

19/04/2012 UFR de mathématiques, Université Lille 1

Weyl et les espaces à connexions

Julien Bernard (CEPERC), www.philo-bernard.fr

La relativité générale : Révolution dans la philosophie de l'espace(-temps)

En 1916, Hermann Weyl est enthousiasmé par la lecture des *Fondements de la théorie de la relativité générale* d'Einstein. Il comprend que la philosophie de l'espace a rencontré un des tournants majeurs de son histoire. On le sait, la relativité générale est simultanément une nouvelle théorie de la gravitation et une nouvelle théorie de l'espace-temps, puisqu'en fait elle identifie les phénomènes gravitationnels avec des effets de la géométrie spatio-temporelle. L'espace se courbe au voisinage d'une masse, et cette courbure seule explique le comportement gravitant des corps à la périphérie.

Pour Albert Einstein, *un* (peut être *le*) trait majeur de cette théorie est qu'elle respecte l'équivalence de tous les référentiels pour exprimer la physique, ce qu'on appelle la *relativité généralisée du mouvement*. C'est d'ailleurs ce principe qui donne son nom à la théorie. Cependant, pour Weyl, ce point, certes important, ne constitue pas l'essentiel de la révolution opérée par Einstein. L'essentiel se trouve ici : **(*****)**

On fait un nouveau pas [dans la théorie de l'espace] quand on admet que la métrique d'univers n'est pas donnée *a priori*, mais que la forme quadratique qui la représente dépend de la matière par des lois invariantes. Ce n'est que lorsque ce pas est franchi qu'on s'est élevé à une théorie qui mérite vraiment le nom de *théorie de la relativité générale*. Elle permet alors de résoudre le problème de la relativité du mouvement. [...]

Et ce n'est que si nous admettons cette théorie, que la gravitation apparaîtra comme une émanation du champ métrique, car nous savons par l'expérience que la gravitation est conditionnée par la répartition des masses (loi d'attraction de Newton). C'est moins dans la condition d'invariance générale, que dans cette nouvelle étape, que nous paraît être le noyau de cette théorie de la relativité généralisée.

Espace-Temps-Matière, 3^e édition, 192-193¹

Cette nouvelle étape est la découverte du caractère *dynamique de la métrique*. C'est l'idée que les relations métriques possibles dans l'espace

1 [RZM 1919, 192-193]

dépendent du contenu même de l'espace, plus précisément de la répartition de l'énergie-impulsion. Si bien que les propriétés géométriques d'une portion d'espace vont être dépendantes des événements physiques qui s'y jouent. Les propriétés géométriques varient à la fois d'une portion d'espace à une autre, et d'un moment à l'autre. L'espace-temps cesse d'être un cadre rigide fixé a priori.

Une nouvelle articulation du physique et du mathématique dans la constitution du concept d'espace

Weyl comprend que cela constitue un renversement total dans la manière dont les mathématiques et la physique sont articulées au sein du concept d'espace. Il nous dit : il y a une urgence épistémologique à refonder la géométrie sur des bases nouvelles, qui prennent en compte cette nouvelle articulation des mathématiques et de la physique.

(*****)

A première vue, que la physique doive jouer un rôle dans le choix d'une géométrie ne semble pas une idée épistémologique très neuve. Plusieurs décennies auparavant, la découverte des géométries non-euclidiennes avait rendu fortement plausible l'hypothèse que la physique elle-même pouvait jouer un rôle de sélection, parmi un ensemble de géométries toutes aussi cohérentes, de celle qui serait adéquate pour théoriser la nature, ce que nous appellerons par la suite « la bonne » ou « la vraie » géométrie.

Cependant, à notre connaissance, tous les grands géomètres du XIX^e qui ont pris parti sur la question du rôle de la physique dans la sélection de « la bonne géométrie » ont suivi une voie différente de celle de la relativité générale. C'est ce que nous allons expliquer brièvement maintenant.

Pour comprendre cela, il faut bien différencier deux grandes familles de géométries rencontrées au XIX^e siècle. D'un côté les géométries à courbure constante qui, parce qu'elles sont homogènes, peuvent être caractérisées

intégralement par des axiomes, à la façon de la géométrie d'Euclide. De l'autre côté, on a les géométries du type des *espaces de Riemann*, où la courbure peut varier d'une façon quelconque, si bien qu'on ne peut les traiter axiomatiquement de la même manière. Ainsi, une variété riemannienne est donnée par un champ de formes quadratiques différentielles $g_{\mu\nu}(x)$ dont la variation peut être quelconque. Si bien que la notion d'espace de Riemann ne détermine en fait pas *une* géométrie déterminée mais plutôt un ensemble infini de géométries possibles, chacune étant déterminée par les fonctions $g_{\mu\nu}(x)$ qui doivent être décrites analytiquement.

