, en notant ζ_3 la valeur de $u + c$ relative au second état intermédiaire :

$$(68) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ \quad + (\sigma_2 - \zeta_1) (\eta_d - \eta_1 - \varphi_d(W_d - W_1)) \\ \quad + \int_{\zeta_3}^{\zeta_d} (\zeta - \sigma_2) \left(\frac{d\eta(W)}{d\zeta} - \varphi_d \frac{dW}{d\zeta} \right) d\zeta \end{cases}$$

et la relation (40) s'en déduit facilement dans ce cas. Si l'état de Godunov est l'état de gauche et dans le cas d'une 1-onde de détente, le paragraphe qui précède s'applique sans modification pour établir la relation recherchée. Si on est en présence d'un 1-choc, nous décomposons la production d'entropie sous la forme :

$$(69) \quad \xi_d - \xi - \varphi_d(f_d - \Phi) \leq \begin{cases} \zeta_1 (\eta_d - \eta^* - \varphi_d(W_d - W^*)) \\ + \sigma_2 (\eta_2 - \eta_1 - \varphi_d(W_2 - W_1)) \\ + (\xi_d - \xi_2 - \varphi_d(f_d - f_2)) \end{cases}$$

et la preuve s'achève en réappliquant exactement la même série d'arguments que pour le paragraphe précédent. Ceci termine la démonstration du théorème. \square

- Remarquons en guise de conclusion que le résultat qui précède s'étend sans difficulté au cas multidimensionnel puisque à chaque interface, on résout un problème de Riemann purement monodimensionnel.
- Nous avons établi dans cette note une généralisation d'une inégalité d'entropie classique pour les schémas continus en temps et dans le cas d'une seule dimension d'espace à un maillage arbitraire de type volumes finis dans un cadre multidimensionnel. Celle-ci est vérifiée pour le schéma de Godunov et nous en avons donné une preuve détaillée. Nous renvoyons aux travaux de Vila et son équipe [Vi91] pour l'établissement d'une inégalité d'entropie complètement discrétisée relative au schéma de Godunov à plusieurs dimensions d'espace.

Dynamique des gaz, volumes finis et moment cinétique

Après avoir remarqué que les équations de la dynamique des gaz conservent le moment cinétique, nous proposons un nouveau schéma de volumes finis pour leur approximation numérique. C'est une généralisation du schéma de Godunov qui prend en compte un champ de vitesse tourbillonnant décrit par un mouvement de type solide rigide dans chaque maille. Le point original du schéma est l'équation d'évolution du tourbillon, qui est une conséquence directe de la conservation du moment cinétique.

1) Euler conserve le moment cinétique.

- Les équations d'Euler de la dynamique des gaz permettent d'écrire la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie sous forme locale en fonction de la masse volumique ρ , de la vitesse u , de la pression p , de l'énergie interne e et totale E liés dans le cas d'un gaz parfait polytropique par les relations

$$(1.1) \quad E = \frac{1}{2} |u|^2 + e$$

$$(1.2) \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Si t désigne le temps et $x \in \mathbb{R}^m$ ($m = 2$ ou 3) est un point courant de l'espace, on a les relations classiques :

Exposé au séminaire du Centre de Mathématiques Appliquées de l'école Polytechnique, juin 1998. Rédaction juillet 2003. Edition février 2011 ; 11 pages.

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E + p u_j) = 0.$$

• On désigne par ϵ_{ijk} le tenseur complètement antisymétrique d'ordre 3 ; ϵ_{ijk} est égal à 1 si (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, ϵ_{ijk} est égal à -1 si c'est une permutation impaire et est nul dans les autres cas. On introduit le moment cinétique relativement à l'origine de l'espace *via* la relation

$$(1.6) \quad \sigma = x \times u ; \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j u_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

On remarque que pour $x \in \mathbb{R}^3$, la relation (1.6) définit le produit vectoriel usuel alors que pour $x \in \mathbb{R}^2$, on se ramène aisément au cas précédent en annulant la troisième composante spatiale de la variable x et du champ de vitesse u . La relation (1.6) montre qu'alors seul σ_3 le long du troisième vecteur de base est non nul et qu'on peut considérer le moment cinétique comme un champ scalaire. Rappelons que le rotationnel est défini pour un champ $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ par la relation

$$(1.7) \quad (\text{rot } \varphi)_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Proposition 1. Conservation du moment cinétique.

Avec les notations précédentes, le moment cinétique σ défini à la relation (1.6) satisfait la loi de conservation suivante, pour $i = 1, \dots, m$:

$$(1.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sigma_i) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \sigma_i u_j) - (\text{rot } (p x))_i = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Preuve de la proposition 1.

• Compte tenu des relations (1.4) et (1.6), on a dans un premier temps

$$(1.9) \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

• Or, en évitant la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés au prix de symboles de sommation, on peut développer les trois termes présents dans le membre de gauche de la relation (1.9). Il vient

$$(1.10) \quad \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j (\rho u_k) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sigma_i),$$

$$\sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} u_k u_l = \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} \delta_{jl} u_k u_l = (u \times u)_i = 0$$

donc $\sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \rho u_k u_l \right)$ et

$$(1.11) \quad \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_l \sigma_i).$$

Enfin $\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$, donc $\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial p}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\epsilon_{ijk} x_j p)$ et

$$(1.12) \quad \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial p}{\partial x_k} = - \sum_{j,k} \epsilon_{ikj} \frac{\partial}{\partial x_k} (p x_j).$$

• La relation (1.8) se déduit alors aisément des relations (1.10) à (1.12) du paragraphe précédent. \square

Remarque 1.

• Notons que la conservation du moment cinétique (1.8) n'est pas une loi de conservation nouvelle si on suppose que les équations (1.3) à (1.5) sont vérifiées. L'énergie totale massique E reste toujours évaluée par la relation (1.1) qui est à prendre ponctuellement. De plus, les relations de saut associées à (1.8) peuvent s'écrire le long d'une surface de discontinuité Σ de normale n et de vitesse ζ en fonction du flux de masse m

$$(1.13) \quad m = \rho (u - \zeta) \cdot n$$

qui traverse Σ , sous la forme

$$(1.14) \quad m [\sigma] + [p] (x \times n) = 0.$$

Compte tenu de la définition (1.6), cette relation (1.14) n'apporte pas plus d'information que la relation de saut classique associée à la conservation (1.4) de l'impulsion, c'est à dire

$$(1.15) \quad m [u] + [p] n = 0.$$

- Par contre, la conservation du moment cinétique (1.8) a l'avantage d'expliquer une loi de conservation fondamentale de la nature, conséquence directe *via* le théorème d'E. Noether (qu'on pourra consulter par exemple dans le livre d'Arnold [Ar76]) de l'invariance par rotation des lois de la physique, mais cachée derrière la forme très locale (1.4) de la conservation de l'impulsion.

2) Vitesse tourbillonnante pour les volumes finis.

- Nous utilisons la conservation du moment cinétique pour proposer une méthode de volumes finis qui l'utilise explicitement. Nous commençons par quelques notations.

- Soit \mathcal{T} un maillage du domaine d'étude $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. L'ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ des éléments K du maillage ($K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$) définit les volumes de contrôle et nous supposons que dans chaque maille, la densité est une fonction constante du point d'espace :

$$(2.1) \quad \rho(x) = \rho_K, \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

Nous approchons le champ de vitesse par un mouvement de corps rigide linéarisé, paramétré par la vitesse moyenne u_K et le tourbillon moyen ω_K dans la maille K :

$$(2.2) \quad u(x) = u_K + \frac{1}{2} \omega_K \times (x - x_K), \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

où x_K désigne le centre de gravité de l'élément K .

Proposition 2. Tourbillon local.

Avec les notations introduites en (2.1) et (2.2), on a

$$(2.3) \quad \text{rot } u(x) = \omega_K, \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

Preuve de la proposition 2.

- On prend le rotationnel de la relation (2.2) :

$$\begin{aligned} \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_l (x^m - x_K^m) \right] &= \sum_{jklm} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \delta_j^m \omega_l = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_j^m - \delta_{im} \delta_{jl} \delta_j^m) \omega_l = \frac{1}{2} (3 - 1) \omega_i = \omega_i. \end{aligned}$$

- La relation (2.3) s'en déduit, à la différence de notation près. \square

Remarque 2.

• La relation (2.3) est à prendre dans la maille K et non pas comme la dérivée au sens des distributions de la fonction $u(x)$ définie par la relation (2.2). Dans la maille K , la vitesse est une fonction affine par maille et l'impulsion ρu l'est également compte tenu de la relation (2.1). Nous sommes donc en train de définir une méthode plus riche que le schéma de Godunov [Go59] mais plus simple que l'approche Muscl de van Leer [vL79].

• Nous relierons maintenant le moment cinétique σ_K relativement au centre de gravité de la maille K au tourbillon ω_K , à l'aide d'une matrice d'inertie J_K . Nous posons

$$(2.4) \quad \rho_K \sigma_K = \frac{1}{|K|} \int_K \rho_K (x - x_K) \times u(x) dx, \quad K \in \mathcal{E}_T$$

$$(2.5) \quad (J_K)_{ij} = \frac{1}{|K|} \int_K (|x - x_K|^2 \delta_{ij} - (x - x_K)_i (x - x_K)_j) dx, \quad K \in \mathcal{E}_T.$$

Proposition 3. Relation tourbillon-moment cinétique.

Avec les notations introduites aux relations (2.2) à (2.5), on a

$$(2.6) \quad \sigma_K = \frac{1}{2} J_K \bullet \omega_K.$$

Preuve de la proposition 3.

• On injecte la représentation (2.2) du champ de vitesse au sein de la définition (2.4) du moment cinétique dans la maille K . Il vient :

$$\begin{aligned} \rho_K \sigma_K &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_K (x - x_K) \times \left[u_K + \frac{1}{2} \omega_K \times (x - x_K) \right] dx \\ &= \frac{1}{2 |K|} \int_K \rho_K (x - x_K) \times \left[\omega_K \times (x - x_K) \right] dx. \end{aligned}$$

• La relation (2.6), compte tenu de (2.5), résulte de la formule élémentaire $y \times (\omega \times y) = |y|^2 \omega - (\omega \bullet y) y$ appliquée à $y = (x - x_K)$. La proposition en résulte. \square

Proposition 4. Propriété de la matrice d'inertie.

La matrice d'inertie J_K définie à la relation (2.5) est symétrique définie positive.

Preuve de la proposition 4.

• Le résultat est classique. Il est d'abord clair que la matrice J_K est une matrice symétrique. Pour $\omega \in \mathbb{R}^m$ fixé, on a ensuite

$$\begin{aligned}
 (\omega, J_K \omega) &= \frac{1}{|K|} \int_K (\omega, (x - x_K) \times (\omega \times (x - x_K))) \, dx \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_K (\omega, (x - x_K), \omega \times (x - x_K)) \, dx \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_K [\omega \times (x - x_K)] \bullet [\omega \times (x - x_K)] \, dx \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_K |\omega \times (x - x_K)|^2 \, dx \geq 0
 \end{aligned}$$

ce qui montre que J_K est positive pour tout $m \in \{2, 3\}$.

• Si $m = 3$, la relation $(\omega, J_K \omega) = 0$ entraîne que ω est presque partout parallèle à tout vecteur $(x - x_K)$ pour tout $x \in K$. Donc $\omega = 0$ et J_K est définie positive. Si $m = 2$, la relation $\omega \times (x - x_K) = 0$ pour tout $x \in K$ entraîne que ω appartient au plan du domaine Ω . Comme ω n'a qu'une composante perpendiculaire à ce plan, ω est nul si $(\omega, J_K \omega) = 0$. Donc J_K est définie positive dans ce cas également. \square

• Nous explicitons maintenant la relation entre l'énergie totale E_K dans une maille et l'énergie interne, supposée constante, e_K dans cette maille. On suppose donc

$$(2.7) \quad e(x) = e_K, \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_T.$$

L'énergie totale E_K dans la maille K est définie par intégration de la composante cinétique $\frac{1}{2} \rho |u|^2$ et de la composante interne ρe , compte tenu de la relation (1.1). On pose donc

$$(2.8) \quad \rho_K E_K = \rho_K e_K + \frac{1}{2|K|} \int_K \rho_K |u(x)|^2 \, dx, \quad K \in \mathcal{E}_T,$$

où le champ de vitesse $u(x)$ dans la maille K est supposé satisfaire la relation (2.2).

Proposition 5. Énergie interne.

Avec les définitions et notations introduites aux relations (2.1) à (2.8), on a

$$(2.9) \quad e_K = E_K - \frac{1}{2} |u_K|^2 - \frac{1}{8} (\omega_K, J_K \omega_K), \quad K \in \mathcal{E}_T.$$

Preuve de la proposition 5.

- On évalue l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2|K|} \int_K \rho |u|^2 dx &= \frac{\rho_K}{2|K|} \int_K |u_K + \frac{1}{2} \omega_K \times (x - x_K)|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \rho_K |u_K|^2 + \frac{\rho_K}{8|K|} \int_K |\omega_K \times (x - x_K)|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \rho_K |u_K|^2 + \frac{1}{8} \rho_K (\omega_K, J_K \omega_K)
 \end{aligned}$$

compte tenu du calcul fait au cours de la preuve de la proposition 4.

- La relation (2.9) résulte alors du calcul ci-dessus et de la définition (2.8) de l'énergie totale. \square

3) Volumes finis pour les équations d'Euler.

- Nous proposons dans ce paragraphe de construire un système dynamique discret qui approche les équations (1.1) à (1.5) de la dynamique des gaz. L'idée de base est d'utiliser la représentation affine incomplète (2.2) du champ de vitesse et de tirer de la conservation du moment cinétique une équation d'évolution pour le tourbillon ω_K . La variable conservée W_K dans la maille K est le vecteur formé de la densité, l'impulsion, le moment cinétique et l'énergie totale :

$$(3.1) \quad W_K = (\rho_K, \rho_K u_K, \rho_K \sigma_K, \rho_K E_K)^t.$$

Nous notons que si $x \in \mathbb{R}^2$ alors $W_K \in \mathbb{R}^5$ alors que si $x \in \mathbb{R}^3$, on a $W_K \in \mathbb{R}^8$.

- Quand on intègre dans la maille K les lois de conservation (1.3), (1.4), (1.8) et (1.5), on obtient une équation différentielle ordinaire pour décrire l'évolution de W_K au cours du temps

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} W_K + \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} (\Phi \bullet n) d\gamma(x) = 0, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

Le flux $(\Phi \bullet n)$ dans le second terme de la relation (3.2) est dû au caractère conservatif des équations de la masse, de l'impulsion, du moment cinétique et de l'énergie. Si x désigne un point du bord ∂K de l'élément K ou plus précisément de l'interface f (f appartient à l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ des arêtes du maillage si $m = 2$ et f appartient à l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ des faces du maillage si $m = 3$) qui sépare deux éléments K_g et K_d et si $U^*(x)$ désigne un état fluide sur cette interface, défini

par exemple par sa densité $\rho^*(x)$, sa vitesse $u^*(x)$ et sa pression $p^*(x)$, c'est à dire

$$(3.3) \quad U^*(x) = (\rho^*(x), u^*(x), p^*(x))^t, \quad x \in f$$

on a simplement

$$(3.4) \quad (\Phi \bullet n_f)(K, U^*) = \begin{pmatrix} \rho^* u^* \bullet n_f \\ \rho^* u^* (u^* \bullet n_f) + p^* n_f \\ (x - x_K) \times [\rho^* u^* (u^* \bullet n_f) + p^* n_f] \\ (\rho^* E^* + p^*)(u^* \bullet n_f) \end{pmatrix}$$

où l'énergie totale E^* de l'état intermédiaire est donnée par un condensé des relations (1.1) et (1.2) :

$$(3.5) \quad E^* = \frac{1}{2} |u^*|^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p^*}{\rho^*},$$

et n_f désigne la normale à l'interface f au point $x \in f$.

- Le second terme de l'équation (3.2) se décompose sur les faces f du bord du volume K :

$$(3.6) \quad \int_{\partial K} (\Phi \bullet n) d\gamma(x) = \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_T \\ f \cap \partial K \neq \emptyset}} \int_f (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x)) d\gamma(x)$$

où \mathcal{F}_T désigne maintenant l'ensemble des faces du maillage si $m = 3$ et l'ensemble des arêtes de celui-ci si $m = 2$. Quand on utilise le schéma de Godunov, on a $\omega_K \equiv 0$ et une formule de quadrature à un point

$$(3.7) \quad \frac{1}{|f|} \int_f (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x)) d\gamma(x) \approx (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x_0(f)))$$

qui introduit le centre de gravité $x_0(f)$ de la face f du maillage. On utilise alors au sein de la relation (3.7) la valeur de $U^*(x_0(f))$ qui correspond à l'état stationnaire du problème de Riemann entre les états U_g et U_d respectivement à gauche et à droite de l'interface f :

$$(3.8) \quad U^*(x_0(f)) = R(U_g, n_f, U_d).$$

Nous renvoyons le lecteur par exemple à Godlewski-Raviart [GR96] pour les détails de mise en œuvre.

- Nous proposons ici d'enrichir la description de l'interaction entre états sur l'interface pour prendre en compte la caractère variable en espace de la relation (2.2) ainsi que la variation spatiale du moment cinétique, tout en n'utilisant comme outil de résolution de base "que" le problème de Riemann entre deux

états U_g et U_d . Le schéma de volumes finis pour les équations d'Euler à l'aide de l'équation différentielle (3.2) suit l'algorithme décrit ci-dessous.

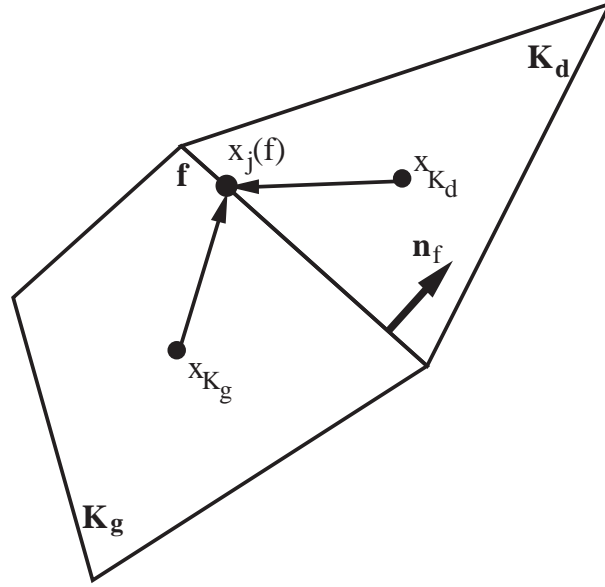


Figure 1 Extrapolation.

★i★

Pour chaque interface f du maillage (entre deux cellules de contrôle), on se donne une formule de quadrature avec un nombre fixé ($p + 1$) de points $x_j(f)$ et des poids associés a_j :

$$(3.9) \quad \frac{1}{|f|} \int_f (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x)) d\gamma(x) \approx \sum_{j=0}^p a_j (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x_j(f))).$$

★ii★

Les points $(x_j(f))$, $j = 0, \dots, p$ étant donnés pour toute interface f du maillage \mathcal{T} , on détermine deux états extrapolés $U_g((x_j(f)))$ et $U_d((x_j(f)))$ à l'aide du couple d'éléments (K_g, K_d) situés respectivement à gauche et à droite de l'interface f (voir la figure 1). Les états extrapolés demandent surtout d'évaluer le champ de vitesse au point $x_j(f)$ à partir des valeurs u_{K_g} et u_{K_d} aux centres x_{K_g} et x_{K_d} des mailles K_g et K_d :

$$(3.10) \quad u_g(x_j(f)) = u_{K_g} + \frac{1}{2} \omega_{K_g} \times (x_j(f) - x_{K_g})$$

$$(3.11) \quad u_d(x_j(f)) = u_{K_d} + \frac{1}{2} \omega_{K_d} \times (x_j(f) - x_{K_d}),$$

avec les notations de la relation (2.2). On dispose donc des deux états extrapolés de part et d'autre du j° point d'intégration sur la face f :

$$(3.12) \quad U_g(x_j(f)) = (\rho_{K_g}, u_g(x_j(f)), p_{K_g})^t$$

$$(3.13) \quad U_d(x_j(f)) = (\rho_{K_d}, u_d(x_j(f)), p_{K_d})^t.$$

★ iii ★

Les états extrapolés de part et d'autre du point $x_j(f)$ d'interface une fois évalués par les relations (3.10) à (3.13), on résout le problème de Riemann monodimensionnel entre ces deux états pour calculer un état stationnaire $U^*(x_j(f))$ d'inter-face, comme pour le schéma de Godunov :

$$(3.14) \quad U^*(x_j(f)) = R(U_g(x_j(f)), n_f, U_d(x_j(f))), \quad j = 0, \dots, p, \quad f \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}.$$

★ iv ★

Il suffit alors d'évaluer le flux au point $x_j(f)$ à l'aide de la relation (3.4), écrite au point $x = x_j(f)$ puis de sommer toutes les contributions des divers points de quadrature grâce aux relations (3.9) puis (3.6).

- On remarque que le flux calculé avec l'algorithme précédent (relations (3.4) à (3.14)) n'est pas *stricto sensu* rigoureusement conservatif. En effet, le moment cinétique est considéré relativement au centre de gravité de chaque maille. Le flux correspondant sur l'interface f pour cette variable utilise pour l'élément de gauche K_g le bras de levier $(x_j(f) - x_{K_g})$ multiplié vectoriellement par le flux d'impulsion et pour l'élément de droite K_d le bras de levier $(x_j(f) - x_{K_d})$ multiplié vectoriellement par le même flux d'impulsion. L'écart de non-conservation ne reflète que la différence des points de repère où l'on considère les moments cinétiques.

- On associe enfin ce calcul de flux à un intégrateur temporel par exemple de type Runge-Kutta pour passer de l'état W_K^n au temps $n \Delta t$ ($n \in \mathbb{N}$) à un état W_K^{n+1} au temps $(n+1) \Delta t$. Dans le code de calcul Ns3gr, nous avons utilisé (voir [DM92]) avec satisfaction le schéma de Heun qui est un schéma de Runge-Kutta à deux pas. Pour l'équation différentielle modèle,

$$(3.15) \quad \frac{dw}{dt} = f(w(t))$$

il s'écrit

$$(3.16) \quad \frac{1}{\Delta t}(w^{n+1} - w^n) = \frac{1}{2} [f(w^n) + f(w^n + \Delta t f(w^n))].$$

On dispose alors des variables conservées W_K^{n+1} au temps $(n+1)\Delta t$. Il faut en tirer la vitesse u_K (c'est clair), le tourbillon par résolution du système linéaire (2.6) de trois équations à trois inconnues si $x \in \mathbb{R}^3$ (de l'équation (2.6) si $x \in \mathbb{R}^2$), puis l'énergie interne e_K à l'aide de la relation (2.9). Si le pas de temps Δt n'est pas trop grand (condition de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy), cette dernière grandeur est positive et la relation (1.2) permet de calculer la pression.

Remarque 3.

- Le schéma de volumes finis décrit plus haut a un cousinage clair avec la méthode Muscl de van Leer [vL79]. Mais il est plus modeste dans son approche puisqu'une seule variable (le tourbillon ω_K dans la maille K) est ajoutée pour construire les variables primitives du schéma numérique. L'extrapolation (3.10)-(3.11) ne concerne que le champ de vitesse et aucun limiteur de pente ne doit *a priori* être introduit dans le schéma puisqu'aucune positivité particulière ne doit être respectée lors de l'étape d'extrapolation du champ de vitesse. On utilise également une résolution du problème de Riemann, éventuellement approchée puisque le flux d'interface, en plus des champs classiques, n'utilise que le moment du flux d'impulsion aux points de quadrature. Par contre, la "pente" du champ de vitesse (c'est à dire le tourbillon) est une variable primitive et l'équation discrète (3.2) détermine "toute seule" son évolution en temps, ce qui constitue un avantage substantiel si on le compare au savoir-faire "ad hoc" dans l'approche Muscl de van Leer.

Discrétisation en temps du système dynamique

Nous avons choisi lors des chapitres précédents de présenter l'approximation des lois de conservation qui régissent l'évolution d'un fluide compressible grâce à une approche qui découple l'espace et le temps. Ce faisant, nous avons pu analyser complètement l'approche décentrée du premier ordre fondée sur la résolution approchée du problème de Riemann ainsi que l'extension de van Leer au second ordre. Nous abordons maintenant l'équation différentielle définie par le schéma en espace pour en donner une discrétisation complète en temps. Nous rappelons les principes fondamentaux de la discrétisation d'un système différentiel, détaillons les méthodes de Runge-Kutta explicites et diverses méthodes implicites, étudions l'effet de la discrétisation en temps sur le maintien de la propriété de variation totale décroissante et présentons plusieurs schémas dans le cas où certains termes ont une dynamique temporelle dominante.

1) Rappel des notions de base.

- Nous devons approcher l'équation d'évolution d'un fluide compressible, c'est à dire une loi de conservation du type

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j} F^j(W) + \frac{\partial}{\partial x_j} P^j(W, \nabla W) \right] = \Omega(W)$$

Chapitre 3 du cours à l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur [CDV92], septembre 1992. Traduction en "TEX" juillet 2003. Edition février 2011 ; 18 pages.

sur un maillage associé à une méthode de volumes finis. Nous avons vu qu'alors si nous disposons de N volumes de contrôle, nous disposons de N inconnues vectorielles W_K c'est à dire de $5N$ inconnues scalaires pour la dynamique d'un gaz non réactif à trois dimensions d'espace et de $11N$ inconnues scalaires pour un modèle réactif à sept espèces par exemple. Dans la pratique, le nombre N varie de 10 000 à 1 000 000, ce qui nous induit un problème d'évolution de l'inconnue $w = \{W_K, K = 1, \dots, N\}$ dans \mathbb{R}^m avec m variant de 50 000 à 11 000 000 :

$$(1.2) \quad w = \{W_K, K = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}^m, \quad 5 \cdot 10^4 \leq m \leq 1.1 \cdot 10^7.$$

Nous retiendrons la très grande taille des problèmes à traiter, ce qui entraîne des difficultés pratiques très importantes et une lourdeur dans la mise en œuvre informatique, même sur des super-ordinateurs.

• L'équation d'évolution en temps de l'inconnue w a été précisée dans un chapitre précédent relatif à la discrétisation spatiale mutidimensionnelle :

$$(1.3) \quad \frac{dW_K}{dt} + \sum_{a \in \partial K} \frac{|a|}{|K|} [\Phi_a + \Pi_a] - \Omega(W_K) = 0.$$

Les flux eulériens Φ_a et visqueux Π_a sur les interfaces du maillage ne sont maintenant considérés que comme des fonctions données de l'ensemble des inconnues, c'est à dire de w . Nous pouvons dans un premier temps considérer que tous les termes jouent un rôle analogue et poser simplement :

$$(1.4) \quad f(w) = - \left\{ \sum_{a \in \partial K} \frac{|a|}{|K|} [\Phi_a + \Pi_a] + \Omega(W_K) \right\}, \quad K = 1, \dots, N$$

ce qui permet d'écrire l'équation d'évolution (1.3) sous la forme plus compacte :

$$(1.5) \quad \frac{dw}{dt} = f(w), \quad w \in \mathbb{R}^m, \quad f(w) \in \mathbb{R}^m.$$

Rappelons que la fonction $f(\bullet)$ est parfaitement connue et calculable, même si son expression algébrique reste très complexe ! Nous pouvons aussi séparer les termes fluides des termes chimiques :

$$(1.6) \quad f(W) = g(w) + \Omega(w)$$

ce qui permet de réécrire le système (1.5) sous la forme

$$(1.7) \quad \frac{dw}{dt} = g(w) + \Omega(w).$$

Pour construire des schémas aux différences pour la loi d'évolution (1.5), on se donne un état w_n au temps t_n , un pas de temps Δt permettant d'arriver au temps t_{n+1} :

$$(1.8) \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

et on cherche w_{n+1} au nouveau pas de temps. Si nous intégrons en temps la relation (1.5) entre les instants t_n et t_{n+1} , nous avons simplement :

$$(1.9) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w) dt$$

et le choix d'un schéma numérique est reporté sur la recherche d'une formule de quadrature pour le membre de droite de (1.9). Trois cas de figure classiques sont possibles : utiliser le point de départ t_n pour calculer l'intégrale, utiliser le point d'arrivée t_{n+1} ou bien utiliser une méthode plus précise comme la formule du trapèze. Dans le premier cas, nous obtenons un schéma dit d'Euler explicite ou d'Euler-Cauchy :

$$(1.10) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = f(w_n) \quad \text{Euler explicite}$$

dans le second cas, un schéma d'Euler implicite :

$$(1.11) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = f(w_{n+1}) \quad \text{Euler implicite,}$$

alors que le troisième choix conduit au schéma de Crank-Nicolson, implicite également :

$$(1.12) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(f(w_n) + f(w_{n+1}) \right) \quad \text{Crank-Nicolson.}$$

Nous notons la grande simplicité opératoire de la relation (1.10) alors que les schémas implicites (1.11) et (1.12) demandent la résolution d'un problème *a priori* non linéaire dont l'inconnue est w_{n+1} . Remarquons aussi que ces trois schémas sont à un pas de temps puisqu'on couple seulement les pas de temps t_n et t_{n+1} , que les deux schémas d'Euler (1.10) et (1.11) sont d'ordre un alors que le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre deux de précision. Nous ne définissons pas ici l'ordre de précision d'un schéma pour une équation différentielle ordinaire et renvoyons aux traités classiques de Gear [Ge71], Lambert [La74], Henrici [He74], Crouzeix-Mignot [CM84] ou à l'introduction proposée par L. Halpern [Ha85] ou P.A. Raviart [Ra87].

