



HAL
open science

Alpha-divergences pour la segmentation d'images par contours actifs basés histogrammes : Application à l'analyse d'images médicales et biomédicales

Leila Meziou, Aymeric Histace, Frédéric Precioso

► **To cite this version:**

Leila Meziou, Aymeric Histace, Frédéric Precioso. Alpha-divergences pour la segmentation d'images par contours actifs basés histogrammes : Application à l'analyse d'images médicales et biomédicales. 2012. hal-00732364

HAL Id: hal-00732364

<https://hal.science/hal-00732364v1>

Submitted on 14 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport de recherche
Alpha-divergences pour la segmentation d'images par
contours actifs basés histogrammes :
Application à l'analyse d'images médicales et biomédicales

Leïla Meziou, Aymeric Histace,
ETIS - UMR 8051
CNRS- ENSEA- Université de Cergy-Pontoise, F95000, France
leila.meziou@ensea.fr, aymeric.histace@ensea.fr

Frédéric Precioso
I3S UNS-CNRS 7271
Université de Nice Sophia Antipolis, France
precioso@unice.fr

13 septembre 2012

Résumé

Cet article présente une méthode de segmentation par contours actifs basés histogramme intégrant comme mesure de similarité la famille particulière des alpha-divergences. L'intérêt principal de cette méthode réside (i) dans la flexibilité des alpha-divergences dont la métrique intrinsèque peut-être paramétrisée via la valeur de alpha et donc adaptée aux distributions statistiques des régions de l'image à segmenter ; et (ii) dans la capacité unificatrice de cette mesure statistique vis-à-vis des distances classiquement utilisées dans ce contexte (Kullback- Leibler, Hellinger...). Nous abordons l'étude de cette mesure statistique tout d'abord d'un point de vue supervisé pour lequel le processus itératif de segmentation se déduit de la minimisation de l'alpha -divergence entre la densité de probabilité courante et une référence définie manuellement. Puis nous nous focalisons sur le point de vue non supervisé qui permet de se dédouaner de l'étape de définition des références par le biais d'une maximisation de distance entre les densités de probabilités intérieure et extérieure au contour. Par ailleurs, nous proposons une démarche d'optimisation de l'évolution du paramètre alpha conjointe au processus d'extrémisation de la divergence, permettant d'adapter itérativement la divergence à la statistique des données considérées. Au niveau expérimental, nous proposons une étude comparée des différentes approches de segmentations : en premier lieu, sur des images synthétiques bruitées et texturées, puis, sur des images naturelles. Enfin, nous focalisons notre étude sur différentes applications issues des domaines biomédicaux (microscopie confocale cellulaire) et médicaux (radiographie X) dans le contexte de l'aide au diagnostic. Dans chacun des cas, une discussion sur l'apport des alpha-divergences est proposée.

mots-clés : Segmentation, contours actifs, alpha-divergences, méthodes variationnelles.

This paper deals with a method of histogram-based active contour segmentation using alpha-divergence family as similarity measure. The method keypoint consists on (i) the flexibility of alpha-divergences whose metric could be parametrized thanks to alpha value and be adapted to statistical distribution of image regions and (ii) the alpha-divergence ability to unify classic distances (Kullback-Leibler, Hellinger ...). First, we address the supervised side of this statistical measure and corresponding segmentation process. For that, the iterative process of segmentation comes from alpha-divergence minimization between the current probability density function and a reference defined manually. Then, we focus on the non-supervised side in order to go without any definition step of references through alpha-divergence maximization between probability density functions of inner and outer regions to active contour. Moreover, we propose an optimization approach by a joint evolution of alpha parameter and divergence extremization. The goal of this approach is to adapt iteratively the divergence to statistics of processed data. Furthermore, a comparative study is proposed between the different segmentation schemes : first, on synthetic images then, on natural images. Finally, we focus on different kinds of biomedical images (cellular confocal microscopy) and medical ones (X-ray) for computer-aided diagnosis. In each case, a discussion about alpha-divergence contribution is proposed.

keywords : Segmentation, active contours, alpha-divergences, variational method.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Contours actifs basés alpha-divergences	4
2.1	La famille des alpha-divergences	4
2.2	Extrémisation des alpha-divergences et EDPs associées	6
2.3	Optimisation du paramètre α	9
3	Expérimentations	11
3.1	Implémentation par ensembles de niveaux	11
3.2	Etude des performances de la méthodes sur des images synthétiques et naturelles	12
3.3	Applications biomédicales	20
4	Conclusion et Perspectives	30

1 Introduction

La segmentation de structures dans les images reste une problématique à véritable enjeu en traitement d'images. Parmi les différentes approches existantes et classiquement utilisées, la segmentation par contours actifs initialement introduite par [Kass 88] continuent de donner lieu à de nombreux travaux en particulier sur les aspects énergétiques associés à l'évolution du processus de segmentation. En particulier, cette famille de méthode présente une bonne adéquation avec les problématiques d'extraction de structures au sein d'images biomédicales et médicales de par la possibilité de définir des énergies adaptées au contexte particulier d'acquisition dans ces domaines d'application : Imagerie par résonance magnétique, Scanner X, Scintigraphie, Microscopie laser confocale...

Le principe général de la segmentation par contours actifs est de faire évoluer itérativement une courbe initiale Γ_0 vers les frontières des objets d'intérêt de l'image. Cette évolution est réalisée grâce à l'impulsion de forces orientées selon la normale locale à la courbe active notée Γ (voir FIGURE 1.(a)). L'intensité de ces forces est issue de l'extrémisation d'une énergie associée à la problématique de segmentation (approche variationnelle du problème).

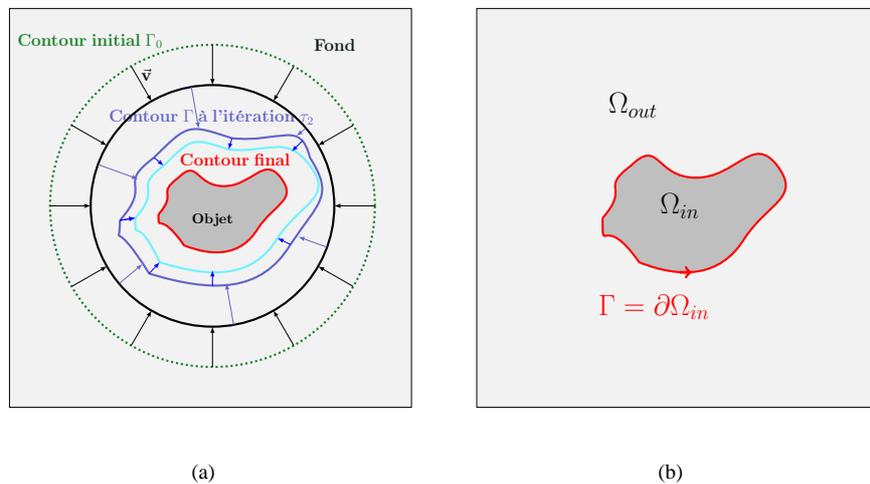


FIGURE 1 – (a) Evolution itérative du contour actif vers l'objet d'intérêt dans l'image à segmenter, (b) Partition de l'image en régions

En fonction du type d'énergie définie et associée à la problématique de segmentation, deux grandes familles d'approche se distinguent : les approches basées sur des critères contours comme le gradient de l'image et introduites initialement par [Osher 88, Kass 88] et celles basées sur des critères régions (comme la moyenne des pixels par exemple) dont la méthode la plus utilisée reste celle introduite par Chan et Vese [Chan 01]. Cependant, dans le cadre d'images fortement corrompues par un bruit d'acquisition élevé (comme en imagerie médicale par exemple) ou bien présentant des motifs texturés générant des caractéristiques complexes que les statistiques d'ordre 1 ne peuvent discriminer, les méthodes citées ci-dessus échouent à segmenter proprement le ou les objets d'intérêt.

Afin de remédier à cette limitation des approches classiques de segmentation par contours actifs, Auber et al [Aubert 03] ont introduit la notion de contours actifs basés histogramme dont le principe est d'utiliser la densité de probabilité (*Probability Density Function* (PDF)) associées aux histogrammes d'intensité des régions de l'image comme critère énergétique d'évolution de la courbe. Plus précisément, l'équation aux dérivées partielles (EDP) permettant l'évolution itérative du contour, s'obtient par l'extrémisation d'une distance (au sens statistique du terme) entre les densités de probabilité caractérisant

les régions intérieure Ω_{in} et extérieure Ω_{out} délimitées par la courbe active (voir FIGURE 1.(b)).

Les extensions de ce formalisme dans les travaux qui ont suivi [Jehan-Besson 03, Herbulot 06, Lecellier 10] font apparaître deux approches possibles quant à l'obtention de l'EDP d'évolution :

- une approche que nous qualifierons de supervisée et nécessitant l'introduction de PDFs de référence ;
- une approche non supervisée ne nécessitant aucune donnée *a priori* sur les PDFs des objets types à segmenter.

Dans le cas des méthodes supervisées [Jehan-Besson 03, Herbulot 06], l'énergie que l'on cherche à minimiser est une compétition entre deux distances à minimiser : une entre la PDF courante (p_{in}) de la région intérieure au contour et sa référence ($p_{ref_{in}}$) et l'autre entre la PDF courante (p_{out}) de la région extérieure et sa référence ($p_{ref_{out}}$). Les références peuvent être estimées soit par l'introduction d'un *a priori* statistique (comme dans [Lecellier 09b]), soit par l'intervention d'un utilisateur définissant manuellement une région de l'image dont la PDF correspond alors à la PDF de l'objet-type à segmenter.

Dans le cas des méthodes non supervisées [Lecellier 09b, Michailovich 07, Heiler 05, Freedman 05], le procédé consiste en la maximisation d'une unique distance entre les PDFs de la région intérieure p_{in} et la région extérieure p_{out} définies par le contour actif à chaque itération.

Il apparaît donc que quel que soit le type d'approches considérées (supervisée ou non), les deux points-clés sont :

- (i) la modélisation des PDFs courantes p_{in} et p_{out} ;
- (ii) le choix de la distance statistique entre les PDFs.

Concernant le premier point, un choix classique est de modéliser p_{in} et p_{out} de manière non paramétrique dans le cadre des méthodes à noyaux. Ce type de modélisation permet l'obtention d'une fonction continue, dérivable et de dérivée continue s'inscrivant parfaitement dans le contexte des approches variationnelles. Par ailleurs l'aspect non-paramétrique des méthodes à noyaux permet de ne restreindre que très peu le type de famille de PDFs modélisables.

En ce qui concerne maintenant le choix de la distance statistique, la littérature se concentre globalement sur l'utilisation de distances classiques issues de la théorie de l'information comme la divergence de Kullback-Leibler (KL) [Heiler 05, Freedman 05, Martin 04, Lecellier 10], la distance de Hellinger ou encore la divergence du χ^2 . Ces distances suivent le modèle général suivant :

$$D(p_1 \| p_2, \Omega) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(p_1, p_2, \lambda) d\lambda, \quad (1)$$

avec la fonction φ définie comme suit dans quelques cas classiques :

- Divergence de Kullback-Leibler (version symétrique) [Heiler 05, Freedman 05, Martin 04, Lecellier 10]

$$\varphi_{KL}(p_1, p_2, \lambda) = \frac{1}{2} \left(p_1(\lambda) \log \frac{p_1(\lambda)}{p_2(\lambda)} + p_2(\lambda) \log \frac{p_2(\lambda)}{p_1(\lambda)} \right) \quad (2)$$

- Divergence du χ^2

$$\varphi_{\chi^2}(p_1, p_2, \lambda) = \frac{(p_1(\lambda) - p_2(\lambda))^2}{p_2(\lambda)} \quad (3)$$

- Distance Hellinger/Bhattacharya [Michailovich 07]

$$\varphi_{Hellinger}(p_1, p_2, \lambda) = (\sqrt{p_1(\lambda)} - \sqrt{p_2(\lambda)})^2 \quad (4)$$

Dans cet article, afin d'enrichir et d'unifier la majorité des méthodes existantes fondées sur l'utilisation des histogrammes des régions intérieure et extérieure à la courbe active, nous proposons d'utiliser une famille de divergences flexible appelée alpha-divergences comme critère énergétique. Introduite en théorie

de l'information par Amari, cette famille de divergences possède une métrique statistique paramétrable (via le paramètre α), pouvant ainsi s'adapter de manière optimale à la statistique des données considérées au contraire des distances classiques.

Cet article s'organise comme suit : nous commençons tout d'abord par introduire dans la section 2, la famille des alpha-divergences et leurs propriétés mathématiques pour ensuite déduire les EDPs d'évolution associées aux méthodes supervisée et non supervisée de segmentation par contours actifs basés histogrammes. Dans la section suivante, nous proposons une méthode automatique d'optimisation de la métrique α suivant le modèle d'extrémisation afin d'assurer son optimalité pour un objectif de segmentation donné. Enfin, des exemples de segmentation sont exposés et discutés. Ils portent sur des cas synthétiques d'images bruitées et texturées mais aussi, sur des images naturelles. Nous focaliserons par ailleurs cette partie résultat sur des applications de segmentation d'images médicales et biomédicales dont les caractéristiques de bruit et de texture se prêtent particulièrement à l'application des contours actifs basés histogrammes.

2 Contours actifs basés alpha-divergences

2.1 La famille des alpha-divergences

Soient p_1 et p_2 deux densités de probabilité définies de \mathbb{R}^m dans l'intervalle $[0, 1]$ ($m=1$ dans le cas des histogrammes monodimensionnels).

On appelle divergence entre p_1 et p_2 la fonction D mesurant la (dis)similarité entre ces deux densités de probabilité et définie par exemple par :

$$D_f(p_1 \| p_2) := \int_{\mathbb{R}^m} f(p_1, p_2, \lambda) d\lambda \quad (5)$$

avec f une fonction positive et convexe.

L'Equation (5) correspond plus précisément à la famille plus générale des f -divergences telle qu'introduite dans [Csiszár 67]. Elle nous servira de contexte général pour introduire les alpha-divergences.