C'est la distinction entre *géométrie analytique* et *géométrie synthétique*, qu'on rencontre parfois sous la forme de l'opposition entre *géométrie à courbure variable* et *géométrie à courbure constante*, et qu'on retrouvera transposée chez Weyl comme l'opposition entre *géométrie de contact* et *géométrie à distance*.

(*****)

La géométrie différentielle, à sa naissance et jusqu'au XIXe, comme étude des surfaces courbes, n'a pas de prétention à refonder la notion d'espace pour la physique. Elle sert d'abord d'outil à la mesure d'objets placés *dans l'espace*. On peut penser par exemple aux mesures géodésiques, cartographiques, opérées par Gauss pour le royaume de Hanovre. La géométrie différentielle peut servir à étudier les imperfections dans la rotondité de la Terre, ou d'autres effets de courbure divers objets matériels.

Riemann lui-même, dans sa fameuse lecture d'habilitation de 1854 qui fonde la notion de variété riemannienne, ne présente pas cette notion comme un nouveau fondement *pour l'espace physique*. Il vise, dans un premier temps, quelque chose de beaucoup plus général. Il veut circonscrire l'ensemble de toutes les façons possibles dont une variété, un ensemble descriptible par des grandeurs numériques, peut être muni d'une mesure. L'espace de la physique ne sera qu'un cas particulier d'une telle variété. Riemann vise des applications des plus diverses comme, par exemple, la caractérisation d'un « espace » des couleurs.

Mais, quand dans son texte, il en vient à vouloir appliquer sa théorie au cas particulier de l'espace physique, alors il affirme alors que la physique doit

intervenir pour nous aider à choisir, parmi toutes les variétés riemanniennes concevables, celle qui va représenter la « bonne géométrie ». Son point de vue est alors moins novateur. Il pense que l'espace physique est tout simplement *euclidien*, c'est-à-dire à courbure constante et nulle, et il donne des hypothèses très simples qui, selon lui, peuvent être testées physiquement pour vérifier cette thèse. On peut, par exemple, vérifier :

- 1) Que la courbure est partout la même et dans toutes les directions (homogénéité et isotropie de l'espace)
- 2) Que la somme des angles d'un triangle vaut pi radian.

Quand Helmholtz résout à sa façon le « problème de l'espace », c'est-à-dire le problème de savoir quelle est la bonne géométrie, il va utiliser des outils mathématiques différents de ceux de Riemann, proches de la notion des groupes continus de Lie. Malgré cela, le schéma de son raisonnement reste similaire : il part d'une notion très générale de la mesure, qu'il vient ensuite spécifier en posant la possibilité de mouvoir librement un corps rigide n'importe où dans l'espace².

Poincaré, quant à lui, n'est pas aussi affirmatif que Riemann ou Helmholtz quand au fait que la physique *déterminerait* l'espace comme étant euclidien. Il soutient qu'on peut choisir conventionnellement l'espace comme étant euclidien, elliptique ou hyperbolique. Aucune expérience physique ne peut en décider. La physique nous suggère seulement, sans aucune nécessité, de choisir l'espace comme euclidien, en tant qu'il est le plus commode. Cependant tout le schéma conventionnaliste de la pensée géométrique de Poincaré, dans *La Science et l'Hypothèse*, repose comme chez Helmholtz et Riemann, sur l'hypothèse de la libre mobilité d'un corps rigide. C'est parce qu'il y a des corps rigides, ou à peu près rigides, dans notre environnement que la géométrie est possible pour Poincaré comme géométrie synthétique.

Chez tous ces auteurs, le rôle de la physique en géométrie consiste à sélectionner *une* variété, parmi l'ensemble infini de toutes les variétés

² Le statut épistémologique de cette hypothèse est peut-être différent chez Helmholtz par rapport à Riemann. Il n'est pas clair si l'hypothèse de la liberté du mouvement d'un corps rigide est une hypothèse physique testable, ou un présupposé a priori censé être nécessaire pour donner sens à la notion d'espace. Le résultat est cependant sans ambiguïté : l'espace physique reste encore pour lui euclidien.

riemanniennes, pour donner son espace à la physique. Et à chaque fois cette sélection passe par l'hypothèse de la libre mobilité d'un corps rigide, qui réduit l'infinité des variétés riemanniennes concevables, aux seules variétés à courbure constante. Le seul paramètre à déterminer est alors la courbure de l'espace que certains expérimentateurs, comme Gauss ou Bessel, par des méthodes géodésiques ou astronomiques, essaient de mesurer. Ils parviennent à la conclusion d'une courbure nulle, dans la limite de la précision de leurs observations.