- Bien entendu, le choix d'un pas de temps est limité par des contraintes de stabilité. L'analyse classique est linéaire et scalaire, on prend $m = 1$ (!) dans la relation (1.5) et on suppose de plus

$$(1.13) \quad f(w) = -\lambda w, \quad w \in \mathbb{R}.$$

On sait qu'alors la variable w suit une décroissance exponentielle si le temps croît à l'infini :

$$(1.14) \quad w(t) = w(0) e^{-\lambda t}$$

qu'il s'agit de capturer avec le schéma numérique. Le coefficient d'amplification du schéma, défini par

$$(1.15) \quad w_{n+1} = K w_n ; \quad f \text{ donné par (1.13)}$$

doit être de module inférieur ou égal à 1. Or pour les trois schémas introduits plus haut, nous avons :

$$(1.16) \quad K = 1 - \lambda \Delta t \quad \text{Euler explicite}$$

$$(1.17) \quad K = \frac{1}{1 + \lambda \Delta t} \quad \text{Euler implicite}$$

$$(1.18) \quad K = \frac{2 - \lambda \Delta t}{2 + \lambda \Delta t} \quad \text{Crank-Nicolson .}$$

La condition (nécessaire) de stabilité

$$(1.19) \quad |K| \leq 1$$

ne fournit pas de condition pour le schéma d'Euler implicite et le schéma de Crank-Nicolson qui sont dits pour cette raison inconditionnellement stables, alors que l'on obtient

$$(1.20) \quad \lambda \Delta t \leq 2, \quad \lambda > 0, \quad \text{Euler explicite}$$

pour le schéma d'Euler-Cauchy qui est donc soumis à une condition de stabilité. On lui préférera plutôt la condition plus restrictive

$$(1.21) \quad \lambda \Delta t \leq 1, \quad \lambda > 0, \quad \text{Euler explicite}$$

qui garantit la monotonie du schéma, i.e. $0 < K < 1$. **Le pas de temps est limité par l'ordre de grandeur de la constante de temps du phénomène de relaxation** étudié pour le schéma d'Euler explicite.

- Notons toutefois que si l'on cherche à approcher un phénomène explosif, pour lequel un bon modèle élémentaire est toujours donné par la relation (1.13), mais avec $\lambda < 0$ cette fois, on a toujours $K > 1$ pour le schéma explicite quel que soit le pas de temps, mais cela ne contredit plus le comportement (divergent) de $w(t)$ que l'on cherche à approcher et l'on peut alors considérer le schéma explicite comme "inconditionnellement stable". Pour le schéma d'Euler implicite au contraire, la simulation d'un comportement divergent $K > 1$ n'est possible que sous la condition

$$(1.22) \quad (-\lambda) \Delta t \geq 2, \quad \lambda < 0, \quad \text{Euler implicite}$$

c'est à dire un pas de temps plus grand que l'échelle en temps du processus envisagé.

- Particularisons maintenant un peu plus le modèle spatial étudié et imaginons que nous cherchions à approcher une advection avec la célérité $a > 0$:

$$(1.23) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad a > 0.$$

Nous avons, après discrétisation par un schéma décentré d'ordre un, à intégrer en temps le système différentiel suivant :

$$(1.24) \quad \frac{dw_j}{dt} + \frac{a}{\Delta x} (w_j - w_{j-1}) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et l'analyse de stabilité est simple pour l'ensemble infini d'indices j grâce à la transformation de Fourier. On pose :

$$(1.25) \quad w_j(t) = \tilde{w}(k) e^{ijk \Delta x}$$

et la composante de Fourier $\tilde{w}(k)$ suit l'équation d'évolution

$$(1.26) \quad \frac{d\tilde{w}(k)}{dt} + \frac{a}{\Delta x} (1 - e^{-ik \Delta x}) \tilde{w}(k) = 0.$$

Pour les trois schémas vus plus haut, le coefficient d'amplification est toujours donné par les relations (1.16) à (1.18), mais on a maintenant

$$(1.27) \quad \lambda = \frac{a}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi}) , \quad \xi \in \mathbb{R}$$

et la condition de stabilité (1.19) doit être réalisée quel que soit le nombre d'onde $\xi = k\Delta x$. On introduit alors le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$(1.28) \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

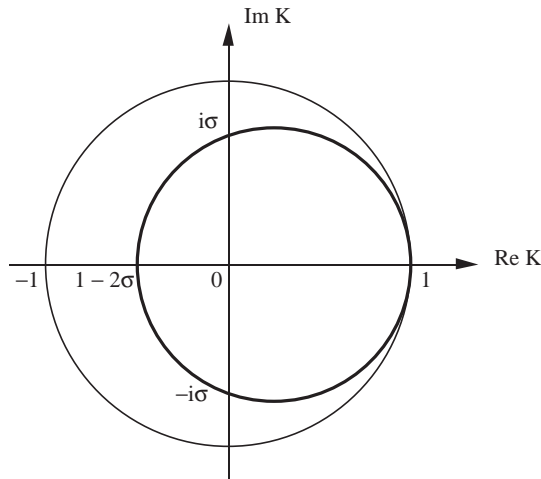


Figure 1 Analyse de stabilité du schéma Euler explicite pour l'équation d'advection avec un schéma en espace décentré du premier ordre.

- Pour le schéma explicite du premier ordre, on a :

$$(1.29) \quad K = (1 - \sigma) + \sigma e^{-i\xi} \quad \text{Euler explicite}$$

et après représentation graphique dans le plan complexe du lieu du coefficient d'amplification K quand ξ varie (figure 1), la condition de stabilité $1 - 2\sigma \geq -1$ prend la forme classique

$$(1.30) \quad \sigma \leq 1, \quad \text{condition de stabilité d'Euler-Cauchy pour l'advection.}$$

Cette condition déjà rencontrée dans les chapitres précédents exprime qu'**une onde physique** (c'est à dire une information propagée par l'équation d'advection (1.23)) **ne peut pas se déplacer de plus d'une maille par pas de temps.**

- Si on utilise le schéma d'Euler rétrograde (1.11), la condition de stabilité (1.19) garantit que quel que soit le pas de temps Δt , le schéma reste stable. Notons qu'un système linéaire doit être résolu pour mettre en œuvre ce schéma numérique ; il s'écrit

$$(1.31) \quad (1 - \sigma) w_j^{n+1} - \sigma w_{j-1}^{n+1} = w_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et une perturbation localisée du second membre se transmet en un seul pas de temps à tous les autres points de grille. Le schéma implicite permet donc une vitesse infinie dans la propagation de l'information donc, de façon heuristique, on peut dire que la stabilité inconditionnelle est une conséquence du fait que **les ondes physiques** (de célérité a) **sont toujours moins rapides que les ondes numériques.** Pour le schéma de Crank-Nicolson (1.12), un calcul élémentaire montre que pour tout $\Delta t > 0$, la condition de stabilité (1.19) est effectivement réalisée. On se gardera toutefois de considérer la propriété de stabilité inconditionnelle comme conséquence directe du caractère implicite du schéma, puisque cette dernière assertion peut être mise en défaut.

- Nous terminons ce paragraphe par une introduction aux méthodes multipas. Pour approcher l'équation différentielle (1.5), on peut, au lieu de l'intégrer sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, prendre un intervalle plus grand du type $[t_{n-1}, t_{n+1}]$, par exemple. Un schéma numérique est alors associé à une formule de quadrature pour l'intégrale suivante :

$$(1.32) \quad \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(w(t)) dt .$$

Si on utilise le point t_{n+1} dans la formule de quadrature avec par exemple une formule d'intégration numérique de Simpson, on obtient le schéma implicite de Milne-Simpson :

$$(1.33) \quad \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{6} f(w_{n+1}) + \frac{2}{3} f(w_n) + \frac{1}{6} f(w_{n-1}) .$$

Mais les méthodes multipas les plus utilisées sont de type Adams-Bashford (explicit) ou Adams-Moulton (implicite). Nous avons par exemple :

$$(1.34) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \frac{3}{2} f(w_n) - \frac{1}{2} f(w_{n-1}) \quad \text{Adams-Bashford à 2 pas}$$

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \frac{5}{12} f(w_{n+1}) + \frac{8}{12} f(w_n) - \frac{1}{12} f(w_{n-1}) \\ \text{Adams-Moulton à 2 pas} \end{array} \right.$$

et la méthode d'Adams-Moulton à un pas coïncide exactement avec le schéma de Crank-Nicolson. Notons que le schéma d'Adams-Bashford à deux pas (1.34) est d'ordre 2 alors que le schéma d'Adams-Moulton à deux pas (1.35) est d'ordre 3.

- L'analyse de stabilité des méthodes multipas se fait à partir des mêmes idées que pour le schéma d'Euler : on cherche le comportement du schéma quand on le teste sur l'équation différentielle associée à la relation (1.13), mais l'étude est plus délicate et demande de regarder avec précision des polynômes en variable complexe (voir les traités classiques de Gear, Lambert, ...). Nous pouvons définir le domaine D de stabilité absolue comme l'ensemble des valeurs de $z \equiv \lambda \Delta t$ qui fournit une solution toujours bornée au schéma pour le problème modèle (1.13). Pour les schémas d'Euler explicite et d'Adams-Bashford à deux pas, on peut montrer que l'ensemble D contient toujours un intervalle maximum $[0, r]$ de stabilité absolue, avec

$$(1.36) \quad r = 2 \quad \text{Euler explicite}$$

$$(1.37) \quad r = 1 \quad \text{Adams-Bashford à 2 pas, schéma (1.34) .}$$

Le résultat (1.36) n'est qu'une réécriture de la relation (1.20). Pour les schémas implicites d'Euler et d'Adams-Moulton à deux pas, nous avons

$$(1.38) \quad r = \infty \quad \text{Euler implicite}$$

$$(1.39) \quad r = 6 \quad \text{Adams-Moulton à 2 pas, schéma (1.35) .}$$

- Il est utile de préciser théoriquement la notion de stabilité absolue par la notion plus forte de A -stabilité. Une méthode multipas est A -stable si son domaine D de stabilité absolue contient le demi plan $\text{Re } z \geq 0$ tout entier :

$$(1.40) \quad D \supset \{ z \in \mathbb{C}, \text{Re } z \geq 0 \} \quad \text{méthode } A\text{-stable .}$$

Une méthode multipas linéaire A -stable est toujours d'ordre inférieur ou égal à 2, ce qui constitue une sérieuse limitation. Notons que le schéma d'Euler rétrograde est A -stable, mais que les autres méthodes d'Adams que nous venons d'introduire ne le sont pas. Il en est de même pour la méthode de Milne-Simpson. Pour concilier à la fois la A -stabilité et l'ordre 2 de précision du schéma, nous pouvons utiliser le schéma à deux pas de différentiation rétrograde, défini par la relation suivante :

$$(1.41) \quad \frac{3w_{n+1} - 4w_n + w_{n-1}}{2\Delta t} = f(w_{n+1}) \quad \text{différentiation rétrograde}$$

qui revient à évaluer l'opérateur $\frac{d}{dt}$ par un schéma d'ordre deux décentré amont.

- Malgré leur simplicité de construction, les méthodes multipas ne sont pas encore populaires pour l'approximation en temps des problèmes de dynamique des gaz. Nous y voyons deux raisons : il est d'abord nécessaire de stocker un ou plusieurs états antérieurs ce qui est très coûteux en place mémoire dans l'ordinateur (voir la relation (1.2) !) et ensuite le pas de temps utilisé est toujours défini en relation avec le nombre de Courant (1.28). La taille des mailles reste en général fixée au cours d'un pas de temps mais pas la vitesse maximale des ondes ; il en résulte que à iso-nombre de Courant σ , le pas de temps est **variable**. Il faut donc ou bien majorer uniformément les vitesses d'ondes pour utiliser des pas de temps constants, ou bien utiliser la variante à pas variables de la méthode multipas, détaillée par exemple dans le livre de Crouzeix et Mignot [CM84].

2) Schémas de Runge et Kutta.

- Nous avons vu que les méthodes multipas ne sont pas universellement employées pour l'approximation de problèmes fluides, ce à l'avantage des méthodes à un pas explicites, qui sont essentiellement formées des méthodes de Runge et Kutta. Nous présentons les schémas explicites les plus classiques puis proposons une introduction aux schémas de Runge-Kutta implicites.
- La méthode d'Euler explicite (ou d'Euler-Cauchy)

$$(2.1) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = f(w_n)$$

est une méthode à un pas d'ordre 1 et par là appartient à la famille des méthodes de Runge-Kutta. Au lieu de donner une définition générale et précise de cette classe de schémas, nous commençons par les exemples de base. Nous avons vu que le problème d'une méthode à un pas est un calcul approché correct de l'intégrale

$$(2.2) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w) dt.$$

Une idée naturelle est d'utiliser une formule du point milieu :

$$(2.3) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(t)) dt \approx f\left(w\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)$$

et de calculer au mieux le "prédicteur" $w(t_n + \frac{\Delta t}{2})$ par exemple en utilisant ce que l'on connaît, c'est à dire le schéma d'Euler-Cauchy :

$$(2.4) \quad w_{n+1/2} = w_n + \frac{\Delta t}{2} f(w_n)$$

$$(2.5) \quad w_{n+1} = w_n + \Delta t f(w_{n+1/2}) .$$

Le schéma (2.4)-(2.5) est appelé schéma d'Euler modifié, il est d'ordre deux.

- On peut également partir du schéma de Crank-Nicolson

$$(2.6) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(f(w_n) + f(w_{n+1}) \right)$$

et remplacer ce schéma implicite par une version explicite obtenue en substituant au terme qui fait intervenir w_{n+1} au second membre de la relation (2.6) un terme analogue prédit par le schéma d'Euler explicite. Nous définissons de cette façon le schéma de Heun :

$$(2.7) \quad w_{n,1} = w_n + \Delta t f(w_n)$$

$$(2.8) \quad w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{2} \left(f(w_n) + f(w_{n,1}) \right)$$

qui est explicite et du second ordre de précision.

- L'approche se généralise à un ordre supérieur (paramétré par le nombre de pas q) en cherchant pour calculer l'intégrale (2.2) une formule de quadrature du type

$$(2.9) \quad \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \approx \sum_{j=1}^q b_j \varphi(\theta_j)$$

qu'on associe avec des formules de quadrature partielles faisant intervenir uniquement les points θ_j , c'est à dire :

$$(2.10) \quad \int_0^{\theta_i} \varphi(\theta) d\theta \approx \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \varphi(\theta_j) .$$

Ainsi, on dispose de relations classiques pour augmenter l'ordre des schémas de Runge-Kutta, en augmentant bien entendu le nombre de pas. Nous avons par exemple le schéma de Heun du troisième ordre :

$$(2.11) \quad w_{n,1/3} = w_n + \frac{\Delta t}{3} f(w_n)$$

$$(2.12) \quad w_{n,2/3} = w_n + \frac{2}{3} \Delta t f(w_{n,1/3})$$

$$(2.13) \quad w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{4} \left(f(w_{n,1/3}) + 3f(w_{n,2/3}) \right)$$

et le très populaire schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre :

$$(2.14) \quad w_{n,1/2} = w_n + \frac{\Delta t}{2} f(w_n)$$

$$(2.15) \quad \tilde{w}_{n,1/2} = w_n + \frac{\Delta t}{2} f(w_{n,1/2})$$

$$(2.16) \quad w_{n,1} = w_n + \Delta t f(\tilde{w}_{n,1/2})$$

$$(2.17) \quad w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{6} (f(w_n) + 2f(w_{n,1/2}) + 2f(\tilde{w}_{n,1/2}) + f(w_{n,1})) .$$

• Il est indispensable de déterminer le domaine D de stabilité de ces schémas, c'est à dire l'ensemble des points z du plan complexe pour lesquels l'équation différentielle

$$(2.18) \quad \frac{dw}{dt} + \lambda w = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

est "bien approché par le schéma", en posant

$$(2.19) \quad z = \lambda \Delta t .$$

Nous cherchons un coefficient d'amplification du schéma (relation (1.15)) qui soit de module inférieur à 1 pour assurer la stabilité. Nous pouvons préciser la valeur du coefficient r qui donne la limite du domaine D avec l'axe réel :

$$(2.20) \quad r = 2 \quad \text{Euler explicite} \quad q = 1$$

$$(2.21) \quad r = 2 \quad \text{Euler modifié ou Heun} \quad q = 2$$

$$(2.22) \quad r = 2.51 \quad \text{Heun d'ordre trois} \quad q = 3$$

$$(2.23) \quad r = 2.78 \quad \text{Runge-Kutta d'ordre quatre} \quad q = 4 .$$

On peut tracer le domaine D (Figure 2, voir aussi Raviart [Ra87]) et on n'oublie pas que de façon pratique la condition de stabilité du schéma numérique s'écrit sous la forme

$$(2.24) \quad \lambda \Delta t \in D .$$

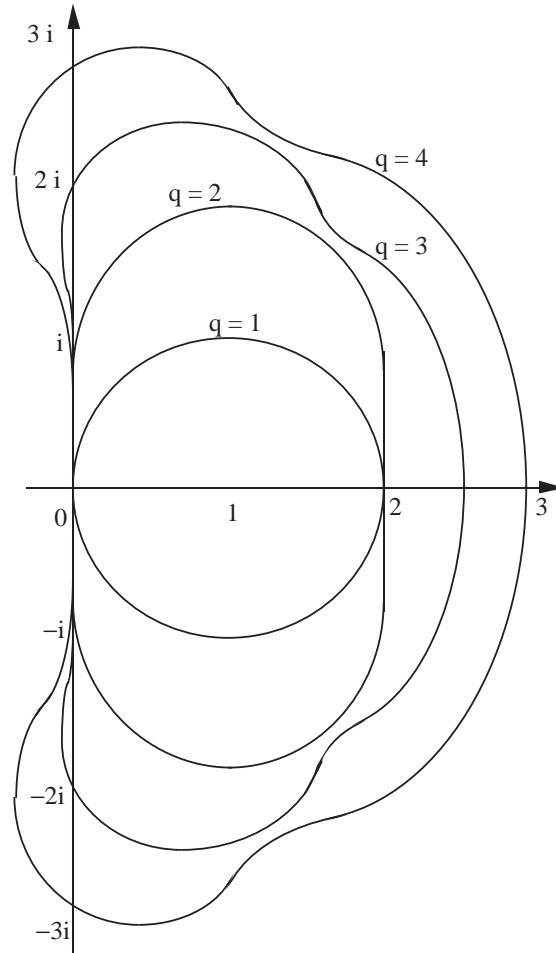


Figure 2 Domaines de stabilité absolue pour divers schémas de Runge-Kutta explicites.

- En pratique, Jameson *et al* [JST81] ont popularisé l'emploi des méthodes de Runge-Kutta dans le contexte des méthodes numériques centrées avec viscosité artificielle pour les équations d'Euler (dont nous ne parlons que très peu dans ce cours au bénéfice des méthodes décentrées). Notre expérience à l'Aérospatiale avec O.Michaux [DM93] est la très bonne qualité du schéma de Heun quand on emploie des expressions décentrées du flux avec la méthode Muscl. Mais on doit garder à l'esprit le coût d'un schéma de Runge-Kutta : celui-ci est proportionnel au nombre de pas puisque l'évaluation de la fonction $f(w)$ constitue l'essentiel du prix. Le schéma d'ordre 4 est donc deux fois plus coûteux que le schéma de Heun, lui même environ deux fois plus cher que les versions initialement proposées par van Leer [vL79], de type Euler modifié, où l'on remplace le prédicteur (2.4) jugé trop cher par une version économique, non conservative, mais trop peu robuste en présence de chocs forts !

- Mais pour augmenter de façon significative la taille du domaine de stabilité absolue D , on doit recourir à des schémas implicites. Nous en présentons un du premier ordre, paramétré par θ compris entre 0 et 1 :

$$(2.25) \quad w_\theta^n = \theta w_{n+1} + (1 - \theta) w_n$$

$$(2.26) \quad w_{n+1} = w_n + \Delta t f(w_\theta^n)$$

qui redonne le schéma d'Euler rétrograde pour $\theta = 1$ et d'Euler explicite pour $\theta = 0$. Le schéma (2.25)(2.26) a de bonnes propriétés de stabilité pour les équations différentielles non linéaires lorsque $\theta \geq 1/2$.

- Notons le renouveau des recherches sur les schémas de Runge-Kutta : Shu et Osher [SO88] ont introduit une famille de schémas de Runge-Kutta qui préserve la propriété de décroissance de la variation totale si le schéma d'Euler explicite correspondant possède déjà la propriété TVD (voir le paragraphe suivant). Plus récemment, van Leer, Tai et Powell [VTP89] ont introduit une famille de schémas de Runge-Kutta du premier ordre mais à plusieurs pas de temps de façon à minimiser uniformément en fréquence le coefficient d'amplification dans le cas d'une discrétisation de l'équation d'advection modèle (1.18).

3) Décroissance de la variation totale.

- Nous étudions maintenant comment la décroissance de la variation totale pour un schéma discrétisé en espace et continu en temps (schéma semi-discret) reste vraie quand on passe à une discrétisation en temps de type Euler explicite ou quand on utilise le schéma de Heun. On étudie une loi de conservation scalaire monodimensionnelle, on suppose connu le calcul des flux à l'interface $(j + 1/2)h$ et on forme la méthode des lignes :

$$(3.1) \quad \frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \left(f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \right) = 0.$$

Une condition suffisante pour que le schéma (3.1) soit à variation totale décroissante a été proposée par Sanders [Sa83] : il suffit qu'il se mette sous la forme suivante :

$$(3.2) \quad \frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \left(-\xi_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} + \eta_{j-1/2} \Delta_{j-1/2} \right) = 0$$

avec la notation classique :

$$(3.3) \quad \Delta_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et sous l'hypothèse

$$(3.4) \quad \xi_{j+1/2} \geq 0; \quad \eta_{j+1/2} \geq 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

En effet, on a

$$(3.5) \quad TV(u) \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_{j+1/2}|$$

et le calcul élémentaire suivant :

$$\frac{d}{dt} TV = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(\Delta_{j+1/2}) \frac{d}{dt} \Delta_{j+1/2} \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_{j+1/2} \frac{d}{dt} \Delta_{j+1/2}$$

$$\begin{aligned} h \frac{d}{dt} TV &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_{j+1/2} \left[\xi_{j+3/2} \Delta_{j+3/2} - (\eta_{j+1/2} + \xi_{j+1/2}) \Delta_{j+1/2} + \eta_{j-1/2} \Delta_{j-1/2} \right] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_{j+1/2} s_{j+3/2} \xi_{j+3/2} |\Delta_{j+3/2}| - \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\eta_{j+1/2} + \xi_{j+1/2}) |\Delta_{j+1/2}| \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_{j+1/2} s_{j-1/2} \eta_{j-1/2} |\Delta_{j-1/2}| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_{j-1/2} s_{j+1/2} \xi_{j+1/2} |\Delta_{j+1/2}| - \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\eta_{j+1/2} + \xi_{j+1/2}) |\Delta_{j+1/2}| \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_{j+3/2} s_{j+1/2} \eta_{j+1/2} |\Delta_{j+1/2}| \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} TV = -\frac{1}{h} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\xi_{j+1/2} (1 - s_{j-1/2} s_{j+1/2}) + \eta_{j+1/2} (1 - s_{j+3/2} s_{j+1/2}) \right] |\Delta_{j+1/2}|.$$

Le membre de droite de la relation (3.6) est bien négatif puisque $s_{j+1/2}$ vaut $+1$ ou -1 d'une part et que $\xi_{j+1/2}$ et $\eta_{j+1/2}$ sont positifs d'autre part.

• Quand on discrétise en temps l'équation différentielle (3.1), le plus simple est d'opter pour le schéma d'Euler explicite d'ordre un en temps :

$$(3.7) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$

qu'on peut aussi écrire

$$(3.8) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} - D_{j-1/2} \Delta_{j-1/2}$$

avec

$$(3.9) \quad C_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{h} \xi_{j+1/2}, \quad D_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{h} \eta_{j+1/2}.$$

Le schéma (3.8) est à variation totale décroissante, c'est à dire ici

$$(3.10) \quad TV^{n+1} \leq TV^n \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_{j+1/2}|$$

si les conditions suffisantes de Harten [Ha83] sont vérifiées :

$$(3.11) \quad C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j+1/2} \geq 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$(3.12) \quad C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Elles s'obtiennent par une transformation d'Abel analogue à celle effectuée pour aboutir à la relation (3.6). Les conditions (3.11) résultent clairement de la définition (3.9) et des conditions (3.4), alors que la relation (3.12) peut s'écrire sous la forme :

$$(3.13) \quad \Delta t \leq \frac{h}{\xi_{j+1/2} + \eta_{j+1/2}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

ce qui est en fait une condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy !

• La discrétisation par un schéma de Runge-Kutta d'ordre deux défini par les relations :

$$(3.14) \quad \tilde{u}_j = u_j - \frac{\Delta t}{h} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$

$$(3.15) \quad u_j^{n+1} = u_j - \frac{\Delta t}{2h} (\tilde{f}_{j+1/2}^n + f_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$

est encore à variation totale décroissante sous l'hypothèse (3.13) comme l'ont montré Shu et Osher [SO88]. On a d'abord, compte tenu de ce qui précède :

$$(3.16) \quad \widetilde{TV} \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j|$$

et on remarque que l'on a :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \left(C_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} + \tilde{C}_{j+1/2} \tilde{\Delta}_{j+1/2} - D_{j-1/2} \Delta_{j-1/2} - \tilde{D}_{j-1/2} \tilde{\Delta}_{j-1/2} \right)$$

où les opérateurs tildés sont les analogues des opérateurs non tildés, mais appliqués à la suite $\{\tilde{u}_j\}$ au lieu de la suite $\{u_j^n\}$. On en tire :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \tilde{u}_j + \frac{1}{2} \left(u_j + \tilde{C}_{j+1/2} \tilde{\Delta}_{j+1/2} - \tilde{D}_{j-1/2} \tilde{\Delta}_{j-1/2} \right)$$

$$(3.17) \quad u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \tilde{u}_j + \frac{1}{2} \tilde{\tilde{u}}_j.$$

On tire aisément des relations (3.10), (3.17) et de l'inégalité triangulaire :

$$(3.18) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_{j+1/2}^{n+1}| \leq \frac{1}{2} TV^n + \frac{1}{2} \widetilde{TV} \leq TV^n,$$

ce qui montre la propriété. La généralisation à des schémas de Runge-Kutta d'ordre supérieur est possible. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Shu et Osher.

4) Traitement des termes raides.

- Nous avons vu qu'un problème fluide prend la forme générale (1.7), c'est à dire

$$(4.1) \quad \frac{dw}{dt} = g(w) + \Omega(w)$$

où $g(\bullet)$ représente les termes convectifs et diffusifs qui couplent entre elles les différentes mailles de discrétisation et $\Omega(\bullet)$ décrit la dynamique associée aux réactions chimiques, qui ne couplent pas les diverses variables conservatives entre deux mailles même voisines et de plus ne concerne que certaines équations. En effet, la vitesse de retour à l'équilibre chimique ne dépend que de l'état local du fluide dans la maille considérée.

- Au second membre de la relation (4.1), nous sommes en présence d'une part d'une évolution purement hydrodynamique g dont le temps caractéristique est τ_t et d'autre part d'une cinétique chimique Ω dont le temps caractéristique est τ_c . Le rapport entre ces deux constantes de temps définit le nombre de Damköhler

$$(4.2) \quad D_a = \frac{\tau_t}{\tau_c}.$$

Si l'on a $D_a \ll 1$, l'évolution de la chimie est lente devant l'évolution hydrodynamique et la composition du gaz reste figée. Par contre si $D_a \gg 1$, la chimie évolue beaucoup plus vite et peut donc être considéré en première approximation comme à l'équilibre chimique, c'est à dire solution de l'équation

$$(4.3) \quad \Omega(w) = 0.$$

Nous pouvons réécrire l'équation d'évolution (4.1) en faisant apparaître ce rapport entre les échelles de temps sous forme adimensionnée

$$(4.4) \quad \frac{dw}{dt} = g(w) + D_a \Omega(w).$$

Si nous utilisons pour intégrer l'équation différentielle (4.4) un schéma explicite de Runge-Kutta par exemple, la condition de stabilité (2.24) s'écrit pour la partie purement hydrodynamique

$$(4.5) \quad \frac{\Delta t}{\tau_t} \leq 1.$$

On obtient une expression analogue pour le terme source chimique qui prend la forme

$$(4.6) \quad \frac{\Delta t}{\tau_t} \leq \frac{1}{D_a}.$$

Si le nombre de Damköhler est petit, la condition (4.6) n'est pas restrictive, ce qui correspond bien à l'intuition physique puisque dans ce cas la chimie ne joue

pas de rôle important pour l'écoulement. Par contre si D_a est grand, c'est à dire si la réactivité chimique est importante, la condition (4.6) est dimensionnante pour le contrôle du pas de temps : au lieu d'employer un pas de temps contraint selon une relation de type (4.5), on doit prendre en compte la condition (4.6), ce qui conduit à des pas de temps 10^3 à 10^4 fois plus faibles (pour D_a de l'ordre de 10^3 à 10^4 bien entendu). Le terme chimique introduit dans ce cas de la raideur dans le problème, rendant celui-ci plus cher à résoudre puisque le coût du calcul croît dans des proportions au moins analogues à la multiplication du nombre de pas de temps, ce qui est rarement admissible en pratique.