Par ailleurs, une métrique ou une distance d sur un ensemble X ($[0, 1]$ par exemple) est une fonction de X dans \mathbb{R} qui satisfait les trois axiomes suivants :

1. **Positivité** $d(p_1, p_2) \geq 0$ et $d(p_1, p_2) = 0$ si $p_1 = p_2$
2. **Symétrie** $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$
3. **Inégalité triangulaire** $d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$

Respectant la propriété de positivité, les divergences peuvent être considérées comme des pseudo-distances et sont donc classiquement utilisée pour approximer une densité de probabilité inconnue p_1 par une autre connue p_2 .

La divergence la plus populaire en traitement de signal et de l'image est la divergence de Kullback-Leibler (*cf.* Eq. (2)) dans sa version symétrique qui la rapproche plus de la notion de distance tout en répondant aux critères de l'entropie de Shannon. Même si cette divergence tend à donner de bons résultats dans les domaines de la classification ou de la segmentation par exemple, elle montre certaines limites [Hero 02, Michailovich 07] dans sa capacité à discriminer de manière optimale deux PDFs. En effet, la divergence de KL peut s'avérer sous-optimale lorsque les deux densités sont difficiles à dissocier (*i.e.* de caractéristiques statistiques très proches). Par exemple, dans le cas où la divergence de KL est utilisée pour approximer une distribution inconnue p_1 par une autre connue p_2 au moyen d'une minimisation, Minka montre dans [Minka 05] que le résultat est une approximation inclusive grossière quand les densités sont trop proches. Ce type de limites illustre l'intérêt de considérer des divergences alternatives néanmoins, issues de la famille des f -divergences, pour des applications en théorie de l'information [Minka 05] ou encore en classification [Hero 02].

Pour notre part, dans le cadre de la segmentation par contours actifs, nous nous sommes intéressés à l'exploitation d'une sous-famille particulière des f -divergences : les alpha-divergences initialement introduites dans [Chernoff 52] et exploitées par [Amari 90].

En reprenant l'exemple précédent des deux densités de probabilités p_1 et p_2 , les alpha-divergences que nous noterons D_α sont définies comme suit [Cichocki 10, Zhu 95] :

$$\begin{cases} D_\alpha(p_1 \| p_2, \Omega) &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\alpha(p_1, p_2, \lambda) d\lambda, \\ \varphi_\alpha(p_1, p_2, \lambda) &= \frac{\alpha(p_1(\lambda) + (1 - \alpha)p_2(\lambda) - [p_1(\lambda)]^\alpha [p_2(\lambda)]^{1-\alpha}}{\alpha(1 - \alpha)}, \\ \alpha &\in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6)$$

Les alpha-divergences telles que définies par l'Eq. (6) vérifient les propriétés suivantes démontrées dans [Beirami 08, Cichocki 10] :

1. **Convexité** : D_α est convexe respectivement par rapport aux deux PDFs p_1 et p_2 ; ainsi pour $t \in [0, 1]$ et deux couples de densité de probabilité (p_1, q_1) et (p_2, q_2) , on a :

$$D_\alpha(tp_1 + (1 - t)p_2 \| tq_1 + (1 - t)q_2) \leq tD_\alpha(p_1 \| q_1) + (1 - t)D_\alpha(p_2 \| q_2) ; \quad (7)$$

2. **Positivité** : $D_\alpha \geq 0$ et $D_\alpha = 0$ quand les deux densités de probabilité sont égales ;
3. **Continuité** : la famille est continue par rapport au paramètre α même dans le cas des points singuliers $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$ où les limites $\alpha \rightarrow 1$ et $\alpha \rightarrow 0$ peuvent être calculées grâce à la règle de L'Hôpital ;
4. **Dualité** : $D_\alpha(p_1 \| p_2) = D_{1-\alpha}(p_2 \| p_1)$.

La motivation principale de ce choix de famille de divergences réside dans le fait que nous souhaitons proposer un modèle général de segmentation flexible qui serait robuste aussi bien à des scénarii d'acquisition (ex :bruit) variés que des modèles d'objet à segmenter (ex : texture, PDF complexes). Or d'un point de vue général, la métrique d'information φ_α associée aux alpha-divergences permet d'adapter les processus de décision statistique aux caractéristiques des mesures de probabilités étudiées p_1 et p_2 .

En particulier, au travers de l'Eq. (6), certaines valeurs de α nous permettent de lier les alpha-divergences à des distances issues des f -divergences et communément utilisées en traitement du signal :

- Divergence de Kullback-Leibler :

$$D_{KL}(p_1 \| p_2) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha(p_1 \| p_2) \quad (8)$$

- Divergence de Kullback-Leibler symétrisée :

$$D_{KL}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} D_\alpha(p_1 \| p_2) + \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha(p_1 \| p_2) \right) \quad (9)$$

- Divergence du χ^2 :

$$D_{\chi^2}(p_1 \| p_2) = 2D_2(p_1 \| p_2) \quad (10)$$

- Distance de Hellinger :

$$D_{\frac{1}{2}}(p_1 \| p_2) = 2D_{Hellinger}(p_1 \| p_2) \quad (11)$$

Comme conséquence à ces propriétés, les alpha-divergences et plus particulièrement leur pseudo-métrique associée φ_α peuvent être considérées comme une distance entre deux PDFs. Il est donc possible d'utiliser les alpha-divergences comme descripteur de régions de l'image à segmenter afin de définir l'énergie à extrémiser dans le cadre des méthodes variationnelles pour la segmentation par contours actifs basée régions.

Notons que le cadre particulier de Shannon ($\varphi = \varphi_{KL}$) correspond à un mécanisme de décision optimale aveugle, c'est-à-dire sans connaissance *a priori* sur les statistiques des sources (ici, l'intensité des pixels d'une région de l'image). A l'opposé, le choix d'une métrique particulière permet d'intégrer de manière implicite un tel *a priori* statistique sur les distributions considérées : on modélise alors non pas la loi des sources, mais la manière optimale dont leur similarité doit être mesurée en tenant compte de cette loi.

Notons en plus que ce type de divergence se prête bien à la symétrisation [Nielsen 10], ce qui permet d'obtenir une fonction positive, symétrique et respectant l'inégalité triangulaire. Ainsi $D_\alpha(p_1, p_2) = \frac{1}{2}(D_\alpha(p_1 \| p_2) + D_\alpha(p_2 \| p_1))$ est une distance.

2.2 Extrémisation des alpha-divergences et EDPs associées

Afin de faire évoluer la courbe active Γ vers les frontières de l'objet à segmenter, nous nous proposons d'extrémiser l'alpha-divergence (définie par un choix de alpha donné) entre les PDFs des histogrammes des régions intérieure et extérieure telles que définies dans la FIGURE 1.

Comme précisé en introduction, ces PDFs seront dans toute la suite de l'article estimées de manière non paramétrique au moyen d'une méthode à noyaux. Plus précisément, nous proposons d'utiliser les noyaux de Parzen [Parzen 62]. La PDF d'un histogramme d'une région donnée Ω_i peut alors s'écrire alors comme suit :

$$\hat{q}_i(\lambda) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \lambda) d\mathbf{x}, \quad (12)$$

où $i = \{\text{in}, \text{out}\}$, g_σ est le noyau gaussien d'écart-type σ utilisé pour définir l'estimateur de Parzen associé, \mathbf{I} est la fonction intensité en un pixel donné \mathbf{x} de l'image, Ω_{in} est la région intérieure au contour actif Γ et Ω_{out} la région extérieure à ce même contour. Ainsi nous obtenons, pour chaque région définie par la courbe active, une PDF sous forme d'une intégrale de domaine pouvant être aisément dérivée.

En ce qui concerne les outils mathématiques permettant alors le calcul de la dérivée eulérienne de l'énergie (que nous noterons J par la suite) à extrémiser et correspondant à l'utilisation des alpha-divergences, nous renvoyons le lecteur aux travaux de [Jehan-Besson 03].

Nous ne rappellerons dans cet article que le théorème fondamental de dérivation (voir Eq. (13)). Les détails des calculs de dérivation afférents à la détermination de l'EDP d'évolution du contour ne seront donnés que lorsqu'ils permettront de clarifier l'approche proposée.

Théorème 1 *La dérivée eulérienne $\langle D'(\Omega), \mathbf{V} \rangle$ suivant le champ de vitesse \mathbf{V} de la fonctionnelle $D(\Omega)$ dans le cas de descripteur $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \Omega)$ dépendant que des variations de la caractéristique de la région étudiée, est définie comme suit :*

$$\langle D'(\Omega), \mathbf{V} \rangle = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \Omega) \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \rangle da(\mathbf{x}), \quad (13)$$

Comme indiqué dans l'introduction, il est possible de proposer des méthodes de segmentation supervisée ou non supervisée suivant qu'on minimise ou maximise la divergence considérée. Nous présentons les deux alternatives dans le cadre des alpha-divergences.

2.2.1 Minimisation des alpha-divergences

Les différents travaux de recherche intégrant les alpha-divergences comme mesure de similarité cherchent avant tout à estimer une PDF inconnue au moyen d'une PDF de référence. Dans le cadre de la

segmentation par contours actifs, ce type de scénario coïncide avec la minimisation de distance entre une PDF et sa référence, ce que l'on peut écrire sous la forme énergétique suivante :

$$J(\Gamma, \Omega_{in}, \Omega_{out}) = \xi_{in} D_{\alpha}(p_{in} \| p_{ref_{in}}) d\mathbf{x} + \xi_{out} D_{\alpha}(p_{out} \| p_{ref_{out}}) d\mathbf{x} \quad (14)$$

avec

$$D_{\alpha}(p_i \| p_{ref_i}) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{\alpha}(p_i, p_{ref_i}, \lambda) d\lambda, \quad i \in \{in, out\} \quad (15)$$

où φ_{α} est la mesure de similarité entre 2 PDFs p_i (Rappel : PDF de l'histogramme courant) et p_{ref_i} (Rappel : PDF prédéfinie de l'histogramme de référence). ξ_{in} et ξ_{out} sont des poids réels positifs dont le ratio permet la mise en compétition pondérée entre les régions intérieure et extérieure au contour.

De la dérivation de cette énergie au moyen des outils mathématiques mentionnés plus haut, nous obtenons l'EDP régissant l'évolution du contour actif grâce à l'Eq. (13), dans le contexte particulier de la minimisation des alpha-divergences [Meziou 11] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma(p, t)}{\partial t} &= \left[\frac{\xi_{in}}{|\Omega_{in}|} (A_{in} - C_{in}) + \frac{\xi_{out}}{|\Omega_{out}|} (A_{out} - C_{out}) \right] \mathbf{N}(p, t) \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{cases} \quad (16)$$

avec

$$\begin{cases} A_i &= \partial_1 \varphi_{\alpha}(\hat{q}(\lambda, \Omega_i), p_i(\lambda)) * g_{\sigma}(\mathbf{I}(\mathbf{x})), \\ C_i &= \int_{\mathbb{R}} \partial_1 \varphi_{\alpha}(\hat{q}(\lambda, \Omega_i), p_i(\lambda)) \hat{q}(\lambda, \Omega_i) d\lambda, \end{cases} \quad (17)$$

où $\partial_1 \varphi_{\alpha}$ est la dérivée première de φ_{α} par rapport à p_i , g_{σ} est le noyau gaussien d'écart-type σ utilisé dans l'estimation par noyaux de Parzen des PDFs p_i , \mathbf{I} intensité au pixel \mathbf{x} et \mathbf{N} le vecteur normal à Γ .

Cette approche est particulièrement bien adaptée dans le cas où une interaction minimale est peut être demandée à l'expert afin de définir la PDF de référence de l'objet-type à segmenter, ou bien si un *a priori* statistique permet de définir paramétriquement les PDFs de référence [Lecellier 10].

Mais dans le cas où des centaines d'images d'une même acquisition sont à analyser, il serait intéressant de proposer une méthode qui ne requiert aucun *a priori* ou intervention de l'expert. Nous proposons donc dans la suite, une méthode non supervisée grâce à la maximisation des alpha-divergences.

2.2.2 Maximisation des alpha-divergences

Dans le cadre de la maximisation des alpha-divergences [Meziou 12], l'énergie à maximiser associée à la problématique de segmentation des régions intérieure et extérieure au contour via leurs PDFs p_{in} et p_{out} associées est définie comme suit :

$$\begin{aligned} J(\Gamma, \Omega_{in}, \Omega_{out}) &= D_{\alpha}(p_{in} \| p_{out}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (18)$$

Bien que nous utilisons ici de nouveau les outils classiques de dérivation associés à ce type de problématique, nous proposons le détail des calculs ; l'extension des travaux originels sur la minimisation de ce type de critère ([Herbulot 06]) à leur maximisation n'étant pas entièrement triviale dans le cadre des alpha-divergences..

Soit donc la dérivée eulérienne de l'énergie J telle que définie par l'Eq. (18) :

$$\begin{aligned} \langle D'_{\alpha}(\Omega), \mathbf{V} \rangle &= dD_{\alpha}(p_{in} \| p_{out}, \mathbf{V}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\varphi_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \lambda, \mathbf{V}) d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Définissons alors comme intermédiaire de calcul la fonction h telle que :

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda) &= \varphi_\alpha\left(\frac{G_{1,in}}{G_{2,in}}, \frac{G_{1,out}}{G_{2,out}}, \lambda\right) \\ &= h(G_{1,in}, G_{2,in}, G_{1,out}, G_{2,out}, \lambda),\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\text{avec } G_{1,i}(\lambda, \Omega_i) &= \int_{\Omega_i} g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \lambda) d\mathbf{x} \\ \text{et } G_{2,i}(\Omega_i) &= |\Omega_i| = \int_{\Omega_i} d\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (21)$$

Les Eq. (20) et l'Eq. (21) permettent ainsi de déduire que :

$$\begin{aligned}d\varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda, \mathbf{V}) &= dh(G_{1,in}, G_{2,in}, G_{1,out}, G_{2,out}, \lambda, \mathbf{V}) \\ &= \sum_{i=\{in,out\}} \frac{\partial h}{\partial G_{1,i}} dG_{1,i}(\lambda, \Omega_i, \mathbf{V}) \\ &\quad + \sum_{i=\{in,out\}} \frac{\partial h}{\partial G_{2,i}} dG_{2,i}(\Omega_i, \mathbf{V}).\end{aligned}\quad (22)$$

Or, comme la fonction $g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \lambda)$ ne dépend pas de la région Ω_i , nous obtenons :

$$\begin{aligned}dG_{1,i}(\lambda, \Omega_i, \mathbf{V}) &= - \int_{\partial\Omega_i} g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \lambda) \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \rangle da(\mathbf{x}), \\ dG_{2,i}(\Omega_i, \mathbf{V}) &= - \int_{\partial\Omega_i} \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \rangle da(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (23)$$

et les dérivées partielles de h sont donc données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial G_{1,i}} &= \frac{1}{|\Omega_i|} \partial_k \varphi(p_{in}, p_{out}, \lambda) \\ \frac{\partial f}{\partial G_{2,i}} &= - \frac{p_i}{|\Omega_i|} \partial_k \varphi(p_{in}, p_{out}, \lambda),\end{aligned}\quad (24)$$

$$\text{where } \{i, k\} = \{\{in, 1\}, \{out, 2\}\}.$$

où $\partial_1 \varphi_\alpha$ (resp. $\partial_2 \varphi_\alpha$) est la dérivée de φ par rapport à la première variable p_{in} (resp. p_{out}).