(*****)

Mais, que l'hypothèse de la constance de la courbure soit conçue comme une hypothèse physique, comme une condition de possibilité de la géométrie physique, ou comme une simple convention suggérée par l'expérience ; dans tous les cas, cette hypothèse est retenue au XIXe, si bien que la géométrie sélectionnée est synthétique, on peut la développer complètement a priori. La physique joue un simple rôle sélectif, en amont de la géométrie, puis s'efface devant le jeu démonstratif des mathématiques.

C'est précisément ce type de rapport entre mathématiques et physique qui est démenti par la théorie d'Einstein. La théorie d'Einstein ne sélectionne pas *un* variété riemaniennes³. Chaque façon de déployer la matière donne à la portion d'espace-temps qui la contient une structure métrique différente, avec une courbure quelconque a priori. Ainsi, l'ancien partage des tâches entre le physicien et le mathématicien n'est plus possible, où le physicien sélectionnait en amont *une* géométrie, puis laisserait ensuite au mathématicien le soin de développer pleinement le concept d'espace par des méthodes purement déductives. En relativité générale, la structure de l'espace est toujours à repenser physiquement, sans cesse, pour s'adapter à l'évolution des événements matériels qui s'y jouent. Pour insister sur ce caractère dynamique de la métrique, qui s'adapte aux circonstances physiques, Weyl emploie plusieurs métaphores dont celle-ci :

(*****)

³ Du moins, tous les espaces pseudo-riemanniens de signature (+ - -) de dimension 4 et ayant une certaine régularité.

La réalité ne se tient pas dans l'espace comme dans une caserne à loyers rectangulairement homogène, devant laquelle tous ses différents jeux de force pourraient passer tout en l'ignorant (;) mais elle s'y tient au contraire comme l'escargot construit et agence lui-même la matière de sa maison.⁴

L'analyse mathématique du problème de l'espace, 7ème conférence, p44

(*****)

(*****)

Le programme de refondation:

La « géométrie par contact »

Il s'agit alors pour Weyl, dans les années 1917-1923, de donner de nouveaux fondements à la géométrie différentielle qui justifient qu'elle soit « la bonne géométrie » dont a besoin la physique. La physique n'a pas à sélectionner *une* géométrie, mais doit donner les lois du champ qui expliquent comment chaque jeu de relations métriques permis par la géométrie différentielle peut accueillir un sens physique dans une circonstance matérielle déterminée.

Selon Weyl, si la notion de variété riemanienne a permis de fonder la relativité générale, c'est parce qu'elle distribue à *peu près* correctement les rôles, au sein de la notion d'espace, entre ce qui doit être fixé *a priori* (ce que Weyl appelle « la nature de l'espace ») et ce qui doit être laissé libre pour ensuite être déterminé par le contenu physique.

Pour Weyl, si la transition d'Euclide à Riemann, de la géométrie synthétique à la géométrie analytique, est pertinente, c'est parce qu'elle est analogue à la transition en physique de l'action à distance, à la physique de l'action par contact (i.e. la physique des champs):

⁴ . Il nous dit que l'espace Euclidien ne convenait plus car il était trop rigide. L'espace euclidien est comme un camp militaire où les baraquements, tous identiques, s'alignent les uns derrière les autres selon un maillage orthogonal uniforme. Au contraire, l'espace d'Einstein est à la matière, comme la coquille à l'escargot. La forme de la coquille ne précède pas la matière qui vient le remplir mais c'est au contraire l'escargot qui lui donne sa forme et croit avec lui :

La transition de la géométrie d'Euclide à celle de Riemann est basée en principe sur la même idée que celle qui a conduit à la physique des actions par contact⁵.

Le principe consistant à comprendre le monde à partir de son comportement dans l'infiniment petit est le motif épistémologique qui dirige tant la physique des actions par contact que la géométrie de Riemann [...]⁶

(*****)

Prenons un exemple simple de la transition de la physique à distance à la physique par contact. Il s'agit du passage des lois électrostatiques de Coulomb, qui expriment une action à distance comme une loi en 1 sur r²:

$$\vec{E} = - \int \frac{\rho \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} dV$$

aux lois du champ de Maxwell qui s'expriment par des opérateurs différentiels liant l'état du champ en un point, à l'état du champ dans un voisinage infinitésimal de ce point :

$$(1) \quad \overline{Rot}(\vec{E}) = \vec{0} \quad (\text{cas électrostatique})$$

$$(2) \quad Div(\vec{E}) = \rho \quad (\text{cas électrostatique})$$

Quand on est dans un cas statique, où le champ électrique est constant, où les charges responsables du champ sont fixes, et donc où il n'y a aucun champ magnétique, alors on observe, entre autres, que la circulation du champ électrique le long de n'importe quel courbe fermée s'annule. C'est une propriété qu'on observe sur des distances *finies*, le circuit considéré étant aussi grand que voulu :

$$\oint_{\partial D} \vec{E}(x) d\vec{r} = 0$$

Mais, on sait, par le théorème de Stokes, ramener ce genre de propriétés à distance finie à des caractérisations locales infinitésimales.