• Il peut arriver que la condition (4.5) soit déjà très restrictive, c'est le cas par exemple pour les écoulements fluides à basse vitesse (faible nombre de Mach). L'évolution du fluide lui-même est lente devant la célérité des ondes acoustiques, rapides, qui sont alors le facteur essentiel de limitation du pas de temps. Dans ce cas, l'emploi d'un schéma implicite en temps est naturelle. Le schéma d'Euler rétrograde est bien entendu le plus populaire car dans le cas **linéaire**, il permet de relaxer les conditions (4.5) et (4.6) pour les phénomènes de propagation et de retour à l'équilibre chimique. Mais comme nous l'avons déjà dit, il faut alors résoudre pour chaque pas de temps le problème non-linéaire d'inconnue w^{n+1} suivant :

$$(4.7) \quad \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} = g(w^{n+1}) + D_a \Omega(w^{n+1})$$

ce qui est en général prohibitif en pratique. La version linéarisée d'un tel schéma est populaire ; elle consiste à remplacer au second membre de la relation (4.7) les termes en w^{n+1} par leur développement de Taylor autour du champ w^n connu depuis le pas de temps précédent :

$$(4.8) \quad g(w^{n+1}) = g(w^n) + g'(w^n) \bullet (w^{n+1} - w^n)$$

$$(4.9) \quad \Omega(w^{n+1}) = \Omega(w^n) + \Omega'(w^n) \bullet (w^{n+1} - w^n)$$

et à injecter les expressions (4.8) et (4.9) dans la relation (4.7). On obtient de cette façon un schéma linéarisé dont l'inconnue est traditionnellement l'incrément

$$(4.10) \quad \delta w = w^{n+1} - w^n$$

et qu'on écrit sous la forme classique :

$$(4.11) \quad \left(\frac{\text{Id}}{\Delta t} - g'(w^n) - D_a \Omega'(w^n) \right) \bullet \delta w = g(w^n) + D_a \Omega(w^n).$$

Le membre de droite de la relation (4.11) est exactement l'incrément explicite associé au schéma d'Euler-Cauchy : on parle de la **phase physique** du schéma. Une fois cette évolution calculée, la relation (4.11) s'interprète comme un système linéaire dont la solution est l'inconnue δw recherchée : il s'agit de la **phase mathématique** du schéma.

- On note ici le coût relativement faible pour évaluer le terme matriciel $\Omega'(w^n)$ qui est composé de termes diagonaux par blocs (de variables conservatives) puisque la fonction Ω découple les cellules. Par contre le terme $g'(w^n)$ est en général impossible à évaluer en pratique et de plus, couple entre elles les cellules du maillage.
- Nous retiendrons que pour les problèmes raides, le choix d'une méthode A -stable permet de s'affranchir de la condition de limitation sur le pas de temps. Par contre le prix à payer est la résolution d'un problème *a priori* non linéaire puisque le schéma d'Euler rétrograde que nous venons de détailler et le schéma (1.41) de différentiation rétrograde (d'ordre 2, A -stable également) sont implicites. Nous renvoyons à Crouzeix-Mignot [CM84] et Raviart [Ra87] pour une étude approfondie de schémas bien adaptés aux système raides et en particulier pour la notion de $A(\theta)$ -stabilité.
- Avant de terminer ce chapitre, nous voulons ici présenter un résultat théorique obtenu par G. Mehlman [Me91]. Ayant à étudier un système fluide dont la partie hydrodynamique $g(\bullet)$ est considérée comme peu raide, c'est à dire pour laquelle on accepte un pas de temps satisfaisant une condition de Courant de type (4.5), peut-on trouver un schéma dont la phase implicite ne fait intervenir que les termes sources chimiques de sorte que
 - le schéma soit A -stable en l'absence de convection
 - le schéma soit d'ordre 2
 - le schéma soit TVD en l'absence de chimie
 - le schéma soit stable sous une condition de Courant pas plus restrictive que la condition (4.5) à imposer pour la convection seule ?
- La réponse (positive) proposée par G. Mehlman [Me91] consiste à introduire un schéma multipas à 3 pas de temps :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{8}{3} (\beta + \gamma) W_j^{n+3} - 4\beta W_j^{n+2} + \frac{4}{3} (\beta - 2\gamma) W_j^n \right) = \\ = 2(\beta + 3\gamma) g_j(W^{n+2}) + 2(\gamma - \beta) g_j(W^n) \\ + 4(1 + \gamma) \Omega_j(W^{n+3}) \\ + 2(\beta - 3) \Omega_j(W^{n+2}) + 2(1 - \beta + 2\gamma) \Omega_j(W^n) \end{array} \right.$$

paramétré par les réels β et γ qui doivent vérifier la condition

$$(4.13) \quad \gamma > \beta > 3.$$

Pour un problème modèle d'advection à la célérité a , la condition de stabilité s'écrit

$$(4.14) \quad a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2\beta}{\beta + 3\gamma}.$$

• Signalons pour terminer une alternative possible pour intégrer de façon économique et à l'aide de schémas en temps explicites la loi d'évolution (4.4). Il s'agit des méthodes de splitting (ou de décomposition d'opérateurs, voir l'ouvrage classique de Yanenko [Ya68]). Nous imaginons un cas où le nombre de Damköhler est grand (disons $D_a = 1000$ pour fixer les idées) et par suite le pas de temps de la chimie limite de trois ordres de grandeur le pas de temps du système couplé. Dans l'algorithme "splitté", un pas de temps se décompose en deux étapes successives au cours desquelles on ne prend en compte qu'un seul des opérateurs. On intègre d'abord l'hydrodynamique avec un schéma d'Euler explicite soumis à la condition de stabilité (4.5) :

$$(4.15) \quad \tilde{w} = w^n + \Delta t g(w^n)$$

puis on découpe le pas de temps Δt en $\Delta_1 = \frac{\Delta t}{D_a}$ pas de temps intermédiaires et on intègre le terme de chimie à l'aide d'un schéma explicite également mais à l'aide de 1000 pas de temps Δt_1 :

$$(4.16) \quad w_{n,0} = \tilde{w}$$

$$(4.17) \quad w_{n,j+1} = w_{n,j} + \Delta t_1 \Omega(w_{n,j}), \quad j = 1, \dots, 1000$$

$$(4.18) \quad w_{n+1} = w_{n,1000}.$$

Nous renvoyons à la thèse de Baraille [Ba91] pour une étude approfondie des méthodes de splitting relatives aux écoulements de gaz réactifs et à un schéma original **explicite** pour intégrer les termes de chimie **sans limitation sur le pas de temps** tout en utilisant uniquement des opérations élémentaires.

Interpolation de Lagrange et volumes finis

Nous décrivons une approche générale qui permet de calculer les termes de dissipation du second ordre des équations de la dynamique des gaz sur des maillages non structurés généraux dans le cas de deux et trois dimensions d'espace avec la méthode des volumes finis. Les opérateurs de dérivation en espace sont discrétisés en se fondant sur leur caractère à la fois local et linéaire. L'opérateur de dérivation discret est souple à construire et est choisi de façon à être exact pour des polynômes de bas degré. Le schéma obtenu reste toujours compact et ne fait intervenir que sept points au plus dans le cas bidimensionnel et onze points en tridimensionnel.

1) Introduction.

- La méthode des volumes finis est aujourd'hui l'une des plus simples pour mener à bien des calculs de mécanique des fluides compressibles pouvant comporter des ondes de choc fortes ou des ondes de détente. Elle est en général employée avec des maillages structurés en espace (des grilles de type $i - j - k$) ou structurés par blocs dans la variante multidomaine. La discrétisation des opérateurs de dérivation s'effectue à l'aide d'arguments classiques qui s'apparentent avant tout aux différences finies. Le livre de Peyret et Taylor [PT83] donne un point de vue très complet sur ces travaux maintenant classiques.

Rapport de recherche Aérospatiale Lanceurs [Du92], février 1992. Traduction en "TEX" juillet 2003. Edition février 2011 ; 48 pages.

- Lorsque le maillage subit de fortes distorsions, l’approche retenue par l’équipe de T. Gallouët pour l’approximation numérique de problèmes de diffusion (voir par exemple Faille-Gallouët-Herbin [FGH91]) avec le schéma “VF9” consiste à se ramener à un schéma aux différences finies en prenant en compte de façon précise la géométrie du maillage sans référence à une quelconque transformation de coordonnées.

- L’extension aux maillages non structurés (maillages en triangles dans le cas bidimensionnel par exemple) est délicate car d’une part on doit se passer de l’intuition qu’apporte la méthode des différences finies et d’autre part de nombreux auteurs utilisent la méthode des éléments finis (donc une approche variationnelle) pour écrire les équations aux dérivées partielles sur un maillage non structuré. L’approche introduite à l’Inria pour résoudre les équations d’Euler de la dynamique des gaz sur un maillage en triangles (voir Vijayasundaram [Vi86]) utilise à la fois la méthode des volumes finis et les degrés de liberté des éléments finis P_1 . Le champ fluide est discrétisé par ses valeurs aux sommets du maillage. Le prix à payer pour cette simplicité est double : les volumes de contrôle sont de géométrie relativement complexe (polyèdres de Dirichlet) et sont définis de façon peu satisfaisante à la paroi solide en particulier.

- C’est pourquoi nous avons adopté à l’Aérospatiale (Mercier [Me87]) avec le code de calcul Ns3gr une approche de type volumes finis très pure : un maillage du domaine d’étude étant donné, les volumes de contrôle pour les équations aux dérivées partielles sont constitués par les éléments finis géométriques que définit naturellement le maillage ; ce sont tout simplement des triangles en maillage triangulaire ! Les degrés de liberté sont alors naturellement les valeurs moyennes des champs dans chaque élément (noté le plus souvent K dans la suite de ce mémoire) à partir desquels on doit calculer au mieux les flux sur les interfaces du maillage (arêtes dans le cas bidimensionnel, faces dans le cas tridimensionnel) de façon à définir l’évolution en temps des degrés de liberté selon le système différentiel ordinaire

$$(1.1) \quad |K| \frac{\partial W_K}{\partial t} + \sum_{f \in \partial K} \Phi(f) = 0.$$

Le flux $\Phi(f)$ le long de l’interface f est calculé “au mieux” en fonction des degrés de liberté $\{W_L\}$ qui sont *a priori* portés par les éléments L du maillage. Pour les mailles frontières, une attention particulière doit être apportée au calcul du flux frontière pour la facette f qui touche le bord du domaine. Nous renvoyons à notre travail avec Olivier Michaux [DM92] par exemple pour une

description de l'algorithme qui permet d'évaluer les flux non visqueux à l'aide d'un schéma décentré précis au second ordre.

- La prise en compte d'effets visqueux modifie la situation précédente de deux façons essentiellement. D'une part, le flux $\Phi(f)$ est somme d'un flux eulérien $\Phi^E(f)$ et d'un flux visqueux $\Phi^V(f)$ qu'il convient de calculer :

$$(1.2) \quad \Phi(f) = \Phi^E(f) + \Phi^V(f).$$

D'autre part, la donnée de condition limite à la paroi solide (vitesse nulle ou température imposée typiquement) ou à la frontière fluide nous impose d'adjoindre aux degrés de liberté déjà envisagés plus haut (à savoir les moyennes W_K des variables conservatives dans les éléments K du domaine de calcul) des degrés de liberté supplémentaires naturellement portés par les arêtes du maillage sur la frontière du domaine de calcul (par exemple $T(f)$, champ de température à la paroi solide). Rappelons également que, compte tenu de l'expression algébrique des tensions visqueuses d'un fluide newtonien, tout le problème numérique consiste à calculer le champ de vitesse et de température le long des interfaces du maillage comme nous l'avions exposé dans une étude précédente [Du89c].

- Le problème modèle que nous étudions dans la suite de ce rapport est décrit ci-dessous. On se donne un maillage \mathcal{T} . Dans le cas tridimensionnel, c'est un complexe cellulaire selon la dénomination des topologues, c'est à dire une famille de quatre ensembles qui décrivent les divers objets qui composent le maillage : $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ pour les sommets, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ pour les arêtes, $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ pour les faces et $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ pour les éléments. Les éléments du maillage satisfont les contraintes d'intersection usuelles (voir par exemple Ciarlet [Ci78]) : l'intersection de deux éléments K et K' de $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ est soit égale à K ou K' lui-même, soit est une face f appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$, soit est une arête a et elle appartient à l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, soit est un élément S de l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$, soit est vide. Dans le cas bidimensionnel, on a de plus $\mathcal{F}_{\mathcal{T}} \equiv \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. On se donne ensuite des degrés de liberté sur chaque élément du maillage (valeur moyenne du champ, confondue ici, peut être à tort, avec la valeur ponctuelle au centre de gravité) d'un champ scalaire u :

$$(1.3) \quad \sigma(u) = u(G_K), \quad G \text{ centre de gravité de l'élément } K, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

et sur chaque face frontière :

$$(1.4) \quad \sigma(u) = u(f) \text{ ou } \sigma(u) = \frac{\partial u}{\partial n}(f), \quad f \text{ facette du maillage sur la frontière.}$$

Nous cherchons à calculer le gradient du champ u sur toutes les faces du maillage :

$$(1.5) \quad \nabla u(f) = ? , \quad f \text{ face du maillage,} \quad f \in \mathcal{F}_T .$$

• L'idée que nous exploitons dans la suite est fondée sur la remarque (triviale !) suivante : la dérivation est un opérateur **linéaire** et **local**. Pour combler le point d'interrogation au membre de droite de la relation (1.5), nous choisissons un voisinage $V(f)$ pour chacune des facettes du maillage

(1.6) $V(f) = \{ \text{degrés de liberté } \sigma \text{ au voisinage de } f \}$; f face du maillage et un jeu de coefficients vectoriels $\alpha(f, \sigma)$ associés à la face f et aux degrés de liberté σ appartenant à $V(f)$ de façon à représenter $\nabla u(f)$ sous la forme

$$(1.7) \quad \nabla u(f) = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma) \sigma(u) .$$

Le calcul des coefficients $\alpha(f, \sigma)$ est simple ; il suffit d'écrire que la relation (1.7) est **exacte** pour un espace vectoriel $LS(f)$ de fonctions donné *a priori*, ce qui conduit alors à réinterpréter (1.7) comme un système linéaire d'inconnues $\alpha(f, \sigma)$. Nous interprétons à l'Annexe A cette approche en termes d'interpolation de Lagrange.

• Nous avons proposé l'idée énoncée ci-dessus en 1988. Dans le cas d'un maillage cartésien, nous avons vérifié que l'on retrouve les schémas aux différences classiques (Mercier-Terrasse [MT89]) et nous avons implémenté la méthode dans le code Ns3gr de résolution des équations de Navier Stokes en se limitant dans un premier temps au cas d'un maillage localement structuré ([Du90c] et [DM93]). Par ailleurs, S. Pavsic [PDC91] a montré que les conditions aux limites classiques (1.4) peuvent s'étendre aux conditions aux limites de glissement qui modélisent une mince couche de Knudsen hors équilibre thermodynamique en atmosphère raréfiée :

$$(1.8) \quad \sigma(u) = \frac{\partial u}{\partial n} - \beta u(f) .$$

Enfin, nous avons montré (voir le chapitre suivant !) que l'implication en temps d'un tel schéma est très naturelle à partir de la relation (1.7). Ce schéma implicite a été mis en œuvre dans le code Ns3gr par Olivier Michaux (voir Bertagnolio et al [BDM91]) et une version incluant des opérateurs d'axisymétrie a été étudiée par Rémy Baraille [Ba91].

• Nous proposons dans la suite de ce mémoire un algorithme général qui permet, une fois donné un maillage comportant des triangles et des quadrangles dans le cas de deux dimensions d'espace ou alors des tétraèdres, des prismes, des pyramides et des hexaèdres dans le cas tridimensionnel, de déterminer le

voisinage $V(f)$ de chaque interface du maillage et préciser le choix de l'espace $LS(f)$, ce qui permet le calcul des coefficients $\alpha(f, \sigma)$ du schéma (1.7).

2) Le cas bidimensionnel.

- Nous traitons d'abord le cas d'un maillage en quadrangles structurés du domaine de calcul Ω , puis celui d'un maillage en triangles dans le cas générique avant d'aborder le cas général et de détailler le cas des conditions limites et quelques cas d'exception.

2.1) Quadrangles structurés.

- Il s'agit du cas qui a déjà été abordé dans des rapports antérieurs comme [Du89c]. Les notations sont introduites à la figure 1. Le maillage contient deux directions privilégiées, au moins localement. L'axe Ox est par convention dirigé le long de la normale n à la facette et l'axe Oy contient donc la facette f . On peut également placer l'origine O au milieu de f .

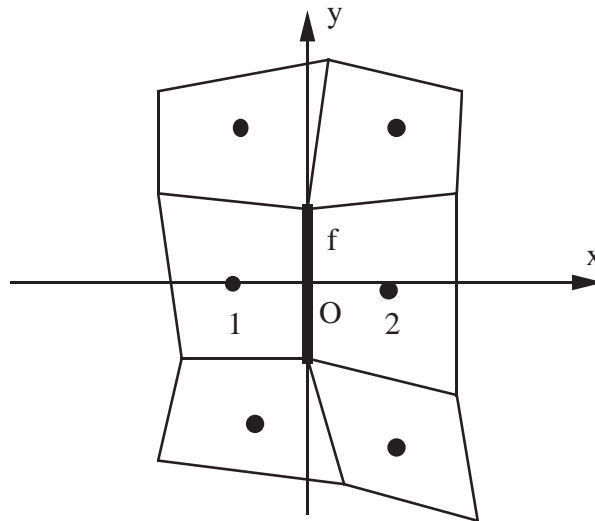


Figure 1 Quadrangles structurés.

- Le voisinage $V(f)$ est formé des six degrés de liberté présentés figure 1. Il peut être défini de nombreuses façons. En maillage structuré, l'interface a pour "numéro" naturel $(i+1/2, j)$ et l'on a donc :

$$(2.1) \quad V(i+1/2, j) = \{u_{kl}, \quad k = i \text{ ou } i+1, \quad l = j-1, j \text{ ou } j+1\}.$$

Les six voisins de la figure 1 sont aussi définis par

$$(2.2)(i) \quad V(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{éléments } K \text{ du maillage tels qu'il existe} \\ \text{un sommet } S \text{ du maillage appartenant} \\ \text{à l'intersection du bord de } K \text{ et du bord de } f. \end{array} \right\}$$

$$(2.2)(ii) \quad V(f) = \{ K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, \quad \exists S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}, \quad S \in \partial K \cap \partial f \}.$$

où \mathcal{T} est une notation usuelle pour désigner le maillage, $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble de ses éléments et $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble de ses sommets. La troisième définition utilise la notion de cobord d'une interface, que nous précisons immédiatement.

• **Cobord d'une interface**

Par définition, c'est l'ensemble $C(f)$ des éléments du maillage dont le bord contient la face f :

$$(2.3) \quad C(f) = \{ K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, \quad \partial K \supset f \}, \quad f \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}.$$

Le cobord d'une interface est toujours formé, tant pour un maillage structuré que pour un maillage non structuré, de deux éléments notés K_g et K_d (de numéros respectifs 1 et 2 sur la figure 1) situés respectivement à gauche et à droite de la face f une fois donnée une direction normale, sauf pour les faces du bord du domaine où il n'y a pas d'élément "à droite" (et l'on utilise toujours par convention la normale extérieure au domaine de calcul). Nous avons alors :

$$(2.4)(i) \quad V(f) = C(f) \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{éléments } L \text{ appartenant au cobord des faces } g \\ \text{du bord des éléments de } C(f) \text{ qui ont} \\ \text{exactement un sommet commun avec la face } f \end{array} \right\}$$

c'est à dire

$$(2.4)(ii) \quad V(f) = C(f) \cup \left\{ \begin{array}{l} C(g), \quad g \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, \quad g \neq f, \\ \exists K \in C(f), \quad g \in \partial K \\ \exists S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}, \quad S \in \partial f \cap \partial g \end{array} \right\}.$$

L'espace $LS(f)$ des fonctions de base privilégie la direction de l'interface. Nous avons choisi, après discussion approfondie avec Bertrand Mercier en 1988 :

$$(2.5) \quad LS(f) = P_1(x) \otimes P_2(y)$$

où $P_1(x)$ (respectivement $P_2(y)$) est l'espace des polynômes en x (respectivement en y) de degré inférieur ou égal à un (respectivement à deux). Aux six degrés de liberté $V(f)$ (*c.f.* (2.1), (2.2) ou (2.4)) correspondent les six fonctions de base de l'espace $LS(f)$ que l'on note $B(f)$, à savoir

$$(2.6) \quad B(f) = \{1, x, y, xy, y^2, xy^2\}$$

et le système (1.7) définit correctement en pratique les coefficients $\alpha(f, \sigma)$.

2.2) Triangles : cas générique.

• Nous étudions le cas d'un maillage par des triangles satisfaisant les conditions classiques d'un maillage par éléments finis. Une face intérieure du maillage

sépare deux triangles et son cobord est formé des triangles numérotés 1 et 2 sur la figure 2. Nous devons choisir le voisinage $V(f)$ de cette face ainsi que la base $B(f)$ de l'espace des fonctions tests $LS(f)$ qui permet le calcul des coefficients de couplage $\alpha(f, \sigma)$ grâce à la relation (1.7).

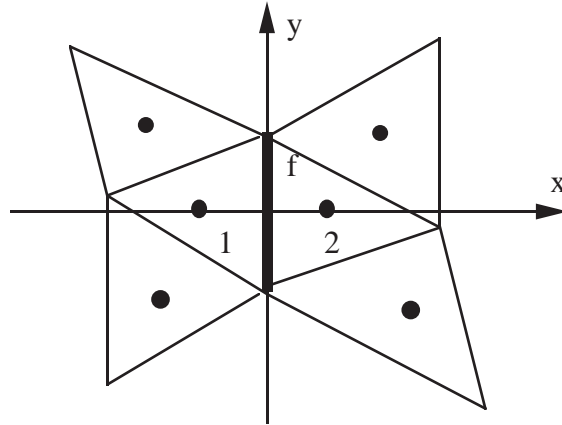


Figure 2 Triangles voisins de la face f .

- La généralisation au cas triangulaire de la relation (2.1) est évidemment impossible puisque les éléments K du maillage ne peuvent pas être indexés par un couple d'entiers (k, l) . La relation (2.2) par contre se généralise sans difficulté au cas d'un maillage triangulaire (figure 3). Le voisinage de f est alors formé des triangles dont l'un des sommets coïncide avec l'un des deux sommets du bord de la face f . Il apparaît alors un problème typique du cas d'un maillage ayant une structure "quelconque" de complexe cellulaire : le nombre d'éléments de $V(f)$ est **variable** (cinq éléments contiennent l'un des sommets de la face de la figure 3 alors que l'autre sommet appartient à six triangles du maillage). Ceci constitue un handicap important pour choisir de façon simple les coefficients $\alpha(f, \sigma)$, c'est à dire l'espace de fonctions tests $LS(f)$. De plus, la vectorisation du calcul de $\nabla u(f)$ grâce à la relation (1.7) est difficile si le nombre de termes $\text{Card}[V(f)]$ de cette somme n'est pas constant, ou n'est pas majoré uniformément par rapport à la variable f , ce qui n'est pas le cas avec la relation (2.2) puisqu'un nombre *a priori* quelconque d'éléments peuvent contenir un sommet donné du maillage.

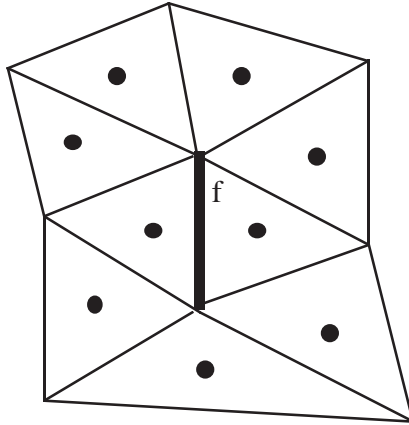


Figure 3 Voisinage de f défini par la relation (2.2).

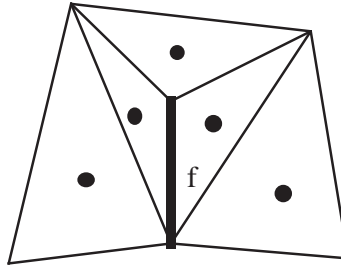


Figure 4 Triangles voisins d'une face f . Cas non générique.

- Nous choisissons donc de ne pas généraliser la définition de $V(f)$ à l'aide de la relation (2.2) mais nous nous tournons vers la relation (2.4). Nous déterminons d'abord les faces g appartenant au bord des éléments 1 et 2 du cobord de f (*c.f.* figure 2) et qui ont une intersection non vide avec f . Il y a toujours quatre faces de ce type pour un maillage en triangles ou en quadrangles, que le maillage soit structuré ou non. Dans le cas que nous qualifions ici de générique et qui correspond au cas de la figure 2, le cobord des quatre faces définies plus haut est formé d'une part du cobord $C(f)$ de f et d'autre part de quatre éléments distincts. Ce cas de figure n'est pas obligatoire comme le montre la figure 4 où $V(f)$ défini à la relation (2.4) est formé de cinq éléments voisins seulement. Toutefois, si le maillage ne contient que des triangles ne comportant que des angles aigus, le voisinage $V(f)$ d'une face intérieure comporte toujours six éléments.

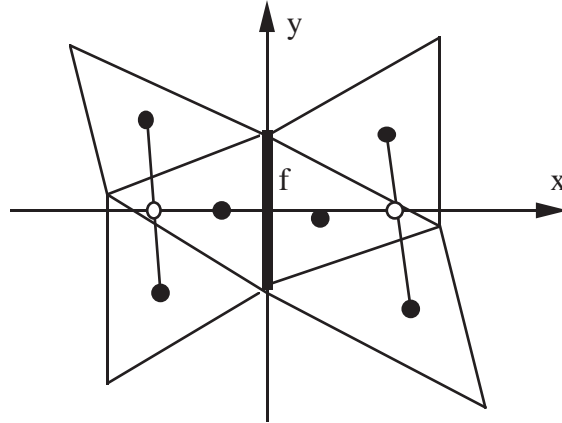


Figure 5 Interpolation dans la direction Ox à partir des six degrés de liberté constituant le voisinage $V(f)$.

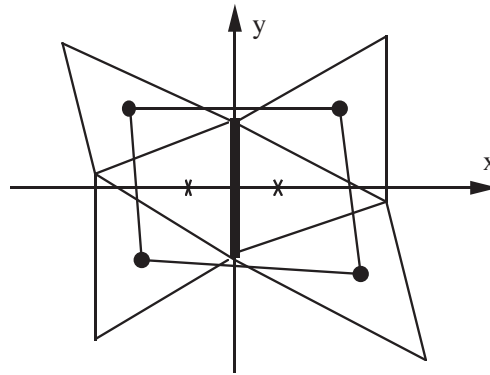


Figure 6 Interpolation du champ $(x, y) \mapsto xy$ à partir des six degrés de liberté constituant le voisinage $V(f)$.

- Nous cherchons maintenant à définir l'espace de fonctions $LS(f)$ qui permet d'interpoler la fonction u aux "points de grille" qui constituent $V(f)$. Nous utilisons les notations de la figure 2 : l'origine est au milieu de l'arête f et l'axe des x est dirigé selon la direction normale à la face, alors que l'axe des y est une direction tangentielle. Nous déterminons de façon semi-empirique très intuitive (ce dont nous sommes bien désolés !) un choix possible pour une base $B(f)$ de $LS(f)$. Bien entendu, selon une remarque classique de Rivas [Ri82], la base $B(f)$ doit contenir les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 :

$$(2.7) \quad \{1, x, y\} \subset B(f).$$

De plus, au vu de la figure 5, on peut assez naturellement trouver quatre points distincts sur l'axe Ox où le champ u étudié peut prendre naturellement une valeur ponctuelle, ce qui conduit à admettre dans l'espace $LS(f)$ des polynômes en x de degré inférieur ou égal à 3 :

$$(2.8) \quad \{1, x, x^2, x^3\} \subset B(f).$$

Enfin, les quatre valeurs nodales de la figure 6 constitués par les degrés de liberté n'appartenant pas au cobord de $C(f)$ nous incitent à permettre une interpolation sous-jacente possible de type Q_1 , c'est à dire :

$$(2.9) \quad \{1, x, y, xy\} \subset B(f).$$

Les relations (2.7) à (2.9) nous conduisent donc à un espace $LS(f)$ de dimension six dont une base est donnée par

$$(2.10) \quad B(f) = \{1, x, y, x^2, xy, x^3\}.$$

On notera la différence entre la base (2.10) et la proposition (2.6) que nous avons faite pour les quadrangles.

2.3) Cas général.

- Nous considérons un maillage bidimensionnel de type éléments finis, formé de quadrangles et de triangles comme à la figure 7. Nous considérons une arête intérieure f de ce maillage qui peut être voisine de deux triangles, deux quadrangles ou même un triangle et un quadrangle. Nous supposons que l'ensemble des degrés de liberté voisins $V(f)$, défini grâce à la relation (2.4), comporte exactement six éléments, ce qui exclut pour le moment des configurations telles que celle de la figure 4. Nous cherchons à déterminer la base $B(f)$ par un procédé le plus général possible de façon à satisfaire les deux cas particuliers déjà définis :

(2.11) $C(f)$ est composé de deux quadrangles : $B(f)$ donné par la relation (2.6),

(2.12) $C(f)$ est composé de deux triangles : $B(f)$ donné par la relation (2.10).

Nous formalisons le procédé de construction de $B(f)$ rappelé en (2.11) (2.12) de la façon suivante : on doit "marier" les deux éléments du cobord de part et d'autre de la face f , avec un ensemble de degrés de liberté spécifique et un espace de fonctions tests spécifique également. De façon précise, étant donné un couple (K, f) formé d'un élément du maillage et d'une face f contenue dans le bord de K (*i.e.* $K \in C(f)$), nous définissons un voisinage partiel $V(K, f)$ par la relation :

$$(2.13) \quad V(K, f) = \left\{ \begin{array}{l} C(g), \text{ } g \text{ face de } K, \text{ } g \neq f, \\ f \cap g \text{ est un sommet du maillage} \end{array} \right\}, f \in \partial K, K \in C(f).$$

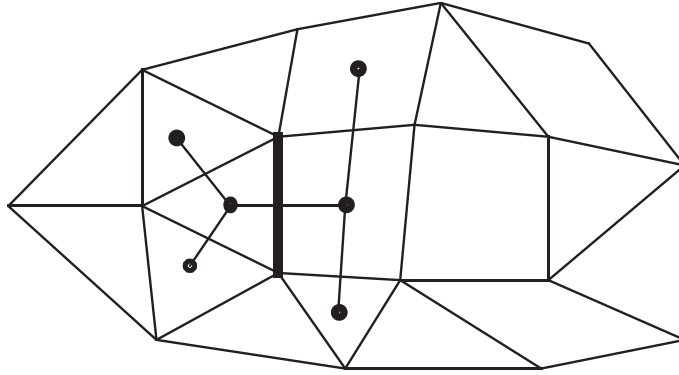


Figure 7 Maillage bidimensionnel général.

