



**HAL**  
open science

## Echantillonnage dépendant de l'état : une approche discrète

Sonia Maalej, Christophe Fiter, Laurentiu Hetel, Jean-Pierre Richard

► **To cite this version:**

Sonia Maalej, Christophe Fiter, Laurentiu Hetel, Jean-Pierre Richard. Echantillonnage dépendant de l'état : une approche discrète. 7ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. hal-00733230

**HAL Id: hal-00733230**

**<https://hal.science/hal-00733230>**

Submitted on 18 Sep 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Echantillonnage dépendant de l'état : une approche discrète

Sonia MAALEJ\* Christophe FITER\* Laurentiu HETEL\*  
Jean-Pierre RICHARD\*,\*\*

\* *Ecole Centrale de Lille, LAGIS (Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal, CNRS FRE 3303), 59651 Villeneuve d'Ascq, France*

\*\* *Non-A, INRIA Lille-Nord Europe, France*

---

**Résumé:** Ce travail concerne l'adaptation des instants d'échantillonnage pour des systèmes différentiels linéaires stationnaires contrôlés par retour d'état. De façon complémentaire à de nombreux travaux qui garantissent la stabilisation indépendamment des variations de la cadence d'échantillonnage, il s'agit ici de concevoir des séquences d'instants d'échantillonnage stabilisantes. Ici, on adapte dynamiquement les ressources nécessaires au calcul des lois de commande en agissant sur leurs instants d'échantillonnage qui ne sont plus périodiques. La solution proposée détermine une séquence d'échantillonnage en fonction de la valeur mesurée de l'état. On développe un algorithme d'ordonnement dynamique optimisant, sur un horizon d'échantillonnage donné, une séquence parmi un ensemble discret de solutions. Nos preuves sont inspirées des techniques de systèmes hybrides à commutations, alliant fonctions de Lyapunov et optimisation LMI. L'étude théorique est ensuite illustrée par une implémentation algorithmique sous Matlab/*TRUETIME* simulant l'interaction commande/ordonnement.

*Mots clés:* Systèmes Embarqués (SE), Calculateur numérique, Ordonnement, Stabilité, Systèmes Dynamiques Hybrides, Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

---

## 1. INTRODUCTION

La commande en temps réel se situe à la frontière entre l'automatique et l'informatique. Du point de vue de l'automatique, cela revient à la création d'une tâche de commande et à la conception d'un mécanisme d'ordonnement temps réel pour l'échantillonnage. Généralement, ce mécanisme a pour rôle de mettre en oeuvre l'exécution d'un ensemble de tâches sur un ensemble de ressources rattachées à un système informatique (processeur, réseau de communication, routeur, ...). Néanmoins, ces ressources sont souvent limitées et leur disponibilité est variable. Cette variation peut entraîner une dégradation de performance, voire la perte de stabilité [Wittenmark et al. (1995)] [Li et al. (2010)]. De ce fait, une large attention a été portée aux systèmes embarqués et/ou commandés en réseau [Zhang et al. (2001)].

Plusieurs travaux ont abordé des questions liées aux retards (de communication ou d'accès aux ressources) ainsi qu'à l'échantillonnage qui, dans un tel contexte, n'est plus forcément périodique. De nombreuses recherches ont étudié le problème de robustesse vis-à-vis du *pas d'échantillonnage variable* [Fridman et al. (2004)] [Fridman (2010)] [Seuret (2009)] [Hetel et al. (2011)], ou du *retards variables* [Gu and Niculescu (2003)], [Gu et al. (2003)] [Richard (2003)], ou encore la combinaison des deux problèmes [Jiang and Seuret (2010)] [Naghshabrizi

et al. (2010)] [Liu and Fridman (2009)]. Tous ces travaux visent des conditions de robustesse de la stabilité sous réserve que le pas d'échantillonnage ou le retard reste en deçà d'une certaine borne maximale. Les preuves se fondent sur des fonctions de Lyapunov conduisant à des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Cependant, ces travaux ne permettent d'obtenir qu'un seul pas d'échantillonnage maximal pour tout l'espace d'état du système.

D'autres travaux [Li et al. (2010)] considèrent la stabilité sous une séquence périodique de temps d'échantillonnage, correspondant à un ordonnancement statique hors ligne. Ici encore, la cadence d'échantillonnage reste indépendante de la valeur de l'état.