La dérivée Eulérienne de la fonction h est alors donnée par :

$$\begin{aligned}dh &= \frac{-1}{|\Omega_{in}|} \int_{\partial\Omega_{in}} \partial_1 \varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda) (g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \lambda) - p_{in}) \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \rangle da(\mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{1}{|\Omega_{out}|} \int_{\partial\Omega_{out}} \partial_2 \varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda) (g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \lambda) - p_{out}) \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \rangle da(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (25)$$

En substituant le résultat de l'Eq. (25) dans l'Eq. (20) et en utilisant la convention habituelle suivante sur l'orientation du contour : $\Gamma = \partial\Omega_{in} = -\partial\Omega_{out}$, la dérivée eulérienne de la divergence D_α à maximiser s'écrit :

$$dD_\alpha(p_{in}||p_{out}, \mathbf{V}) = \int_{\Gamma} \left(\frac{-1}{|\Omega_{in}|} (A_1 - C_1) + \frac{1}{|\Omega_{out}|} (A_2 - C_2) \right) \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \rangle da(\mathbf{x}), \quad (26)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A_k(\mathbf{x}) &= \partial_k \varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda) * g_\sigma(\mathbf{I}(\mathbf{x})) \\ C_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_k \varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda) p_i(\mathbf{I}(\mathbf{x})) d\lambda, \\ \{i, k\} &= \{\{in, 1\}, \{out, 2\}\}. \end{cases} \quad (27)$$

et $\partial_k \varphi_\alpha$ représentant la dérivée de φ_α par rapport à sa k^e variable.

Enfin, nous obtenons l'EDP d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma(p, t)}{\partial t} &= \left[\frac{1}{|\Omega_{in}|} (A_1 - C_1) - \frac{1}{|\Omega_{out}|} (A_2 - C_2) \right] \mathbf{N}(p, t) \\ \Gamma(p, 0) &= \Gamma_0(p) \end{cases} \quad (28)$$

2.3 Optimisation du paramètre α

A ce stade de l'étude, aucune stratégie d'optimisation de la valeur de α (liée à la métrique de la divergence correspondante) n'est proposée, du moins d'une manière intégrée au processus d'extrémisation. Cette possibilité d'adaptation de la métrique utilisée est cependant un point-clé des alpha-divergences.

Si l'intégration dans le processus d'évolution des contours actifs de modèles *a priori* sur la loi de probabilité des sources (modèle d'intensité, texture) ont été proposés dans la littérature récente (voir [Lecellier 09a] par exemple), il ne semble pas exister de cadre théorique permettant de déterminer la forme analytique de la fonction génératrice de la divergence la plus appropriée pour une loi donnée.

Revenons au cas générale des f -divergence : dans [Petitjean 03], l'auteur utilise la famille des f -informations qui est un cas particulier des f -divergences où on mesure la similarité entre la densité de probabilité conjointe et la densité de probabilité produit. Dans ces travaux, l'auteur propose un modèle d'optimisation du recalage entre deux images en optimisant non pas le modèle statistique qui les définit mais la métrique f associée à la f -information utilisée.

En s'inspirant de ce principe dans le cadre de la segmentation par contours actifs basée histogramme, nous proposons donc d'optimiser le choix de la métrique φ_α associée aux alpha-divergences grâce à un processus itératif d'optimisation permettant d'adapter la valeur du paramètre α pas à pas à chaque itération t du processus de convergence du contour actif. Cette optimisation itérative permettra ainsi d'adapter le processus de décision statistique non seulement aux caractéristiques générales (PDF) de l'image mais à l'évolution de ces mêmes caractéristiques au cours du processus de segmentation. Deux scénarii sont à considérer pour la mise en place du double critère d'évolution :

- Dans le cadre de la minimisation des alpha-divergences qui sont mesurées entre des PDFs courantes p_{in} et p_{out} à une itération donnée t et leur références respectives $p_{ref_{in}}$ et $p_{ref_{out}}$, le paramètre α sera optimal pour :

$$\alpha_{opt} = \operatorname{argmin}_\alpha (D_\alpha(p_{in}||p_{ref_{in}}) + D_\alpha(p_{out}||p_{ref_{out}})) \quad (29)$$

- Dans le cadre de la maximisation de l'alpha-divergence mesurée entre les PDFs courantes p_{in} et p_{out} à une itération donnée t , le paramètre α sera optimal pour :

$$\alpha_{opt} = \operatorname{argmax}_\alpha (D_\alpha(p_{in}||p_{out})) \quad (30)$$

Dans les deux cas, une simple descente de gradient sur la valeur de alpha permet d'écrire que :

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - \delta t * \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (31)$$

Dans la suite, nous choisissons de ne détailler que les calculs liés à l'approche non supervisée où la maximisation des alpha-divergences se fait par rapport à deux PDFs non connues et estimées non paramétriquement à chaque itération du processus de convergence, cette approche restant la plus libre de toute intervention manuelle de l'utilisateur.

Dans ce cadre, la PDE de l'Eq. (28) devient le système couplé d'EDPs suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\partial_{\alpha} D_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \alpha) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\partial_{p_{in}, p_{out}} D_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \alpha). \end{cases} \quad (32)$$

Les calculs afférents au cadre supervisé (minimisation) restent néanmoins très proches. Sachant que l'EDP régissant le contour actif reste inchangée, nous présentons dans la suite l'EDP relative à l'optimisation du paramètre α en détaillant les calculs menant à la dérivée de D_{α} par rapport à α . Rappelons la définition de l'alpha-divergence :

$$D_{\alpha}(p_{in} \| p_{out}) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \lambda) d\lambda, \quad (33)$$

Ainsi sa dérivée par rapport à α peut s'écrire comme suit :

$$\partial_{\alpha} D_{\alpha}(p_{in} \| p_{out}, \alpha) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{d\varphi_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \lambda)}{d\alpha} d\lambda, \quad (34)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{\alpha}(p_{in}, p_{out}, \lambda)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left(\alpha p_{in} + (1-\alpha)p_{out} - p_{in}^{\alpha} p_{out}^{1-\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{p_{in}}{1-\alpha} + \frac{p_{out}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} p_{in}^{\alpha} p_{out}^{1-\alpha} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Afin de faciliter les calculs, nous définissons les notations suivantes :

$$\begin{cases} A = \frac{p_{in}}{1-\alpha} \\ B = \frac{p_{out}}{\alpha} \\ C = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} p_{in}^{\alpha} p_{out}^{1-\alpha} \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi les dérivées eulérienne suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\alpha} &= \frac{p_{in}}{(1-\alpha)^2} \\ \frac{dB}{d\alpha} &= \frac{-p_{out}}{\alpha^2} \\ \frac{dC}{d\alpha} &= \frac{p_{in}^{\alpha} p_{out}^{1-\alpha}}{\alpha^2(1-\alpha)^2} \left(2\alpha - 1 + \alpha(1-\alpha) \ln \left(\frac{p_{in}}{p_{out}} \right) \right) \end{aligned} \quad (36)$$

En sommant les trois dérivées eulériennes de l'Eq. (36), nous obtenons la dérivée de φ_α comme suit :

$$\frac{d\varphi_\alpha(p_{in}, p_{out}, \lambda)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2} \left[\alpha^2 p_{in} - (\alpha-1)^2 p_{out} - p_{in}^\alpha p_{out}^{1-\alpha} \left(2\alpha - 1 + \alpha(1-\alpha) \ln\left(\frac{p_{in}}{p_{out}}\right) \right) \right] \quad (37)$$

Donc au final, nous obtenons l'EDP associée à l'évolution du paramètre α :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2} \left[\alpha^2 p_{in} - (\alpha-1)^2 p_{out} - p_{in}^\alpha p_{out}^{1-\alpha} \left(2\alpha - 1 + \alpha(1-\alpha) \ln\left(\frac{p_{in}}{p_{out}}\right) \right) \right] d\lambda, \quad (38)$$

Ainsi en combinant les EDPs de l'Eq. (28) et l'Eq. (38), le système suivant à une itération $n+1$ donnée du processus sera considéré au cours du processus de segmentation :

$$\begin{cases} \alpha^{n+1} = \alpha^n - \delta t * \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \Gamma^{n+1} = \Gamma^n + \delta t * \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \end{cases} \quad (39)$$

Sachant que les alpha-divergences admettent comme cas particulier la divergence de Kullback-Leibler ($\alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 1$), deux stratégies d'initialisation du paramètre α sont alors possibles :

- La première consiste à éviter de rester bloqué dans un minimum local en s'éloignant de manière notable du cadre de Shannon, correspondant généralement à $\alpha = 1$. On choisit alors $\alpha_0 \gg 1$ ou $\alpha_0 \ll 1$ selon la métrique φ_α ;
- La seconde stratégie consiste à supposer l'absence initiale de connaissance statistique, pour la laisser progressivement apparaître au cours du processus d'optimisation. L'idée est alors de choisir $\alpha_0 = 1$ correspondant au cadre de décision de Shannon.

C'est la deuxième solution que nous retiendrons par la suite.

3 Expérimentations

3.1 Implémentation par ensembles de niveaux

Notre étude porte principalement sur la segmentation d'images biomédicales et médicales. Il est donc intéressant d'avoir une implémentation des méthodes proposées de segmentation par contours actifs permettant une gestion intrinsèque des changements de topologie dans le cas où la structure à segmenter n'est pas définie par une unique région connexe de l'image. Nous proposons donc d'inscrire l'implémentation des EDPs précédentes dans le cadre des ensembles de niveaux initialement introduit par Osher et Setian [Osher 88] puis [Chan 01].

Dans ce cadre d'implémentation, classiquement, nous posons la fonction d'évolution $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sur toute l'image à segmenter de telle sorte que le contour actif Γ soit la courbe de niveau 0 de ϕ . Suivant le schéma de segmentation suivi (minimisation ou maximisation des alpha-divergences), nous obtenons les EDPs suivantes :

– EDP issue de la minimisation des alpha-divergences à partir de l'Eq. (16) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta \phi \left(\beta \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \frac{\xi_{in}}{|\Omega_{in}|} (A_{in} - C_{in}) + \frac{\xi_{out}}{|\Omega_{out}|} (A_{out} - C_{out}) \right), \quad (40)$$

Avec A_{in} , A_{out} , ξ_{in} et ξ_{out} tels qu'ils sont définis dans l'Eq. (14) et l'Eq. (17).

– A partir de l’Eq. (28), la maximisation est réalisée via :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta \phi \left(\beta \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \xi \left(\frac{1}{|\Omega_{in}|} (A_1 - C_1) - \frac{1}{|\Omega_{out}|} (A_2 - C_2) \right) \right), \quad (41)$$

où A_1 , A_2 , C_1 et C_2 sont définies par les Eq. (27) et Eq. (28), β et ξ des valeurs réelles positives et ∇ correspond classiquement à l’opérateur gradient.

En pratique, les implémentations des Eq. (41) et Eq. (16) sont réalisées avec la version semi-implicite du schéma numérique AOS introduit dans [Weickert 98].

Dans le cas de l’optimisation du paramètre α , effectuée donc en parallèle à l’évolution itérative de la courbe active, l’algorithme correspondant est résumé ci-après :

1. Initialisation

- $t = 0$
- p_{in} et p_{out} (dépend de l’initialisation de la courbe active)
- $\alpha_{opti} \leftarrow \alpha_0$

2. Optimisation

Tant que $\phi(t) \neq \phi(t - 1)$, faire :

- (a) Pour $\alpha = \alpha_{opti}$ fixé :
Itération du processus de convergence de la courbe ϕ
Mise à jour de p_{in} et p_{out}
- (b) Pour p_{in} et p_{out} fixées :
Itération du processus d’extrémisation de α
Mise à jour de la valeur de α_{opti}
- (c) $t \leftarrow t + 1$

Fin tant que

Dans la suite de l’article, nous présentons des résultats de segmentation de minimisation et de maximisation suivant si l’intervention de l’expert est nécessaire ou non. Par ailleurs, une étude comparative entre maximisation simple des alpha-divergences et maximisation combinée avec l’optimisation du paramètre α est également présentée.

3.2 Etude des performances de la méthodes sur des images synthétiques et naturelles

3.2.1 Images synthétiques

3.2.1.1 Images bruitées Dans le cadre de la simulation de la segmentation de structures médicales et biomédicales, nous proposons d’étudier la segmentation simultanée de deux objets assimilés aux structures d’intérêt (organes par exemple). Pour cela, une mire synthétique à deux objets est corrompue au moyen de différents types et niveaux de bruits spécifiques au type d’imageur (IRM, radiologie X, ...) utilisé tels que le bruit gaussien ou encore poissonien caractéristique des imageurs par rayons-X et des microscopes confocaux.

Nous focalisons cette étude sur le cas de la maximisation des alpha-divergences. Le lecteur peut se référer à [Meziou 11] pour une étude des résultats obtenus avec la minimisation des alpha-divergences.