5 Notre traduction de [RZM 1919, 81]

6 Notre traduction de [RZM 1919, 82]

C'est élémentaire. On décompose en général la circulation d'un champ de vecteurs sur des circuits de longueur finie, en somme intégrale de circulations le long de circuits infinitésimaux. La circulation le long de chaque circuit infinitésimal ne dépend alors que de l'aire infinitésimale circonscrite par le circuit, et d'une propriété locale infinitésimale du champ vecteurs, son *rotationnel* ou *tourbillon*, défini par un opérateur différentiel.

$$\iint_D \overrightarrow{rot}(\vec{E})(x) d\vec{S} = 0 \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E})(x) = \vec{0}$$

On voit sur cet exemple qu'un des traits d'un champ coulombien à distance, l'annulation de la circulation du champ électrique, se ramène à une propriété locale infinitésimale du champ électrique qu'on suppose vérifiée de manière homogène sur tout l'espace (l'annulation du rotationnel). On a alors dérivé une propriété générale de la solution de Coulomb, à partir de propriétés infinitésimales du champ décrites par les équations de Maxwell. En fait, la loi de Coulomb peut être entièrement dérivée des équations de Maxwell.

(*****)

Mais l'équivalence entre les deux points de vue ne vaut que parce que :

- 1) On se place *dans le cas particulier de l'électrostatique*. Mais, dans le cas général on aura par exemple :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \frac{1}{c} * \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{et non pas } \vec{0})$$

- 2) On pose l'annulation du potentiel à l'infini.

Le cas dynamique général ne peut être en fait traité que par les équations de Maxwell. Cela nous révèle que les véritables lois physiques sont infinitésimales. Il ne faut accorder de poids physique, conclut Weyl, qu'aux propriétés différentielles et non pas à leurs correspondant intégraux qui s'expriment à distance sur des cas limites. Ces lois intégrales ne sont que des effets dérivés, valables uniquement dans des conditions statiques et homogène. En général, l'état du champ électrique en un point, dépend de manière corrélée de l'état du champ mais aussi de l'état de la matière, dans un voisinage infinitésimal de ce point.

Ainsi, la physique, avant Einstein, a atteint un état où les phénomènes qui composent le *contenu* de l'espace-temps ne peuvent plus être pensés en termes d'actions à distance, mais uniquement de champ dont les propriétés se propagent par contact. En revanche, l'*espace* lui-même reste toujours conçu comme ayant des propriétés à distance. C'est à cette asymétrie entre l'espace et son contenu qu'il faut mettre fin, selon Einstein.

(*****)

Weyl conçoit alors son programme de refondation de la géométrie sur l'idée qu'il faut achever la révolution en géométrie commencée par Riemann et Einstein. Il s'agit de faire en sorte que la géométrie devienne une *géométrie infinitésimale pure* c'est-à-dire une *géométrie entièrement par contact*. Cela revient à fixer *a priori* les structures infinitésimales de l'espace mais à laisser indéterminé les structures à distance finie.

Plus précisément, pour Weyl, ce qui doit être fixé a priori, la *nature de l'espace*, contient deux choses :

- 1) **La structure locale infinitésimale des relations spatiales**, c'est-à-dire le champ des relations spatiales dans le voisinage infinitésimal d'un point (l'espace tangent). Ainsi, tous les espaces tangents sont isomorphes.
- 2) **Le mode de connexion qui lie un espace tangent à ses voisins**. S'il n'y avait pas un moyen mathématique d'exprimer le passage progressif d'un espace tangent à son voisin, il n'y aurait pas *un* espace pour la géométrie, mais une pluralité d'espaces infinitésimaux sans communication possible. On aboutirait à une forme de solipsisme extrême.

Ainsi, la géométrie différentielle doit s'exprimer dans les termes de la notion mathématique de connexion. Dans une telle géométrie, les relations à distance finie sont déterminées par un processus d'intégration mathématique des relations infinitésimales le long d'un chemin. Ce processus d'intégration dépend de l'état contingent de la connexion le long du chemin. Pour Weyl, suivant la direction d'Einstein, c'est à la physique de déterminer l'état de cette connexion (c'est-à-dire la valeur de ses coefficients), en fonction du contenu matériel de l'espace-temps.