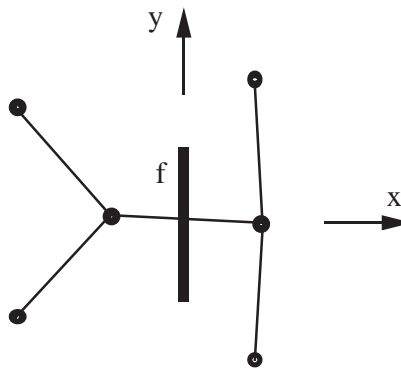


Figure 8 Face f séparant un triangle et un quadrangle ;
représentation symbolique de l'ensemble $V(f)$.

- Concrètement, pour l'interface en gras sur la figure 7 ou la figure 8, l'ensemble $V(K, f)$ est formé pour le triangle à gauche de la facette par les trois degrés de liberté à gauche de f et pour le quadrangle de droite par les trois éléments à droite de la face. Nous avons alors simplement

$$(2.14) \quad V(f) = V(K_g, f) \cup V(K_d, f), \quad \text{avec } C(f) = \{K_g, K_d\}, \quad f \in \mathcal{F}_T.$$

Nous introduisons également deux espaces fonctionnels d'interpolation $LS(K, f)$ associés au couple (élément, face) de façon à garantir l'unisolvance entre l'espace fonctionnel $LS(K, f)$ et l'ensemble de degrés de liberté $V(K, f)$. Avec les notations de la figure 8, nous proposons

$$(2.15) \quad LS(Q, f) = \{1, y, y^2\}, \quad Q \text{ quadrangle du maillage}$$

$$(2.16) \quad LS(T, f) = \{1, x, y\}, \quad T \text{ triangle du maillage.}$$

Nous ne pouvons pas définir $B(f)$ (c.f. (2.6) et (2.10)) comme étant une base de la somme algébrique de l'espace $LS(T, f)$ et de $LS(Q, f)$ (la dimension de la somme algébrique des sous-espaces est en général trop faible) et nous proposons une procédure de "mariage" de ces deux espaces de façon à garantir semi-empiriquement (!) l'unisolvance.

- **Mariage** de $LS(K_g, f)$ et de $LS(K_d, f)$.

Dans ce qui suit, K_g et K_d désignent les deux éléments qui constituent le cobord de la face f . Une base de l'espace $LS(f)$ est obtenue par mariage des bases B_g et B_d de $LS(K_g, f)$ et $LS(K_d, f)$ respectivement :

$$(2.17) \quad B(f) = B_g \mathcal{M} B_d.$$

Le produit $B_g \mathcal{M} B_d$ est obtenu par définition par regroupement successif des fonctions de B_d avec celles de B_g de la façon suivante :

$$\diamond \quad B_g^0 = B_g, \quad B_d^0 = B_d$$

\diamond Etape n^o i :

$$B_g^i = (\varphi_1, \dots, \varphi_k), \quad B_d^i = (\psi_1, \dots, \psi_m).$$

Si ψ_1 n'appartient pas à l'espace engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, alors

$$B_g^{i+1} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1), \quad B_d^{i+1} = (\psi_2, \dots, \psi_m).$$

Sinon

$$B_g^{i+1} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k), \quad B_d^{i+1} = (x\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m).$$

\diamond Passage à l'étape numéro $i+1$.

- On peut appliquer le programme précédent au cas du mariage de deux triangles, c'est à dire au calcul de $B(T_g, f) \mathcal{M} B(T_d, f)$. On a :

$$\begin{array}{ll} \text{étape 0 :} & B_g^0 = \{1, x, y\}; & B_d^0 = \{1, x, y\} \\ \text{étape 1 :} & B_g^1 = \{1, x, y\}; & B_d^1 = \{x, x, y\} \\ \text{étape 2 :} & B_g^2 = \{1, x, y\}; & B_d^2 = \{x^2, x, y\} \\ \text{étape 3 :} & B_g^3 = \{1, x, y, x^2\}; & B_d^3 = \{x, y\} \\ \text{étape 4 :} & B_g^4 = \{1, x, y, x^2\}; & B_d^4 = \{x^2, y\} \\ \text{étape 5 :} & B_g^5 = \{1, x, y, x^2\}; & B_d^5 = \{x^3, y\} \\ \text{étape 6 :} & B_g^6 = \{1, x, y, x^2, x^3\}; & B_d^6 = \{y\} \\ \text{étape 7 :} & B_g^7 = \{1, x, y, x^2, x^3\}; & B_d^7 = \{xy\} \\ \text{étape 8 :} & B_g^8 = \{1, x, y, x^2, x^3, xy\}. \end{array}$$

On retrouve alors la relation obtenue à la relation (2.10), c'est à dire

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(T_g, f) \mathcal{M} B(T_d, f) \text{ est donné par la relation (2.10),} \\ T_g \text{ et } T_d \text{ triangles.} \end{array} \right.$$

- Dans le cas de deux quadrangles, on effectue un calcul analogue :

$$\begin{array}{ll}
 \text{étape 0 : } & B_g^0 = \{1, y, y^2\}; & B_d^0 = \{1, y, y^2\} \\
 \text{étape 1 : } & B_g^1 = \{1, y, y^2\}; & B_d^1 = \{x, y, y^2\} \\
 \text{étape 2 : } & B_g^2 = \{1, y, y^2, x\}; & B_d^2 = \{y, y^2\} \\
 \text{étape 3 : } & B_g^3 = \{1, y, y^2, x\}; & B_d^3 = \{xy, y^2\} \\
 \text{étape 4 : } & B_g^4 = \{1, y, y^2, x, xy\}; & B_d^4 = \{y^2\} \\
 \text{étape 5 : } & B_g^5 = \{1, y, y^2, x, xy\}; & B_d^5 = \{xy^2\} \\
 \text{étape 6 : } & B_g^6 = \{1, y, y^2, x, xy, xy^2\}.
 \end{array}$$

On retrouve encore, par le “calcul” le résultat proposé plus haut au premier paragraphe.

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(Q_g, f) \mathcal{M} B(Q_d, f) \text{ donné à la relation (2.6),} \\ Q_g \text{ et } Q_d \text{ quadrangles.} \end{array} \right.$$

- Dans le cas de la figure 7, l’élément de gauche est un triangle et celui de droite un quadrangle. Nous effectuons donc le mariage des espaces (2.16) et (2.15) respectivement. On trouve :

$$\begin{array}{ll}
 \text{étape 0 : } & B_g^0 = \{1, x, y\}; & B_d^0 = \{1, y, y^2\} \\
 \text{étape 1 : } & B_g^1 = \{1, x, y\}; & B_d^1 = \{x, y, y^2\} \\
 \text{étape 2 : } & B_g^2 = \{1, x, y\}; & B_d^2 = \{x^2, y, y^2\} \\
 \text{étape 3 : } & B_g^3 = \{1, x, y, x^2\}; & B_d^3 = \{y, y^2\} \\
 \text{étape 4 : } & B_g^4 = \{1, x, y, x^2\}; & B_d^4 = \{xy, y^2\} \\
 \text{étape 5 : } & B_g^5 = \{1, x, y, x^2, xy\}; & B_d^5 = \{y^2\} \\
 \text{étape 6 : } & B_g^6 = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}.
 \end{array}$$

Nous en déduisons :

$$(2.20) \quad B(f) = P_2(x, y) \quad \text{si } C(f) = (\text{quadrangle, triangle}).$$

Nous remarquons que l’on a commutativité de l’opérateur \mathcal{M} dans ce cas :

$$(2.21) \quad B(Q, f) \mathcal{M} B(T, f) = B(T, f) \mathcal{M} B(Q, f)$$

ce qui pourrait nous inciter à étudier théoriquement le produit de mariage \mathcal{M} d’un point de vue purement algébrique dans l’anneau $\mathbb{Z}[X, Y]$ des polynômes à deux indéterminées sur l’anneau des entiers. La commutativité doit sûrement être une propriété générale, puisqu’on a le développement suivant selon les puissances croissantes de x :

$$(2.22) \quad LS_1 \mathcal{M} LS_2 = LS_1 + LS_2 + x(LS_1 \cap LS_2) + \dots$$

et par ailleurs, elle ne fait qu’exprimer l’invariance du calcul du gradient dans la symétrie par rapport au plan de l’interface.

2.4) Conditions aux limites.

- Quand une interface entre deux mailles appartient à la frontière du domaine d'étude (figure 9) ou touche cette frontière en un sommet du maillage (figure 2.10), il faut reprendre avec soin la définition (2.4) afin de prendre en compte à la fois des degrés de liberté portés par les éléments du maillage (*c.f.* (1.3)) ou des degrés de liberté associés aux faces de bord (*c.f.* (1.4) ou (1.8)). Nous devons modifier la définition du cobord pour une facette paroi, ce de la façon suivante.

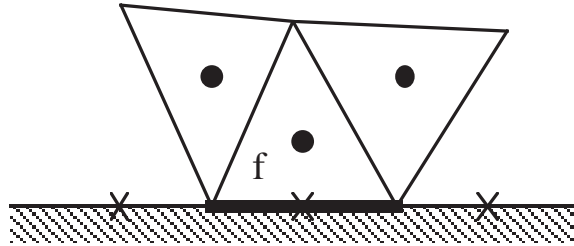


Figure 9 Face f au bord du domaine d'étude.

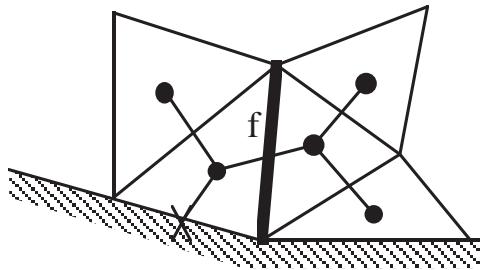


Figure 10 Face f touchant le bord du domaine d'étude.

- **Cobord d'une facette paroi**

Si la facette f du maillage est sur la frontière du domaine d'étude Ω , la relation (2.3) qui définit le cobord de f est remplacé par :

$$(2.23) \quad C(f) = \{K \text{ élément du maillage } \mathcal{T}, \partial K \supset f\} \cup \{ \text{facette } f \}.$$

Le cobord est ainsi formé de l'unique élément du maillage contenant f et de la facette f elle-même. Le voisinage $V(f)$ est encore défini comme la réunion (2.14) des voisinages partiels $V(\sigma, f)$, avec σ dans le cobord de f . La définition (2.13) de l'ensemble des degrés de liberté est inchangée si $\sigma = K$ est un élément du maillage et $C(g)$ est défini par l'une des relations (2.3) ou

(2.23) selon que la facette g est intérieure au domaine d'étude ou sur le bord. Nous obtenons ainsi un voisinage $V(f)$ parfaitement défini par la relation (2.14) lorsque la face f touche le bord, comme nous l'illustrons à la figure 2.10. Par contre, il convient de préciser ce que vaut le voisinage $V(f, f)$, c'est à dire ce que sont exactement les degrés de liberté voisins de la face f qui sont "du côté de f ". La frontière (discrète) $\partial\Omega$ du domaine d'étude est une courbe fermée ou une réunion de courbes fermées. Donc toute arête f sur le bord $\partial\Omega$ possède exactement deux arêtes voisines sur le bord du domaine qui la touchent en un sommet exactement. Nous proposons ici de définir ces deux arêtes comme "voisines" de la face f . Nous posons donc :

$$(2.24) \quad V(f, f) = \left\{ \begin{array}{l} g \text{ face de } \partial\Omega \cap \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, f \cap g \text{ contient} \\ \text{au moins un sommet du maillage} \end{array} \right\}, \quad f \in \partial\Omega \cap \mathcal{F}_{\mathcal{T}}.$$

L'ensemble $V(f, f)$ est donc toujours formé de trois facettes du maillage (en comptant f elle-même). Nous précisons maintenant le choix des espaces de polynômes permettant d'interpoler la fonction u à l'aide des degrés de liberté de l'ensemble $V(f, f)$ lorsque f est sur le bord de Ω . Comme précédemment, nous définissons $LS(f)$ par mariage des espaces $LS(K, f)$ et $LS(f, f)$ associés au cobord de f :

$$(2.25) \quad LS(f) = LS(K, f) \otimes LS(f, f) \quad \text{avec } C(f) = \{K, f\}$$

mais si l'espace de polynômes $LS(K, f)$ a déjà été défini par l'intermédiaire de sa base $B(K, f)$ aux relations (2.15) et (2.16), il nous faut préciser ce que vaut l'espace $LS(f, f)$. Nous posons simplement :

$$(2.26) \quad B(f, f) = \{1, y, y^2\}, \quad f \in \partial\Omega \cap \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$$

puisque, en général, la frontière est régulière donc les degrés de liberté de $V(f, f)$ différents de la face f elle-même sont situés approximativement dans la direction tangentielle à f comme le montre la figure 2.9. Dans le cas où le morceau de frontière considéré est situé dans un coin du domaine, nous pourrions remplacer la relation (2.26) par le choix fait en (2.16) mais la notion de coin nous semble très subjective sur un domaine discrétisé, qui ne contient en toute rigueur que des facettes planes séparées par des coins !

2.5) Cas d'exception.

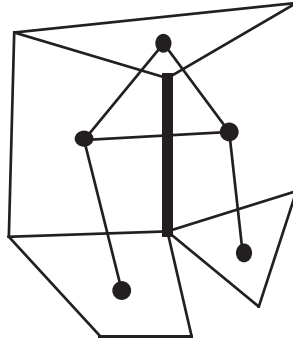


Figure 11 Voisinage d'une face comprenant seulement cinq degrés de liberté ; cas dégénéré numéro 1.

- Nous ne serions pas complet si nous ne traitions pas de façon précise les cas de figure qui peuvent mettre en défaut la construction proposée plus haut. En effet, lorsqu'on réunit deux voisinages comme proposé en (2.14), on n'obtient pas nécessairement six éléments. La figure 4 par exemple montre un cas où les deux triangles ayant en commun la face f n'engendrent que cinq éléments dans $V(f)$ et la figure 11 un cas analogue faisant intervenir deux quadrangles. Nous devons donc modifier la loi de mariage \mathcal{M} pour traiter au coup par coup ces cas de figure exceptionnels. Nous étudions ensuite le traitement de certains cas limites, en vue d'une plus grande cohérence avec les travaux antérieurs.

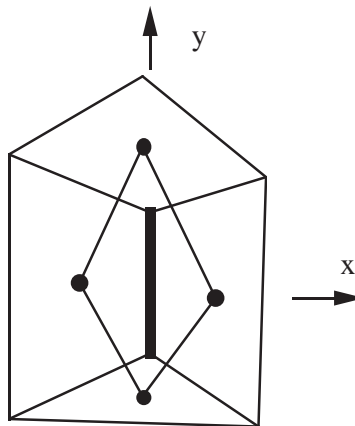


Figure 12 Voisinage d'une face comprenant seulement quatre degrés de liberté ; cas dégénéré numéro 2.

- Nous étudions d'abord le cas particulier décrit à la figure 4 ou à la figure 11. L'un des sommets constituant le bord de f n'appartient qu'à trois

éléments du maillage et deux des éléments voisins de $V(f)$ coïncident. Dans ce cas, nous décidons :

$$(2.27) \quad \begin{cases} \text{on enlève de la base } B(f) \text{ le polynôme de plus haut degré total} \\ \text{parmi les polynômes de plus haut degré partiel par rapport à } y. \end{cases}$$

Dans le cas du mariage de deux quadrangles (figure 11) on obtient ainsi dans ce cas exceptionnel numéro 1 :

$$(2.28) \quad B(f) = \{ 1, x, y, y^2, xy \}.$$

Dans le cas (figure 4) où deux triangles constituent le cobord de f , nous avons :

$$(2.29) \quad B(f) = \{ 1, x, y, x^2, x^3 \}$$

et pour un mélange quadrangle-triangle, il vient très simplement :

$$(2.30) \quad B(f) = \{ 1, x, y, x^2, xy \}.$$

- Un second cas de figure a lieu lorsque les deux sommets constituant le bord de f appartiennent tous deux à trois éléments du maillage. Pour des raisons géométriques, il est alors clair que le cobord de f est formé de deux quadrangles mais les triangles ne sont pas *a priori* exclus de la configuration globale (figure 12). Nous ne disposons que de quatre degrés de liberté pour $V(f)$ et nous décidons d'imposer simplement

$$(2.31) \quad B(f) = \{ 1, x, y, xy \}$$

ce qui revient à enlever au résultat (2.28) le polynôme de plus haut degré en y .

- Nous étudions maintenant le cas d'un quadrangle tel que la face f de son bord appartient au bord du domaine d'étude Ω . Dans ce cas, comme l'illustre la figure 13, nous avons à notre disposition six degrés de liberté et l'espace d'interpolation a une base donnée grâce à la relation (2.6). Nous remarquons que le polynôme x^2 ne figure pas dans cette base, alors qu'il figure bien si un triangle touche le bord du domaine puisque $B(f)$ est alors calculé grâce à la relation (2.20) qui résulte du mariage de $\{1, x, y\}$ avec $\{1, y, y^2\}$. Nous insistons sur l'importance de ce terme pour traiter correctement les gradients normaux à la paroi à l'Annexe B. Nous nous forçons donc, pour assurer la consistance du schéma dans le cas d'un maillage régulier, à introduire la fonction x^2 dans la base $B(f)$. On se contente d'adjoindre cette fonction à la définition (2.6), c'est à dire on choisit

$$(2.32) \quad B(f) = \{ 1, x, y, xy, y^2, xy^2, x^2 \}$$

qui comporte maintenant sept fonctions de base et on ajoute un degré de liberté à $V(K, f)$ donc nous prenons

$$(2.33) \quad V(K, f) = \{ C(g), \quad g \text{ face de } \partial K, \quad g \neq f \}.$$

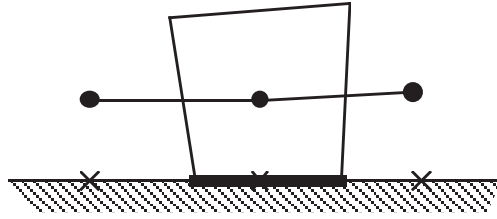


Figure 13 Quadrangle frontière. Cas général.

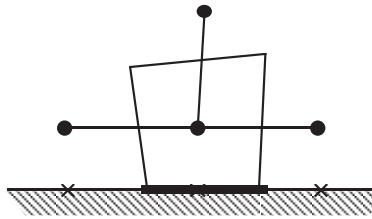


Figure 14 Quadrangle frontière. Cas modifié.

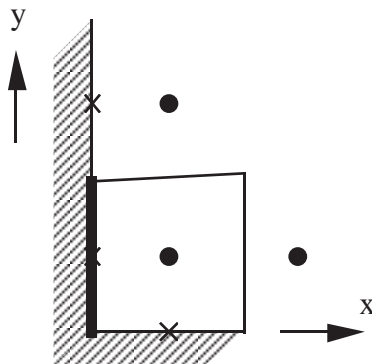


Figure 15 Facette frontière bordant un quadrangle Q au coin du domaine de calcul.

- Nous terminons l'étude des cas d'exception par celle des coins du maillage. Dans ce cas, certains degrés de liberté de la figure 14 coïncident et il faut modifier la relation (2.10) (triangles) ou (2.31) (quadrangles) en conséquence. Dans le cas où la face f contient un quadrangle Q dans son cobord et est située au coin du domaine de calcul (voir par exemple la figure 15). Il est naturel d'enlever à la base (2.31) le monôme xy^2 , ce qui revient à enlever le polynôme de plus haut degré par rapport à y :

$$(2.34) \quad B(f) = \{1, x, y, xy, y^2, x^2\}, \quad \begin{cases} f \text{ face de } \partial\Omega \text{ dans un coin,} \\ C(f) \text{ contient un quadrangle } Q. \end{cases}$$

Dans le cas où la face f dans le coin du domaine d'étude a un cobord qui contient un triangle T (voir la figure 16), on modifie la base (2.10) en enlevant le monôme de plus haut degré partiel par rapport à y . Il vient

$$(2.35) \quad B(f) = \{1, x, y, xy, x^2\}, \quad \begin{cases} f \text{ face de } \partial\Omega \text{ dans un coin,} \\ C(f) \text{ contient un triangle } T. \end{cases}$$

Ces deux cas particuliers permettent de préciser l'essentiel des cas de figure que l'on peut rencontrer en pratique, donc de conclure l'étude pour le cas bidimensionnel.

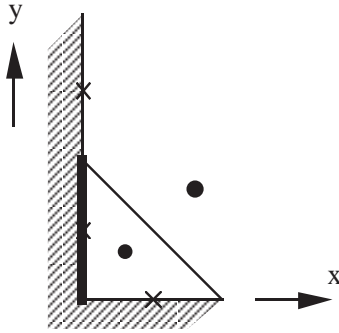


Figure 16 Facette frontière bordant un triangle T au coin du domaine de calcul.

3) Le cas tridimensionnel.

- Nous supposons le domaine d'étude Ω de \mathbb{R}^3 maillé en respectant la contrainte classique des éléments finis : les éléments (ou volumes de contrôle) recouvrent Ω et l'intersection de deux éléments K et L du maillage \mathcal{T} ($K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, L \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$) soit est vide, soit est un sommet de K et L , (c'est à dire appartient à $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$), soit est une arête de K et L , (donc appartient à l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ des arêtes du maillage), soit est une face de K et de L , (*i.e.* appartient à l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$), soit K est égal à L . Nous supposons que les éléments ont l'une des quatre formes suivantes : hexaèdre, pyramide, prisme ou tétraèdre. Nous cherchons, pour chaque face f du maillage, à déterminer son voisinage $V(f)$ formé des degrés de liberté voisins de la face ainsi que l'espace $LS(f)$ d'interpolation qui lui est associé, dont une base est systématiquement notée $B(f)$. Nous procédons par étapes successives.

- Nous précisons d'abord le choix d'un voisinage partiel $V(K, f)$ pour K élément du cobord $C(f)$ de la face f (ce qui signifie que f est l'une des faces du bord ∂K de l'élément K) puis nous proposons une définition de $V(f, f)$

lorsque f est sur la frontière du domaine Ω . Deux cas sont envisagés, selon que la face étudiée est quadrangulaire ou triangulaire. Nous “calculons” ensuite l’espace d’approximation $LS(K, f)$ (et $LS(f, f)$ si la face f est sur la frontière) qui permet d’effectuer une interpolation de Lagrange de façon à assurer au mieux l’unisolvance entre les degrés de liberté σ de $V(f)$ et l’espace de polynômes $LS(K, f)$ ou $LS(f, f)$. Enfin, nous “marions” les espaces $LS(\sigma, f)$ pour les deux degrés de liberté σ appartenant au cobord de f , à l’aide d’une extension de l’algorithme exposé dans la seconde partie de ce mémoire, en précisant le résultat obtenu pour la plupart des cas rencontrés en pratique. Nous étudions enfin quelques cas de figure qui se présentent en pratique à la frontière du domaine Ω et proposons des solutions appropriées.

3.1) Choix des degrés de liberté voisins.

• Soit $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ une face du maillage \mathcal{T} supposé fixé dans la suite. Nous rappelons d’abord la définition du cobord $C(f)$ de cette face

$$(3.1) \quad C(f) = \begin{cases} \{K \text{ élément de } \mathcal{T}, f \subset \partial K\} & \text{si } f \not\subset \partial\Omega \\ \{K \text{ élément de } \mathcal{T}, f \subset \partial K\} \cup \{f\} & \text{si } f \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est toujours constitué de deux objets, soit deux éléments du maillage si f n’est pas sur le bord du domaine et soit la face f elle même jointe à l’élément du maillage qui la contient dans son bord si f appartient au bord de Ω . L’ensemble des degrés de liberté voisins est défini comme suit.

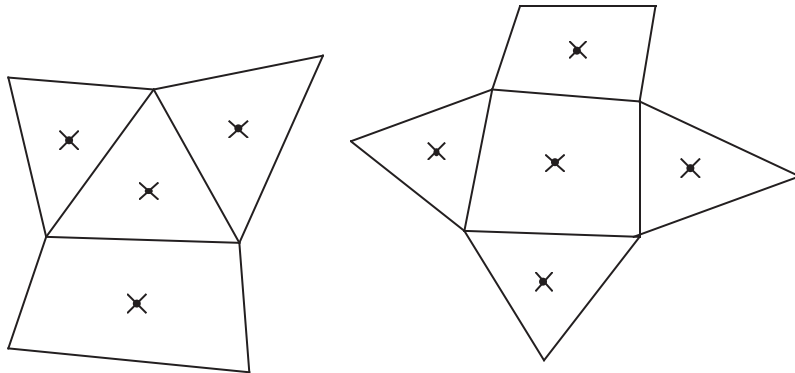


Figure 17 Voisinage $V(f, f)$ d’une facette f située sur le bord du domaine Ω ; il n’est constitué que par des facettes du bord.

• Si f est une face sur le bord du domaine, on pose

$$(3.2) \quad V(f, f) = \left\{ \begin{array}{l} g, \text{ face du maillage sur le bord } \partial\Omega, \\ g \cap f \text{ est une arête du maillage} \end{array} \right\}.$$

Comme $\partial\Omega$ est nécessairement une surface fermée (c'est un bord !), $V(f, f)$ contient exactement quatre facettes si f est un triangle et cinq si f est un quadrangle (c.f. figure 17).

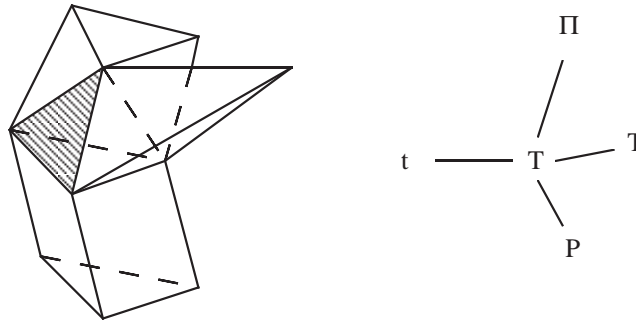


Figure 18 Voisinage $V(K, f)$ d'une face triangulaire sur le bord d'un tétraèdre.

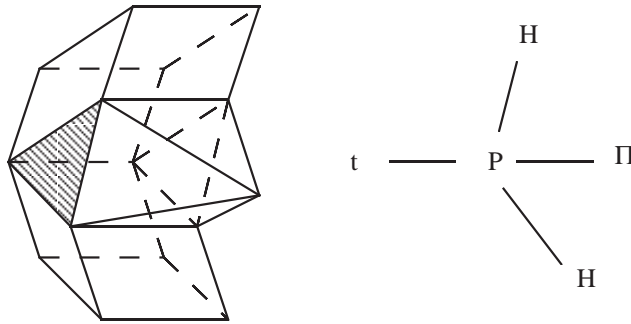


Figure 19 Face triangulaire sur le bord d'un prisme.

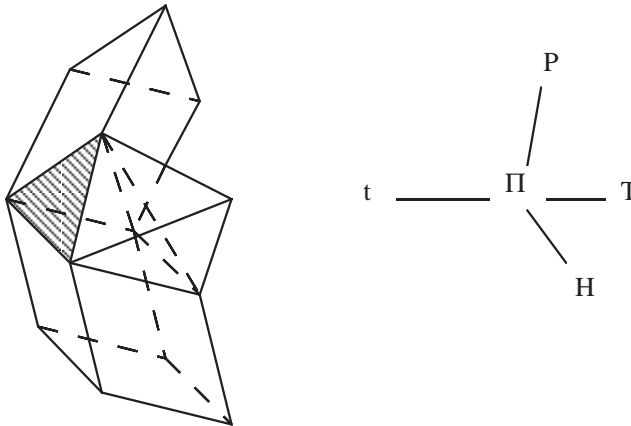


Figure 20 Face triangulaire sur le bord d'une pyramide.

- Si f est une face quelconque du domaine et K un élément de son cobord, on pose

$$(3.3) \quad V(K, f) = \left\{ \begin{array}{l} C(g), \quad g \text{ face du maillage incluse dans } \partial\Omega, \\ g \neq f, \quad g \cap f \text{ est une arête du maillage} \end{array} \right\}.$$

Si la face f contient m arêtes ($m = 3$ pour un triangle et $m = 4$ pour un quadrangle !), il est clair que m facettes g du maillage sont à prendre en compte dans la définition (3.3), donc $(m + 1)$ degrés de liberté distincts sont définis par la relation (3.3) (il ne faut pas oublier l'élément K lui-même !). Nous illustrons aux figures 18 à 23 ce voisinage pour différents cas de figure, en notant de façon abrégée t pour un triangle, q pour un quadrangle, T pour un tétraèdre, P pour un prisme, Π pour une pyramide et H pour un hexaèdre.