Les mires étudiées sont corrompues par deux différents types de bruit : gaussien et poissonien. La FIGURE 2 montre les images considérées pour deux niveaux d’intensité différents du bruit à chaque fois. On peut y observer les résultats de segmentation pour différentes valeurs de α préalablement fixées. Nous remarquons que la divergence de Kullback- Leibler ne permet pas d’obtenir le résultat espéré contrairement à la distance de Hellinger ($\alpha = 0.5$) qui dans le cas d’un modèle gaussien de PDFs permet une

segmentation satisfaisante des deux objets. Par ailleurs, on il est possible de noter que suivant le niveau et type du bruit dégradant l'image, la valeur du paramètre α menant à la meilleure segmentation varie et peut ne pas correspondre à une distance classique. Il apparaît donc que l'adaptation du paramètre α à la statistique des données à segmenter de l'image peut améliorer les résultats obtenus en comparaison avec les distances classiquement utilisées dans la littérature.

Pour aller plus loin dans cette étude, la FIGURE 3 montre l'évolution de la segmentation au moyen de la maximisation des alpha-divergences combinée à l'optimisation de la valeur du paramètre α dont on peut voir l'évolution au cours du processus itératif sur la FIGURE 4. On y voit que le paramètre α est initialisé à la valeur $\alpha \rightarrow 1$. Sachant que la valeur $\alpha \rightarrow 1$ (KL) ne permet pas de "séparer" correctement les PDFs des régions intérieures et extérieures, on voit que la valeur du paramètre évolue à travers les itérations. Les étapes marquantes de types creux ou pics sont liées à l'évolution du contour et des PDFs. En effet, les PDFs subissent des changements marquants à des étapes charnières accompagnées d'un changement de la topologie du contour Γ en rouge sur les images de la FIGURE 3.

Prenons par exemple le cas de la segmentation de la mire à l'itération $t = 10$ du processus, on voit sur la FIGURE 4 que la valeur de α tend vers 0, ce qui donne $D_{\alpha \rightarrow 0}(p_{in}, p_{out}) = D_{\alpha \rightarrow 1}(p_{out}, p_{in}) = p_{out} \log(p_{out}/p_{in})$. Il apparaît donc que plus de confiance est donnée à la PDF p_{out} sur cette étape du processus de segmentation. Or, d'après l'état du contour Γ à l'itération $t = 10$, la PDF de la région extérieure donne justement une bonne représentation de la distribution statistique finale à atteindre.

Par ailleurs, en comparant les courbes de la FIGURE 4, on peut noter que pour une mire fortement corrompue, la segmentation est plus lente contrairement aux mires faiblement bruitées. On remarque ainsi qu'il est plus difficile de séparer les PDFs quand le bruit possède un niveau élevé mais que ceci devient possible grâce à l'existence d'un long pallier dans l'évolution de la valeur de α permettant au processus de continuer à évoluer et de ne pas stopper prématurément la segmentation. A noter également que les valeurs entre lesquelles α varie, rejoignent les valeurs de ce paramètre obtenues pour la segmentation dans le cadre non optimisé. En effet, entre $\alpha = 0.4$ et 0.5 , pour la mire corrompue par un bruit gaussien d'intensité élevée, il est possible d'obtenir des résultats de segmentation satisfaisants.

Ainsi l'évolution du paramètre α au cours du processus de segmentation permet d'améliorer la possibilité de séparation des PDFs même dans des cas fortement bruités. Grâce au passage par un pallier de valeur faible de α , les PDFs deviennent séparables, ce qui permet de revenir vers des valeurs de α classiques ($\alpha = 0.5$) vers la fin du processus de segmentation.

L'optimisation du paramètre α permet ainsi d'obtenir une segmentation aussi performante qu'avec le meilleur choix de α fixe, mais sans réglage préalable du paramètre et ce même sur des images fortement bruitées.

3.2.1.2 Images texturées Au-delà du phénomène de bruitage, les images ayant des textures complexes représentent un réel un challenge pour la segmentation par contours actifs. Ainsi nous proposons de tester les performances de nos méthodes sur des mires synthétisées à partir de textures types classiquement issues de l'album de Brodatz [Brodatz 99].

Nous commençons par le cas de la minimisation des alpha-divergences où les PDFs de référence sont calculées à partir de l'image binaire qui a servir à construire le modèle texturé de la mire à segmenter. La FIGURE 5 montre des résultats de segmentation de différentes valeurs du paramètre α fixe. On voit ici que la valeur optimale n'est pas $\alpha = 0.5$ (la divergence de Hellinger) mais plutôt une valeur non classique de α .

Dans le cas d'images texturées telles que celles proposées, il est quelque fois difficile même pour l'expert de différencier les textures pour en donner des références *a priori*. Nous proposons donc d'utiliser directement la méthode de segmentation par maximisation des alpha-divergences sur l'image de synthèse précédente et ce, pour différentes valeurs de α fixes dans un premier temps (sans optimisation donc). Les résultats sont rassemblés dans la FIGURE 6. Le résultat le plus performant est obtenu pour une valeur de $\alpha = 0.5$, ce qui concorde avec les études théoriques de [Hero 02] où la distance de Hellinger

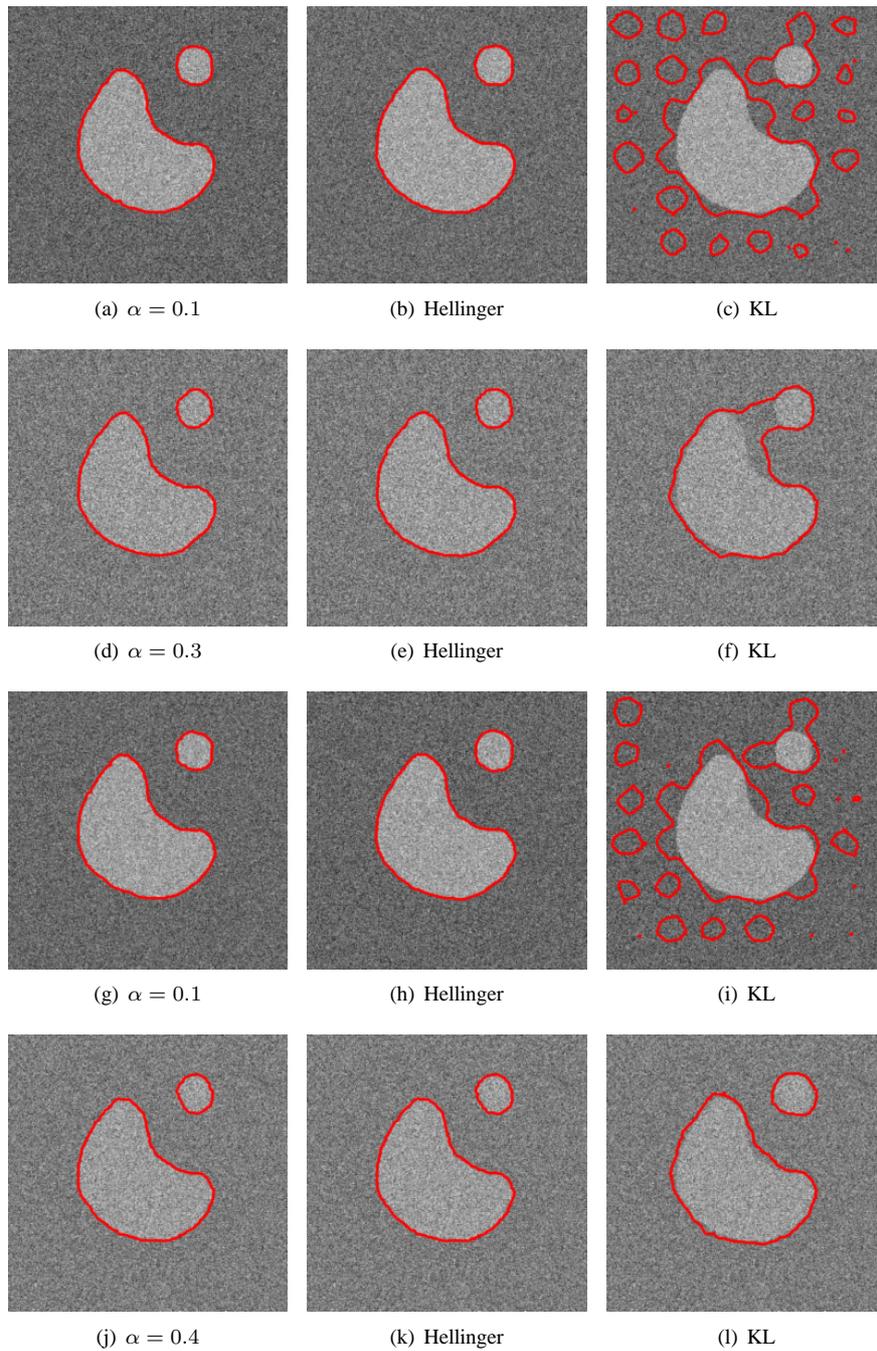


FIGURE 2 – Résultats de segmentation par maximisation des alpha-divergences pour des valeurs fixes de α versus la distance de Hellinger et la divergence de Kullback Leibler. La 1^{re} ligne correspond à un bruit gaussien de PSNR=10dB, la 2^e à un bruit gaussien de PSNR=2dB, la 3^e à un poissonien de PSNR=10dB et la dernière à un bruit poissonien de PSNR=2dB

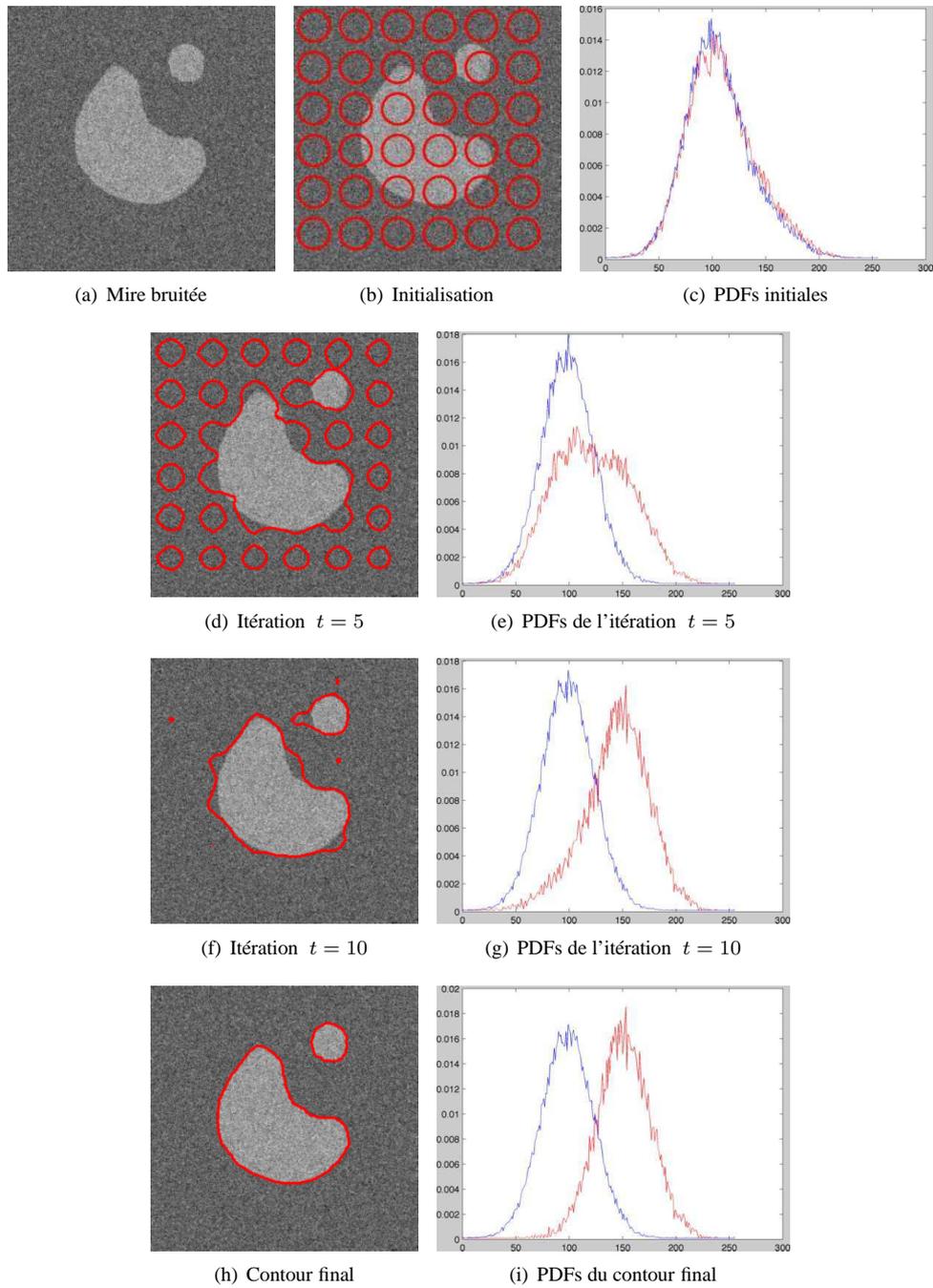


FIGURE 3 – Différentes étapes de l'évolution du contour actif Γ et des PDFs p_{in} (rouge) et p_{out} (bleu) pour une mire corrompue avec du bruit gaussien de PSNR=10 dB et avec une initialisation par petits cercles et un $\alpha_{init} = 0.99$

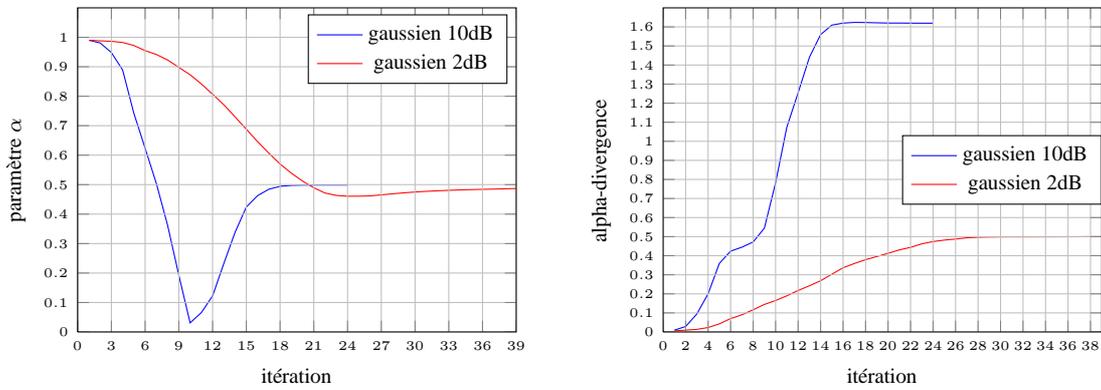


FIGURE 4 – (a) Variation de la valeur du paramètre α en fonction du nombre d’itérations du processus de convergence, (b) Evolution de la valeur des alpha-divergences en fonction du nombre d’itérations du même processus