Depuis quelques années, des travaux proposant un contrôle dynamique du pas d'échantillonnage de façon à réduire les ressources nécessaires pour la commande sont apparus. Deux approches principales se distinguent selon qu'un événement déclenche l'échantillonnage: *event-triggered* [Tabuada (2007)] [Heemels et al. (2008)] [Lunze and Lehmann (2010)] [Mazo and Tabuada (2011)] ou que le prochain instant d'échantillonnage est calculé sur la base d'un modèle du processus: *self-triggered* [Wang and Lemmon (2009)] [Wang and Lemmon (2010)] [Mazo et al. (2010)]. Dans le premier cas, des informations sont envoyées au contrôleur lorsque des événements spéciaux se produisent (passage d'une frontière de l'espace d'état par exemple) et ceci nécessite un matériel dédié. Dans le second, le calculateur *self-triggered* émule le contrôle

---

\* Ce travail a été réalisé à l'Ecole Centrale de Lille au sein de l'équipe SyNER.

*event-triggered* mais sans recourir à un matériel dédié. Ceci signifie qu'à chaque instant d'échantillonnage, on calcule la borne inférieure du prochain intervalle d'échantillonnage. Plus récemment encore, Fiter et al. (2011) ont proposé d'utiliser une cartographie de l'espace d'état calculée hors-ligne : à chaque région de la carte correspond un pas d'échantillonnage (maximal) admissible. Cette technique s'appuie sur un modèle dynamique hybride (à commutations). Ici encore, l'étude fait intervenir des fonctions de Lyapunov qui assurent la stabilité du système continu sous échantillonnage à pas variable mais sur une cartographie réalisée hors ligne.

C'est dans ce même contexte d'adaptation à l'état que nous considérons ici une nouvelle approche d'échantillonnage. L'originalité par rapport à [Fiter et al. (2011)] est de considérer une optimisation des séquences sur un ensemble discret correspondant à un horizon fini d'échantillonnages pour construire implicitement une cartographie de l'espace d'état plus large basée sur les fonctions de Lyapunov. Dans un premier temps, nous présenterons la problématique et proposerons un modèle de type système à commutation sur un horizon d'échantillonnage donné. Puis nous développerons l'algorithme d'ordonnement dynamique permettant de déterminer les futurs pas d'échantillonnage. Enfin, l'étude théorique sera illustrée par une implémentation algorithmique sous Matlab/Simulink simulant l'interaction commande/ordonnement.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME

### 2.1 Modèle idéal continu d'un processus commandé par retour d'état

On s'intéresse dans ce manuscrit à un processus linéaire et continu. Le modèle de ce système peut être écrit:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \quad t > 0; \quad x(0) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

avec  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - la matrice d'état,  $B_c \in \mathbb{R}^{n \times r}$  - la matrice d'entrée,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  - l'état du système continu et  $u \in \mathbb{R}^r$  - la commande du système.

**Hypothèse 1.** On considère que le système (1) est commandable. De ce fait, il existe une commande par retour d'état de gain  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$  :

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

tel que le système:

$$\dot{x}(t) = (A_c + B_c K)x(t) \quad (3)$$

est asymptotiquement stable, c'est à dire, la matrice  $(A_c + B_c K)$  est une matrice de Hurwitz.

### 2.2 Modèle d'un processus commandé par un contrôleur numérique

Le schéma de la boucle de commande du système échantillonné est décrit par la Figure 1.

On suppose que l'état  $x(t)$  du système (3) est échantillonné aux instants  $t_h$  avec  $h \in \mathbb{N}$ , tels que  $t_{h+1} > t_h$ ,  $t_0 = 0$  et  $t_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \infty$ . On note alors les intervalles d'échantillonnage

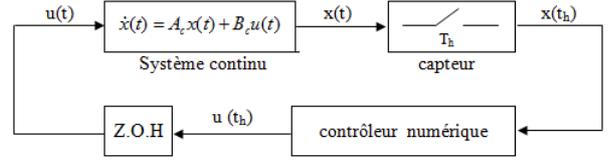


Fig. 1. Schéma d'un système commandé par un contrôleur numérique

$T_h = t_{h+1} - t_h$ ,  $h \in \mathbb{N}$ . L'état du système échantillonné  $x(t_h)$  sera ensuite utilisé par le contrôleur numérique afin de calculer la commande du système  $u(t) = Kx(t_h) \forall t \in [t_h, t_{h+1})$ . De ce fait, le modèle discrétisé du système aux instants  $t_h$  peut être mis sous la forme suivante:

$$x(t_{h+1}) = e^{A_c T_h} x(t_h) + \int_0^{T_h} e^{A_c s} ds B_c u(t_h), \quad h \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

En posant  $A_{d(T_h)} = e^{A_c T_h}$  et  $B_{d(T_h)} = \int_0^{T_h} e^{A_c s} ds B_c$ , on peut écrire l'équation (5) sous la forme discrète:

$$x(t_{h+1}) = (A_{d(T_h)} + B_{d(T_h)} K)x(t_h) = \tilde{A}_{(T_h)} x(t_h), \quad (5)$$

où  $h \in \mathbb{N}$  et  $\tilde{A}_{(T_h)} = (A_{d(T_h)} + B_{d(T_h)} K)$ .