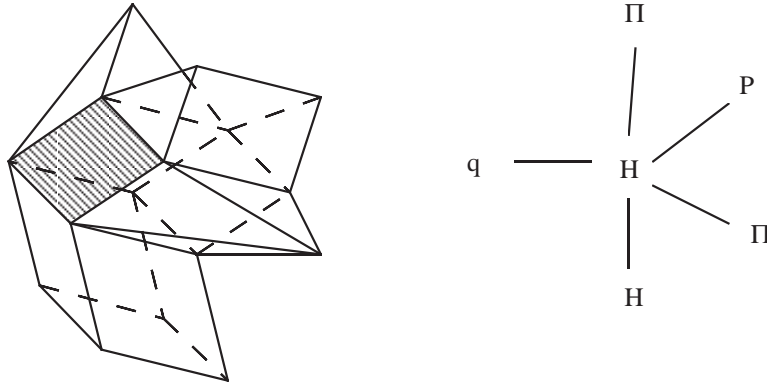


Figure 21 Face quadrangulaire sur le bord d'un hexaèdre.

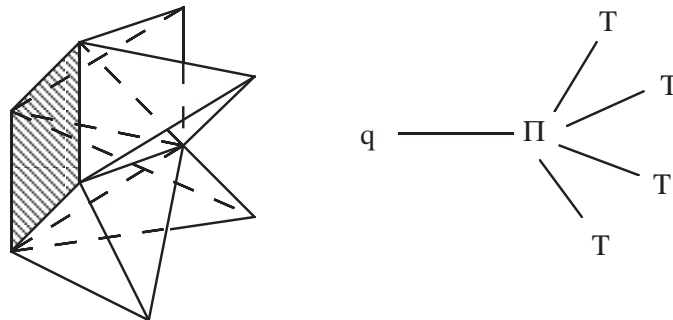


Figure 22 Face quadrangulaire sur le bord d'une pyramide.

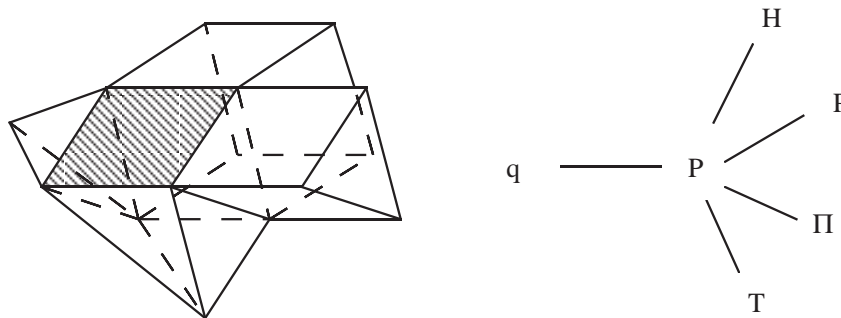


Figure 23 Face quadrangulaire sur le bord d'un prisme.

- Si la face f est une facette triangulaire du maillage à l'intérieur du domaine ou sur le bord, $V(\sigma, f)$ est toujours formé, pour σ dans le cobord de f , de quatre degrés de liberté. Si f est une face quadrangulaire, $V(\sigma, f)$ contient, pour σ appartenant à $C(f)$, exactement cinq degrés de liberté. La réunion $V(f)$ des ensembles $V(\sigma, f)$ pour σ parcourant le cobord de f est donc formée d'au plus huit degrés de liberté dans le cas d'une face triangulaire et dix pour une face quadrangulaire. Nous remarquons que dans le cas d'un maillage quadrangulaire structuré, $V(f)$ contient effectivement dix voisins distincts.

3.2) Espaces d'interpolation.

- Nous commençons par le cas où f est un triangle. Nous notons x la direction normale à la face, supposons l'origine O placée au centre de f et notons y, z des axes tangents à la face de sorte que le repère $Oxyz$ soit orthonormé direct. Lorsque f est au bord du domaine, le cas le plus courant est celui où $\partial\Omega$ est "proche" d'une section plane. La figure 17 est donc à prendre "quasiment" dans le plan de la feuille de papier, et les quatre degrés de liberté de $V(f, f)$ permettent d'interpoler "naturellement" les quatre fonctions de base suivantes :

$$(3.4) \quad B(t, t) = \{ 1, y, z, y^2 + z^2 \}, \quad t \text{ triangle sur la frontière.}$$

Nous supposons maintenant connu un élément K du maillage dans le cobord de f . Cet élément peut être un tétraèdre T , un prisme P , une pyramide Π , mais jamais un hexaèdre H . Pour chacun de ces trois cas, la géométrie des éléments considérés et les directions particulières associées aux cas de maillages cartésiens coupés en sous-éléments nous conduisent aux choix suivants, illustrés aux figures 24 à 26.

$$(3.5) \quad B(T, t) = \{ 1, x, y, z \}, \quad T \text{ tétraèdre}, \quad t \text{ triangle}$$

$$(3.6) \quad B(P, t) = \{ 1, y, z, y^2 + z^2 \}, \quad P \text{ prisme}, \quad t \text{ triangle}$$

$$(3.7) \quad B(\Pi, t) = \{ 1, x, y, z \}, \quad \Pi \text{ pyramide}, \quad t \text{ triangle.}$$

Nous constatons que le choix des axes y, z dans le plan de la facette ne joue pas dans les définitions (3.4) à (3.7) des espaces $LS(\sigma, t)$ qui sont invariants par une rotation d'axe Ox .

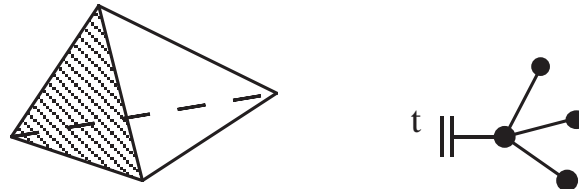


Figure 24 Face triangulaire appartenant au bord d'un tétraèdre.

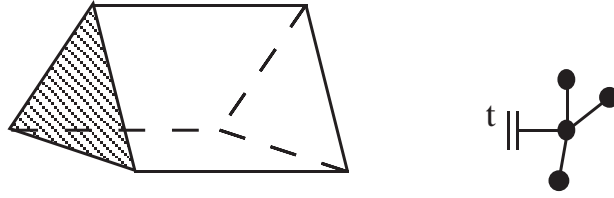


Figure 25 Face triangulaire appartenant au bord d'un prisme.

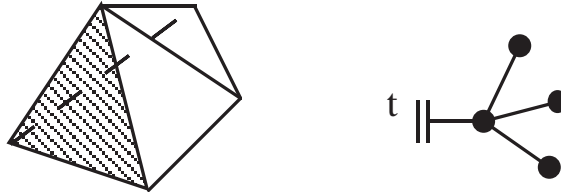


Figure 26 Face triangulaire appartenant au bord d'une pyramide.

• Lorsque la face f est un quadrangle q , avec un choix analogue au précédent en ce qui concerne l'axe Ox , nous fixons une direction y en joignant deux faces opposées de q et nous complétons par un axe Oz de façon que $Oxyz$ soit orthonormé direct. Le choix ci-dessus n'est pas intrinsèque, ce qui constitue à nos yeux un défaut. Lorsque q est au bord du domaine, nous supposons comme pour le cas triangulaire que $\partial\Omega$ est relativement plane, ce qui conduit à un choix naturel pour $B(q, q)$:

$$(3.8) \quad B(q, q) = \{1, y, z, y^2, z^2\}, \quad q \text{ quadrangle sur le bord de } \Omega.$$

Si K désigne un élément du cobord du quadrangle q (K peut être un prisme, une pyramide ou un hexaèdre mais jamais un tétraèdre !), une base $B(K, q)$ est alors donnée "naturellement" en suivant les figures 27 à 29. Nous obtenons :

$$(3.9) \quad B(P, q) = \{1, x, y, z, y^2\}, \quad P \text{ prisme}, \quad q \text{ quadrangle}$$

où y est la direction "quasi" normale aux deux triangles composant le prisme P (figure 3.11),

$$(3.10) \quad B(\Pi, q) = \{1, x, y, z, y^2 + z^2\}, \quad \Pi \text{ pyramide}, \quad q \text{ quadrangle}$$

$$(3.11) \quad B(H, q) = \{1, y, z, y^2, z^2\}, \quad H \text{ hexaèdre}, \quad q \text{ quadrangle.}$$

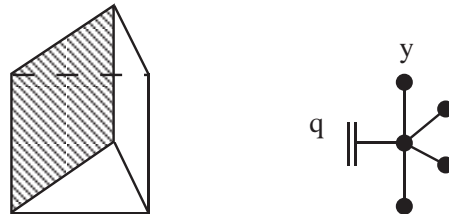


Figure 27 Face quadrangulaire appartenant au bord d'un prisme.

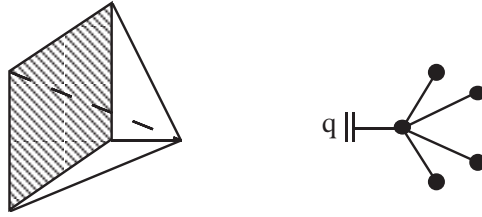


Figure 28 Face quadrangulaire appartenant au bord d'une pyramide.

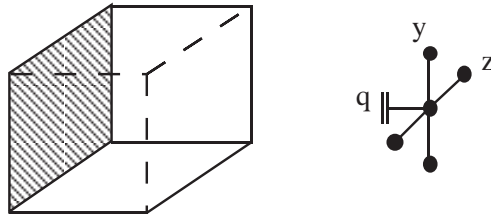


Figure 29 Face quadrangulaire appartenant au bord d'un hexaèdre.

3.3) Mariage des espaces d'interpolation.

• Dans ce paragraphe, nous supposons que le voisinage $V(f)$ obtenu grâce à la réunion ensembliste suivante

$$(3.12) \quad V(f) = V(\sigma_1, f) \cup V(\sigma_2, f), \quad C(f) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

comporte exactement $\text{Card} V(\sigma_1, f) + \text{Card} V(\sigma_2, f)$ degrés de liberté distincts. Dans ce cas, nous posons

$$(3.13) \quad B(f) = B(\sigma_1, f) \mathcal{M} B(\sigma_2, f).$$

Comme dans le cas bidimensionnel, le produit $B_g \mathcal{M} B_d$ s'obtient par regroupement successif des fonctions de B_d avec celles de B_g grâce à l'algorithme suivant

◊ $B_g^0 = B_g, \quad B_d^0 = B_d$

◊ Etape n° i :

$$B_g^i = (\varphi_1, \dots, \varphi_k), \quad B_d^i = (\psi_1, \dots, \psi_m).$$

Si ψ_1 n'appartient pas à l'espace engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, alors

$$B_g^{i+1} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1), \quad B_d^{i+1} = (\psi_2, \dots, \psi_m).$$

Sinon

$$B_g^{i+1} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k), \quad B_d^{i+1} = (x\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m).$$

◊ Passage à l'étape numéro $i+1$.

• Lorsqu'on applique l'algorithme ci-dessus au cas où f est un quadrangle q séparant deux hexaèdres, on trouve :

$$(3.14) \quad B(H_g, q) \mathcal{M} B(H_d, q) = \{1, x, y, z, y^2, z^2, xy, xz, xy^2, xz^2\}$$

ce qui permet, dans le cas où les quadrangles forment un maillage aux différences finies, de retrouver pour le calcul de $\nabla u(f)$ le schéma aux différences bien classiques. Dans les autres cas envisagés plus haut, on obtient :

$$(3.15) \quad B(H_g, q) \mathcal{M} B(P_d, q) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, xy^2\}$$

$$(3.16) \quad B(H_g, q) \mathcal{M} B(\Pi_d, q) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x, y, z, \\ x^2, y^2, z^2, xy, xz, x(y^2 + z^2) \end{array} \right\}.$$

Lorsque le quadrangle q appartient à un autre type d'élément qu'un hexaèdre, on trouve :

$$(3.17) \quad B(P_g, q) \mathcal{M} B(P_d, q) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, xy, xz, x^3, xy^2\}$$

$$(3.18) \quad B(P_g, q) \mathcal{M} B(\Pi_d, q) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, xy, xz, x^3, x(y^2+z^2)\}$$

$$(3.19) \quad B(\Pi_g, q) \mathcal{M} B(\Pi_d, q) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x, y, z, x^2, xy, \\ xz, y^2 + z^2, x^3, x(y^2 + z^2) \end{array} \right\}.$$

Lorsque f est un triangle t , on peut encore appliquer l'algorithme de mariage entre deux sous-espaces. On trouve ainsi :

$$(3.20) \quad B(T_g, t) \mathcal{M} B(T_d, t) = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, x^3\}$$

$$(3.21) \quad B(T_g, t) \mathcal{M} B(P_d, t) = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2+z^2\}$$

$$(3.22) \quad B(T_g, t) \mathcal{M} B(\Pi_d, t) = \left\{ \begin{array}{l} B(T_g, t) \mathcal{M} B(T_d, t) \\ = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, x^3\} \end{array} \right\}$$

$$(3.23) \quad B(P_g, t) \mathcal{M} B(P_d, t) = \{1, x, y, z, y^2+z^2, xy, xz, x(y^2+z^2)\}$$

$$(3.24) \quad B(P_g, t) \mathcal{M} B(\Pi_d, t) = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2+z^2\}$$

$$(3.25) \quad B(\Pi_g, t) \mathcal{M} B(\Pi_d, t) = \left\{ \begin{array}{l} B(T_g, t) \mathcal{M} B(\Pi_d, t) \\ = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, x^3\} \end{array} \right\}$$

ce qui achève de décrire tous les cas de figure possibles.

3.4) Conditions aux limites.

• Nous étudions dans cette partie l'adaptation des idées développées dans les précédents paragraphes et précisons les choix des voisinages $V(f)$ et des bases $B(f)$ lorsque f est une face au bord du domaine Ω . Nous devons enrichir le voisinage $V(f)$ lorsque la fonction x^2 (rappelons que l'axe Ox est toujours dirigé selon la normale à la facette f) n'est pas présente initialement, c'est à dire est absente de l'une des relations (3.13) à (3.25). De plus, nous devons réduire le voisinage $V(f)$ ainsi calculé lorsque la géométrie dégénère (arêtes vives, coins, etc...), c'est à dire lorsque la réunion (3.12) est non triviale, *i.e.*

comporte strictement moins de degrés de liberté que la somme des degrés de liberté pour les deux objets du cobord $C(f)$.

- Nous commençons (paragraphe 3.4.1) par décrire complètement le cas d'une face frontière "courante" puis, dans les cas où il y a dégénérescence du voisinage $V(f)$, c'est à dire pour les arêtes et les coins du maillage (paragraphe 3.4.2), nous étudions le cas des faces quadrangulaires touchant un hexaèdre, un prisme ou une pyramide (paragraphe 3.4.2.a) puis celui des faces triangulaires touchant un tétraèdre, un prisme ou une pyramide (paragraphe 3.4.2.b).

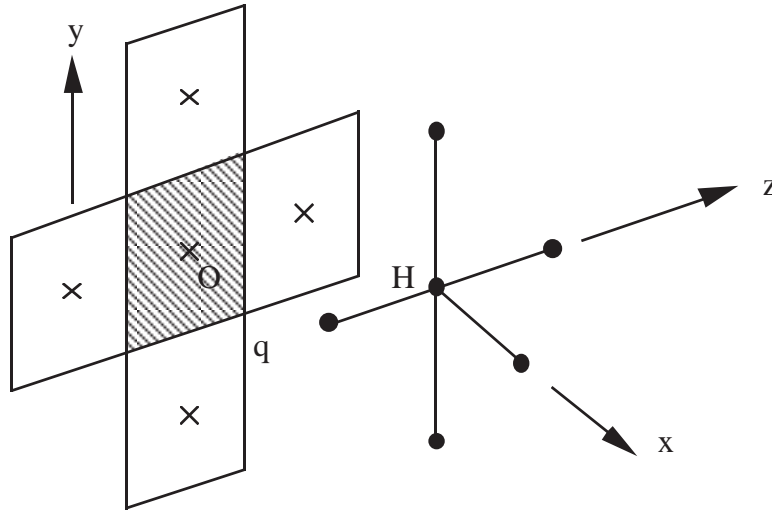


Figure 30 Onze degrés de liberté d'une face quadrangulaire q appartenant au bord du domaine Ω et touchant un hexaèdre H .

3.4.1 Facettes au bord du domaine : cas général

- Nous commençons ce paragraphe par le cas d'un quadrangle q au bord du domaine et contenant un hexaèdre H dans son cobord. Cette situation est *a priori* décrite à la figure 30. Dans ce cas, le mariage $B(q, q) \mathcal{M} B(H, q)$ est décrit par la relation (3.14), donc ne contient pas le polynome x^2 . Nous modifions donc le voisinage $V(H, q)$ initialement donné par la relation (3.3) et posons :

$$(3.26) \quad \begin{cases} V(H, q) = \{ C(g), & g \text{ face du maillage}, & g \subset \partial K, & g \neq f \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, & H \text{ hexaèdre appartenant à } C(q). \end{cases}$$

Le voisinage ainsi obtenu (figure 30) comporte six degrés de liberté au lieu de cinq, ce qui permet de remplacer la base (3.11) par la base suivante :

$$(3.27) \quad \begin{cases} B(H, q) = \{ 1, x, y, z, y^2, z^2 \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, & H \text{ hexaèdre appartenant à } C(q). \end{cases}$$

Le mariage de $B(q, q)$ (relation (3.8)) avec $B(H, q)$ (relation (3.27)) s'écrit simplement ; nous obtenons finalement une base $B(q)$ suivante :

$$(3.28) \quad \begin{cases} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, yz, y^2, z^2, xy^2, xz^2 \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, H \text{ hexaèdre appartenant à } C(q). \end{cases}$$

On constate que la base (3.28) comporte onze fonctions de base, qui correspondent respectivement aux cinq des degrés de liberté frontière $V(q, q)$ ajoutés aux six que nous venons de définir à la relation (3.26).

- Lorsque le quadrangle q du bord du domaine contient un prisme ou une pyramide, la base associée (*c.f.* les relations (3.5) et (3.7)) contient effectivement le monôme x et il n'y a pas lieu de changer la définition 3.3 du voisinage $V(P, q)$ ou $V(\Pi, q)$ dans ce cas, ni la base $B(q)$ calculée par l'une des relations (3.15) ou (3.16).

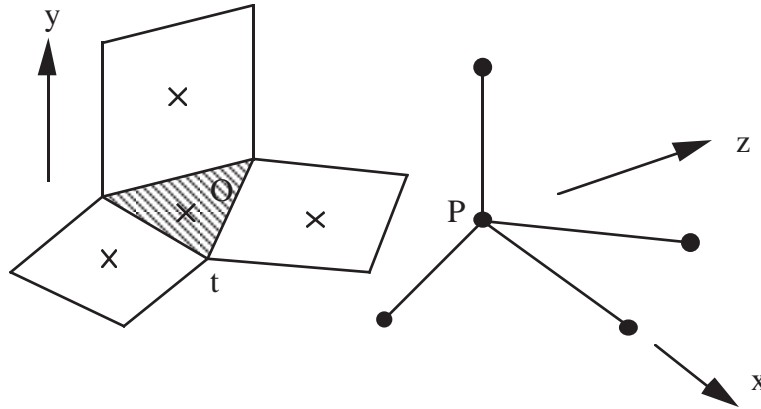


Figure 31 Neuf degrés de liberté d'une face triangulaire t appartenant au bord du domaine Ω et touchant un prisme P .

- Dans le cas où un triangle t est au bord du domaine, nous explicitons simplement la base $B(t)$ issue du mariage (3.13) de la famille (3.4) avec un tétraèdre T , une pyramide Π ou un prisme P . Nous avons :

$$(3.29) \quad B(t, t) \otimes B(T, t) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2+z^2 \}$$

$$(3.30) \quad B(t, t) \otimes B(\Pi, t) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2+z^2 \}$$

$$(3.31) \quad B(t, t) \otimes B(P, t) = \{ 1, x, y, z, xy, xz, y^2+z^2, x(y^2+z^2) \}.$$

Nous remarquons que dans le cas du tétraèdre ou de la pyramide il n'y a rien à faire puisque la fonction de base x^2 est présente dans le membre de droite des relations (3.29) et (3.30). Par contre, le cas d'un prisme touchant la frontière par une face triangulaire ne permet pas d'interpoler des polynômes du second degré

en x (voir par exemple la figure 19). Nous remplaçons dans ce cas la définition classique 3.3 par un analogue de la relation (3.26), c'est à dire :

$$(3.32) \quad \begin{cases} B(P, t) = \{ C(g), & g \text{ face du maillage}, & g \subset \partial K, & g \neq f \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, & P \text{ prisme appartenant à } C(t). \end{cases}$$

On passe donc d'un voisinage comportant quatre degrés de liberté à un voisinage (3.32) en comportant cinq. Nous remplaçons donc la base $B(P, t)$ de la relation (3.6) par

$$(3.33) \quad \begin{cases} B(P, t) = \{ 1, x, y, z, y^2+z^2 \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, & P \text{ prisme appartenant à } C(t). \end{cases}$$

Le mariage (3.31) comporte *in fine* neuf degrés de liberté au lieu de huit et la famille $V(t)$ correspondante est illustrée à la figure 31.

$$(3.34) \quad \begin{cases} B(t) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2+z^2, x(y^2+z^2) \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, & P \text{ prisme appartenant à } C(t). \end{cases}$$

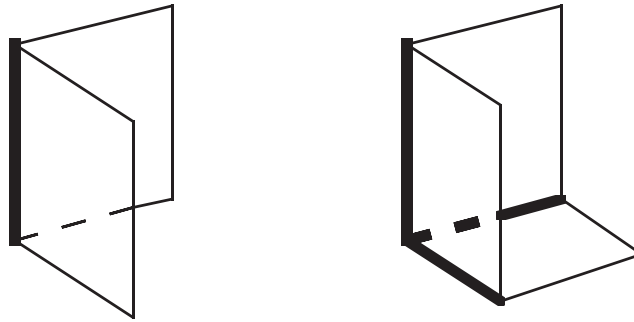


Figure 32 Arête vive (coin bidimensionnel) et coin tridimensionnel.

3.4.2 Facettes au bord du domaine : arêtes vives et coins

- Nous abordons maintenant une succession de cas particuliers qui se produisent à la frontière du domaine de calcul, et plus particulièrement le long d'arêtes vives (coins bidimensionnels) et de coins (tridimensionnels) du maillage, le cas d'un morceau de frontière "plane" ayant été traité plus haut. Une arête du maillage (qui par définition joint deux sommets) est une "arête vive" ou un "coin bidimensionnel" si elle n'appartient qu'à deux faces du maillage. Un coin tridimensionnel est un sommet du maillage qui n'appartient qu'à des arêtes vives (figure 32). Nous envisageons successivement le cas d'une face quadrangulaire puis celui d'une face triangulaire.

3.4.2.a Face quadrangulaire

- Nous étudions une facette q quadrangulaire dont une arête a est une arête vive du maillage. Nous séparons l'étude en trois sous-cas, selon que q appartient à un hexèdre, un prisme ou une pyramide.

• **Face quadrangulaire à la frontière d'un hexaèdre.**

Nous rappelons que l'axe des x est normal à la facette q , et décidons d'aligner l'axe des y avec la direction de l'arête vive a . L'axe Oz se déduit par orthogonalité. Nous avons donc dix degrés de liberté (figure 33) et disposons de onze fonctions de base décrites à la relation (3.28). En imaginant le maillage cartésien, nous disposons de six degrés de liberté dans le plan xOz (voir la figure 33) et de sept fonctions de base, à savoir $\{1, x, z, x^2, z^2, xz, xz^2\}$. Il est clair que la fonction xz^2 n'est pas naturellement représentée par interpolation de Lagrange et nous l'éliminons. Nous avons donc finalement :

$$(3.35) \quad \begin{cases} B(q) = \{1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, z^2, xy^2\} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, H \text{ hexaèdre appartenant à } C(t), \\ q \text{ contenant une arête vive } a \text{ parallèle à l'axe } y. \end{cases}$$

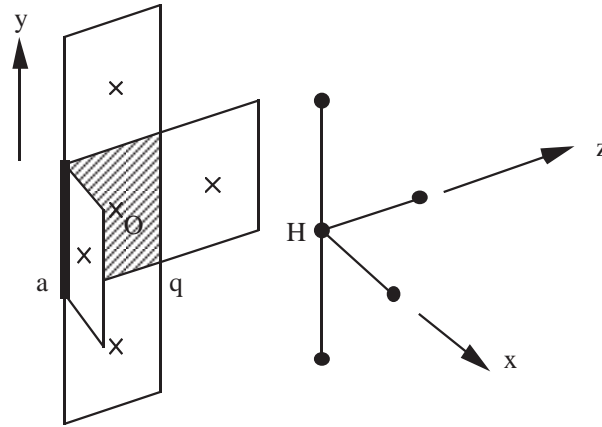


Figure 33 Facette frontière q appartenant à un hexaèdre H et contenant une arête vive a .

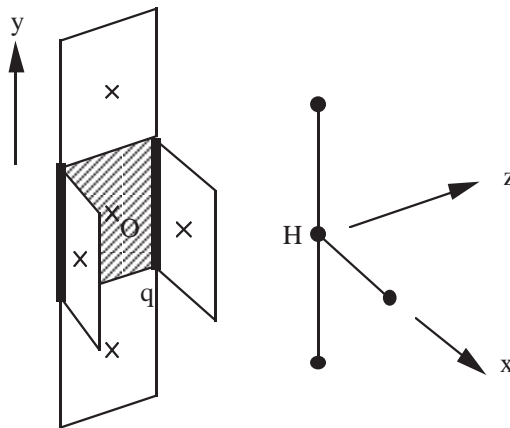


Figure 34 Facette frontière q appartenant à un hexaèdre H et contenant deux arêtes vives sans point d'intersection.

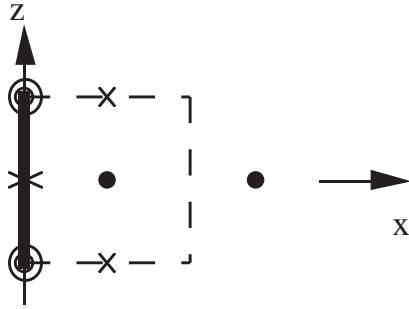


Figure 35 Projection dans le plan xOz de la figure 3.18.

• Nous poursuivons en supposant que la facette q contient deux arêtes vives a_1 et a_2 . Nous commençons par le cas où ces deux arêtes sont “quasi-parallèles”, c’est à dire n’ont pas de sommet commun (figure 34). Ce cas se produit par exemple si l’on utilise le code de calcul tridimensionnel dans une configuration bidimensionnelle avec une seule couche de mailles. Nous disposons de neuf degrés de liberté et de dix fonctions de base issues de la phase précédente (relation (3.35)). Par projection de la figure 34 dans le plan xOz , nous avons cinq degrés de liberté décrits à la figure 35 qui nous conduisent à ne retenir que les fonctions de base $\{1, x, x^2, z, z^2\}$. Nous éliminons donc la fonction xz de la base (3.35), ce qui conduit au choix suivant :

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{1, x, y, z, x^2, xy, y^2, z^2, xy^2\} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, H \text{ hexaèdre appartenant à } C(t), \\ q \text{ contenant deux arêtes vives sans point d'intersection.} \end{array} \right.$$

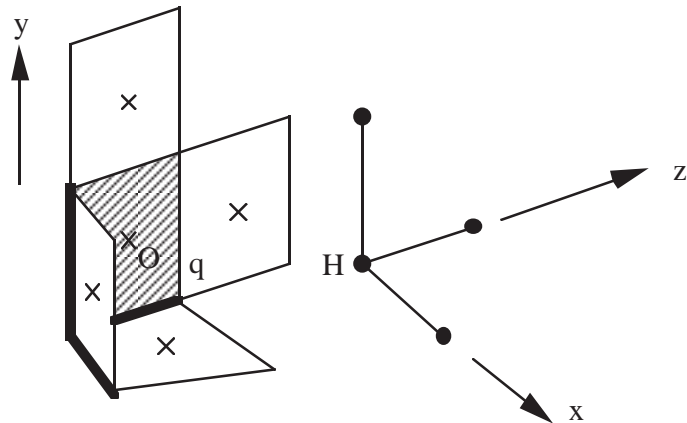


Figure 36 Coin tridimensionnel : facette frontière q appartenant à un hexaèdre H et contenant deux arêtes vives ayant un point d’intersection.

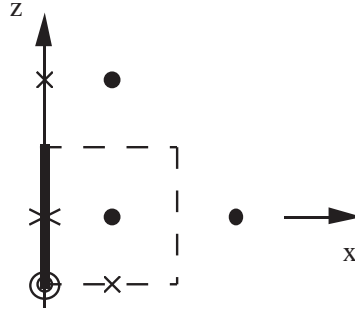


Figure 37 Projection dans le plan xOz de la figure 36.

- Le second cas du même type (neuf degrés de liberté disponibles seulement) est décrit à la figure 36. La facette q est dans un coin du domaine et partant de la relation (3.35), on n'a plus que deux séries de trois degrés de liberté dans la direction y . En effet, en projection dans le plan xOy , on ne dispose que de six degrés de liberté (*c.f.* figure 37), au lieu de sept dans la configuration précédente. Par contre, une interpolation du champ xz est clairement possible, comme le montre la figure 37. Nous choisissons donc comme base $B(q)$ la famille suivante :

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, z^2 \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, H \text{ hexaèdre appartenant à } C(q), \\ q \text{ contenant deux arêtes vives ayant un point d'intersection.} \end{array} \right.$$

- Nous envisageons maintenant le cas où trois arêtes vives appartiennent à la face quadrangulaire q . Géométriquement (voir la figure 38), il s'agit par exemple d'un coin bidimensionnel traité par un maillage tridimensionnel avec une seule couche d'éléments dans la troisième direction. Nous choisissons l'axe Oy dans la direction des deux arêtes vives parallèles pour cette configuration. Nous ne disposons que de huit degrés de liberté et la base $B(q)$ est clairement l'intersection des bases proposées aux relations (3.36) et (3.37), *i.e.*

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2, z^2 \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, H \text{ hexaèdre appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient trois arêtes vives, l'arête "non vive" est parallèle à } Oz. \end{array} \right.$$

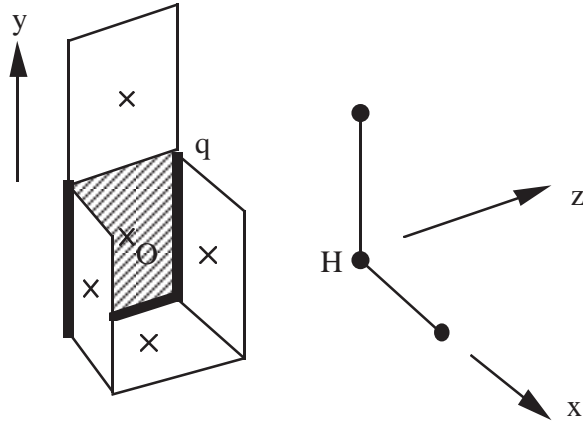


Figure 38 Double coin tridimensionnel : facette frontière q appartenant à un hexaèdre H et contenant trois arêtes vives.