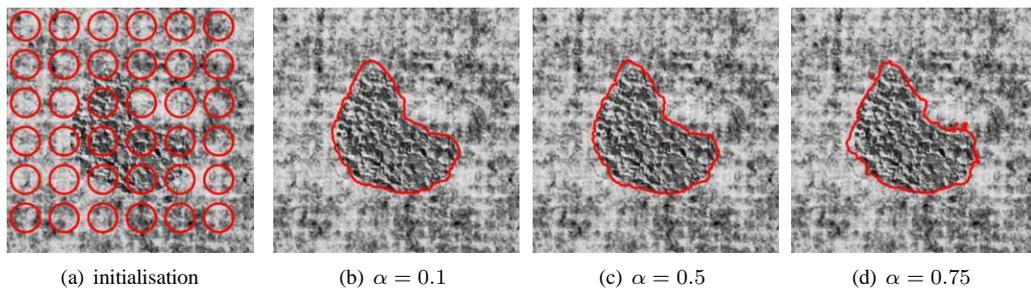


FIGURE 5 – Segmentation d’une image texturée synthétique pour différentes valeurs de α dans le cadre de la minimisation des alpha-divergences avec initialisation du contour par un ensemble de petits cercles sur toute l’image, avec $\xi_{in} = \xi_{out} = 80000$ et $\beta = 1$

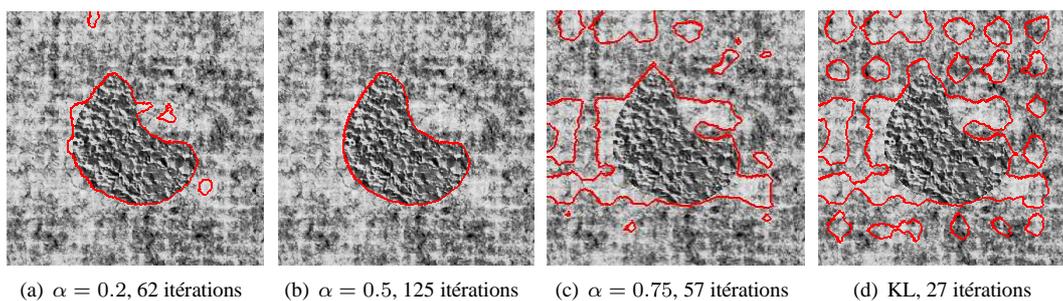


FIGURE 6 – Segmentation de l’image texturée pour différentes valeurs de α dans le cadre de la maximisation des alpha-divergences avec $\xi = 0.04$ et $\beta = 10$

serait l’optimale pour des PDFs plutôt difficilement dissociables (voir les PDFs de la FIGURE 7) mais la convergence vers les frontières de l’objet à segmenter reste cependant lente comme le montre le nombre d’itérations indiquées sous chaque image de la FIGURE 6.

Maintenant afin de s’affranchir du réglage du paramètre α et d’améliorer les performances précédentes, nous proposons d’effectuer la même segmentation mais en optimisant en parallèle la valeur du paramètre α . Les FIGURE 7 et FIGURE 8 illustrent les résultats correspondants. Nous relevons que le processus est accéléré en comparaison avec la segmentation pour $\alpha = 0.5$ tout en gardant les mêmes performances en termes de qualité de segmentation visuellement parlant. Ceci est rendu possible grâce à l’adaptabilité du paramètre de la métrique φ_α aux variations des PDFs à chaque itération du processus. En effet, on observe que tout comme pour la mire bruitée, la partie la plus importante du processus de segmentation est réalisée pendant le pallier que l’on peut observer sur la FIGURE 8 de $\alpha = 0.2$. Effectivement, entre l’itération 10 et 70 du processus de segmentation, le contour tel qu’on peut le voir sur les images de la FIGURE 7, montre que les PDFs extérieures à chaque itération sont plus proches de la PDF extérieure finale espérée que ne le sont les PDFs intérieures intermédiaires. Ainsi, si on reprend la définition des alpha-divergences de l’Eq. (6), on voit bien qu’avec $\alpha = 0.2$, on donne plus de poids à la PDF p_{out} que la PDF p_{in} .

Les deux évaluations sur images synthétiques nous permettent de conclure que la segmentation par alpha-divergences combinée avec l’optimisation du paramètre α permet l’obtention d’une certaine robustesse vis-à-vis non seulement des niveaux élevés de bruits corrompant les images mais aussi de la complexité des textures composant les éléments à segmenter dans ces images.

3.2.2 Images naturelles

Dans ce paragraphe, nous proposons une illustration de l’utilisation des alpha-divergences à la segmentation d’images naturelles en préambule aux applications médicales. Nous focalisons notre attention sur une approche de type maximisation, le cas non-supervisé de la segmentation paraissant le plus adapté à ce type d’application. Un premier test est effectué sur une image simple de type "fleur". La FIGURE 9 montre les résultats obtenus pour différentes valeurs de α pré-réglées. On remarque que suivant la valeur du paramètre α choisi, la métrique φ_α permet de séparer les PDFs intérieure et extérieure à différents niveaux de détails. Chaque résultat peut représenter un résultat intéressant : le principal avantage de la méthode proposée est donc de permettre l’obtention d’un critère flexible de segmentation.

Dans le cas où l’optimisation de la métrique (via le paramètre α) est réalisée en parallèle de l’évolution itérative du contour actif Γ , on peut observer sur la FIGURE 10 que la segmentation fonctionne bien puisqu’on converge de manière satisfaisante vers les "contours" de la fleur. Sur la FIGURE 11, on peut observer l’évolution du paramètre α et de la valeur de la divergence en fonction du nombre d’itéra-

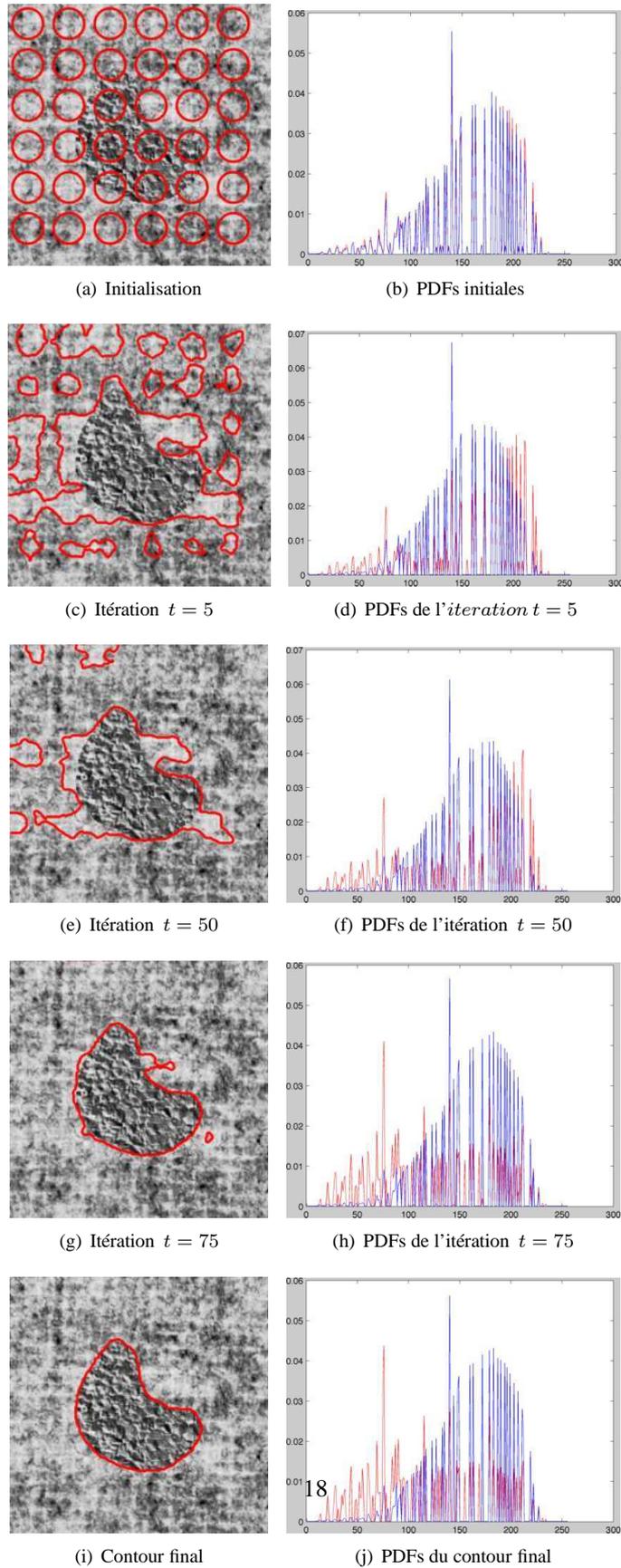


FIGURE 7 – Etapes d'évolution du contour actif et des PDFs p_{in} (rouge) et p_{out} (bleu) pour une mire texturée avec optimisation du α . Convergence après 36 itérations

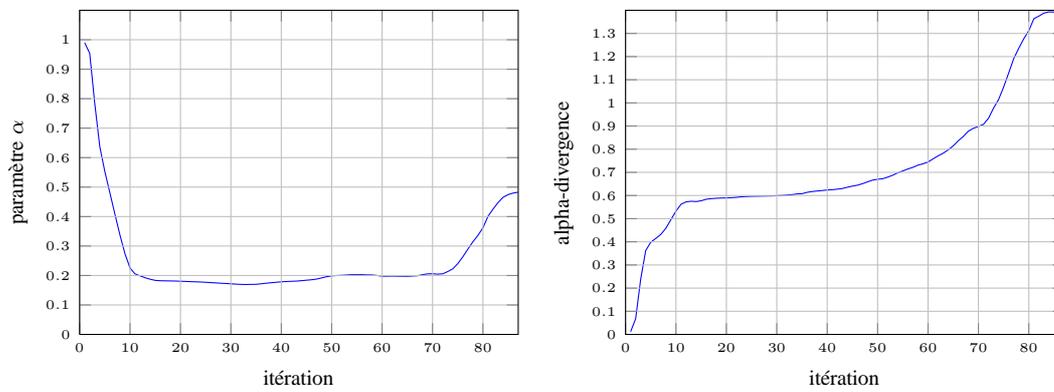


FIGURE 8 – Segmentation de l’image texturée avec optimisation : Evolution du paramètre α et sa divergence le long du processus de segmentation

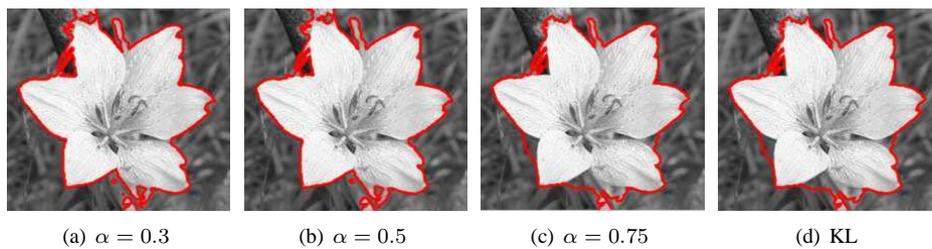


FIGURE 9 – Segmentation de fleurs par la maximisation des alpha-divergences pour différentes valeurs de α

tions du processus. Nous y voyons que la valeur finale de α , 0.4, reste voisine de la valeur de $\alpha = 0.5$ correspondant à la distance de Hellinger. Sachant que le contour initial est à l'intérieur de la structure recherchée (la fleur), nous observons, pour l'évolution de α , un passage par des valeurs supérieures à 1. En effet, contrairement aux cas précédents (les images synthétiques), ici ce sont les PDFs intérieures intermédiaires qui s'approche le plus à la PDF intérieure finale d'où plus de poids donné à cette PDF dans le calcul de l'alpha-divergence nécessaire à la séparation des PDFs courantes.

Nous considérons maintenant le cas d'une image dont l'objet d'intérêt à segmenter est caractérisé par une texture particulière (image "guépard"). La FIGURE 12 montre la segmentation par maximisation des alpha-divergences de cette image avec une initialisation par un cercle centré sur l'animal. Suivant la valeur de α , on obtient soit une segmentation centrée sur le texton principal de la peau de l'animal comme pour $\alpha = 0.1$ ou bien incluant également celui de la queue ($\alpha = 0.75$). Pour $\alpha = 0.5$, la tolérance du critère est telle que l'ensemble de l'animal parvient à être segmenter. Nous noterons ici qu'encore une fois la divergence de KL ne permet pas de parvenir à une segmentation correcte.

Finalement, nous proposons d'effectuer la segmentation de cette même image au moyen du processus conjoint de maximisation/optimisation de la métrique. Nous remarquons alors que les étapes représentées dans la FIGURE 13 rejoignent les observations faites sur les segmentations au moyen de valeurs pré-réglées du paramètre. Ainsi, le concours des différentes valeurs de α (voir FIGURE 14 pour les variations de α) permettent d'arriver à un résultat s'approchant au plus près du modèle général de la texture recherchée comme on peut le voir dans le résultat final de la FIGURE 13.

Grâce à la flexibilité des alpha-divergences, il est donc possible d'obtenir différents résultats de segmentation dans le cas d'images naturelles : l'adaptabilité du paramètre α aux données statistiques de l'image permet la prise en compte d'un modèle de texture dominant dans l'image à segmenter.