Voilà pour le cadre général de la *géométrie de contact*.

(*****)

L'apport de Weyl aux connexions

Il s'agit maintenant de saisir l'apport de Weyl à cette notion de connexion. En effet, la notion de connexion ne naît pas avec Weyl mais quelques années auparavant :

La construction de la géométrie infinitésimale riemannienne a, au cours des dernières années, beaucoup gagné en simplicité et en clarté grâce au *concept de déplacement parallèle infinitésimal d'un vecteur*, découvert par Levi-Civita. Levi-Civita l'a introduit en s'appuyant sur l'hypothèse que l'espace riemannien R pouvait être plongé dans un espace *euclidien* E ayant un nombre supérieur de dimensions. Soit un vecteur v au point P de R et tangent à R . Déplaçons-le parallèlement dans E jusqu'à un point P' de R infiniment voisin de P . Décomposons le vecteur déplacé v' en une composante tangentielle et une composante normale (infinitésimale), v'_t et v'_n et disons : le vecteur v'_t de R provient de v par *déplacement parallèle* infinitésimal dans R . Un tel procédé, étant déterminé uniquement par le champ métrique de R , se trouve être indépendant des conditions de son plongement dans E . J'ai donné une caractérisation intrinsèque naturelle de ce concept et je dois maintenant la décrire.

H.Weyl, *L'analyse mathématique du problème de l'espace*, 2^e Conférence, p11

Comme l'indique Weyl, Levi-Civita, en introduisant sa notion de connexion pour une variété riemannienne, donne un sens au fait de déplacer un vecteur depuis un point de la variété jusqu'à un autre point de la variété, en suivant un chemin. La caractérisation générale de Levi-Civita est difficile à visualiser. Cependant, on peut « voir » ce qu'est la connexion, sur un cas plus simple. Quand la variété est de dimension 2, et que le chemin emprunté est une géodésique, alors déplacer un vecteur parallèlement à lui-même le long d'un chemin, revient à conserver à tout moment l'angle que fait le vecteur déplacé par rapport aux géodésiques.

Ainsi, par le biais du déplacement parallèle le long d'un chemin reliant P à Q , on établit une isométrie entre l'espace tangent en P et l'espace tangent en Q . Mais cette isométrie dépend en fait du chemin suivi, comme on peut le voir sur un triangle sphérique.

(Manipulation de la demi-sphère en polystyrène)

Après déplacement d'un vecteur le long d'un triangle sphérique, le vecteur a une position finale qui diffère de la position initiale par un angle qui vaut la somme des angles du triangle parcouru – pi radian.

Dans sa construction de la notion de connexion, Levi-Civita s'appuie sur l'hypothèse que la variété riemannienne est plongée dans l'espace euclidien, mais à la fin de la construction, il montre ensuite que la notion introduite est indépendante du plongement. Cela se voit de manière évidente par le fait que la connexion de Levi-Civita s'exprime entièrement, par le biais des symboles de Christoffel, en termes des coefficients $g_{\mu\nu}(x)$.

C'est-à-dire qu'en déplaçant le vecteur ξ^μ du point $P(x)$ au point voisin $Q(x+dx)$, les coordonnées du vecteur subissent une modification infinitésimale, une sorte de rotation infinitésimale, qui s'exprime ainsi :

$$\xi'^\mu = \xi^\mu + d\xi^\mu$$

$$\text{avec } d\xi^\mu = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \xi^\beta$$

Où les symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ sont définis par :

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{2} g^{i\alpha}(x) \left(\frac{\partial g_{j\alpha}(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^\alpha} \right)$$

(donc uniquement en termes des $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivés : c'est bien un objet intrinsèque à la variété riemannienne)

La connexion de Levi-Civita : une notion bâtarde

Weyl reproche à cette notion d'être *bâtarde*. En effet elle mêle de façon indue les niveaux affine et métrique de la géométrie.

En effet, on l'a vu, elle est définie par Levi-Civita à travers les coefficients $g_{\mu\nu}$, donc au un niveau *métrique* de la géométrie. Pourtant, sa fonction est de préciser comment les *vecteurs* sont déplacés. Mais la notion de vecteur prend déjà sens à un niveau purement *affine* de la géométrie.

Il s'agit alors pour Weyl de généraliser la notion de Levi-Civita pour lui donner un sens purement affine. On l'appellera alors la *connexion affine*.

(*****)

Définition de la connexion affine

Pour qu'une variété soit pourvue de structures infinitésimales affines, il n'est pas nécessaire qu'elle soit pourvue d'une métrique. Il suffit qu'elle soit une variété différentiable. La différentiabilité de la variété donne son existence aux espaces tangents, qui sont des espaces affines infinitésimaux. Dès lors, Weyl va montrer comment on peut définir une connexion affine sur une variété différentiable sans référence à une métrique.