### 2.3 Motivation

L'objectif de ce travail est de caractériser les séquences d'échantillonnage  $T_h$  qui permettent de stabiliser le système. Lorsque le pas d'échantillonnage est constant, la valeur maximale qui assure la stabilité du système est donnée par la valeur maximale  $T_{max}$  pour laquelle  $\tilde{A}_{(T_{max})}$  est une matrice de Schur.

**Définition 1.** Si pour un  $T$  donné, la matrice  $\tilde{A}_{(T)}$  est une matrice de Schur, nous dirons que  $T$  est un *pas d'échantillonnage stabilisant*. Autrement, on dit que c'est un *pas d'échantillonnage non stabilisant*.

En s'appuyant sur [Li et al. (2010)], on remarque que le système (3) échantillonné selon une combinaison des pas d'échantillonnage stabilisants et non stabilisants, peut être asymptotiquement stable. A titre d'exemple, on considère:

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} -1 & -6 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

D'après la Figure 2, l'intervalle de stabilité de ce système discrétisé par un pas d'échantillonnage constant est:  $[T_{min}, T_{max}] = [0, 0.59]$ .

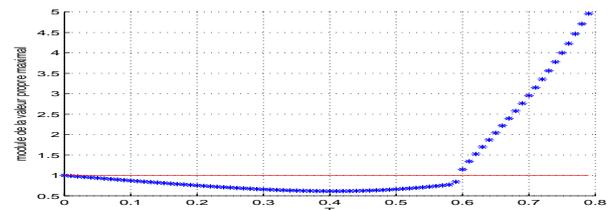


Fig. 2. Evolution du module de la valeur propre maximale de  $\tilde{A}_{(T)}$  en fonction de  $T$

**Définition 2.** Une séquence d'échantillonnage périodique de longueur  $l$  est une séquence qui se reproduit aux instants  $t_h + T, \forall h \in \mathbb{N}$  (i.e.  $T_{h+l} = T_h, \forall h \in \mathbb{N}$ ).

Le domaine de stabilité pour une séquence d'échantillonnage périodique de type:  $(T_1, T_2, T_1, T_2, \dots)$  est calculé en analysant la matrice de transition  $\tilde{A}_{T_1} \tilde{A}_{T_2}$  sur une période. Si ce produit matriciel conduit à une matrice de Schur, le système est asymptotiquement stable. La Figure 3 présente le domaine de stabilité du système (3) décrit par (6).

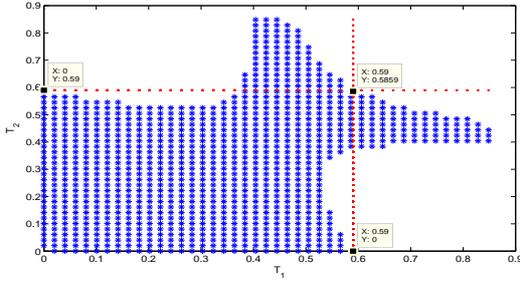


Fig. 3. Domaine de stabilité pour une séquence d'échantillonnage périodique:  $(T_1, T_2, T_1, T_2, \dots)$

D'après cette Figure, on remarque qu'il existe des séquences d'échantillonnage  $(T_1, T_2, T_1, T_2, \dots)$  avec  $T_1 = 0.8081$  et  $T_2 = 0.4848$  par exemple, qui sont stabilisantes malgré le fait que le temps d'échantillonnage  $T_1 > T_{max}$  (Figure 4).

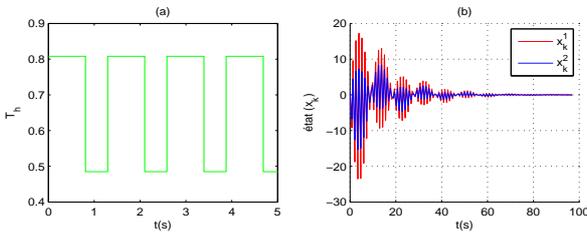


Fig. 4. Variation de l'état du système (5) discrétisé par la séquence périodique  $(0.8081, 0.4848, 0.8081, 0.4848, \dots)$

Partant de cette observation, cet article vise à caractériser des séquences d'échantillonnage qui stabilisent le système (5) en utilisant des pas d'échantillonnage supérieurs à  $T_{max}$ . Cependant, on veut aller plus loin que ce cas de séquence périodique, et par la suite généraliser cette approche. Pour cette raison, on cherche à caractériser l'évolution des séquences d'échantillonnage sur un horizon d'échantillonnage fini (que l'on notera  $\sigma$ ), formé par des pas d'échantillonnage en fonction de l'état du système, pour assurer la stabilité asymptotique des systèmes de type (5).