3.3 Applications biomédicales

Nous présentons dans cette partie, deux exemples d'images biomédicales et médicales où la segmentation par contours actifs basé alpha-divergences nous semble pertinente. En effet, il s'agit d'images caractérisées par un fort bruit poissonnien corrompant l'acquisition ou encore par des textures particulières des structures recherchées. Le premier exemple montre l'intérêt de l'utilisation de la minimisation des alpha-divergences alors que le deuxième se focalise sur le cas de la maximisation de cette famille de divergences.

3.3.1 Exemple de segmentation supervisée

Dans le cadre de l'étude des mécanismes cellulaires au cours de la radiothérapie du cancer, nous disposons d'acquisitions microscopiques confocales tridimensionnelle d'une culture de cellules prostatiques humaines saines de type monocouche prélevées par biopsie. L'acquisition présente la particularité de n'intégrer qu'un unique marqueur fluorescent (qui se fixe sur une protéine filamenteuse appelée actine-F et dont le rôle est primordial dans le développement cellulaire [Hall 09]) et les images qui en sont issues intègrent globalement l'ensemble des éléments de la structure cellulaire (noyau, cytoplasme, membrane) sur un unique canal (en niveau de gris donc) contrairement aux études les plus récentes qui utilisent deux marqueurs différents [Yan 08, Zanella 10, Mosaliganti 10, Pop 11] (un pour les noyaux, un pour les membranes). Cette particularité d'acquisition représente à elle seule un enjeu important dans la mise en place de techniques de segmentation et d'analyse des données disponibles.

Les acquisitions utilisées dans cette étude ont été réalisées au moyen d'un microscope confocal Zeiss LSM510. La FIGURE 15 montre un échantillon des acquisitions réalisées sur la culture monocouche. Chaque image possède une résolution de 512×512 pixels.

Ces images restent délicates à segmenter en raison d'un fort bruit d'acquisition de type Poisson et d'une texture au niveau de l'actine (la protéine marquée par fluorescence) difficilement modélisable pa-

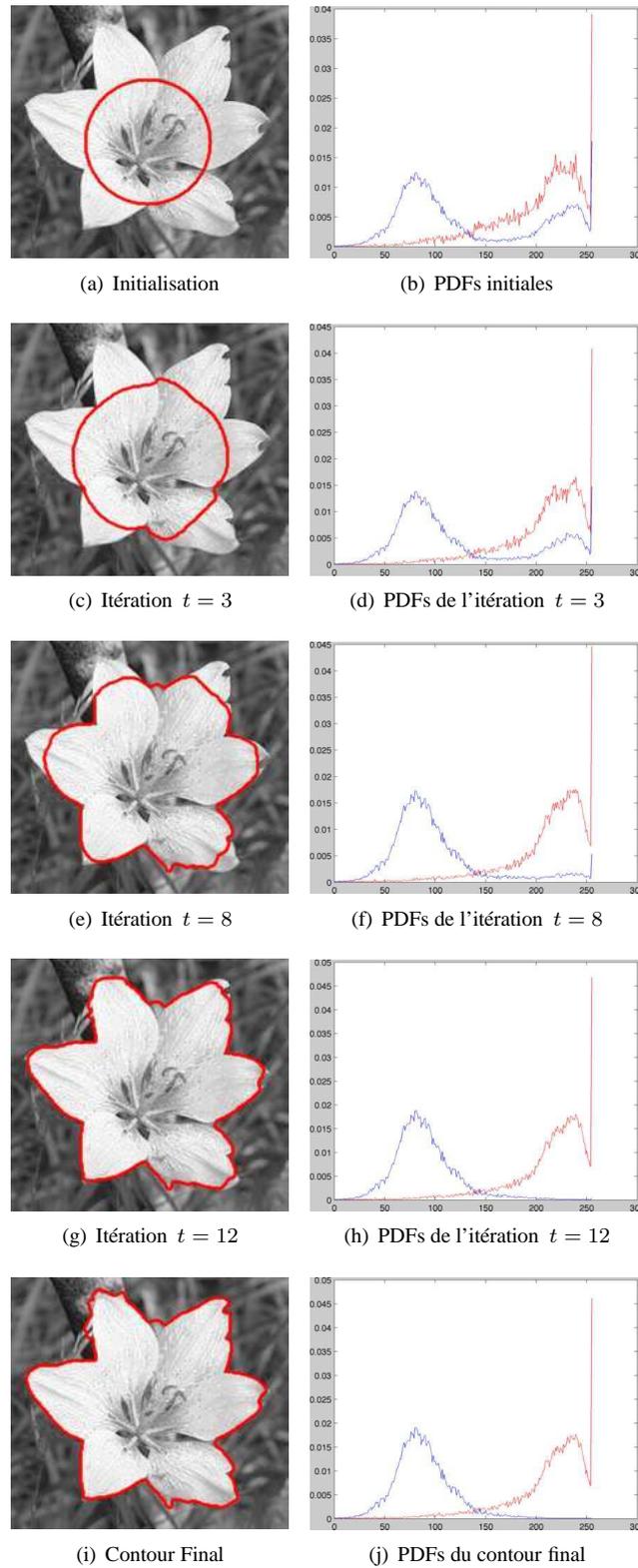


FIGURE 10 – Etapes d'évolution du contour actif et des PDFs p_{in} (rouge) et p_{out} (bleu) intermédiaires pour une image de fleur avec une initialisation par un cercle central et un $\alpha = 0.99$ (proche de 1).

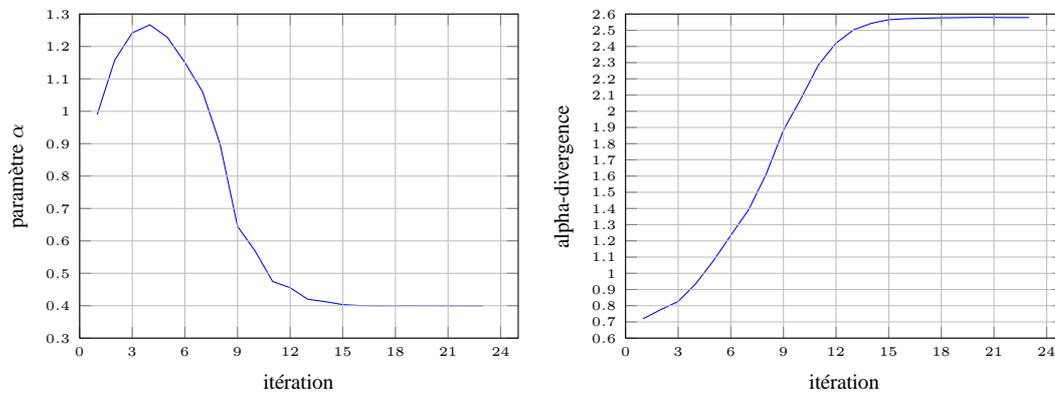


FIGURE 11 – Evolution du paramètre α et sa divergence le long du processus de segmentation pour une fleur

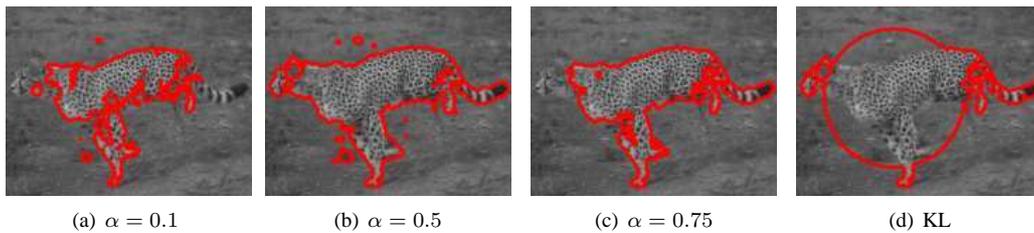


FIGURE 12 – Segmentation du guépard par la maximisation des alpha-divergences pour différentes valeurs de α

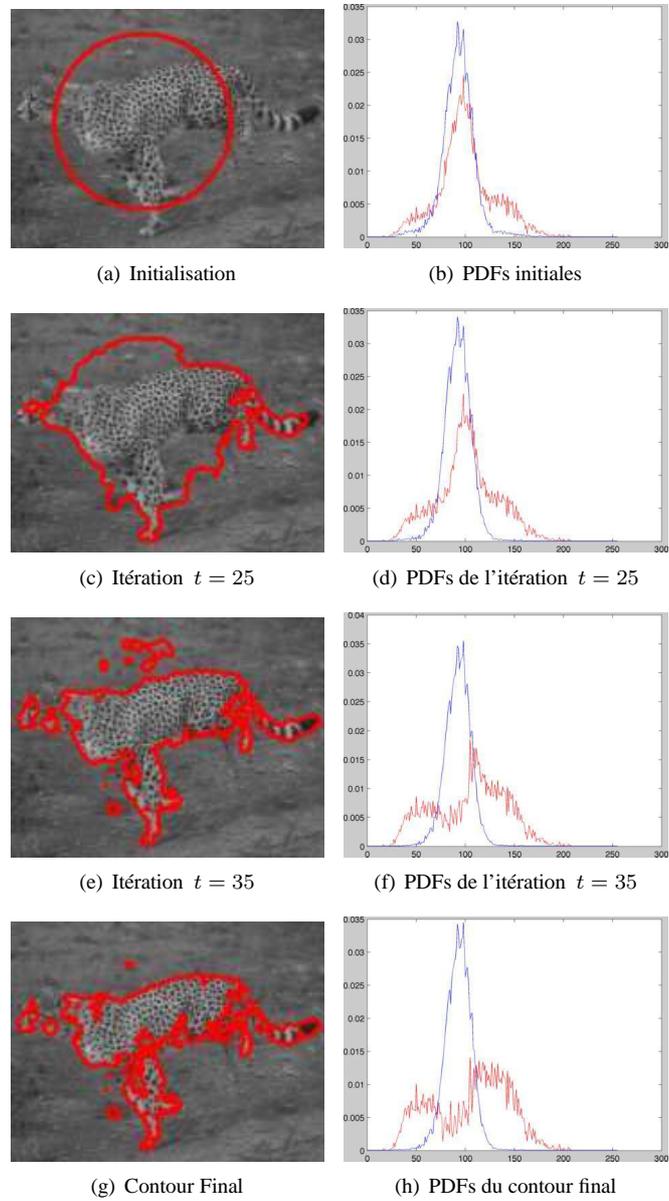


FIGURE 13 – Etapes d'évolution du contour actif et des PDFs p_{in} (rouge) et p_{out} (bleu) pour une image de guépard avec une initialisation par un cercle central et un $\alpha = 0.99$ (proche de 1). La texture particulière de l'animal est bien segmentée par la méthode

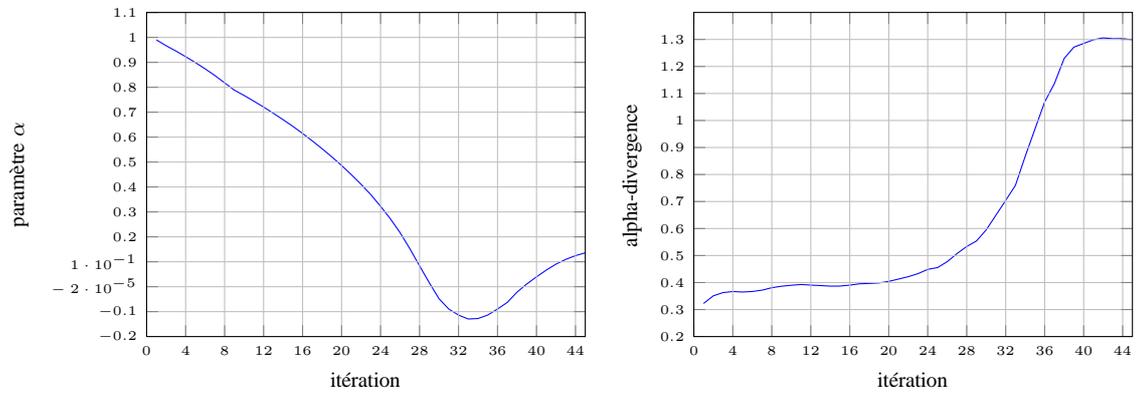


FIGURE 14 – Evolution du paramètre α et sa divergence le long du processus de segmentation du guépard

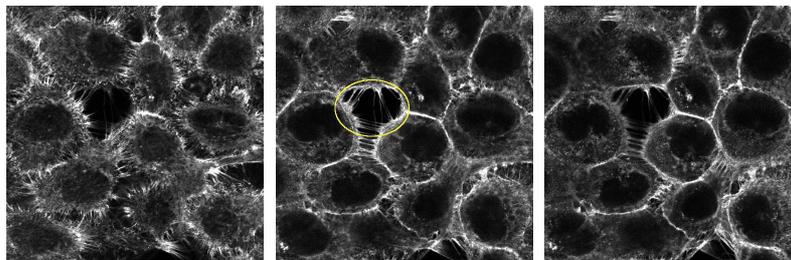


FIGURE 15 – Exemples d’acquisition cellulaire obtenues en microscopie confocale. L’image au centre est la coupe centrale de la culture monocouche. Le cercle jaune met en évidence une zone de vide cellulaire qu’il ne faut pas confondre avec un noyau. Les deux autres images montrent à gauche une coupe acquise en dessous du niveau centrale et à droite, au dessus de ce même niveau

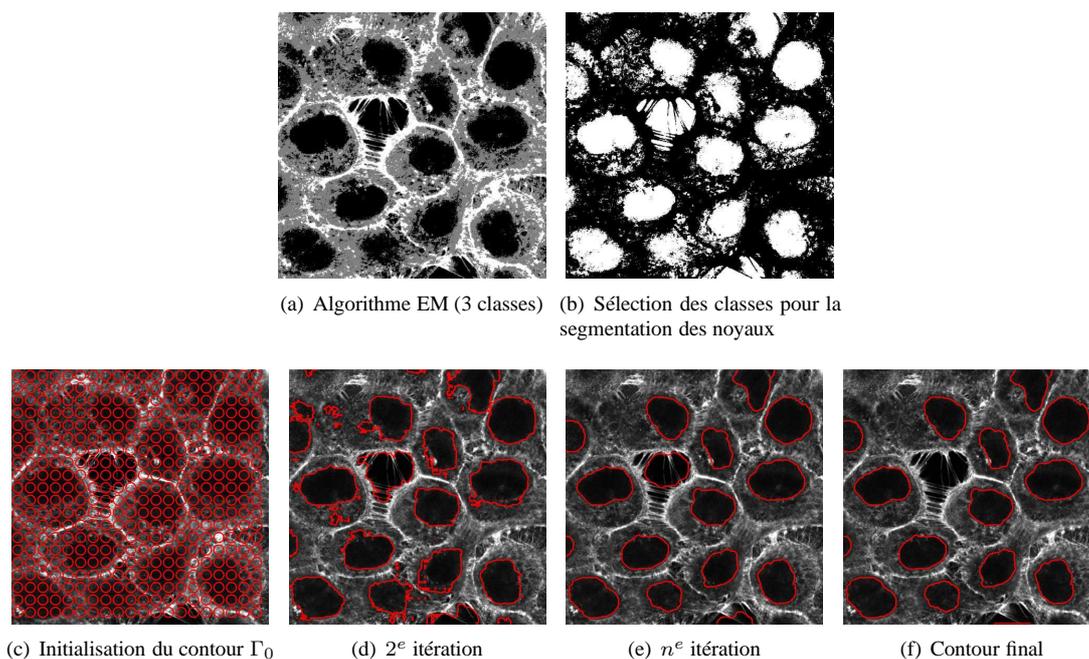


FIGURE 16 – Processus de segmentation des noyaux par minimisation de alpha-divergence ($\alpha = 0.75$)

ramétriquement. Comme montré dans [Meziou 11], ces particularités rendent les approches classiques de type Chan et Vese par exemple non adaptées. Enfin, le fait que la culture cellulaire ait été réalisée *in vitro* entraîne l'apparition de zones de vide cellulaire (voir cercle jaune sur la FIGURE 15 par exemple) dont la PDF associée est très proche de celle d'un noyau mais qu'il ne faut cependant pas identifier comme tel. La coupe centrale de l'acquisition reste l'image la plus pertinente pour initialiser un processus de segmentation sur l'ensemble de l'acquisition comme montré dans [Matuszewski 11]; nous focaliserons donc notre étude sur cette coupe dans un premier temps avant de l'étendre aux autres niveaux de coupe.