Il propose plusieurs définitions équivalentes. Par exemple:

1) Une connexion affine au point P doit établir un isomorphisme linéaire entre l'espace tangent en P et chacun des espaces tangents voisins.

C'est-à-dire en déplaçant le vecteur ξ^μ du point P(x) au point voisin Q(x+dx), les coordonnées du vecteur subissent une transformation linéaire infinitésimale :

$$\xi'^\mu = \xi^\mu + d\xi^\mu(dx)$$

$$\text{Avec } d\xi^\mu(dx) = d\lambda^\mu_\alpha(dx) \xi^\alpha,$$

où $d\lambda^\mu_\alpha$ est a priori une transformation linéaire infinitésimale quelconque

2) Annulation de la connexion

Pour tout point P, il doit exister un système de coordonnées, qu'on appellera géodésique au point P, qui annule la connexion. C'est-à-dire que dans ce système de coordonnées :

$$d\lambda^\mu_\alpha = 0 \text{ (uniformément en } dx).$$

Weyl démontre alors que l'objet $(d\lambda^\mu_\alpha)$ doit dépendre linéairement de (dx) si bien que finalement, on a :

$$d\xi^\mu = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \xi^\beta$$

La formule est la même que chez Levi-Civita, mais avec cette différence essentielle que les $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ ont été définis à un niveau purement affine par les deux axiomes ci-dessus, et qu'ils ne sont alors limités par aucune contrainte mis à part que la connexion doit être symétrique vis-à-vis des indices α et β .

(*****)

La courbure affine

La courbure prend alors une signification simple. On s'intéresse au changement linéaire que subit un vecteur quand il est transporté parallèlement à lui-même sur une boucle fermée. Comme dans le théorème de Stokes, on décompose la boucle fermée en une somme intégrale de boucles infinitésimales. On montre alors que le changement linéaire subi par le vecteur autour d'une boucle fermée infinitésimale est donnée en appliquant à la surface infinitésimale orientée un opérateur différentiel qui joue le même rôle que le rotationnel dans le théorème de Stokes. Cet opérateur différentiel est ce qu'on appelle le tenseur de courbure affine:

$$F^{\mu}_{\text{vik}} = \left(\frac{\partial \Gamma_{vk}^{\mu}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{vi}^{\mu}}{\partial x_k} \right) + (\Gamma_{ri}^{\mu} \Gamma_{vk}^r - \Gamma_{rk}^{\mu} \Gamma_{vi}^r)$$

Il généralise les notions de courbure qu'on connaissait déjà chez Gauss, Riemann, etc. La notion du déplacement parallèle donne donc un sens géométrique simple au tenseur de courbure affine : il est une sorte de rotationnel des vecteurs.

(*****)

Définition de la connexion métrique

Jusque là, la construction de Weyl a établi comment l'idée d'une *géométrie de contact* peut s'exprimer au niveau affine de la géométrie. Il reste alors à l'exprimer au niveau métrique.

Si Levi-Civita a manqué, du point de vue de Weyl, de définir une connexion *métrique*, c'est parce qu'il a défini sa connexion au sein de la notion de variété riemannienne. Or, dans sa définition des variétés riemanniennes, Riemann a institué volontairement un élément de géométrie à distance. En effet, il est vrai

que, dans une variété riemannienne, la direction de deux vecteurs éloignés à distance finie, ne peut s'effectuer immédiatement à distance (la construction de Levi-Civita en est la preuve). Toutefois, au contraire de la direction, la *longueur* des vecteurs prend sens immédiatement à distance par une hypothèse explicite de Riemann.

Pour parvenir à une géométrie qui soit purement par contact, il faut alors déconstruire la notion de variété riemannienne pour la généraliser. On part d'une variété différentiable. Et on doit d'abord supposer que les espaces tangents sont munis, chacun isolément, d'une structure métrique.

(*****)

Est-ce que cela revient à attribuer une forme quadratique $g_{\mu\nu}(x)$ à chaque point ? C'est ce qui se passe dans le cas d'une variété riemannienne. Mais ce n'est pas ce qu'on veut ici. Car on veut que les formes quadratiques ne permettent de comparer que deux vecteurs pris au même point.

(*****)

Il faut alors considérer comme équivalentes deux formes quadratiques $g_{\mu\nu}(x)$ et $\lambda(x) \cdot g_{\mu\nu}(x)$. $g_{\mu\nu}(x)$ ne différant que par la multiplication par un champ scalaire continu $\lambda(x)$. Ce scalaire n'a pas de sens objectif, il est pour Weyl un élément subjectif au même titre que le système de coordonnées. Il représente le simple choix d'un étalon de mesure qui ne vaut qu'en un point. C'est ce que Weyl appelle la jauge[Eichung].