#### 2.4 Formulation mathématique

Pour  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma = \{T^j\}_{j=1}^l$  désigne un horizon d'échantillonnage de longueur  $l$ , où  $j$  représente la position d'un pas d'échantillonnage à l'intérieur de l'horizon.

Soit  $\Gamma$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^+$ .

On définit  $S_{l_{min}}^{l_{max}}(\Gamma)$  l'ensemble des horizons  $\sigma = \{T^j\}_{j=1}^l$  de longueur  $l \in [l_{min}, l_{max}]$ , avec  $T^j \in \Gamma$  et  $l_{min}$  et où

$l_{max}$  représentent respectivement les longueurs minimale et maximale des horizons  $\sigma \in S_{l_{min}}^{l_{max}}$ .

Par extension, on note  $S_{l_{min}}^{l_{max}}$  l'ensemble des horizons d'échantillonnage avec des valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  dont les longueurs appartiennent à l'intervalle  $[l_{min}, l_{max}]$ .

On définit  $\sigma_k = (T_k^1, T_k^2, \dots, T_k^{l_k}) \in S_{l_{min}}^{l_{max}}$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , une séquence de l'horizon d'échantillonnage. Les  $T_k^i$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{1, \dots, l_k\}$ , définissent des pas d'échantillonnage où  $k$  indique l'index de l'horizon et  $i$  la position de ce pas dans l'horizon  $\sigma_k$  considéré.

On considère ensuite  $\Theta = \{T_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  une séquence d'échantillonnage caractérisée par la concaténation des horizons  $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in S_{l_{min}}^{l_{max}}$ . D'où:

$$\Theta = (\underbrace{T_0^1, T_0^2, \dots, T_0^{l_0}}_{\sigma_0}, \underbrace{T_1^1, T_1^2, \dots, T_1^{l_1}}_{\sigma_1}, \dots, \underbrace{T_k^1, T_k^2, \dots, T_k^{l_k}}_{\sigma_k}, \dots).$$

Enfin, on note  $\tau_k |_{k \in \mathbb{N}}$  l'instant de début d'un horizon  $\sigma_k$  tel que  $\tau_{k+1} = \tau_k + \sum_{i=1}^{l_k} T_k^i$  et  $\tau_0 = t_0 = 0$  (Figure 5).

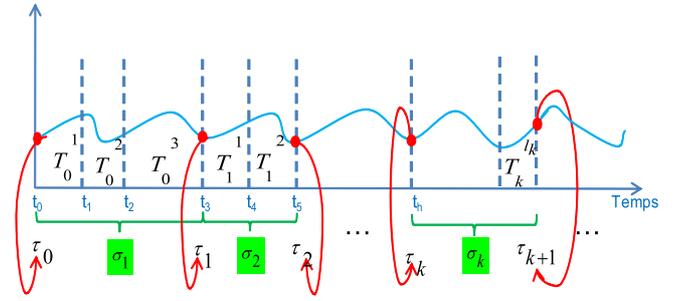


Fig. 5. Discrétisation de l'état du système par des séquences variables

La représentation du système (5) sur un horizon d'échantillonnage pour une séquence  $\sigma_k$  est donné comme suit:

$$x_{k+1} = \Phi_{\sigma_k} x_k, k \in \mathbb{N} \quad (7)$$

où  $x_k = x(\tau_k)$  - l'état du système à l'instant  $\tau_k$  de début de l'horizon  $\sigma_k$  (voir Figure 6) et  $\Phi_{\sigma_k} = \tilde{A}_{(T_k^{l_k})} \tilde{A}_{(T_k^{l_k-1})} \dots \tilde{A}_{(T_k^1)}$  - la matrice de transition selon une séquence de l'horizon d'échantillonnage  $\sigma_k$ , de l'instant  $\tau_k$  à l'instant  $\tau_{k+1}$ .

L'objectif du travail est de calculer à l'instant  $\tau_k$ , le prochain horizon d'échantillonnage  $\sigma_k$  qui sera appliqué au niveau de l'échantillonneur pour garantir la stabilité. De ce fait, et d'après l'équation (7), on remarque que cet objectif revient à un problème de commande d'un système linéaire à commutation [Liberzon et al. (1999)] [Lee and Dullerud (2006)]. En fait, les systèmes à commutation constituent une classe de systèmes dynamiques hybrides, pour lesquels une loi logique indique un sous-système actif parmi une famille de sous-systèmes à dynamique continue [Zhang et al. (2009)] [Mason et al. (2007)].