- Le dernier cas, extrême, mais que nous traitons pour être complet, est celui d'une facette quadrangulaire q , contenant l'hexaèdre H dans son cobord, et contenant quatre (!) arêtes vives. Il s'agit d'un quadruple coin tridimensionnel, qui n'a de sens que si l'hexaèdre H modélise une tuyauterie pour laquelle des informations grossières sont utiles (figure 39). Nous disposons de sept degrés de liberté seulement, et la base $B(q)$ finale est très simple :

$$(3.39) \quad \begin{cases} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2, z^2 \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad H \text{ hexaèdre appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient quatre arêtes vives.} \end{cases}$$

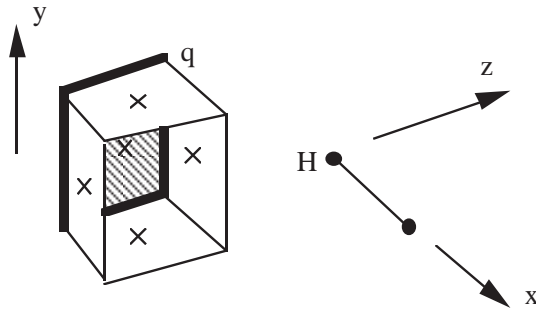


Figure 39 Quadruple coin tridimensionnel : facette frontière q appartenant à un hexaèdre H et contenant quatre arêtes vives.

- **Face quadrangulaire à la frontière d'un prisme.**

Nous supposons toujours que la facette frontière q est un quadrangle, mais que l'élément qui la contient est un prisme. Dans le cas où q contient une seule arête vive a , deux cas de figure se produisent, selon que celle-ci appartient

également à une autre face quadrangulaire ou à l'une des deux faces triangulaires. Nous envisageons d'abord le cas d'une arête vive a appartenant à deux faces quadrangulaires (*c.f.* figure 40).

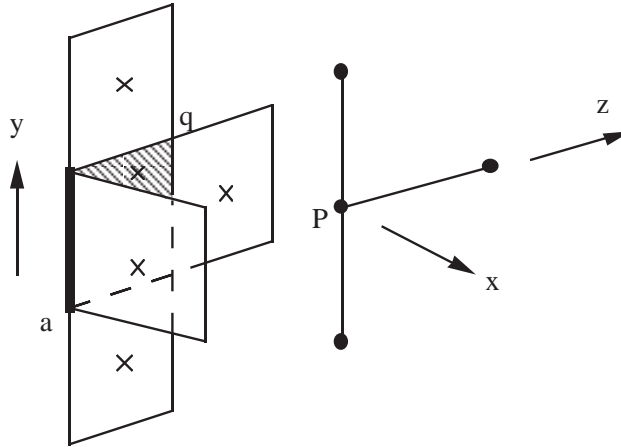


Figure 40 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant une arête vive appartenant à deux faces quadrangulaires.

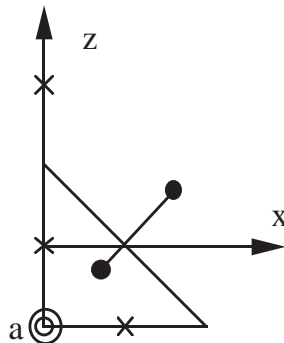


Figure 41 Projection des degrés de liberté de la figure précédente dans le plan xOz .

- Nous disposons de neuf degrés de liberté au lieu de dix dans le cas courant décrit à la relation (3.15). Par projection dans le plan xOz (figure 41), il apparait clairement que nous ne disposons plus que de cinq degrés de liberté alors que six fonctions de base de (3.15) sont de degré zéro par rapport à y , à savoir $\{1, x, z, z^2, xz, x^2\}$. Il est nécessaire d'éliminer la fonction z^2 si l'on veut conserver x^2 dans la direction normale à la facette q . Nous proposons donc la base suivante pour ce cas particulier

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, xy, xy^2, xz\} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad H \text{ prisme appartenant à } C(q), \\ q \text{ contenant une arête vive qui appartient} \\ \quad \quad \quad \text{à deux quadrangles de la frontière.} \end{array} \right.$$

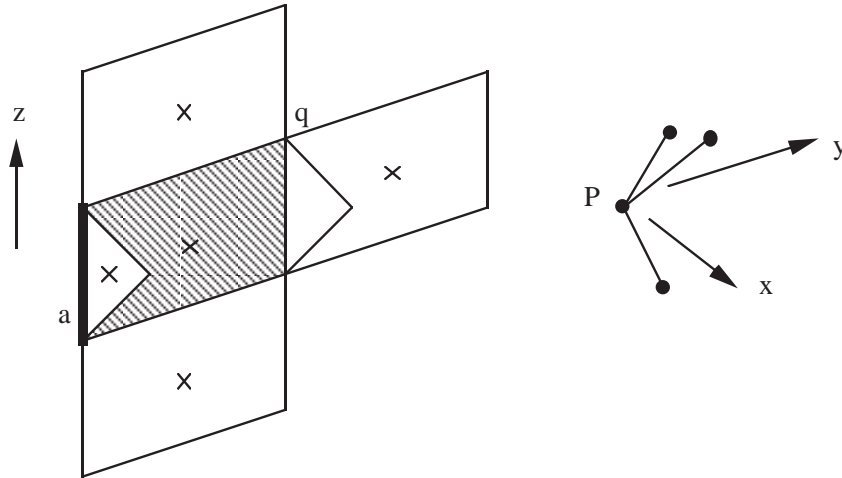


Figure 42 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant une arête vive appartenant également à une face triangulaire de la frontière.

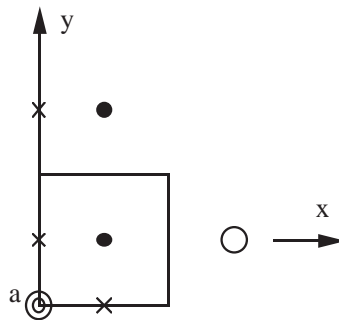


Figure 43 Projection des degrés de liberté de la figure précédente dans le plan xOy .

- Dans le cas où l'unique arête vive du quadrangle appartient à une face triangulaire du prisme (figure 42), nous disposons encore de neuf degrés de liberté, mais c'est la projection dans le plan xOy (figure 43) qui nous indique que parmi les six fonctions de base de la relation (3.15) qui sont de degré zéro en z , c'est à dire $\{1, x, y, y^2, xy, x^2\}$, la fonction xy^2 n'est pas représentable avec les degrés de liberté restants. Nous avons donc pour base $B(q)$ dans ce cas de figure :

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz\} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad H \text{ prisme appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient une arête vive qui appartient également} \\ \quad \quad \quad \text{à un triangle de la frontière.} \end{array} \right.$$

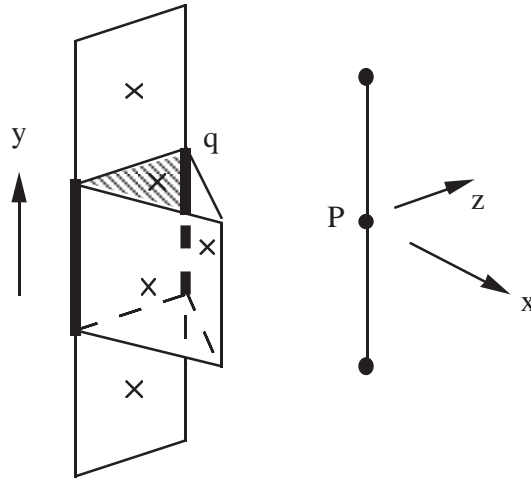


Figure 44 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant deux arêtes vives appartenant aux trois faces quadrangulaires.

Nous devons encore faire la distinction qui précède si l'on suppose que la facette q contient deux arêtes vives qui ne se rencontrent pas. Dans le premier cas (figure 44), celles-ci appartiennent également à deux facettes quadrangulaires du prisme P . Il convient de retirer une fonction de base du résultat obtenu en (3.40) (une seule arête vive). Le seul choix raisonnable (*c.f.* la figure 45 en projection dans le plan xOz) est d'éliminer le polynôme xz . Nous obtenons

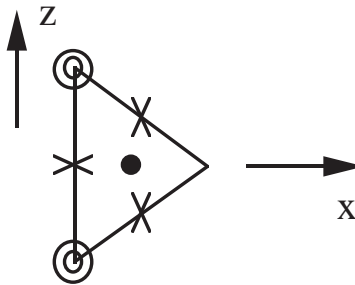


Figure 45 Projection de la figure précédente dans le plan xOz .

- Dans le cas moins improbable où les deux arêtes vives appartiennent également aux deux triangles du prisme (figure 46) comme c'est par exemple le cas pour un maillage bidimensionnel en triangles maillé par une couche de prismes d'épaisseur constante, les huit degrés de liberté ne permettent plus si on les projette sur le plan xOy comme à la figure 47, de représenter la fonction xy et il vient :

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xz \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad P \text{ prisme appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient deux arêtes vives qui appartiennent} \\ \text{à deux triangles de la frontière.} \end{array} \right.$$

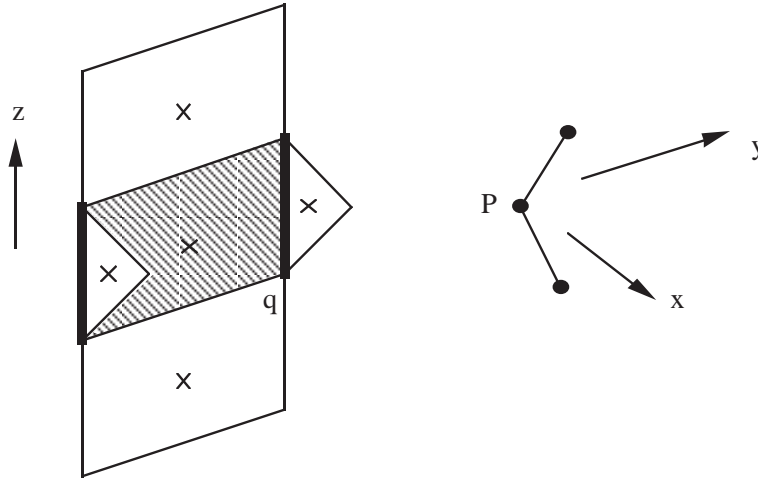


Figure 46 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant deux arêtes vives appartenant à deux faces triangulaires.

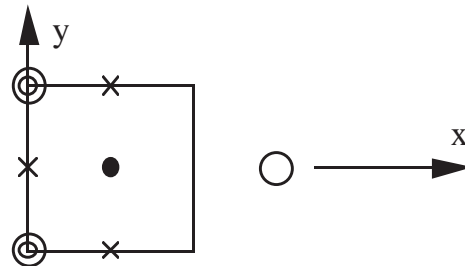


Figure 47 Projection de la figure précédente dans le plan xOy .

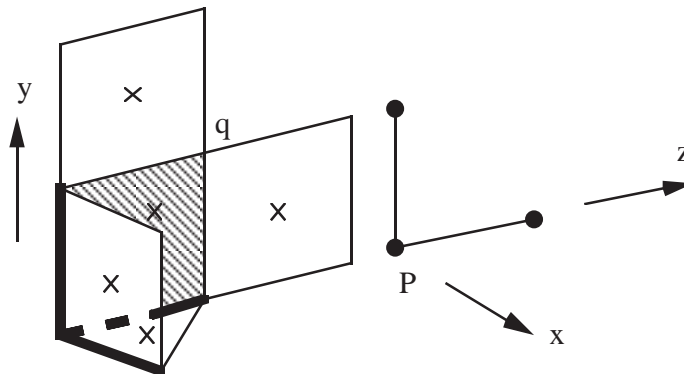


Figure 48 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant deux arêtes vives ayant un sommet du maillage en commun.

- Enfin, deux arêtes vives du quadrangle q peuvent se rencontrer en un sommet de cette facette comme à la figure 48. Il suffit alors de prendre l'intersection des bases obtenues aux relations (3.40) et (3.41) pour calculer la base $B(q)$ de l'espace d'interpolation recherché. Nous avons :

$$(3.44) \quad \begin{cases} B(q) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, xy, xz\} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad P \text{ prisme appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient deux arêtes vives qui se coupent.} \end{cases}$$

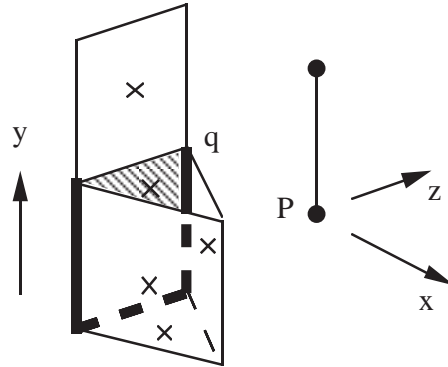


Figure 49 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant trois arêtes vives et une “non vive” qui appartient à une face triangulaire du prisme.

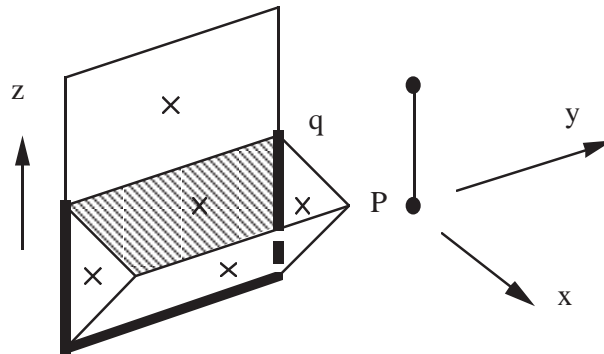


Figure 50 Facette frontière q appartenant à un prisme P , contenant trois arêtes vives et une “non vive” qui appartient à une face quadrangulaire du prisme.

- Nous terminons par des cas sans intérêt en pratique où la face q contient trois arêtes vives. Nous devons détailler deux sous-cas, selon que la seule arête “non vive” appartient à une face triangulaire du prisme (figure 49) ou à une face quadrangulaire du prisme P (figure 50). Dans le premier cas, la base est intersection de (3.37) et (3.42), c'est à dire

$$(3.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2, xy \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad P \text{ prisme appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient trois arêtes vives et une "non vive"} \\ \text{qui appartient à une face triangulaire du prisme.} \end{array} \right.$$

Dans le cas où la seule arête "non vive" du quadrangle q appartient à une autre face quadrangulaire du prisme P , la base $B(q)$ pour le calcul du gradient avec les sept degrés de liberté restants est simplement intersection de (3.40) et (3.43) :

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2, xz \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad P \text{ prisme appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient trois arêtes vives et une "non vive"} \\ \text{qui appartient à une face quadrangulaire du prisme.} \end{array} \right.$$

Le dernier cas d'une facette quadrangulaire d'un prisme dont toutes (!) les arêtes sont vives s'obtient en rabattant la dernière facette de la figure 50. Le maillage ne comporte alors qu'un seul élément (!) et ce cas n'a d'intérêt qu'à titre d'exercice, laissé au lecteur.

• **Face quadrangulaire à la frontière d'une pyramide.**

Nous terminons l'étude des faces quadrangulaires de la frontière en situation exceptionnelle en supposant que la facette q appartient à une pyramide Π . Partant d'une face frontière courante pour laquelle une base de polynômes est donnée à la relation (3.16), nous commençons par le cas où la facette q ne contient qu'une seule arête vive. Par projection dans le plan xOz , nous constatons (figure 52) que la fonction $x(y^2 + z^2)$ ne peut pas être représentée par les six degrés de liberté de la figure 51 si les fonctions $1, x, z, z^2, x^2, xz$ le sont déjà. Nous obtenons donc la base à neuf fonctions suivante :

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad \Pi \text{ pyramide appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient une arête vive parallèle à } Oy. \end{array} \right.$$

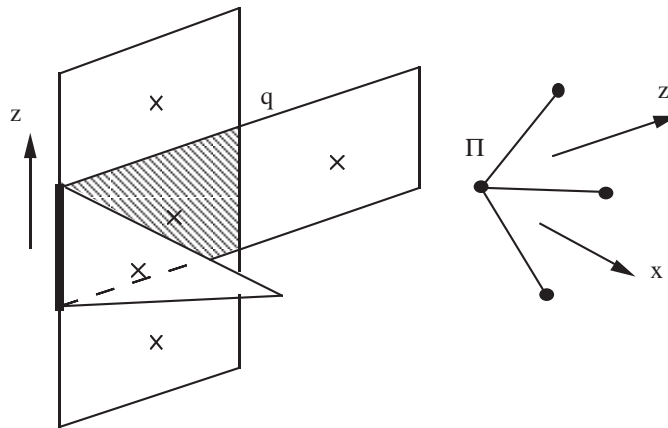


Figure 51 Facette frontière q appartenant à une pyramide Π , contenant une arête vive.

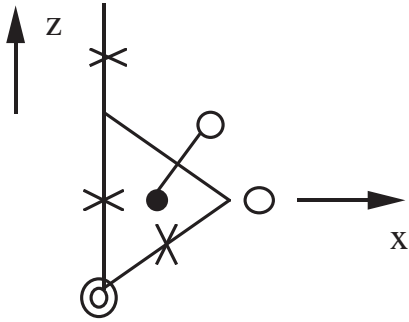


Figure 52 Projection de la figure précédente dans le plan xOz .

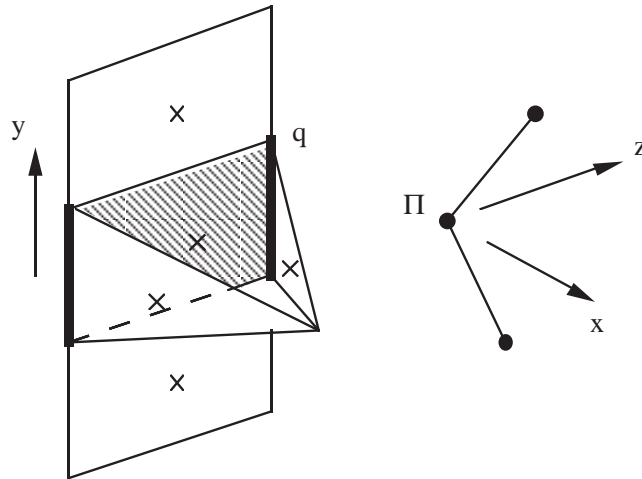


Figure 53 Facette frontière q appartenant à une pyramide Π , contenant deux arêtes vives sans point d'intersection.

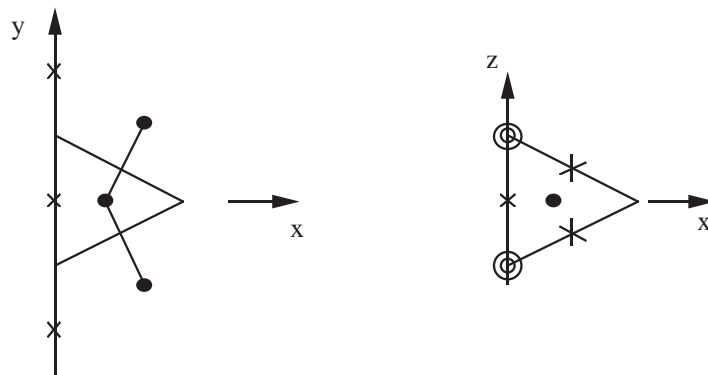


Figure 54 Projection de la figure 53 dans les plans xOy et xOz .

- Si la face quadrangulaire contient deux arêtes vives, elles peuvent être “parallèles”, c’est à dire sans point d’intersection, ou bien sécantes en un sommet du maillage. Dans le premier cas (figure 53), les projections dans les plans xOy

et xOz (figure 54) nous conduisant à penser que la fonction xz est à éliminer. Nous proposons donc :

$$(3.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad \Pi \text{ pyramide appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient deux arêtes vives le long de } Oy \\ \text{ sans point d'intersection.} \end{array} \right.$$

• Si les deux arêtes vives du quadrangle q au bord du domaine se coupent en un sommet du maillage, nous avons une configuration où y et z jouent des rôles analogues. Compte tenu de l'allure de la projection dans le plan xOy , les fonctions y^2 et xy peuvent être interpolées avec les degrés de liberté restants. Le plus simple est donc d'éliminer la fonction x^2 de la relation (3.47), malgré nos réticences motivées par l'annexe B ! Nous obtenons une base de huit fonctions :

$$(3.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, y^2, z^2, xy, xz \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad \Pi \text{ pyramide appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient deux arêtes vives ayant un sommet} \\ \text{ du maillage comme intersection.} \end{array} \right.$$

• Dans le cas exceptionnel où trois arêtes vives appartiennent à la facette q (figure 55), il ne reste que sept degrés de liberté. Nous décidons d'aligner l'axe Oz avec la seule arête régulière (ou "non vive") de la facette q . Nous éliminons le polynôme xz comme pour construire la relation (3.48), mais de la base (3.49) cette fois. Il vient :

$$(3.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(q) = \{ 1, x, y, z, y^2, z^2, xy \} \\ q \text{ quadrangle du bord } \partial\Omega, \quad \Pi \text{ pyramide appartenant à } C(q), \\ q \text{ contient trois arêtes vives.} \end{array} \right.$$

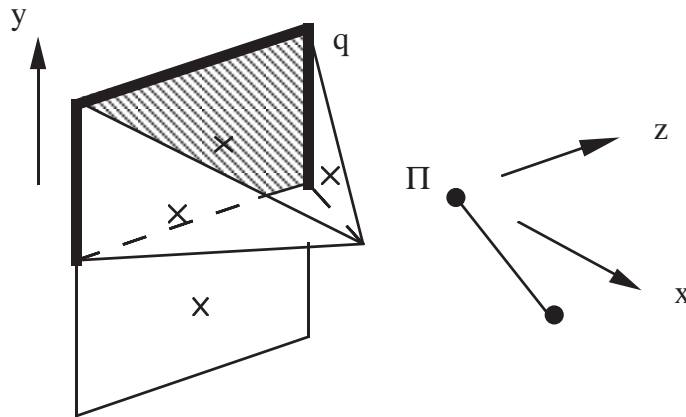


Figure 55 Facette frontière q appartenant à une pyramide Π , contenant trois arêtes vives et une régulière le long de Oz .

3.4.2.b Face triangulaire

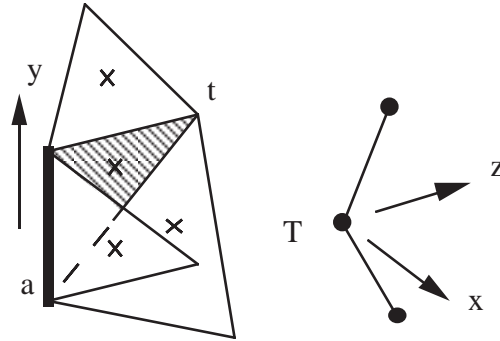


Figure 56 Facette frontière triangulaire t appartenant à un tétraèdre T et contenant une arête vive a .

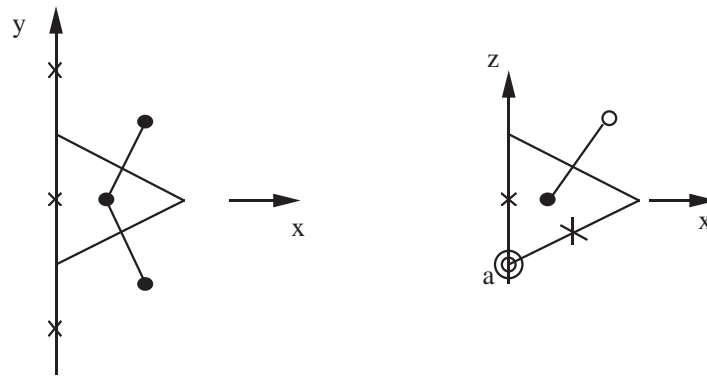


Figure 57 Projection de la figure 56 dans les plans xOy et xOz .

- Nous envisageons maintenant le cas d'un triangle t à la frontière du domaine d'étude Ω , contenant au moins une arête vive, c'est à dire n'appartenant qu'à deux facettes du maillage. Trois cas se présentent, selon que le triangle t considéré appartient à un tétraèdre, une pyramide ou un prisme. Le cas du tétraèdre et de la pyramide sont analogues puisque seules trois faces de celles-ci sont utilisées dans la construction des voisinages comme le montre la relation (3.3) et l'égalité $B(T, t) = B(P, t)$ proposée aux relations (3.5) et (3.7). Nous envisageons donc le cas d'une face triangulaire à la frontière d'un tétraèdre puis d'un prisme.

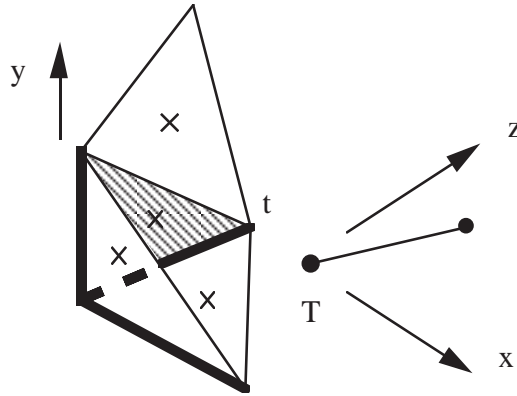


Figure 58 Facette frontière triangulaire t appartenant à un tétraèdre T et contenant deux arêtes vives.

- **Face triangulaire à la frontière d'un tétraèdre.**

Nous supposons pour commencer ce paragraphe que seule une arête du triangle t est une arête vive du maillage ; nous plaçons par convention l'axe Oy le long de cette arête (figure 56). Nous disposons de sept degrés de liberté, alors que la base $B(t)$ calculée à la relation (3.29) issue du mariage de $B(t, t)$ (relation (3.4)) avec $B(T, t)$ (relation (3.5)) comporte huit fonctions de base. En projection sur les plans xOy et xOz (figure 57), il apparaît clairement que la fonction xz est mal représentée par les degrés de liberté (pas de quadrangle dans la projection sur le plan xOz) alors que les fonctions x^2 , y^2 , xy et z^2 peuvent être interpolées avec succès. Nous éliminons donc la fonction xy de la base (3.29) ce qui conduit à la base suivante :

$$(3.51) \quad \begin{cases} B(t) = \{ 1, x, y, z, y^2 + z^2, x^2, xy \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, \quad T \text{ tétraèdre appartenant à } C(t), \\ t \text{ contient une arête vive.} \end{cases}$$

Dans le cas où deux arêtes vives sont contenues dans le triangle t , nous avons une configuration de coin (voir la figure 58) et, échangeant les rôles des variables y et z , il est naturel d'éliminer la fonction de base xy de la relation (3.51). Il vient :

$$(3.52) \quad \begin{cases} B(t) = \{ 1, x, y, z, x^2, y^2 + z^2 \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, \quad T \text{ tétraèdre appartenant à } C(t), \\ t \text{ contient deux arêtes vives.} \end{cases}$$

pour les six degrés de liberté présents par exemple à la figure 59. Nous laissons de côté le cas exceptionnel sans intérêt pratique où la facette t contient trois arêtes vives.

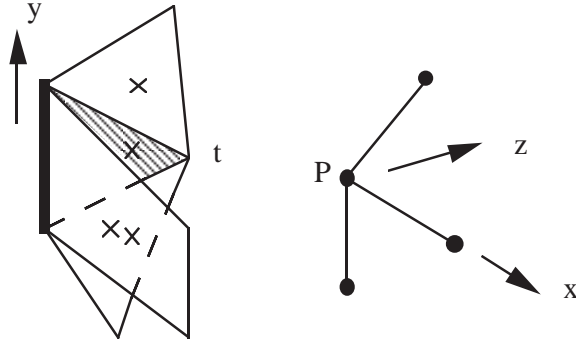


Figure 59 Facette frontière triangulaire t appartenant à un prisme P et contenant une arête vive.

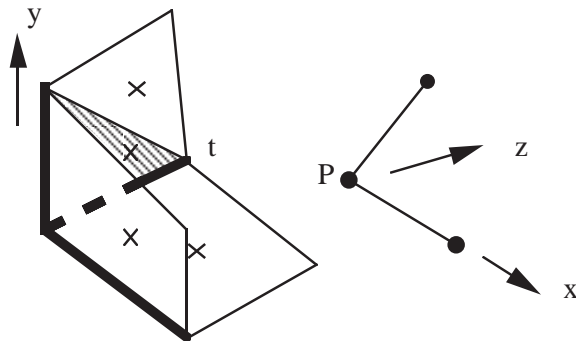


Figure 60 Facette frontière triangulaire t appartenant à un prisme P et contenant deux arêtes vives.