Nous proposons des résultats comparés de segmentation dans le cadre de la délimitation des noyaux cellulaires sur des images acquises en microscopie confocale 3D. Plus généralement, l'objectif global de segmentation sur ce type d'images est de parvenir à délimiter trois classes de pixels : les noyaux, le cytoplasme et enfin les membranes cellulaires.

Dans ce cadre de travail, il est clairement difficile de travailler sans *a priori*. En effet, les méthodes non supervisées telle que la maximisation des alpha-divergences ne peuvent pas fonctionner dans ce cadre. Par contre, en supervisant la minimisation des alpha-divergences, on peut arriver à segmenter dans un premier temps les noyaux cellulaires comme nous allons le voir.

Pour cela, il est nécessaire de fournir une information de référence sur l'image pour le calcul des PDFs de référence $p_{in,ref}$ et $p_{out,ref}$. Cette information peut être par exemple une délimitation grossière à la main du contour du noyau central (en vert dans Figures) effectuée par le biologiste à la demande de l'algorithme ou un masque binaire de l'image issu d'un algorithme EM (*Expectation Maximization*) standard 3 classes (le nombre de classes étant précisé par le biologiste) comme on peut le voir dans la FIGURE 16. Le nombre de classes provient du nombre de types d'éléments recherchés dans l'image.

Comme on peut le voir dans la FIGURE 16, l'EM ne donne qu'une idée grossière des trois classes recherchées. On note notamment que les régions qui coïncident avec le cytoplasme contiennent des traces des deux autres classes. Une segmentation par contours actifs permettrait alors à partir de ce premier résultat d'obtenir la meilleure délimitation des noyaux cellulaires comme on peut le voir dans la dernière

image de la FIGURE 16.

La segmentation des noyaux dans l'acquisition démarrant à la coupe centrale avec un seul et unique calcul de référence, elle peut être propagée (FIGURE 17) à travers les niveaux voisins en faisant en sorte que l'initialisation d'une coupe n_{c+1} soit le résultat de segmentation de la coupe n_c (de même pour n_{c-1}) veillant ainsi à garder une certaine cohérence spatiale.

A partir de la FIGURE 17, il apparaît important de bien choisir la valeur du paramètre α afin d'obtenir les contours les plus réguliers possibles. On observe donc que les meilleurs résultats de segmentation sont obtenus pour une valeur du paramètre $\alpha = 0.75$ non standard. En effet, les distances classiques peuvent mener sur certaines coupes de l'acquisition à des résultats moins appréciable du point de vue du biologiste. Notons par ailleurs, que plus la valeur de α est élevée, plus on observe une segmentation menant à des résultats ébarbulés avec trop de détails faussant le résultat recherché, à savoir le contour net du noyau cellulaire de chaque cellule de la coupe.

Ainsi, la segmentation par minimisation des alpha-divergences permet d'obtenir un résultat satisfaisant pour la délimitation des noyaux cellulaires et ceci à travers toute l'acquisition en propageant la méthode à tous les niveaux. Ce résultat pourra ainsi être le point de départ de la segmentation d'une deuxième structure cellulaire : les membranes.

De part le fait que cette méthode nécessite l'intervention de l'utilisateur notamment pour la définition des références, il ne nous paraît pas pertinent de présenter ici les résultats de la minimisation des alpha-divergences avec optimisation du paramètre α en raison de leur dépendance implicite à l'initialisation experte.

3.3.2 Exemple de segmentation non supervisée

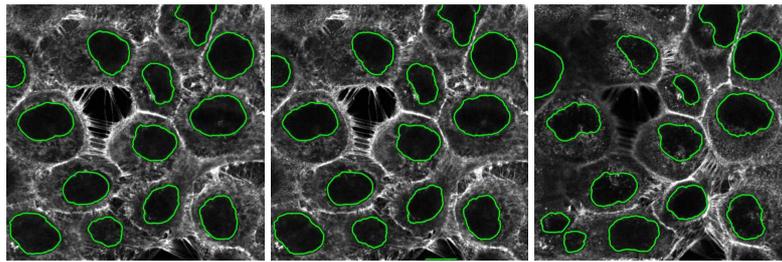
L'imagerie par rayons-X est très utilisée dans le cadre du diagnostic et le suivi des pathologies osseuses. Plus précisément, la segmentation de certaines structures osseuses est très demandées dans le cadre de la quantification de certains paramètres standard tels que la courbure, densité osseuse, espacement ... En effet, ce type d'application permet aux médecins radiologues de pouvoir procéder à des diagnostics et suivis plus précis des pathologies considérées.

Dans le cadre du diagnostic de l'ostéoporose en particulier, il est intéressant pour le praticien d'avoir des informations sur la courbure de la tête fémorale par exemple. Afin de l'aider dans cette démarche, nous proposons d'utiliser le cadre de la segmentation par maximisation des alpha-divergences sur des images acquises par radiographie-X.

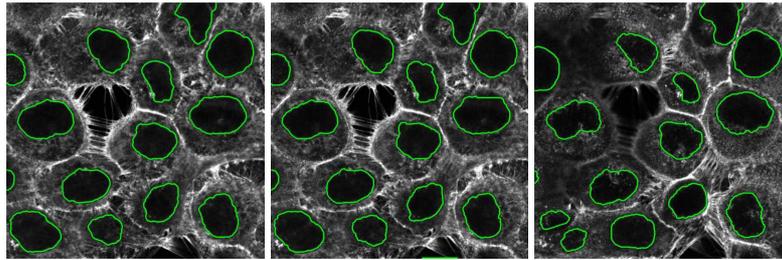
Dans la FIGURE 18, on peut observer les résultats satisfaisants (du point de vue de l'expert) obtenus avec $\alpha = 0.75$ en comparaison avec les distances classiques de la littérature sur des radiographie-X de deux patients différents.

Mais par les différences entre les acquisitions notamment en terme de niveau de bruit, il apparaît plus intéressant de proposer une segmentation auto-adaptable grâce à l'optimisation du paramètre α . Les résultats d'une telle approche sont présentés sur la FIGURE 19. Concernant le premier patient, le résultat est aussi satisfaisant que celui obtenu avec une valeur fixe de α alors que dans le cas du deuxième patient, on observe une amélioration dans la qualité de la segmentation (évitements de l'enfoncement du contour dans régions à risque d'ostéoporose) notamment dans les régions d'intérêt particulièrement étudiée par le radiologue.

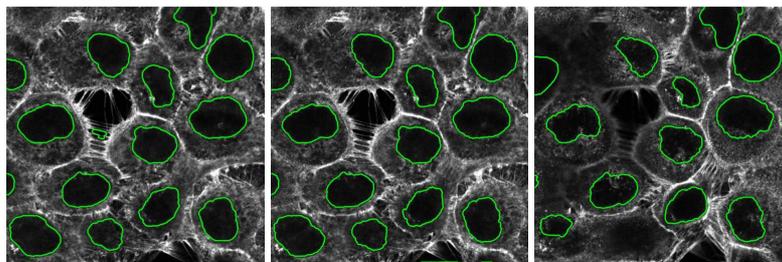
Les FIGURE 20 et FIGURE 21 montrent l'évolution de la segmentation sur la radiographie du deuxième patient. On voit sur la première figure que les PDFs initialement superposées arrivent à se séparer d'une manière nette grâce aux variations du paramètre α sur le graphique de la FIGURE 21. Entre les itérations 3 et 5, on peut noter que la segmentation évolue énormément, ce qui concorde avec une évolution de α entre 0.6 et 0.55. Notons, par ailleurs, que pendant cette partie du processus, l'évolution de l'alpha-divergence est caractérisée par un point d'inflexion comme on peut le voir sur la FIGURE 21. Ainsi, le paramètre α oscille au début du processus afin de permettre la convergence vers une valeur finale



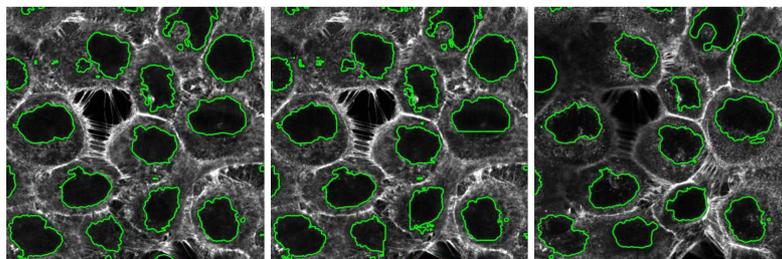
(a) $\alpha = 0.5$



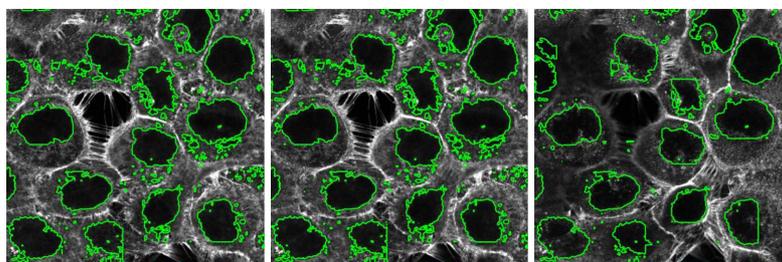
(b) $\alpha = 0.75$



(c) Kullback-Leibler divergence



(d) $\alpha = 1.5$



(e) $\alpha = 2$

FIGURE 17 – Segmentation des noyaux cellulaires avec différentes valeurs de α pour différents niveaux de l'acquisition : de gauche à droite : niveaux n_{c-3}, n_c, n_{c+7}

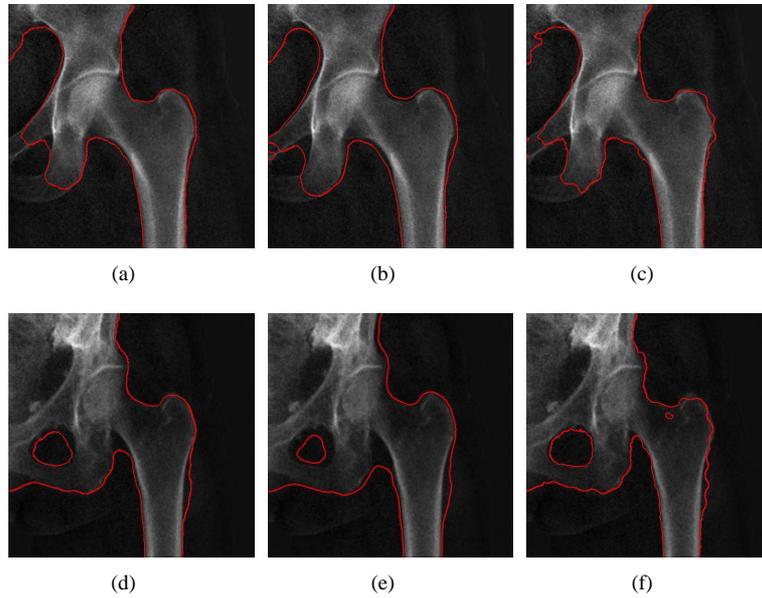


FIGURE 18 – Segmentation de la hanche d’une radiographie par rayons X faite pour différentes valeurs α (chaque ligne correspond à un patient différent) : (a, d) $\alpha = 0.75$, (b, e) $\alpha = 0.5$ (distance de Hellinger), (c, f) $\alpha \rightarrow 1$ (divergence de Kullback-Leibler)

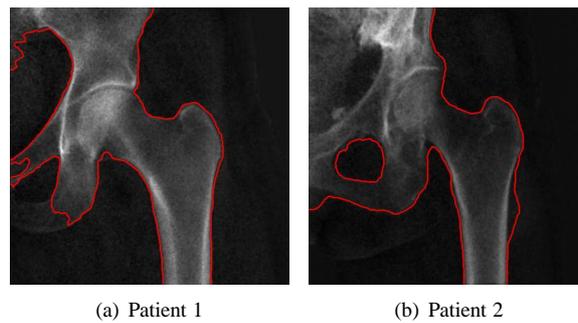


FIGURE 19 – Segmentation par maximisation des alpha-divergences avec optimisation du paramètre α pour les deux patients étudiés