Notre problème mathématique peut être exposé par:

**Problème :** Pour des pas d'échantillonnage  $T_h \in \Gamma$ , déterminer l'évolution de l'horizon d'échantillonnage en

fonction de l'état du système (7) à l'instant  $\tau_k$  de début d'horizon, c'est à dire, définir  $\sigma_k$  comme une fonction  $f(x(\tau_k))$  ( $\sigma_k = f(x(\tau_k))$ ), de façon à garantir la stabilité asymptotique.

### 3. RÉSULTATS

#### 3.1 Théorème de stabilité

Pour assurer la stabilité asymptotique des systèmes discrétisés avec des séquences d'échantillonnage variables stables par rapport à l'espace d'état (Figure 6), on considère le *Théorème 1*.

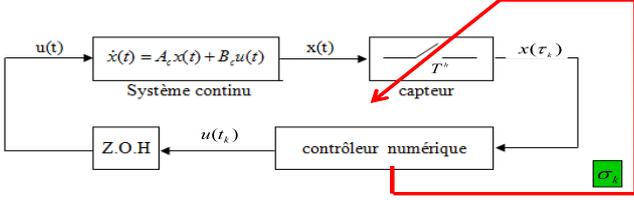


Fig. 6. Schéma de bloc d'un système commandé par un contrôleur numérique et échantillonné selon une loi de commutation en fonction de l'état

#### Théorème 1.

Soit:

$$\tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}} = \{\sigma \in S_{l_{min}}^{l_{max}}, \exists P_\sigma = P_\sigma^T > 0; \Phi_\sigma^T P_\sigma \Phi_\sigma - P_\sigma < 0\}$$

le sous ensemble des séquences périodiques stables de l'ensemble  $S_{l_{min}}^{l_{max}}$  tel que pour chaque  $\sigma \in \tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}}$ ,  $P_\sigma$  vérifie l'inégalité matricielle linéaire:

$$\Phi_\sigma^T P_\sigma \Phi_\sigma - P_\sigma < 0. \quad (8)$$

Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}}$  définie par:

$$f(x) = \operatorname{argmin}_{i \in \tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}}} (x^T \Phi_i^T P_i \Phi_i x); x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Alors le système:

$$x_{k+1} = \Phi_{\sigma_k} x_k \text{ avec } \sigma_k = f(x_k) \quad (10)$$

est asymptotiquement stable.

#### Preuve 1.

En appliquant le *Lemme 2* de [Lee and Dullerud (2006)] pour le système (10), une condition suffisante pour la stabilité du système est donnée par l'existence d'une matrice suite de  $\tilde{P}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des scalaires  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  tels que  $\forall k \geq 0$ :

$$\alpha I \leq \tilde{P}_k \leq \beta I \text{ et } \Phi_{\sigma_k}^T \tilde{P}_{k+1} \Phi_{\sigma_k} - \tilde{P}_k \leq -\alpha I.$$

Ceci implique qu'il existe une fonction  $V(x_k, k) = x_k^T \tilde{P}_k x_k$  strictement décroissante.

Dans ce papier, on considère en particulier la fonction de Lyapunov polyquadratique  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ :

$$V(x_k, k) = \begin{cases} x_0^T P_{\sigma_0} x_0 & k = 0 \\ x_k^T P_{\sigma_{k-1}} x_k & k > 0 \end{cases} \quad (11)$$

avec  $P_\sigma = P_\sigma^T \succ 0$  puisque  $\sigma \in \tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}}$ . L'incrément de Lyapunov s'écrit:

$$\Delta V_k = V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k). \quad (12)$$

- Pour  $k=0$ :

$$\Delta V_k|_{k=1} = x_1^T P_{\sigma_0} x_1 - x_0^T P_{\sigma_0} x_0. \quad (13)$$

D'après l'équation (7) on a:

$$\Delta V_k|_{k=1} = x_0^T (\Phi_{\sigma_0}^T P_{\sigma_0} \Phi_{\sigma_0} - P_{\sigma_0}) x_0. \quad (14)$$

D'où, en appliquant l'inégalité (8), on a,  $\forall x_0 \neq 0$ ,  $\Delta V_k|_{k=1} < 0$ .