• **Face triangulaire à la frontière d'un prisme.**

Si la face triangulaire t appartient à un prisme P , nous avons ajouté à la relation (3.33) la fonction de base x et le degré de liberté appartenent au cobord de la face triangulaire opposée au triangle t (voir la figure 31). Dans le premier cas où une arête vive appartient à t , nous l'alignons avec l'axe Oy (figure 59). Il est naturel d'éliminer la fonction $x(y^2 + z^2)$, ce qui correspond à une base contenant huit degrés de liberté, c'est à dire :

$$(3.53) \quad \begin{cases} B(t) = \{ 1, x, y, z, x^2, xy, xz, y^2 + z^2 \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, \quad P \text{ prisme appartenant à } C(t), \\ t \text{ contient une arête vive.} \end{cases}$$

Si deux arêtes vives appartiennent au triangle t , nous sommes au coin du domaine et ne disposons plus que de sept degrés de liberté (voir la figure 60). Il est raisonnable de garder un espace de fonctions tests invariant dans l'échange de y et de z , donc d'éliminer de la relation (3.53) la fonction x^2 . Nous obtenons :

$$(3.54) \quad \begin{cases} B(t) = \{ 1, x, y, z, xy, xz, y^2 + z^2 \} \\ t \text{ triangle du bord } \partial\Omega, \quad P \text{ prisme appartenant à } C(t), \\ t \text{ contient deux arêtes vives.} \end{cases}$$

4) Conclusion.

• Dans ce mémoire, nous avons proposé une méthode nouvelle pour définir un schéma numérique adapté au calcul de phénomènes de diffusion par la méthode des volumes finis. L'idée de base, très simple, est fondée sur les propriétés de linéarité et de localisation spatiale des opérateurs de dérivation. Nous utilisons des propriétés intuitives d'unisolvance des degrés de liberté voisins d'une interface donnée, ceci par analogie avec les éléments finis de Lagrange les plus simples. Nous avons envisagé en détail les cas bi et tridimensionnels. Dans ce dernier cas, nous supposons que des hexaèdres, des tétraèdres, des prismes et des pyramides peuvent constituer de façon arbitraire le maillage. Notons qu'une analyse numérique rigoureuse de la méthode des volumes finis telle que nous la pratiquons reste, à notre connaissance, à formaliser mathématiquement, même pour des problèmes modèles de la physique et de la mécanique. Enfin, notons que la méthodologie employée est très générale et peut s'étendre sans difficulté hors du champ des équations de la mécanique des fluides, comme en électromagnétisme par exemple.

5) Annexe A.

Calcul du gradient et interpolation de Lagrange.

• Nous supposons fixés une face f d'un maillage, son voisinage $V(f)$ formé de degrés de liberté σ qui peuvent être du type (A1) ou (A2) suivants :

$$(A1) \quad \sigma(u) = u(K), \quad K \text{ élément du maillage}$$

$$(A2) \quad \sigma(u) = u(f) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u(f), \quad f \text{ face du maillage}$$

et un espace de fonctions $LS(f)$ choisis de sorte que la relation constitutive

$$(A3) \quad \nabla u(f) = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma) \sigma(u)$$

est exacte pour toute fonction u appartenant à $LS(f)$. Nous supposons que l'origine O est au centre de gravité de la face f . Nous supposons réalisée l'unisolvance du couple $(V(f), LS(f))$, c'est à dire :

$$(A4) \quad \forall \beta_\sigma, \quad \exists ! \varphi \in LS(f), \quad \sigma(\varphi) = \beta_\sigma, \quad \forall \sigma \in V(f).$$

Dans la suite, le polynôme φ défini à la relation (A4) est appelé polynôme de Lagrange associé aux degrés de liberté σ bien que ceux-ci puissent être non seulement des valeurs nodales (relation (A1)) mais également des dérivées normales (relation (A2)). On a alors

$$(A5) \quad \nabla \varphi(0) = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma) \beta_\sigma.$$

Nous avons la

• **Proposition 1.**

Le gradient en 0 de l'interpolé de Lagrange φ défini par la relation (A4) est égal au gradient calculé par le schéma (A3).

La preuve est élémentaire. La matrice $\{\sigma(\varphi), \sigma \in V(f), \varphi \in B(f)\}$ (où $B(f)$ est une base de $LS(f)$) est carrée et inversible compte tenu de l'hypothèse d'unisolance. Etant donné une famille β_σ de valeurs numériques pour les degrés de liberté, on peut soit calculer un gradient en 0 compte tenu de la relation (A3), en supposant $\sigma(\varphi) = \beta_\sigma$, pour tout σ appartenant à $V(f)$, soit interpoler ces degrés de liberté à l'aide de la relation (A4). L'égalité (A5) résulte de la définition même des coefficients $\alpha(f, \sigma)$:

$$(A6) \quad \forall \xi \in LS(f), \quad \nabla \xi(0) = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma) \sigma(\xi)$$

ce qui démontre la proposition 1. □

• La propriété très simple que nous venons d'établir ici en toute généralité a été d'abord démontrée dans une série de cas particuliers par I. Terrasse et J. Mercier [MT89]. Elle permet de mieux comprendre intuitivement l'algorithme de calcul (A3), qui condense en une seule formule compacte interpolation puis dérivation. Remarquons que, compte tenu de la propriété indésirable d'oscillation du polynôme d'interpolation de Lagrange, il importe de ne pas choisir un "stencil" $V(f)$ trop étendu !

6) Annexe B. Condition de Dirichlet et volumes finis.

• Nous exposons ici une remarque très simple que nous avons faite il y a quelque temps (1988) et qui a motivé le remplacement du schéma initialement développé pour le calcul des gradients sur les faces d'un maillage non structuré [Du89c] par la nouvelle approche plus algébrique présentée dans ce mémoire.

• Nous étudions l'équation de Poisson sur le domaine $]0, 1[$:

$$(B1) \quad -\frac{d^2 u}{dx^2} = g$$

avec condition de Dirichlet en $x = 0$:

$$(B2) \quad u(0) = u_0.$$

Nous discrétisons l'équation (B1) par une méthode de volumes finis P_0 formés par les éléments d'un maillage régulier de pas h (figure 61). Nous nous intéressons au bilan de flux dans la première maille $]0, h[$:

$$(B3) \quad \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0) - \frac{\partial u}{\partial x}(h) \right) \approx g\left(\frac{h}{2}\right).$$

Nous appliquons, pour calculer le gradient discret aux points $x = 0$ et $x = h$, le schéma à deux points le plus naturel, associé aux voisinages

$$(B4) \quad V(f = \{0\}) = \left\{ 0, \frac{h}{2} \right\}$$

$$(B5) \quad V(f = \{h\}) = \left\{ \frac{h}{2}, 3 \frac{h}{2} \right\}$$

et à l'espace d'interpolation

$$(B6) \quad LS(f) = P1(x).$$

Nous avons alors très simplement

$$(B7) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{1}{h/2} \left(u(h/2) - u(0) \right)$$

$$(B8) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(h) = \frac{1}{h} \left(u(3h/2) - u(h/2) \right).$$

Les relations (B7) et (B8), jointes à (B2), définissent un schéma à trois points pour la maille touchant le bord du domaine que l'on peut écrire :

$$(B9) \quad \frac{1}{h^2} \left(-2u_0 + 3u(h/2) - u(3h/2) \right) = g\left(\frac{h}{2}\right).$$

Si nous faisons tendre h vers 0 dans le schéma (B9) ainsi obtenu, nous trouvons une équation équivalente dont le terme de plus bas degré en h conduit à :

$$(B10) \quad -\frac{3}{4} \frac{d^2u}{dx^2} = g$$

ce qui est inconsistant avec le problème posé (B1) !!

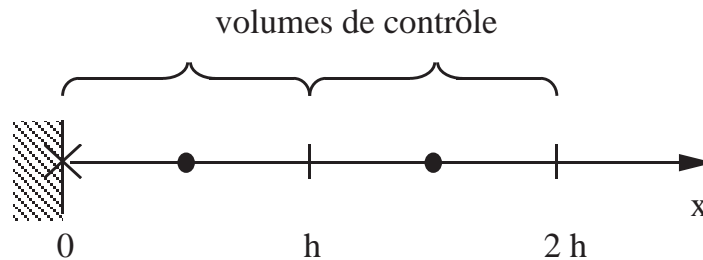


Figure 61 Maillage par volumes finis au bord d'un domaine unidimensionnel.

- Nous modifions donc le voisinage pour la face frontière $f = \{0\}$ et l'espace de polynomes associé. Nous remplaçons le voisinage (B4) par le choix

$$(B11) \quad V(f = \{0\}) = \left\{ 0, \frac{h}{2}, 3 \frac{h}{2} \right\}$$

et l'espace des polynomes de degré 1 par

$$(B12) \quad LS(f = \{0\}) = P_2(x).$$

Nous ne modifions pas le traitement de l'interface $f = \{h\}$. Nous remplaçons en définitive le schéma décentré du premier ordre (B7) pour le calcul du gradient paroi par un schéma décentré qui revient à calculer au point $x = 0$ la dérivée du polynome d'interpolation de Lagrange aux points (B11) (*c.f.* Annexe A) :

$$(B13) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(h) = \frac{1}{3h} \left(-8u_0 + 9u(h/2) - u(3h/2) \right).$$

Dans ce cas, on peut voir très simplement que le schéma aux différences obtenu est consistant avec l'équation aux dérivées partielles (B1).

- Notons que les remarques qui précèdent ne mettent aucunement en jeu la notion de maillage non structuré. D'ailleurs, les logiciels fluides qui utilisent des volumes finis structurés proposent classiquement pour le calcul des flux à la paroi un schéma aux différences finies décentré à trois points (voir par exemple Hollanders-Marmignon [HM87]). Enfin, et au risque d'avouer que le débat reste encore ouvert, notons que le passage du schéma (B7) au schéma (B13) pour le calcul des flux visqueux à la paroi n'a finalement rien changé au résultat surprenant (apparition de forte survitesse dans le champ) d'un calcul de résolution numérique des équations de Navier Stokes autour d'une plaque plane à très bas nombre de Reynolds (*c.f.* [Du89c] pour l'utilisation de (B7) et Mercier-Terrasse [MT89] pour le schéma à trois points (B13)) ! En effet, l'inconsistance (B10) n'a lieu que dans la première maille, ce qui rend délicate toute interprétation intuitive.

Implicitation des flux visqueux

Dans le contexte industriel du développement d'un logiciel de résolution des équations de Navier-Stokes des gaz visqueux, nous montrons que la mise en place d'une phase implicite est facile si le calcul des gradients s'effectue à l'aide de l'approche fonctionnelle proposée par interpolation de Lagrange.

1) Introduction.

- Le logiciel de calcul Ns3gr (Navier-Stokes tridimensionnel non structuré incluant des effets de Gaz Réel) a pour objectif de résoudre les équations de Navier Stokes compressibles en régime laminaire. Il a été élaboré à partir du logiciel Cel3gr qui résout les équations d'Euler par une méthode de volumes finis (voir Michaux [Mi89] et [DM92]). L'extension aux équations de Navier Stokes revient donc essentiellement à ajouter au flux numérique "Euler" le flux visqueux, qui doit être calculé en fonction uniquement des valeurs moyennes des variables conservatives dans les volumes de contrôle et des conditions aux limites.
- L'expression algébrique des flux visqueux est rappelée au second paragraphe. Le point crucial est selon nous l'évaluation précise du gradient de vitesse et de température aux interfaces du maillage. Ce problème est rapidement évoqué au troisième paragraphe. La mise en œuvre d'un schéma implicite afin d'échapper à la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy est nécessaire

Rapport de recherche Aérospatiale Lanceurs [Du91], avril 1991. Traduction en "TEX" juillet 2003. Edition février 2011 ; 11 pages.

lorsqu'on étudie ce type de problème parabolique. Nous nous proposons d'utiliser un schéma d'Euler rétrograde linéarisé, proposé et réalisé pour le fluide parfait dans [Du89b] et [Mi91]. Il est donc nécessaire d'évaluer la dérivée du flux par rapport aux variables conservatives ; une approche classique est décrite au quatrième paragraphe. Celle-ci pouvant conduire à des problèmes pour la prise en compte des conditions aux limites, nous proposons une approche directe au cinquième paragraphe.

2) Expression des flux visqueux.

- L'écriture sous forme conservative des équations de Navier-Stokes est classique. Nous ne cherchons pas dans cette note à être exhaustif. Pour une description détaillée de la modélisation, on pourra consulter par exemple Peyret-Viviand [PV75]. Nous notons $f_j(W, \nabla W)$ la j^o contribution ($j = 1, 2, 3$) du flux visqueux. C'est un vecteur de \mathbb{R}^5 qui est fonction des variables conservatives W , et de leur gradient ∇W , où :

$$(2.1) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^t.$$

- A partir du champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$, nous introduisons le tenseur du taux de déformations :

$$(2.2) \quad \epsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Le tenseur des contraintes visqueuses τ est une fonction linéaire et isotrope du tenseur ϵ et l'on a :

$$(2.3) \quad \tau_{i,j} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{i,j} + 2\mu \epsilon_{i,j}.$$

L'hypothèse de Stokes exprime que le tenseur des contraintes σ où :

$$(2.4) \quad \sigma_{i,j} = -p \delta_{i,j} + \tau_{i,j}$$

a une trace donnée par la seule contribution du terme de pression p , ce qui fournit la relation :

$$(2.5) \quad 3\lambda + 2\mu = 0.$$

Toutefois, nous conserverons dans la suite les deux viscosités λ et μ . Le flux de chaleur q obéit à la loi de Fourier :

$$(2.6) \quad q = -k \nabla T.$$

Les coefficients λ , μ et k sont supposés être uniquement fonction de la température :

$$(2.7) \quad \lambda = \lambda(T), \quad \mu = \mu(T), \quad k = k(T).$$

- L'expression des flux $f_j(W, \nabla W)$ est très simple :

$$(2.8) \quad f_1 = (0, -\tau_{1,1}, -\tau_{1,2}, -\tau_{1,3}, -u\tau_{1,1} - v\tau_{1,2} - w\tau_{1,3} + q_x)^t$$

$$(2.9) \quad f_2 = (0, -\tau_{2,1}, -\tau_{2,2}, -\tau_{2,3}, -u\tau_{2,1} - v\tau_{2,2} - w\tau_{2,3} + q_y)^t$$

$$(2.10) \quad f_3 = (0, -\tau_{3,1}, -\tau_{3,2}, -\tau_{3,3}, -u\tau_{3,1} - v\tau_{3,2} - w\tau_{3,3} + q_z)^t.$$

Le long d'une facette Σ du maillage de surface $|\Sigma|$ et de normale n , nous devons évaluer le flux normal Φ , de composantes Φ_i :

$$(2.11) \quad \Phi_i = \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} f_{ij}(W, \nabla W) n_j d\gamma.$$

Bien entendu, on a :

$$(2.12) \quad \Phi_1 \equiv 0$$

puisqu'il n'y a pas de dissipation de masse dans le fluide. Le calcul des trois contributeurs d'impulsion Φ_2, Φ_3, Φ_4 et d'énergie Φ_5 est détaillé ci-dessous :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Phi_2 &= -\tau_{1,1} n_x - \tau_{2,1} n_y - \tau_{3,1} n_z \\ \Phi_2 &= \begin{cases} -\left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] n_x \\ -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z \end{cases} \\ \Phi_2 &= \begin{cases} -(\lambda + 2\mu) n_x \frac{\partial u}{\partial x} - \mu n_y \frac{\partial u}{\partial y} - \mu n_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ -\mu n_y \frac{\partial v}{\partial x} & -\lambda n_x \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\mu n_z \frac{\partial w}{\partial x} & -\lambda n_x \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \Phi_3 &= -\tau_{1,2} n_x - \tau_{2,2} n_y - \tau_{3,2} n_z \\ \Phi_3 &= \begin{cases} -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x - \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_y \\ -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z \end{cases} \\ \Phi_3 &= \begin{cases} -\lambda n_y \frac{\partial u}{\partial x} & -\mu n_x \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\mu n_x \frac{\partial v}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) n_y \frac{\partial v}{\partial y} - \mu n_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ & -\mu n_z \frac{\partial w}{\partial y} - \lambda n_y \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Phi_4 = -\tau_{1,3} n_x - \tau_{2,3} n_y - \tau_{3,3} n_z$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_4 &= \begin{cases} -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y \\ - \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] n_z \end{cases} \\
 (2.15) \quad \Phi_4 &= \begin{cases} -\lambda n_z \frac{\partial u}{\partial x} & -\mu n_x \frac{\partial u}{\partial z} \\ & -\lambda n_z \frac{\partial v}{\partial y} & -\mu n_y \frac{\partial v}{\partial z} \\ -\mu n_x \frac{\partial w}{\partial x} & -\mu n_y \frac{\partial w}{\partial y} & -(\lambda + 2\mu) n_z \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_5 &= \begin{cases} -(u \tau_{1,1} + v \tau_{1,2} + w \tau_{1,3}) n_x + q_x n_x \\ -(u \tau_{2,1} + v \tau_{2,2} + w \tau_{2,3}) n_y + q_y n_y \\ -(u \tau_{3,1} + v \tau_{3,2} + w \tau_{3,3}) n_z + q_z n_z \end{cases} \\
 \Phi_5 &= \begin{cases} u (-\tau_{1,1} n_x - \tau_{2,1} n_y - \tau_{3,1} n_z) \\ + v (-\tau_{1,2} n_x - \tau_{2,2} n_y - \tau_{3,2} n_z) \\ + w (-\tau_{1,3} n_x - \tau_{2,3} n_y - \tau_{3,3} n_z) \\ - k \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) \end{cases} \\
 (2.16) \quad \Phi_5 &= u \Phi_2 + v \Phi_3 + w \Phi_4 - k \frac{\partial T}{\partial n} .
 \end{aligned}$$

• Le flux Φ est donc une fonction **linéaire** des gradients de vitesse et de température sur l'interface Σ , dont les coefficients sont fonctions uniquement de la vitesse et de la température sur l'interface, compte tenu de la relation (2.7). Nous pouvons donc écrire :

$$(2.17) \quad \Phi = \Phi(U, \nabla U)$$

où U est un vecteur à quatre composantes seulement :

$$(2.18) \quad U = (u, v, w, T)^t .$$

3) Rappel du principe du calcul des gradients.

• Nous avons abordé dans [Du89c] le problème d'évaluation du gradient sur les interfaces d'un maillage non structuré en fonction des variables de calcul au centre des éléments du maillage. La solution proposée n'a pas été retenue pour cette version du logiciel fluide, au profit d'une approche plus simple à programmer et plus mathématique, décrite rapidement dans [DM93], étudiée en détail dans un cadre bidimensionnel structuré par J. Mercier et I. Terrasse [MT89] puis proposée dans un cadre général [Du92] et rappelée ci-dessous.

- Nous notons U l'une des variables du vecteur U défini en (2.18). L'idée de base est élémentaire : la dérivation est un **opérateur linéaire et local**. Le gradient de U sur la face f est donc une combinaison linéaire des valeurs de ce champ dans les éléments voisins ; on note cet ensemble $V(f)$:

$$(3.1) \quad V(f) = \text{ensemble de degrés de liberté } \sigma \text{ voisins de la face } f.$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont notés $\alpha(f, \sigma)$; on a la relation fondamentale :

$$(3.2) \quad \nabla U(f) = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma) \sigma(U).$$

- Notons que pour les faces touchant la frontière, l'ensemble des degrés de liberté $V(f)$ est composé de valeurs $\sigma(U)$ dans les éléments autour de f et de valeurs du champ U sur la face f elle-même ou les faces voisines de f ; si une condition de Neumann est imposé au champ W (*c.f.* par exemple une condition de paroi adiabatique pour le champ de température), la dérivée normale est elle-même un degré de liberté. Nous avons donc :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \sigma(f) = U(K), & K \text{ élément voisin de } f, & \text{ou} \\ \sigma(f) = U(g), & g \text{ face voisine de } f, & \text{ou} \\ \sigma(f) = \frac{\partial U}{\partial n}(g), & g \text{ face voisine de } f, & \text{etc.} \end{cases}$$

Pour chaque face f du maillage, nous devons d'abord déterminer les degrés de liberté σ voisins de f qui composent l'ensemble $V(f)$ puis calculer les coefficients $\alpha(f, \sigma)$ en écrivant que la relation (3.2) est **exacte** pour W décrivant un ensemble de fonctions $T(f)$ bien choisi.

- Dans le cas particulier d'un maillage en hexaèdres structuré, nous avons choisi de prendre comme ensemble $V(f)$ les dix éléments que fournit la méthode des cellules décalées de Hollanders-Lerat-Peyret [HLP85], c'est-à-dire :

$$(3.4) \quad V(f) = \{ K \in \mathcal{T}, \exists a \text{ arête de } \mathcal{T}, a \subset \partial K \cap \partial f \}$$

où \mathcal{T} désigne génériquement le maillage. Pour être complet, nous décrivons l'ensemble $T(f)$ qui permet de calculer les $\alpha(f, \sigma)$. Notons O le centre de gravité de f , n la normale à la face et a_1, a_2 deux médianes joignant les milieux de deux arêtes opposées formant le bord ∂f de f .

- Nous introduisons l'espace des polynomes de degré un dans la direction normale :

$$(3.5) \quad P_1(n) = \{ W : x \mapsto W(x) = a + b x \cdot n \}$$

et un sous espace $\widetilde{Q}_2(f)$ des fonctions Q_2 dans la direction tangentielle :

$$(3.6) \quad \widetilde{Q}_2(f) = \{ W(x) = \alpha + \beta a_1 \cdot x + \gamma a_2 \cdot x + \delta (a_1 \cdot x)^2 + \epsilon (a_2 \cdot x)^2 \}.$$

L'espace des fonctions tests $T(f)$ est le produit tensoriel des deux espaces précédents :

$$(3.7) \quad T(f) = P_1(n(f)) \otimes \widetilde{Q}_2(f)$$

et est bien de dimension 10. Dans le cas d'un maillage régulier de pas constant h , il est facile de voir que le schéma défini par (3.2), (3.4) - (3.7) et la condition

$$(3.8) \quad \text{la relation (3.2) est exacte, } \forall W \in T(f)$$

correspond exactement au calcul par cellules décalées de Hollanders, Lerat et Peyret [HLP85].

- Pour une face f sur le bord $\partial\Omega$ du domaine, nous devons prendre plus de points dans la direction normale puisqu'alors le schéma aux différences finies sous jacent est décentré. Nous remplaçons (3.4) par une condition un peu plus complexe. Soit K l'élément de \mathcal{T} contenant la face f dans son bord (le cobord de f est composé d'un seul élément puisque $f \in \partial\Omega$) et \mathcal{A} l'ensemble des arêtes du bord de K ne rencontrant pas f . Nous posons :

$$(3.9) \quad V(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{degrés de liberté } \sigma, \exists a \text{ arête du maillage } \mathcal{T}, \\ a \subset \partial\sigma \cap (\partial f \cup \mathcal{A}) \end{array} \right\}.$$

Dans le cas d'un maillage structuré en hexaèdres, $V(f)$ est composé de 15 degrés de liberté : dix de type "élément" (cf. (3.3)), cinq de type "face" sur les faces de la frontière. On remplace l'espace des fonctions tests $T(f)$ défini par la relation (3.7) par l'espace suivant :

$$(3.10) \quad T(f) = P_2(n(f)) \otimes \widetilde{Q}_2(f)$$

où $P_2(n)$ est l'espace des fonctions polynomiales de degré 2 dans la direction normale :

$$(3.11) \quad P_2(n) = \{W : x \mapsto W(x) = a + bx \cdot n + c(x \cdot n)^2\}.$$

- On peut réinterpréter très simplement le calcul du gradient à la frontière (3.2) (3.6) (3.8) - (3.11) dans un cas monodimensionnel. On oublie les degrés de liberté dans la direction tangente à la face f et l'ensemble $V(f)$ des degrés de liberté voisins est simplement composé de la façon suivante :

$$(3.12) \quad V(f) = \left\{ U(0), U\left(\frac{h}{2}\right), U\left(\frac{3h}{2}\right) \right\}$$

avec f placé en 0, et h égal au pas du maillage. L'ensemble $T(f)$ est alors égal à P_2 et les conditions (3.2) (3.8) reviennent à choisir pour le gradient en zéro celui de l'interpolé de Lagrange de degré deux passant par des valeurs données en $x = 0, \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}$:

$$(3.13) \quad \nabla U(f) = \frac{1}{3h} \left(-8U(0) + 9U\left(\frac{h}{2}\right) - U\left(\frac{3h}{2}\right) \right).$$

On retrouve dans ce cas encore (structuré et régulier) l'approche classique en volumes finis où la relation (3.13) apparaît dans une annexe de [HM87].

- Nous terminons ce paragraphe en précisant la façon dont on calcule les composantes de la vitesse dans la relation (2.16) ainsi que la valeur de la température à l'interface entre deux mailles, nécessaire pour calculer les coefficients λ , μ et k (*c.f.* la relation (2.1)). On a choisi une simple moyenne à deux points portant sur les deux éléments K et L qui contiennent la face f dans leur bord et constituent le cobord $C(f)$ de f :

$$(3.14) \quad U(f) = \sum_{\sigma \in C(f)} \beta(f, \sigma) \sigma(U).$$

où $\beta(f, \sigma)$ correspond à une interpolation affine.

4) Utilisation de la méthode de Beam et Warming.

- Pour dériver le flux visqueux Φ calculé aux relations (2.13) - (2.15), il est commode, avec Beam-Warming [BW78] (voir également [HLP85] et [HM87]) de considérer U et ∇U comme deux variables **indépendantes** :

$$(4.1) \quad \Phi = \Phi(U, \nabla U).$$

On a alors : $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial U} dU + \frac{\partial \Phi}{\partial(\nabla U)} d(\nabla U)$, soit

$$(4.2) \quad d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial(\nabla U)} \right) \right) dU + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial(\nabla U)} dU \right).$$

- Dans la suite de cette note, on **néglige** dans le terme $\frac{\partial \Phi}{\partial U}$ les dérivés de λ , μ et k par rapport à la température :

$$(4.3) \quad \frac{\partial}{\partial T} (\lambda, \mu, k) = 0.$$

On en déduit donc :

$$(4.4) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial U} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial U} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial U} = 0$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial U} = (\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, 0)$$

avec U écrit dans l'ordre de (2.18). On a par ailleurs :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial(\partial_x U)} = (-(\lambda + 2\mu) n_x, -\mu n_y, -\mu n_z, 0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial(\partial_y U)} = (-\mu n_y, -\lambda n_x, 0, 0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial(\partial_z U)} = (-\mu n_z, 0, -\lambda n_x, 0) \end{cases}$$

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_3}{\partial(\partial_x U)} = (-\lambda n_y, -\mu n_x, 0, 0) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial(\partial_y U)} = (-\mu n_x, -(\lambda + 2\mu) n_y, -\mu n_z, 0) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial(\partial_z U)} = (0, -\mu n_z, -\lambda n_y, 0) \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_4}{\partial(\partial_x U)} = (-\lambda n_z, 0, -\mu n_x, 0) \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial(\partial_y U)} = (0, -\lambda n_z, -\mu n_y, 0) \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial(\partial_z U)} = (-\mu n_x, -\mu n_y, -(\lambda + 2\mu) n_z, 0) \end{cases}$$

$$(4.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_5}{\partial(\partial_x U)} = (-2\mu u n_x - \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, -\mu (u n_y + v n_x), -\mu (u n_z + w n_x), -k n_x) \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial(\partial_y U)} = (-\mu (u n_y + v n_x), -2\mu v n_y - \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, -\mu (v n_z + w n_y), -k n_y) \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial(\partial_z U)} = (-\mu (u n_z + w n_x), -\mu (v n_z + w n_y), -2\mu w n_z - \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, -k n_z) \end{cases}$$

et on en déduit facilement :

$$(4.10) \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial U} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial(\nabla U)} \right) = 0, \quad j = 2, 3, 4.$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (-(\lambda + 2\mu) u n_x - \lambda v n_y - \lambda w n_z) + \frac{\partial}{\partial y} (-\mu u n_y - \mu v n_x) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (-\mu u n_z - \mu w n_x) \Phi_2 + (\mu - \lambda) \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_y - \frac{\partial v}{\partial y} n_x + \frac{\partial w}{\partial x} n_z - \frac{\partial w}{\partial z} n_x \right) \end{aligned}$$

et on en déduit l'expression du terme de gauche de (4.10) avec $j = 5$:

$$(4.11) \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial u} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial(\nabla u)} \right) = (\lambda - \mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_y - \frac{\partial v}{\partial y} n_x + \frac{\partial w}{\partial x} n_z - \frac{\partial w}{\partial z} n_x \right)$$

$$(4.12) \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial v} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial (\nabla v)} \right) = (\lambda - \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} n_x - \frac{\partial u}{\partial x} n_y + \frac{\partial w}{\partial y} n_z - \frac{\partial w}{\partial z} n_y \right)$$

$$(4.13) \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial w} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial (\nabla w)} \right) = (\lambda - \mu) \left(\frac{\partial u}{\partial z} n_x - \frac{\partial u}{\partial x} n_z + \frac{\partial v}{\partial z} n_y - \frac{\partial v}{\partial y} n_z \right)$$

$$(4.14) \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial T} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial (\nabla T)} \right) = 0.$$

• Après avoir calculé le premier facteur du premier terme du second membre de l'identité (4.2), nous exprimons le second facteur $dU(f)$ en fonction des variations des variables conservatives dW dans les éléments voisins, en notant :

$$(4.15) \quad W = (\rho, q_x, q_y, q_z, \epsilon)^t,$$

on a simplement, par dérivation de (3.14) :

$$(4.16) \quad dU(f) = \sum_{\sigma \in C(f)} \beta(f, \sigma) \sigma(dU).$$

Or, pour K dans le cobord de f , on a :

$$(4.17) \quad dU(K) = \left(-\frac{u}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho} dq_x, -\frac{v}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho} dq_y, -\frac{w}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho} dq_z, dT \right)^t.$$

Pour un gaz réel à l'équilibre chimique, l'expression $dT(U)$ fait appel au diagramme de Mollier du gaz. Pour un gaz parfait polytropique, nous pouvons détailler complètement l'algèbre :

$$(4.18) \quad T = \frac{e}{C_v} = \frac{1}{C_v} \left(\frac{\epsilon}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2} (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \right)$$

et finalement,

$$(4.19) \quad dT = -\frac{C_v T - |u|^2}{\rho C_v} d\rho - \frac{1}{\rho C_v} (u dq_x + v dq_y + w dq_z) + \frac{1}{\rho C_v} d\epsilon.$$

• Si on note β_g (respectivement β_d) la valeur du coefficient $\beta(f, \bullet)$ de la relation (3.14) pour l'élément à gauche (respectivement à droite) de la face f , nous avons :

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_5}{\partial (\partial U)} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Phi_5}{\partial (\nabla U)} \right) = (4.11) \left(\frac{\beta_g}{\rho_g} dq_{x,g} + \frac{\beta_d}{\rho_d} dq_{x,d} \right) \\ + (4.12) \left(\frac{\beta_g}{\rho_g} dq_{y,g} + \frac{\beta_d}{\rho_d} dq_{y,d} \right) + (4.13) \left(\frac{\beta_g}{\rho_g} dq_{z,g} + \frac{\beta_d}{\rho_d} dq_{z,d} \right) \\ + \frac{\beta_g}{\rho_g} (-u_g (4.11) - v_g (4.12) - w_g (4.13)) d\rho_g \\ + \frac{\beta_d}{\rho_d} (-u_d (4.11) - v_d (4.12) - w_d (4.13)) d\rho_d. \end{array} \right.$$

Le second terme du membre de droite de la relation (4.2) se calcule facilement pour les faces internes du maillage. On a en effet :

$$(4.21) \quad \nabla(A(U) dU)(f) = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma) \sigma(A(U) dU).$$

et il suffit de remplacer $A(U)$ par les expressions calculées en (4.6) - (4.9) pour achever le calcul du jacobien. Notons toutefois que si σ est un degré de liberté qui correspond à une condition de Neumann, c'est-à-dire :

$$(4.22) \quad \sigma(U) = \frac{\partial U}{\partial n}(g),$$

Le calcul du terme $\sigma(A(U) dU)$ n'est pas simple :

$$(4.23) \quad \sigma(A(U) dU) = \frac{\partial}{\partial n}(A(U) dU)(g) \\ = \left[\frac{\partial}{\partial n}(A(U)) dU + A(U) d\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) \right](g).$$

Le dernier terme $d\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)$ est donné, mais la dérivée normale $\frac{\partial}{\partial n}(A(U))$ fait à nouveau appel à l'opérateur gradient au moins pour les termes de flux d'énergie (relation (4.9)), ce qui rend donc problématique une mise en œuvre simple et générale de cette approche.