Ainsi, la variété munie de structures métriques locales isolées est caractérisée par une classe d'équivalence $[g_{\mu\nu}]$ de formes quadratiques (à multiplication près un facteur de calibration). Et ce passage de la notion proprement riemannienne du $g_{\mu\nu}$ au $[g_{\mu\nu}]$ de Weyl, lui ôte le statut métrique à distance qu'il avait auparavant. Le $[g_{\mu\nu}]$ n'attribue plus une longueur absolue aux vecteurs, mais seulement un rapport de longueur entre des vecteurs au même point. Autrement dit, le $g_{\mu\nu}$ subit une mutation conceptuelle qui lui permet de ne plus attribuer de sens à distance aux comparaisons de longueurs.

(*****)

(*****)

Cela libère alors la place conceptuelle pour introduire une authentique *connexion métrique* par des hypothèses semblables à celles de la connexion affine :

- 1) Une connexion métrique au point P doit établir un isomorphisme métrique entre l'espace tangent en P (muni de $[g_{\mu\nu}](x)$) et chacun des espaces tangents voisins.**

C'est-à-dire qu'un système de coordonnées et une jauge étant choisis, en déplaçant la longueur l du point $P(x)$ au point voisin $Q(x+dx)$, la longueur l subit une dilatation/contraction infinitésimale de telle sorte que la longueur déplacée parallèlement à elle-même devient:

$$l' = l + dl$$

$$\text{avec } dl = -l \cdot d\varphi$$

où $(1-d\varphi)$ est le facteur infinitésimal de la dilatation, $d\varphi$ étant un infiniment petit (mais pas une différentielle totale)

2) Annulation de la connexion :

Pour tout point P, il doit exister un système de référence (système de coordonnées + jauge) qu'on appellera géodésique au point P, qui annule la connexion métrique. C'est-à-dire que dans ce système de coordonnées :

$$d\varphi(dx) = 0$$

Weyl déduit de cela que l'objet $d\varphi$ doit dépendre linéairement de (dx) si bien qu'on a finalement:

$$d\varphi = \phi_{\mu} dx^{\mu} \text{ est un champ de formes linéaires,}$$

ayant des propriétés de variation bien définies lors d'un changement de système de référence.

(*****)

D'une manière analogue à la strate affine de la géométrie, on peut alors définir une courbure, qui n'a aucun équivalent dans une variété riemannienne. On s'intéresse à la dilatation d'un vecteur, c'est-à-dire au changement de longueur que subit un vecteur quand il est transporté parallèlement à lui-même sur une boucle fermée. Comme dans le théorème de Stokes, on décompose la boucle fermée en une somme intégrale de boucles infinitésimales. On montre alors que la dilatation subie par le vecteur autour d'une boucle fermée infinitésimale est donnée en appliquant à la surface infinitésimale orientée un opérateur différentiel qui joue le même rôle que le rotationnel dans le théorème de Stokes. Cet opérateur différentiel est ce que Weyl appelle alors un « rotationnel de longueur », qu'on pourrait encore traduire par « un rotationnel du module » des vecteurs.

$$f_{ik} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} \right)$$

(*****)

Il reste à établir le lien entre les strates affines et métriques de la géométrie de contact.

Si une variété est munie :

- 1) De structures métriques locales non comparables à distance $[g_{\mu\nu}] (x)$
- 2) D'une connexion métrique $\phi_\alpha (x)$

Bref, si c'est une géométrie de contact pour la notion de longueur, alors, on peut la munir d'une seule manière d'une connexion affine qui en fait une géométrie de contact (pour la notion de vecteur), pourvu qu'on pose que les vecteurs déplacés parallèlement à eux-mêmes voient simultanément leurs longueurs être également déplacées parallèlement à elles-mêmes.

Cette connexion affine vaut alors:

$$\Gamma_{rik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right) + \frac{1}{2} [g_{ir} \phi_k + g_{kr} \phi_i - g_{ik} \phi_r]$$

La courbure affine F se décompose alors de façon unique en la courbure métrique (rotationnel des longueurs) et un nouveau tenseur F^* qui est une sorte de (rotationnel des directions) de vecteurs.

$$F_{vik}^{\mu} = F_{vik}^{*\mu} - \frac{1}{2} * \delta_v^{\mu} f_{ik}$$

(*****)

Je vais m'arrêter là pour ce qui est des développements mathématiques de Weyl liés à son idée d'une géométrie de contact. Mais, on pourrait notamment encore développer les thèmes suivants :

- 1) Comment ce programme de refondation de la géométrie différentielle suit des principes et une problématique extrêmement proche de celui entrepris par Elie Cartan à la même période.
- 2) Comment Weyl parvient à traiter les strates projectives et conformes de la géométrie de contact.
En œuvrant, en géométrie de contact, pour une clarification conceptuelle des strates qui composent la géométrie (projective, affine, conforme puis métrique), Weyl travaille aussi pour une clarification de la physique. En effet, en raison de la géométrisation de la physique initiée par Einstein, chaque strate géométrique peut être munie d'une signification physique relativement indépendante des autres strates.