- Pour  $k>0$ :

L'incrément de Lyapunov s'écrit alors comme suit:

$$\Delta V_k = x_{k+1}^T P_{\sigma_k} x_{k+1} - x_k^T P_{\sigma_{k-1}} x_k. \quad (15)$$

D'où, d'après (7):

$$\Delta V_k = x_k^T (\Phi_{\sigma_k}^T P_{\sigma_k} \Phi_{\sigma_k} - P_{\sigma_{k-1}}) x_k. \quad (16)$$

D'autre part, l'équation (9) implique que  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$x_k^T \Phi_{\sigma_k}^T P_{\sigma_k} \Phi_{\sigma_k} x_k \leq x_k^T \Phi_{\sigma_{k-1}}^T P_{\sigma_{k-1}} \Phi_{\sigma_{k-1}} x_k. \quad (17)$$

Par la suite, et d'après les équations (16) et (17), on constate que  $\forall x_k \neq 0$ :

$$\Delta V_k \leq x_k^T (\Phi_{\sigma_{k-1}}^T P_{\sigma_{k-1}} \Phi_{\sigma_{k-1}} - P_{\sigma_{k-1}}) x_k. \quad (18)$$

D'où, d'après (8),  $\Delta V_k < 0, \forall x_k \neq 0$ .

Donc, le système (10) est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.** L'un des avantages de l'approche temps discret est le fait que cette dernière permet de déterminer une cartographie de l'espace d'état implicitement à partir des fonctions de Lyapunov.

**Remarque 2.** Etant donné que le système continu est un système Linéaire Invariant dans le Temps (LTI) pour toute  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ , et si on considère que  $\Gamma$  est un sous-ensemble borné,  $x(t)$  peut être exprimé sous la forme (voir *Propotion 2* de [Fujioka (2009)]):

$$x(t) = \Lambda(t - \tau_k) x_k, \quad \forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (19)$$

où  $\Lambda$  est un opérateur linéaire borné représentant la matrice de transition du système de l'instant  $\tau_k$  à l'instant  $t$ .

Dans ce cas, la convergence des séquences  $\|x(\tau_k)\|_{k \rightarrow \infty}$  implique la convergence de  $\|x(t)\|$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

#### 3.2 Algorithme de détermination de la loi de commutation

Pour déterminer la loi de commutation (9) du *Théorème 1*, on applique l'algorithme suivant:

#### Algorithme 1.

- (1) Définir un ensemble  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}$  des pas d'échantillonnage tel que  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ;
- (2) Pour les longueurs  $l_{min}$  et  $l_{max}$  définies par l'utilisateur, chercher  $\tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}}(\Gamma) \subset \tilde{S}_{l_{min}}^{l_{max}}$ , le sous ensemble des séquences stables de  $S_{l_{min}}^{l_{max}}$ ;

- (3) Calculer, pour chaque horizon  $\sigma \in \bar{S}_{l_{min}}^{l_{max}}(\Gamma)$ , les matrices de Lyapunov  $P_\sigma$  de chaque séquence  $\sigma$ ;
- (4) Calculer la loi de commutation (9) en appliquant le *Théorème 1*.

#### 4. EXEMPLES

Pour mieux comprendre l'application de l'*Algorithme 1* en pratique, on considère le système (10) décrit par les matrices (6) et l'ensemble de valeurs données  $\Gamma = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ . Malgré le fait qu'on ait déjà vu que l'intervalle de stabilité de notre système est de la forme  $[T_{min}, T_{max}] = [0, 0.59]$ , on remarque qu'on a choisi ici un ensemble  $\Gamma$  qui admet des pas d'échantillonnage supérieurs à  $T_{max}$ .

La Figure 7 présente la séquence d'échantillonnage  $\Theta$  formée par les horizons d'échantillonnage  $\sigma_k$  de longueur  $l_k \in [l_{min}, l_{max}]$  tel que  $l_{min} = 1$ ,  $l_{max} = 3$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

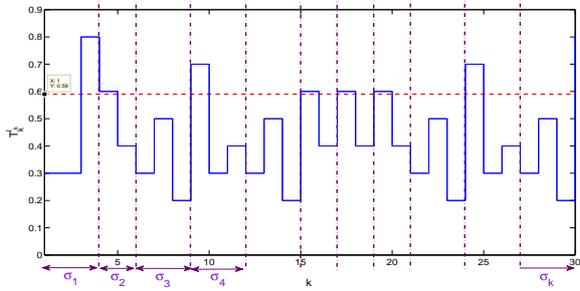


Fig. 7. Variation des pas d'échantillonnage  $T_k^i |_{i \in \{1, \dots, l_k\}}$

D'après cette Figure, on remarque que la séquence d'échantillonnage est bien variable et que les horizons d'échantillonnage sont de différentes longueurs  $l_k \in \{1, \dots, m\}$ . De plus, on constate que des pas d'échantillonnage non stabilisants, c'est à dire, supérieurs à  $T_{max}$ , sont bien utilisés pour assurer la stabilité asymptotique du système (voir Figure 8).