5) Une approche directe.

• Bien que l'approche classique puisse en général s'appliquer pour calculer la dérivée des flux visqueux, nous pouvons mettre en œuvre une méthode plus simple, compte tenu du calcul aisé du gradient aux interfaces (relation (3.2)). Pour les flux d'imulsion Φ_2, Φ_3, Φ_4 , on a, en négligeant la variation des viscosités λ et μ avec la température, une combinaison linéaire du gradient de U (*c.f.* relations (2.13) - (2.15)) :

$$(5.1) \quad \Phi_j = \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^3 a_{jkl} \frac{\partial U_l}{\partial x_k}; \quad j = 2, 3, 4$$

et

$$(5.2) \quad \frac{\partial U_l}{\partial x_k} = \sum_{\sigma \in V(f)} \alpha(f, \sigma)_{k,l} \sigma(U_l).$$

Nous remarquons que la dépendance par rapport à l ("composante" de U dans (2.18)) permet de prendre en compte un calcul du gradient éventuellement différent pour les composantes de la vitesse et de la température au bord du domaine puisque les conditions limites associées à ces champs peuvent différer.

Nous en déduisons :

$$(5.3) \quad d\Phi_j = \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^3 \sum_{\sigma \in V(f)} a_{jkl} \alpha(f, \sigma)_{k,l} \sigma(dU_l); \quad j = 2, 3, 4.$$

• On exprime ensuite dU_l en fonction de dW dans le cas des faces intérieures (cf. relations (4.17) et (4.19)) ou bien cette expression est donnée explicitement dans le cas des conditions aux limites, ce qui achève le calcul dans ce cas. Pour le flux d'énergie Φ_5 , il suffit de dériver la relation (2.16) :

$$(5.4) \quad d\Phi_5 = u d\Phi_2 + v d\Phi_3 + w d\Phi_4 + \Phi_2 du + \Phi_3 dv + \Phi_4 dw - k d\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right).$$

Les trois premiers termes du second membre de (5.4) se calculent aisément à l'aide de la relation (5.3) et de la valeur de la vitesse à l'interface calculée en (3.14). Les trois termes suivants résultent d'une simple dérivation de la relation (3.14) :

$$(5.5) \quad dU(f) = \sum_{\sigma \in C(f)} \beta(f, \sigma) \sigma(dU)$$

et de jacobiens très simples (4.17) et (4.19). Le dernier terme est exactement du type de ceux traités pour établir la relation (5.3). On notera simplement à nouveau que la relation (4.19), ici indispensable, n'est valable sous cette forme que pour un gaz parfait polytropic. La dérivation du flux d'énergie Φ_5 est donc simple avec cette approche.

Références bibliographiques

- [Ab88] R. Abgrall. Généralisation du solveur de Roe pour le calcul d'écoulements de mélanges de gaz parfaits de concentrations variables, *La Recherche Aérospatiale*, vol. 6, p. 32-43, 1988.
- [AM89] R. Abgrall, J.L. Montagné. Généralisation du schéma d'Osher pour le calcul d'écoulements de mélanges de gaz parfaits de concentrations variables et de gaz réels, *La Recherche Aérospatiale*, vol. 4, p. 1-13, 1989.
- [An87] C.E. Anderson, Jr. An overview of the theory of hydrocodes, *Int. J. Impact Engng.*, vol. 5, p. 33-59, 1987.
- [Ar76] V. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1976.
- [Au84] J. Audounet. Solutions discontinues paramétriques des systèmes de lois de conservation et des problèmes aux limites associés, *Séminaire*, Université Toulouse 3, 1983-84.
- [Ba91] R. Baraille. Développement de schémas numériques adaptés à l'hydrodynamique, *Thèse de l'Université Bordeaux 1*, décembre 1991.
- [BLN79] C. Bardos, A.Y. Leroux, J.C. Nédélec. First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions, *Comm. Part. Diff. Eqns.*, vol. 4, p. 1017-1034, 1979.
- [BW78] R.M. Beam, R.F. Warming. An implicit Factored Scheme for the Compressible Navier Stokes Equations, *AIAA Journal*, vol 16, pp 393-402, avril 1978.
- [Be86] A. Benabdallah. Le "p-système" sur un intervalle, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 303, Série 1, p. 123-126, 1986.
- [BS87] A. Benabdallah, D. Serre. Problèmes aux limites pour les systèmes hyperboliques non-linéaires de deux équations à une dimension d'espace,

- Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, Paris, tome 303, Série 1, p. 677-680, 1987.
- [BDM91] F. Bertagnolio, F. Dubois, O. Michaux. Validation du code Ns3gr de résolution des équations de Navier-Stokes d'un fluide compressible dans le cas de l'approximation de Boussinesq, *Rapport Aérospatiale*, n° ST/S 102 562, octobre 1991.
- [BM85] M. Borrel, J.L. Montagné. Numerical Study of a Noncentered Scheme with Application to Aerodynamics, *AIAA Paper* n°85-1497, 1985.
- [BMDGL88] M. Borrel, J.C. Montagné, J. Diet, P. Guillen, J. Lordon. Upwind scheme for computing supersonic flows around a tactical missile, *La Recherche Aérospatiale*, n°1988-2, p. 43-55, 1988.
- [BDM89] F. Bourdel, P. Delorme, P. Mazet. Convexity in Hyperbolic Problems. Application to a Discontinuous Galerkin Method for the Resolution of the Polydimensional Euler Equations, *Proceedings of the 2nd International Conference on Nonlinear Hyperbolic Problems*, Notes on Num. Fluid Mech., vol. 24, p. 31-42, Vieweg, 1989.
- [BS77] J.S. Bramley, D.M. Sloan. A comparison of boundary methods for the numerical solution of hyperbolic systems of equations, *J. of Eng. Math.*, vol. 11, n°3, p. 227-239, 1977.
- [CEV86] L. Cambier, B. Escande, J.P. Veuillot. Calcul d'écoulements internes à grand nombre de Reynolds par résolution des équations de Navier-Stokes, *La Recherche Aérospatiale*, n°1986-6, p. 415-432, 1986.
- [Ch83] S. Chakravarthy. Euler solutions, Implicit schemes and Boundary Conditions, *AIAA Journal*, vol. 21, n°5, p. 699-706.
- [CDV92] D. Chargy, F. Dubois, J.P. Vila. Méthodes numériques pour le calcul d'écoulements compressibles, applications industrielles, *cours de l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur*, Paris, septembre 1992.
- [Ci78] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [CG85] P. Colella, H.M. Glaz. Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases, *J. Computational Physics*, vol. 59, p. 264-289, 1985.
- [CF48] R. Courant, K.O. Friedrichs. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [Co97] F. Coron. Compte-rendu de réunion "Conditions aux limites de transpiration", *Rapport Aérospatiale Espace & Defense YX/AS* n°15/97 / PGU, mars 1997.

- [De94] P. Destuynder. Cours d'aéroélasticité, *Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur*, juin 1994.
- [DP83] R. DiPerna. Convergence of the Viscosity Method for Isentropic Gas Dynamics, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 91, p. 1-30, 1983.
- [CM84] M. Crouzeix, A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1984.
- [Du87] F. Dubois. Boundary Conditions and the Osher Scheme for the Euler Equations of Gas Dynamics, *Rapport interne n°170 du Centre de Mathématiques Appliquées de l'école Polytechnique*, Palaiseau, septembre 1987.
- [Du88] F. Dubois. Conditions aux limites fortement non linéaires pour les équations d'Euler, in *Cours Cea-Edf-Inria "Méthodes de différences finies et équations hyperboliques"* organisé par P.L. Lions, novembre 1988.
- [Du89a] F. Dubois. Evaluation du flux d'Osher pour l'air à l'équilibre chimique, *Rapport Aérospatiale*, Code Euler 3D en hypersonique et supersonique élevé, S/DT/MI n°41 747, avril 1989.
- [Du89b] F. Dubois. Code Euler 3D Volumes Finis. Etude d'une version implicite bidimensionnelle et des conditions aux limites, *Rapport Aérospatiale* S/DT/MI n°42 380, juin 1989.
- [Du89c] F. Dubois. Calcul des flux visqueux dans un code de résolution des équations de Navier Stokes par une méthode de volumes finis non-structurés, *Rapport Aérospatiale*, S/DT/MI n°105 / 89, juillet 1989.
- [Du90a] F. Dubois. Nouvelle limitation de pente pour le logiciel Cel3gr, *Rapport Aérospatiale Les Mureaux*, S/DT/MI n°53 / 90, mars 1990.
- [Du90b] F. Dubois. Concavité de l'entropie thermostatique et convexité de l'entropie mathématique au sens de Lax, *La Recherche Aérospatiale*, n°1990-3, p. 77-80, mai 1990.
- [Du90c] F. Dubois. Calcul du gradient sur les faces d'un maillage tridimensionnel non-structuré dans une approche de type volumes finis, Annexe d'un document de prospective "Calculs Navier Stokes Tridimensionnels", *Aérospatiale Les Mureaux*, S/DT/MI, juin 1990.
- [Du91] F. Dubois. Code Ns3gr. Implication des flux visqueux, *Rapport Aérospatiale*, ST/S n°95 / 91, avril 1991.
- [Du92] F. Dubois. Interpolation de Lagrange et volumes finis. Une technique nouvelle pour calculer le gradient d'une fonction sur les faces d'un maillage non-structuré, *Rapport Aérospatiale*, ST/S n°104 109, février 1992.

- [Du93] F. Dubois. Guide méthodologique : Schémas numériques décentrés pour la mécanique des fluides, *Rapport Aérospatiale Espace & Defense TX/C* n°108 899, mars 1993.
- [Du98] F. Dubois. Flux Limite de Paroi Mobile, *Congrès National d'Analyse Numérique*, Arles (France), mai 1998.
- [Du2k] F. Dubois. An introduction to finite volumes for gas dynamics, Rapport de recherche CNAM-IAT n° 342 / 2000, octobre 2000. Publié dans *Encyclopedia Of Life Support Systems* (EOLSS, Unesco), Mathematical Sciences, Computational Methods and Algorithms, V. Shaidurov et O. Pironneau Editeurs, volume 2, p. 36-105, 2009. Voir aussi hal-00558477.
- [Du01] F. Dubois. Partial Riemann problem, boundary conditions, and gas dynamics, in *Artificial Boundaries and Layers, Domain Decomposition. Applications to Large Scale Computers*, Edited by Laurence Halpern and Loïc Tournette, *Nova Science Publishers, Inc*, New York, pages 16-77, 2001. Voir aussi hal-00555600.
- [DLf87] F. Dubois, P. Le Floch. Condition à la limite pour un système de lois de conservation, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 304, série 1, p. 75-78, 1987.
- [DLf88] F. Dubois, P. Le Floch. Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *Journal of Differential Equations*, vol. 71, n°1, p. 93-122, 1988.
- [DLf89] F. Dubois, P. Le Floch. Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation laws, Second International Conference on Hyperbolic Problems (Ballmann-Jeltsch Editors), *Notes on Numerical Fluid Dynamics*, vol. 24, p. 96-104, Vieweg, 1989.
- [DM92] F. Dubois, O. Michaux. Solution of the Euler Equations Around a Double Ellipsoidal Shape Using Unstructured Meshes and Including Real Gas Effects, *Workshop on Hypersonic Flows for Reentry Problems*, Antibes (France), Désidéri-Glowinski-Périaux Editors, Springer Verlag, vol. 2, p. 358-373, 1992.
- [DM93] F. Dubois, O. Michaux. Numerical Solution of the Navier Stokes Equations for Hypersonic Ramps with the Ns3gr Solver, *Workshop on Hypersonic Flows for Reentry Problems*, Antibes (France), avril 1991, (Abgrall, Désidéri, Glowinski, Mallet, Périaux Editors), Springer-Verlag, vol. III, p. 258-269, 1993.
- [DM96] F. Dubois, G. Mehlman. A Non-Parameterized Entropy Correction for Roe's Approximate Riemann Solver, *Numerische Mathematik*, vol. 73, p. 169-208, 1996.

- [DG88] B. Dubroca, G. Gallice. Problème mixte pour un système de lois de conservation monodimensionnel, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 306, Série 1, p. 317-320, 1988.
- [EO80] B. Engquist, S. Osher. Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations, *Mathematics of Computation*, vol. 34, n°149, p. 45-75, 1980.
- [FGH91] I. Faille, T. Gallouët, R. Herbin. Les Mathématiciens découvrent les Volumes Finis, *Matapli*, n°23, p. 37-48, octobre 1991.
- [FFL2k] T. Fanion, M. Fernandez, P. Le Tallec. Deriving adequate formulations for fluid-structure interaction problems : from ALE to transpiration, *Revue européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 6, p. 681-708, 2000.
- [FL89] G. Fernandez, B. Larrouturou. Hyperbolic Schemes for Multi-component Euler Equations, 2nd International Conference on Hyperbolic Problems, Aachen, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vieweg, vol. 24, p. 128-138, 1989.
- [Fe85] F. Fezoui. Résolution des équations d'Euler par un schéma de van Leer en éléments finis, *Rapport INRIA n° 358*, 1985.
- [Ge71] C.W. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs, New York, 1971.
- [GB53] P. Germain, R. Bader. Unicité des écoulements avec chocs dans la mécanique de Burgers, *Note technique ONERA OA n°1/1711-1*, mai 1953.
- [Gl65] J. Glimm. Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 18, p. 95-105, 1965.
- [GR96] E. Godlewski, P.A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996.
- [Go59] S.K. Godunov. A Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics, *Math. Sbornik*, vol. 47, p. 271-290, 1959.
- [Go61] S.K. Godunov. An interesting class of quasilinear Systems, *Doc. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 139, p. 521-523 et *Soviet Math.*, vol. 2, p. 947-949, 1961.
- [GZIKP79] S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, G. Prokopov. *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, Editions de Moscou, 1979.
- [GT87] M. Goldberg, E. Tadmor. Convenient Stability Criteria for Difference Approximations of Hyperbolic Initial-Boundary Value Problems II, *Math. of Computation*, vol. 48, n°178, p. 503-520, 1987.

- [Gu85] B. Gustafsson. Numerical Boundary Conditions, in Large Scale Computations in Fluid Mechanics (Engquist, Osher, Somerville Eds), *Lectures in Applied Mathematics*, vol. 22, AMS, Providence, p. 279-308, 1985.
- [GKS72] B. Gustafsson, H.O. Kreiss, A. Sundstrom. Stability Theory of Difference Approximations for Mixed Initial Boundary Value Problems II, *Math. of Computation*, vol. 26, p. 649-686, 1972.
- [Ha85] L. Halpern. Introduction à l'analyse numérique des équations différentielles ordinaires et des équations d'évolution linéaires, *ENSTA*, Paris, 1985.
- [Ha83] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, vol. 49, p. 357-393, 1983.
- [HLV83] A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer. On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM Review*, vol. 25, n°1, p. 35-61, janvier 1983.
- [He79] G.W. Hedstrom. Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems, *J. Computational Physics*, vol. 30, p. 222-237, 1979.
- [HS86] P.W. Hemker, S.P. Spekreijse. Multiple Grid and Osher's Scheme for the Efficient Solution of the Steady Euler Equations, *Applied Numer. Math.*, vol. 2, p. 475-493, 1986.
- [He74] P. Henrici. *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1974.
- [HK65] J. Hilsenrath, M. Klein. Tables of Thermodynamic Properties of Air in Chemical Equilibrium Including Second Virial Corrections from 1 500 K to 15 000 K, *AEDC-TR-65-58*, mars 1965.
- [Hi86] R.L. Higdon. Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems, *SIAM Review*, vol. 28, n°2, p. 177-217, 1986.
- [HLP85] Hollanders H., Lerat A., Peyret R. Three Dimensional Calculation of Transonic Viscous Flows by an Implicit Method. *AIAA Journal*, vol 23, n°11, pp 1670-1678, novembre 1985.
- [HM87] H. Hollanders, C. Marmignon. Méthode de calcul du proche sillage axisymétrique hypersonique laminaire par résolution des équations de Navier-Stokes, *Rapport ONERA n°8 / 3638 AY*, décembre 1987.
- [JST81] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel. Numerical Solutions for the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes, *AIAA Paper n°81-1259*, juin 1981.
- [Ke71] C.P. Kentzer. Discretization of Boundary Conditions on Moving Discontinuities, in Lecture Notes in Physics (M. Holt Ed.), vol. 8, *Springer Verlag*, Berlin, p. 108-113, 1971.

- [KL89] K. Khalfallah, A. Lerat. Correction d'entropie pour les schémas numériques approchant un système hyperbolique, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, Série 2, tome 308, p. 815-820, 1989.
- [Kr70] H.O. Kreiss. Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems, *Comm. Pure Applied Math.*, vol. 23, p. 277-298, 1970.
- [Kv70] S. Kružkov. First Order Quasi-Linear Systems in Several Independent Variables, *Math. Sbornik*, vol. 123, p. 228-255, et *Math. USSR Sb.*, vol. 10, n°2, p. 217-243, 1970.
- [La74] J.D. Lambert. *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1974.
- [LL54] L. Landau, E. Lifchitz. *Fluid Mechanics*, 1954, Editions de Moscou, 1967.
- [La91] B. Larrouturou. How to Preserve the Mass Fractions Positivity when Computing Compressible Multi-component Flows, *Journal of Computational Physics*, vol. 95, n°1, p. 59-84, 1991.
- [Lax71] P.D. Lax. Shock Waves and Entropy, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis (Zarantonello Ed.), *Academic Press*, New York, p. 603-634, 1971.
- [Lax73] P.D. Lax. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, *Conf. Board in Mathematical Sciences*, vol. 11, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [LW60] P.D. Lax, B. Wendroff. Systems of Conservation Laws, *Comm. Pure Applied Math.*, vol. 13, p. 217-237, 1960.
- [Lf88] P. Le Floch. Explicit Formula for Scalar Nonlinear Conservation Laws with Boundary Conditions, *Math. Meth. in the Applied Sciences*, vol. 10, p. 265-287, 1988.
- [LfN88] P. Le Floch, J.C. Nédélec. Weighted Scalar Conservation Laws with Boundary Conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 308, p. 667-683, 1988.
- [Le81] A. Lerat. Sur le calcul des solutions faibles des systèmes hyperboliques de lois de conservation à l'aide de schémas aux différences, Thèse d'Etat, *Université Paris 6*, 1981.
- [Li96] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Science Publications, 1996.
- [Li77] T.P. Liu. Initial-Boundary Value Problems for Gas Dynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 64, p. 137-168, 1977.

- [Li82] T.P. Liu. Transonic Gas Flow in a Duct of Varying Area, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 80, n°1, p. 1-18, 1982.
- [Mc69] R.W. Mac Cormack. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, *AIAA Paper* n°69-354, 1969.
- [Mn86] R. Mac Neal. The evolution of lower order plate and shell elements in MSC/Nastran, in *Finite element methods for plate and shell structures*, vol. 1, Element Technology, Hugues and Hinton Eds, Pineridge Press, p. 85-127, 1986.
- [MO75] A. Majda, S. Osher. Initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations with Uniformly Characteristic Boundaries, *Comm. Pure Applied Math.*, vol. 28, p. 607-675, 1975.
- [MBGB87] P. Mazet, F. Bourdel, R. Greborio, J. Borée. Application de la méthode variationnelle d'entropie à la résolution des équations d'Euler, *ONERA, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse*, Rapport Interne, 1987.
- [Me87] B. Mercier. Mise en œuvre d'un schéma décentré d'ordre 2 pour les équations d'Euler instationnaires, *Rapport Aérospatiale S/DT/N* n°8 / 87, juin 1987.
- [Me91] G. Mehlman. Etude de quelques problèmes liés aux écoulements en déséquilibre chimique et thermique, *Thèse de l'Ecole Polytechnique*, novembre 1991.
- [MT89] J. Mercier, I. Terrasse. Détermination des conditions aux limites pour les schémas "volumes finis" appliqués aux équations de Navier Stokes, *Stage d'option de l'Ecole Polytechnique*, Aérospatiale Les Mureaux, S/DT/MI, juillet 1989.
- [Mi89] Michaux O. Présentation du code Cel3gr de résolution des équations d'Euler tridimensionnelles pour l'air à l'équilibre chimique, *Rapport Aérospatiale STS/A1* n°0287 du 22 juin 1989.
- [Mi91] O. Michaux. Code Cel3gr. Version 1.1. Mise en œuvre d'un schéma en temps implicite, *Rapport Aérospatiale ST/S* n°0422 du 5 mars 1991.
- [MO92] J. P. Morand, R. Ohayon. *Interactions fluide-structure*, Recherches en Mathématiques Appliquées n°23, Masson, Paris 1992.
- [Mo89] G. Mortchélévicz. Résolution des équations d'Euler instationnaires en maillages non structurés, *La Recherche Aérospatiale* n°1989.6, p. 1-16, 1989.

- [MYV87] J.L. Montagné, H.C. Yee, M. Vinokur. Comparative Study of High-Resolution Shock-Capturing Schemes for a Real Gas, *NASA TM 100004*, juillet 1987.
- [Mo68] G. Moretti. The Importance of Boundary Conditions in the Numerical Treatment of Hyperbolic Equations, *Polytechnic Institute of Brooklyn*, PIBAL Rept. n°68-34, 1968.
- [NS77] T. Nishida, J. Smoller. Mixed Problems for Nonlinear Conservation Laws, *Journal of Differential Equations*, vol. 23, p. 244-269, 1977.
- [Ol57] O. Oleinik. Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations, *Usp. Mat. Nauk. (N.S.)*, vol. 12, p. 3-73, et *Amer. Math. Transl.*, Ser. 2, vol. 26, p. 95-172, 1957.
- [Os81] S. Osher. Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws, in *Math. Studies* n°47 (Axelsson-Franck-Van der Sluis Eds.), p. 179-205, North Holland, Amsterdam, 1981.
- [Os84] S. Osher. Riemann Solvers, the Entropy Condition and Difference Approximations, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 21, p. 217-235, 1984.
- [OC83] S. Osher, S. Chakravarthy. Upwind Schemes and Boundary Conditions with Applications to Euler Equations in General Geometries, *J. Computational Physics*, vol. 50, p. 447-481, 1983.
- [PDC91] S. Pavsic, F. Dubois, F. Coron. Prise en compte de conditions aux limites de glissement dans un code Navier Stokes bidimensionnel, *Rapport Aérospatiale*, ST/S n°102 329, octobre 1991.
- [PT83] R. Peyret, T.D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [PV75] Peyret R., Viviand H. Computation of Viscous Compressible Flows Based on the Navier Stokes Equations, *AGARDograph* n°212, Smolderen Editeur, septembre 1975.
- [Pi95] S. Piperno. Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure, *Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, juin 1995.
- [Ra87] P.A. Raviart. *Modèles différentiels. Résolution et applications*, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1987.
- [RM67] R.D. Richtmyer, K.W. Morton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publishing, J. Wiley & Sons, New York, 1967.
- [Ri81] A. Rizzi. Computation of Rotational Transonic Flow, in *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock*

- Waves*, (Rizzi-Viviand Eds), Vieweg Verlag, Braunschweig, p. 153-161, 1981.
- [Ri82] A. Rivas. BE03, Programme de calcul tridimensionnel de la transmission de chaleur et de l'ablation, *Rapport Aerospatiale Les Mureaux*, 1982.
- [Ro72] P.J. Roache. *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, 1972.
- [Roe81] P. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics*, vol. 43, p. 357-372, 1981.
- [RS88] P. Rostand, B. Stoufflet. Finite Volume Galerkin Methods for Viscous Gas Dynamics, *Rapport INRIA n°863*, juillet 1988.
- [RC96] F. Ruffino, F. Coron. Aéroélasticité des lanceurs, condition limite de transpiration, *Rapport Aerospatiale Espace & Defense*, Centre Opérationnel Systèmes, 3 décembre 1996.
- [Sa92] Manuel Samsef, Asef, Stabi-Dynam-Repdyn, *Samtech*, M4, 1992.
- [Sa83] R. Sanders. On Convergence of Monotone Finite Difference Schemes With Variable Spatial Differencing, *Math. of Comp.*, vol. 40, p.91-106, 1983.
- [SP74] R.H. Sanders, K.H. Prendergast. The Possible Relation of the 3-kiloparsec Arm to Explosions in the Galactic Nucleus, *the Astrophysical Journal*, vol. 188, p. 489-500, mars 1974.
- [Sc67] L. Schwartz. *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Hermann, Paris, 1967.
- [SO88] C.W. Shu, S. Osher. Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes, *Journal of Computational Physics*, vol. 40, p. 439-471, 1988.
- [Sm83] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [STW87] S. Srinivasan, J.C. Tannehill, K.J. Weilmuenster. Simplified Curve Fits for the Thermodynamic Properties of Equilibrium Air, *NASA R.P.* n°1181, août 1987.
- [St84] B. Stoufflet. Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis, Thèse de Docteur-Ingénieur, *Université Paris 6*, 1984.
- [St89] B. Stoufflet. Résolution approchée des flux d'Osher pour le gaz réel, *communication personnelle*, 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ta87] E. Tadmor. The Numerical Viscosity of Entropy Stable Schemes for Systems of Conservation Laws. I, *Mathematics of Computation*, vol. 49, n°179, p. 97-103, 1987.
- [Th87] K.W. Thomson. Time-Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, *J. Computational Physics*, vol. 68, p. 1-24, 1987.
- [vL77] B. van Leer. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme IV. A New Approach to Numerical Convection, *Journal of Computational Physics*, vol. 23, p. 276-299, 1977.
- [vL79] B. van Leer. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method, *Journal of Computational Physics*, vol. 32, n°1, p. 101-136, 1979.
- [vL82] B. van Leer. Flux Vector Splitting for the Euler Equations, 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Aachen, *Lectures Notes in Physics*, Springer Verlag, p. 507-512, 1982.
- [vL84] B. van Leer. On the relation between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, *SIAM J. Sci. Stat. Computing*, vol. 5, n°1, p. 1-20, 1984.
- [VTP89] B. van Leer, C.H. Tai, K.G. Powell. Design of Optimally Smoothing Multi-Stage Schemes for the Euler Equations, *AIAA 9th CFD Conference*, Buffalo, AIAA Paper 89-1933 CP, juin 1989.
- [Vi82] G. Vijayasundaram. Résolution numérique des équations d'Euler pour des écoulements transsoniques avec un schéma de Godunov en éléments finis, *Thèse de 3^e cycle, Université Paris 6*, 1982.
- [Vi86] G. Vijayasundaram. Transonic Flow Simulations Using an Upstream Centered Scheme of Godunov in Finite Elements, *Journal of Computational Physics*, vol. 63, p. 416-433, 1986.
- [Vi91] J.P. Vila. Condition d'entropie pour le schéma de Godunov multidimensionnel, *exposé INRIA Sophia Antipolis*, décembre 1991.
- [VV78] H. Viviand, J.P. Veuillot. Méthodes pseudo-stationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques, *Publication ONERA n°1978-4*, 1978.
- [Ya68] N. Yanenko. *Méthodes à pas fractionnaires*, Armand Colin, Paris, 1968.
- [Ye87] H.C. Yee. Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes, *NASA TM 89464*, 1987.
- [YBW82] H. Yee, R. Beam, R. Warming. Boundary Approximations for Implicit Schemes for One-Dimensional Inviscid Equations of Gas Dynamics, *AIAA Journal*, vol. 20, p. 1203-1211, 1982.