Weyl montre qu'en relativité générale, le projectif correspond aux trajectoires des corps massifs, tandis que le conforme correspond à la propagation de la lumière. A eux, deux ils déterminent la métrique, c'est-à-dire l'ensemble de la géométrie physique, i.e. des phénomènes physiques qui se traduisent en termes d'une déformation de l'espace-temps. Weyl conçoit la possibilité de mesurer les structures à distance finie, de l'espace-temps, dans une région donnée, à l'aide de mesures conjointes sur la lumière et sur des corps massifs en chute libre.

En passant des variétés riemanniennes aux espaces de Weyl (géométrie de contact généralisée) Weyl suppose, au moins pendant quelques années, qu'on pourrait unifier gravitation et électromagnétisme, le premier domaine renvoyant au $g_{\mu\nu}$, et le second au ϕ_i .

(*****)

Nous allons conclure en revenant des mathématiques à la philosophie. Nous ainsi fini notre boucle.

Nous avons montré comment dans la géométrie de contact de Weyl, les structures infinitésimales de l'espace étaient fixées a priori, tandis que les structures à distance finie étaient laissées libre, les valeurs de la connexion étant déterminées a posteriori par les règles d'interaction entre la matière et l'espace-temps. Comment justifier un tel partage des tâches entre le mathématique et le physique, entre ce qui est déterminé a priori en géométrie, et ce qui est pour ainsi dire laissé à la physique.

(*****)

La position épistémologique de Weyl à ce propos est claire et forme un système de pensée cohérent, extrêmement structuré et profond. Il refuse de voir dans la relativité générale un triomphe du point de vue empiriste en géométrie. Certes, comme le montre la géométrie de contact, il faut abandonner à la détermination empirique les relations spatiales à distance finie. Mais cette concession faite à l'empirisme ne prend sens que sur fond de nouveaux fondements a priori donné à la notion de mesure, c'est la notion même de variété riemannienne ou de géométrie de contact, qui fixe a priori la structure infinitésimale des espaces tangents, et le mode général par lequel sont pensés les connexions.

Chez Weyl ce partage entre l'infinitésimal, déterminé a priori, et le fini éloigné, déterminé a posteriori, se fonde sur la nature du sujet connaissant. Le sujet connaissant n'a de rapport à l'espace qu'à travers son incarnation dans un corps par essence situé ponctuellement dans le monde. Ainsi, nous ne pouvons

légitimement prétendre imposer à l'espace, en dehors de la sphère infinitésimale, une structure rigide et uniforme s'étendant immuablement sur tout le cosmos. C'est ce qu'Alexander Afriat nomme justement le télé-scepticisme de Weyl.

Mais la force de l'épistémologie de Weyl est manifeste dans le fait que, une fois cette concession faite à l'empirisme, le domaine infinitésimal où la Raison peut gouverner légitimement est entièrement caractérisé par des exigences rationnelles comme :

- L'homogénéité de l'espace
- Le principe de relativité de la mesure
- La bonne articulation des différentes strates géométriques
- L'idée même de la liberté de la connexion, qui est une sorte d'acte d'humilité de la Raison par lequel elle reconnaît son incompetence pour statuer sur les relations à distance.

Dans son texte majeur *L'Analyse mathématique du problème de l'espace* H. Weyl traduit mathématiquement ces exigences de la raison, et esquisse une démonstration de théorie des groupes (au sens des groupes infinitésimaux) qui démontre que la seule notion d'espace qui satisfasse à ces réquisits de la raison pure est la géométrie de contact, ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie d'un espace de Weyl. Il n'y a ainsi qu'une seule « bonne géométrie » et elle est déterminée entièrement par des exigences de notre raison. En ce sens, la pensée épistémologique de Weyl est une nouvelle forme d'idéalisme transcendantal, un idéalisme transcendantal très fort par ses prétentions à circonscrire univoquement la notion d'espace, mais qui accepte de ne fixer que l'infinitésimal ; cette limite incontournable étant liée à la nature humaine, plus précisément à notre incarnation dans le monde par le biais d'un corps ponctuel situé.