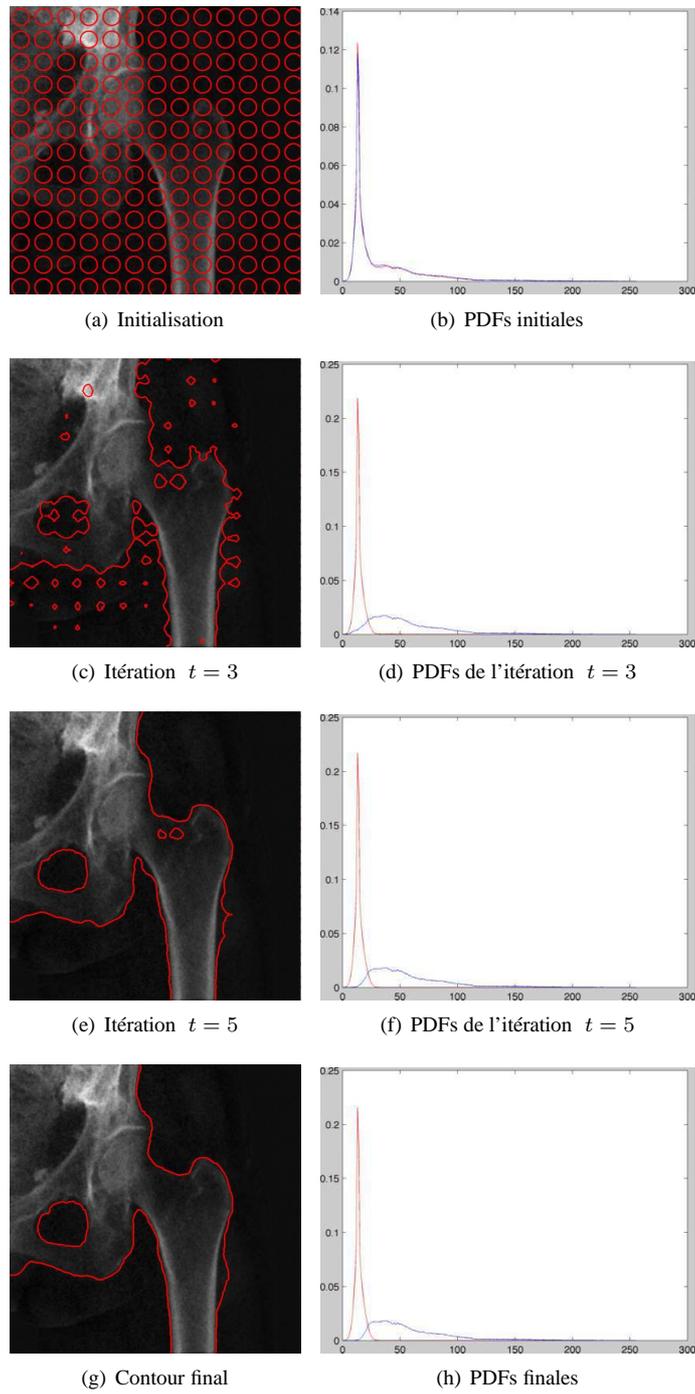


FIGURE 20 – Étapes de l'évolution du contour actif et des PDFs p_{in} et p_{out} pour la segmentation de la hanche du patient 2

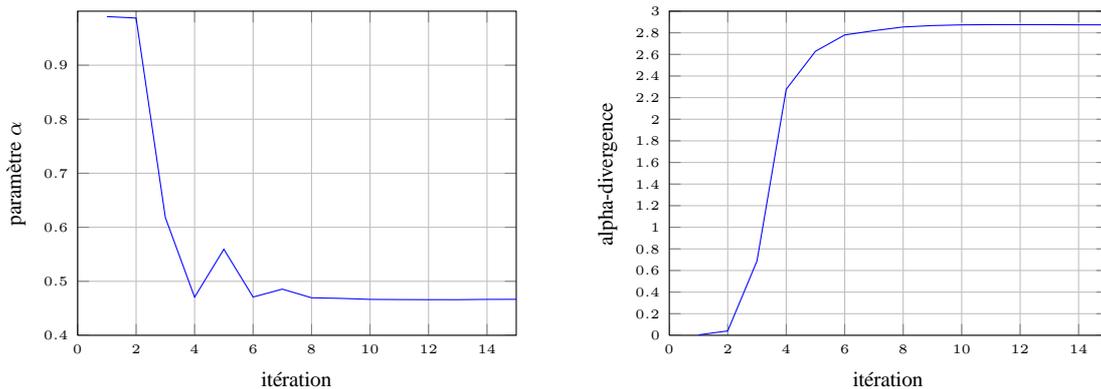


FIGURE 21 – Segmentation de la hanche du deuxième patient : (a) Variation du paramètre alpha à travers les itérations. (b) Maximisation de l’alpha divergence à travers les itérations

proche de $\alpha = 0.5$ correspondant alors à une phase de raffinement du processus de segmentation. Finalement, l’optimisation de α permet l’obtention d’un contour final (cf. FIGURE 19) plus lisse mais aussi plus proche et plus satisfaisant en comparaison avec celui obtenu adans le cadre de la maximisation sans optimisation de α (cf. FIGURE 18).

4 Conclusion et Perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une segmentation par contours actifs basés histogrammes utilisant la famille des alpha-divergences comme critère de distance entre les PDFs intérieure et extérieure au contour à chaque itération du processus de segmentation. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à une approche supervisée de type minimisation de ce critère statistique, puis dans un deuxième temps à une maximisation de ce même critère afin de se dédouaner de la nécessité de la mise en place de référence statistique des régions à segmenter. Nous proposons également un schéma d’optimisation relatif au paramètre α directement lié à la métrique des divergences, ce afin de l’adapter itérativement à la statistique des données considérées au cours du processus d’évolution du contour. Des résultats sur des images synthétiques bruitées et texturées ainsi qu’une illustration sur des images naturelles ont permis d’étudier l’apport de cette famille de divergences qui se présentent comme une généralisation possible des distances classiquement utilisées dans ce contexte. Des résultats obtenus dans le cadre de la segmentation d’images biomédicales et médicales ont également permis de montrer que ce type de divergences présente un intérêt réel pour l’aide au diagnostic.

Pour aller plus loin, il serait intéressant de faire évoluer les données étudiées à savoir les histogrammes des PDFs 1D (liées seulement à l’intensité) vers des PDFs 2D. En effet, la méthode proposée ici n’utilise ni information sur la position des pixels de l’image ni sur d’éventuelles propriétés statistiques de leur voisinage. Or au moyen de critère telles que les matrices de coocurrence par exemple (qui prennent en compte le voisinage de chaque pixel de l’image dans leur principe de construction), il serait possible d’améliorer la segmentation des images notamment les images texturées. Enfin, afin d’enrichir la méthode notamment pour l’utiliser sur des acquisitions 3D directement, la prise en compte de la forme des objets recherchés dans la fonctionnelle énergétique pourrait permettre d’améliorer les performances de segmentation.

Bibliographie

- [Amari 90] S. Amari. Differential-geometrical methods in statistics. Lecture notes in statistics. Springer-Verlag, 1990.
- [Aubert 03] G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras & S. Jehan-Besson. *Image segmentation using active contours : Calculus of variations or shape gradients ?* SIAM J. Appl. Math., vol. 63, pages 2128–2154, 2003.
- [Beirami 08] A. Beirami, V. Cevher, B. Bower & K. Tsianos. *Proofs of Alpha Divergence Properties*. Rapport technique STAT 631 / ELEC 639, Rice University, September 2008.
- [Brodatz 99] Phil Brodatz. Textures : A Photographic Album for Artists and Designers. Dover Publications, August 1999.
- [Chan 01] T. F. Chan & L. A. Vese. *Active Contours Without Edges*. IEEE trans. on IP, vol. 10, no. 2, pages 266–277, February 2001.
- [Chernoff 52] H. Chernoff. *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*. Annals of Mathematical Statistics, vol. 23, pages 493–507, 1952.
- [Cichocki 10] Andrzej Cichocki & Shun-ichi Amari. *Families of Alpha- Beta- and Gamma- Divergences : Flexible and Robust Measures of Similarities*. Entropy, vol. 12, no. 6, pages 1532–1568, 2010.
- [Csiszár 67] I. Csiszár. *Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations*. Studia Sci. Math. Hungar., vol. 2, pages 299–318, 1967.
- [Freedman 05] D. Freedman, R. J. Radke, T. Zhang, Y. Jeong, Student Member, D. M. Lovelock & G. T. Y. Chen. *Model-Based Segmentation of Medical Imagery by Matching Distributions*. IEEE Transaction on Medical Imaging, vol. 24, pages 281–292, 2005.
- [Hall 09] A. Hall. The cytoskeleton and cancer, volume 28. Springer Netherlands, Philadelphia, PA, USA, 06 2009.
- [Heiler 05] M. Heiler & Christoph Schnörr. *Natural Image Statistics for Natural Image Segmentation*. Int. J. Comput. Vision, vol. 63, pages 5–19, june 2005.
- [Herbulot 06] A. Herbulot, S. Jehan-Besson, S. Duffner, M. Barlaud & G. Aubert. *Segmentation of vectorial image features using shape gradients and information measures*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 25, no. 3, pages 365–386, 2006.
- [Hero 02] A.O Hero, B. Ma, O. Michel & J.D. Gorman. *Alpha-Divergence for Classification, Indexing and Retrieval*. Rapport technique CSPL-328, University of Michigan, June 2002.
- [Jehan-Besson 03] Stéphanie Jehan-Besson. *Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2003.

- [Kass 88] M. Kass, A Witkin & D. Terzopoulos. *Snakes : Active contour models*. Int. J. Comput. Vision, vol. V1, no. 4, pages 321–331, January 1988.
- [Lecellier 09a] F. Lecellier. *Les contours actifs basés région avec a priori de bruit, de texture et de forme : Application à l'échocardiographie*. These, Université de Caen, May 2009.
- [Lecellier 09b] F. Lecellier, S. Jehan-Besson, J. Fadili, G. Aubert & M. Revenu. *Optimization of Divergences within the Exponential Family for Image Segmentation*. In International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision (SSVM '09), pages 137–149, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.
- [Lecellier 10] F. Lecellier, M.J. Fadili, S. Jehan-Besson, G. Aubert, M. Revenu & E. Saloux. *Region-Based Active Contours with Exponential Family Observations*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 36, no. 1, pages 28–45, January 2010.
- [Martin 04] Pascal Martin, Philippe Réfrégier, François Goudail & Frédéric Guéroult. *Influence of the noise model on level set active contour segmentation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 26 (6), pages 799–803, 2004.
- [Matuszewski 11] B. Matuszewski, M. Murphy, D.R. Burton, T. Marchant, C. Moore, A. Histace & F. Precioso. *Segmentation of Cellular Structures in Actin Tagged Fluorescence Confocal Microscopy Images*. In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing, pages 3142–3145, Brussels, Belgium, September 2011.
- [Meziou 11] L. Meziou, A. Histace, F. Precioso, B. Matuszewski & M. Murphy. *Confocal Microscopy Segmentation Using Active Contour Based on Alpha-Divergence*. In Proceedings of 18th IEEE International Conference on Image Processing ICIP, pages 3138–3141, Brussels, Belgium, September 2011.
- [Meziou 12] L. Meziou, A. Histace & F. Precioso. *Alpha-divergence maximization for statistical region-based active contour segmentation with non-parametric PDF estimations*. In Proceedings of International Conference on Accoustics, Speech and Signal Processing ICASSP, page accepted, Kyoto, Japon, March 2012.
- [Michailovich 07] O.V. Michailovich, Y. Rathi & A. Tannenbaum. *Image Segmentation using Active Contours Driven by the Bhattacharyya Gradient Flow*. vol. 16, no. 11, pages 2787–2801, 11 2007.
- [Minka 05] T. Minka. *Divergence measures and message passing*. Rapport technique, Microsoft Research Ltd, 2005.
- [Mosaliganti 10] K. Mosaliganti, F. Janoos, A. Gelas, R. Noche, N. Obholzer, R. Machiraju & S. Megason. *Anisotropic plate diffusion filtering for detection of cell membranes in 3D microscopy images*. In Proceedings of the IEEE international conference on Biomedical imaging : from nano to Macro, ISBI'10, pages 588–591, Piscataway, NJ, USA, 2010. IEEE Press.
- [Nielsen 10] Frank Nielsen. *A family of statistical symmetric divergences based on Jensen's inequality*. CoRR, vol. abs/1009.4004, 2010.
- [Osher 88] S. Osher & J. A. Sethian. *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*. Journal of Comp. Phy., vol. 79, pages 12–49, 1988.
- [Parzen 62] E. Parzen. *On Estimation of a Probability Density Function and Mode*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 33, no. 3, pages 1065–1076, 1962.
- [Petitjean 03] Caroline Petitjean. *Recalage non rigide d'images par approches variationnelles statistiques. Application à l'analyse et à la modélisation de la fonction myocardique en IRM*. These, Université René Descartes - Paris V, September 2003.

- [Pop 11] S. Pop, A. Dufour & J-C. Olivo-Marin. *Image Filtering Using Anisotropic Structure Tensor For Cell Membrane Enhancement In 3D Microscopy*. In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing ICIP 2011, pages 2085–2088, 09 2011.
- [Weickert 98] J. Weickert, B. M. Ter Haar Romeny & M. A. Viergever. *Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering*. IEEE trans. on IP, vol. 7, no. 3, pages 398–410, March 1998.
- [Yan 08] P. Yan, X. Zhou, M. Shah & S. T. C. Wong. *Automatic Segmentation of High Throughput RNAi Fluorescent Cellular Images*. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, vol. 12, no. 1, pages 109–117, January 2008.
- [Zanella 10] C. Zanella, M. Campana, B. Rizzi, C. Melani, G. Sanguinetti, P. Bourguine, K. Mikula, N. Peyri ras & A. Sarti. *Cells segmentation from 3D confocal images of early zebrafish embryogenesis*. IEEE trans. on IP, vol. 19, no. 3, pages 770–781, March 2010.
- [Zhu 95] H. Zhu & R. Rohwer. *Information Geometric Measurements of Generalisation*. Rapport technique NCRG/4350, Aston University, 1995.