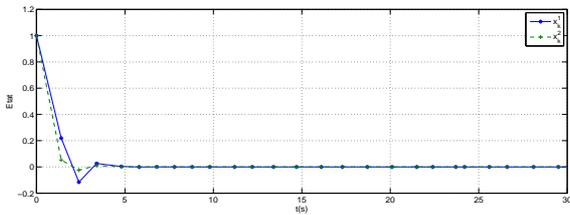


Fig. 8. Evolution de l'état du système pour des pas d'échantillonnage variables des horizons  $\sigma_k$  de la Figure 7

La stabilité de ce système peut être vérifiée en se basant sur le *Théorème 1*. La Figure 9 montre l'évolution de la fonction de Lyapunov  $V(x_k, k) = x_k^T P_{\sigma_{k-1}} x_k$  qui est décroissante et positive au cours du temps.

On implémente le module de contrôle sous un simulateur de système d'exploitation en temps réel appelé *TRUE TIME* (voir Figure 10). L'implémentation du système dans cet environnement se déroule en deux phases. Tout d'abord,

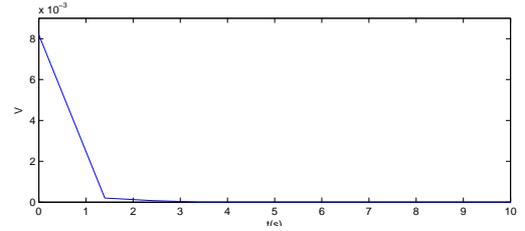


Fig. 9. Variation de la fonction de Lyapunov

on applique les trois premières étapes de l'*Algorithme 1* hors ligne. La dernière étape de cet algorithme, la recherche de la loi de commutation, se fait en ligne: la détermination de l'horizon d'échantillonnage s'effectue au fur et à mesure de l'exécution en fonction de l'état.

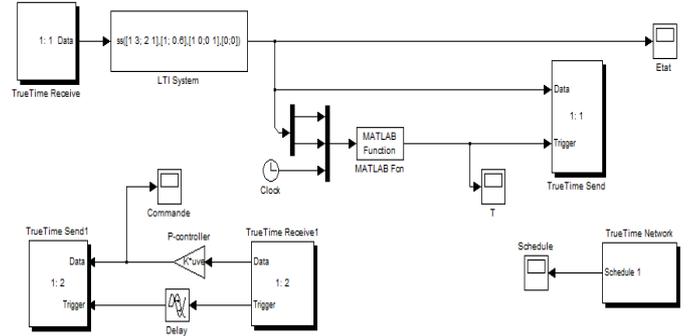


Fig. 10. Bloc de simulation pour des séquences variables stables dans l'environnement de *TRUE TIME*

La Figure 11 présente les instants d'envoi des informations de la part du bloc *TRUE TIME Send* et de réception du bloc *TRUE TIME Receive* via un réseau à travers le bloc *TRUE TIME Network*. Cette Figure montre que ces instants varient tout en assurant la stabilité asymptotique du système (voir Figure 12).

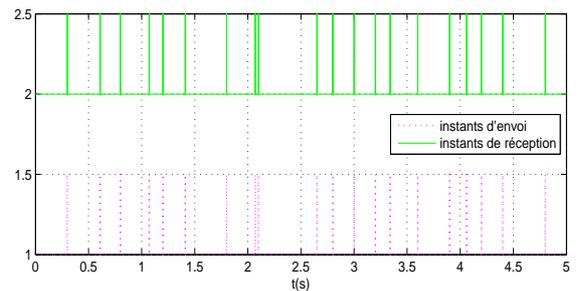


Fig. 11. Instants de transmission des informations au niveau du bloc *TRUE TIME Network*

**Remarque 3.** On remarque d'après les deux Figures 8 et 12.(b) que, pour les mêmes conditions initiales, l'état du système n'admet pas la même allure. Ceci peut être expliqué par l'apparition de plusieurs perturbations (retard de l'actuation du processus en temps réel, ...).

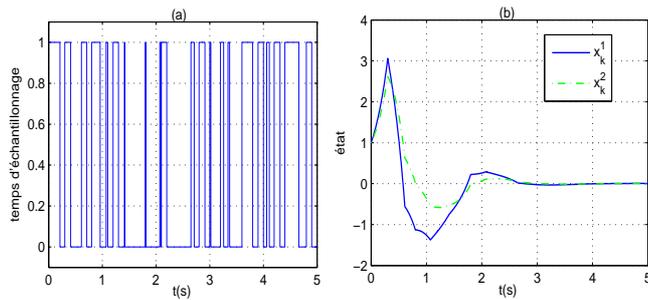


Fig. 12. (a) - Variation du temps d'échantillonnage et (b) - Variation de l'état du système contrôlé en temps réel sur l'environnement de *TRUETIME*

## 5. CONCLUSION

Ce travail a concerné l'analyse de stabilité et la synthèse des lois d'échantillonnage variables pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Pour cette classe de systèmes, il existe des outils permettant de garantir la stabilité indépendamment de la séquence d'échantillonnage. Cependant, les valeurs d'échantillonnage possibles sont toujours bornées par la limite de stabilité des échantillonnages constants. Dans cet article, on a montré comment tenir compte de l'évolution de l'état du système pour mieux gérer l'échantillonnage. On a donc synthétisé un ordonnancement dynamique en ligne. On a proposé une cartographie de l'espace d'état basée sur les fonctions de Lyapunov et qui définit l'évolution de la séquence d'échantillonnage sur un horizon fini. Un nouveau critère de stabilité à base de LMI a été défini. Le théorème de stabilité obtenu est fondé sur des modèles discrétisés à commutation. Cette approche permet d'augmenter l'intervalle d'échantillonnage et de dépasser la limite de stabilité donnée par un pas constant. L'algorithme développé est illustré par des exemples numériques sur Matlab et *TRUETIME*.

## REFERENCES

- Fiter, C., Hetel, L., Perruquetti, W., and Richard, J.P. (2011). A state dependent simpling for linear state feedback. In *Automatica (Provisionally accepted)*.
- Fridman, E. (2010). A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46(2), 421 – 427.
- Fridman, E., Seuret, A., and Richard, J.P. (2004). Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. *Automatica*, 40(8), 1441 – 1446.
- Fujioka, H. (2009). Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices. *Automatica*, 45(3), 771 – 775.
- Gu, K., Kharitonov, V., and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Boston: Birkhauser.
- Gu, K. and Niculescu, S. (2003). Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125(2), 158–165.
- Heemels, W., Sandee, J.H., and Bosch, P.V. (2008). Analysis of event-driven controllers for linear systems. *International Journal of Control*, 81(4), 571–590.
- Hetel, L., Kruszewski, A., Perruquetti, W., and Richard, J.P. (2011). Discrete and intersample analysis of systems with aperiodic sampling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7), 1696 –1701.
- Jiang, W. and Seuret, A. (2010). Improved stability analysis of networked control systems under asynchronous sampling and input delay. *2nd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems, Annecy, France*.
- Lee, J.W. and Dullerud, G. (2006). Uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systems. *Automatica*, 42(2), 205 – 218.
- Li, X.G., Cela, A., Niculescu, S., and Reama, A. (2010). Some problems in the stability of networked-control systems with periodic scheduling. *International Journal of Control*, 83, 996–1008.
- Liberzon, D., Hespanha, J., and Morse, A. (1999). Stability of switched systems: a lie-algebraic condition. In *Systems and Control Letters*, volume 37, 117 – 122.
- Liu, K. and Fridman, E. (2009). Stability analysis of functional control systems: A discontinuous lyapunov functional approach. *48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, China*, 1330 –1335.
- Lunze, J. and Lehmann, D. (2010). A state-feedback approach to event-based control. *Automatica*, 46(1), 211–215.
- Mason, P., Sigalotti, M., and Daafouz, J. (2007). On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic lyapunov functions. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 5629 –5633.
- Mazo, M., Anta, A., and Tabuada, P. (2010). An iss self-triggered implementation of linear controllers. *Automatica*, 46(8), 1310–1314.
- Mazo, M. and Tabuada, P. (2011). Decentralized event-triggered control over wireless sensor/actuator networks. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 56, 2456–2461.
- Naghshtabrizi, P., Hespanha, J., and Teel, A. (2010). Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 32(5), 511–528.
- Richard, J.P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10), 1667 – 1694.
- Seuret, A. (2009). Stability analysis for sampled-data systems with a time-varying period. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 8130 –8135.
- Tabuada, P. (2007). Event-triggered real time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9), 1680–1685.
- Wang, X. and Lemmon, M. (2009). Self-triggered feedback control systems with finite-gain  $l_2$  stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3), 452–467.
- Wang, X. and Lemmon, M. (2010). Self-triggering under state-independent disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6), 1494–1500.
- Wittenmark, B., Nilsson, J., and Torngren, M. (1995). Timing problems in real-time control systems. *Proceedings of the American Control Conference*, 2000–2004.
- Zhang, W., Abate, A., Hu, J., and Vitus, M. (2009). Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems. In *Automatica*, volume 45, 2526 – 2536.
- Zhang, W., Branicky, M., and Phillips, S. (2001). Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems magazine*, 21(1), 84 –99.