



HAL
open science

Weyl et les espaces à connexions

Bernard Julien

► **To cite this version:**

Bernard Julien. Weyl et les espaces à connexions : Aller et retour entre philosophie et mathématiques. 2012. hal-00731614

HAL Id: hal-00731614

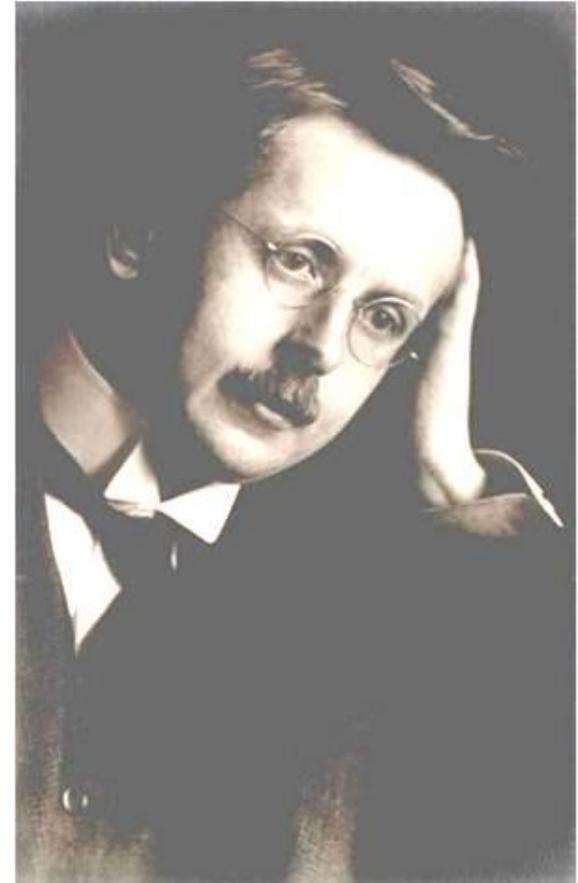
<https://hal.science/hal-00731614>

Preprint submitted on 14 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Weyl et les espaces à connexion, Aller et retour entre philosophie et mathématiques



Exposé à l'UFR de
mathématiques, Université Lille 1

19 avril 2012,

Julien Bernard

ju_bernard@yahoo.fr

www.philo-bernard.fr

La relativité générale : Révolution dans la philosophie de l'espace(-temps)

On fait un nouveau pas [dans la théorie de l'espace] quand on admet que la métrique d'univers n'est pas donnée *a priori*, mais que la forme quadratique qui la représente dépend de la matière par des lois invariantes. Ce n'est que lorsque ce pas est franchi qu'on s'est élevé à une théorie qui mérite vraiment le nom de *théorie de la relativité générale*. Elle permet alors de résoudre le problème de la relativité du mouvement.

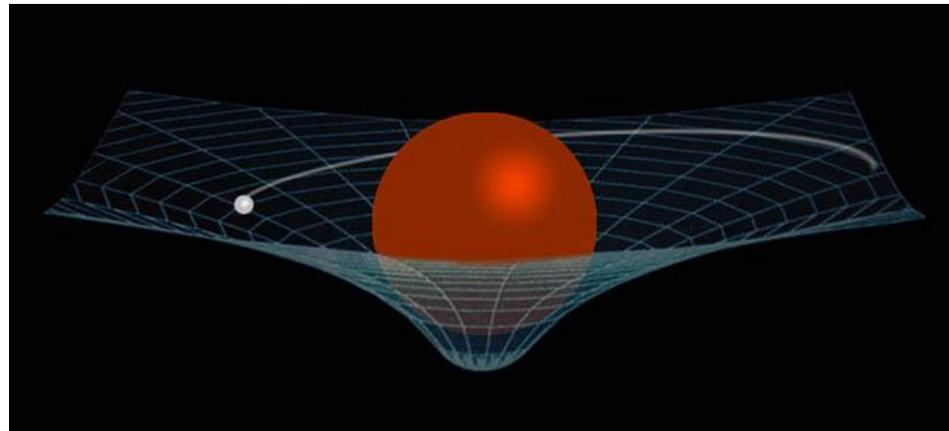
[...]

Et ce n'est que si nous admettons cette théorie, que la gravitation apparaîtra comme une émanation du champ métrique, car nous savons par l'expérience que la gravitation est conditionnée par la répartition des masses (loi d'attraction de Newton). C'est moins dans la condition d'invariance générale, que dans cette nouvelle étape, que nous paraît être le noyau de cette théorie de la relativité généralisée

Espace-Temps-Matière, 3^e édition, p.192-193

Le caractère dynamique de la métrique

Les relations métriques possibles dans l'espace dépendent du contenu même de l'espace (énergie-impulsion)



Les propriétés structurelles d'une portion d'espace varient d'un lieu à un autre et d'un moment à un autre.

Weyl: Cela implique une nouvelle articulation de la physique et des mathématiques dans la constitution du concept d'espace.
→ urgence épistémologique

En quel sens?

Rôle de la physique dans la géométrie du XIXe: La sélection de « la bonne géométrie »

Distinction au XIXe	Géométrie synthétique	Géométrie analytique
	Euclidienne, Hyperbolique, Elliptique, etc.	Variétés riemanniennes, ($V, g_{\mu\nu}(x)$)
En termes de courbure	Géométrie à courbure constante	Géométrie à courbure variable
Dans le langage de Weyl	Géométrie à distance	Géométrie de contact

Le statut de la géométrie différentielle au XIX^e



La géométrie différentielle traite du *contenu* de l'espace (Mesures géodésiques de Gauss,...)

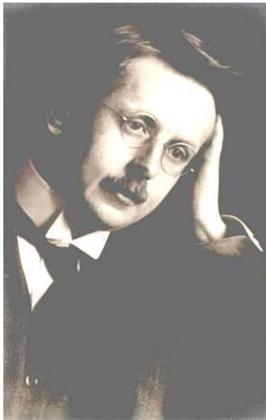


Hypothèse de la constance de la courbure de l'espace / de la mobilité d'un corps rigide

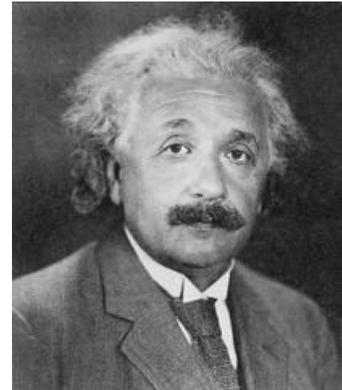
Du XIXe à Einstein...

L'hypothèse de la constance de la courbure:

- Hypothèse physique
 - Condition de possibilité de la géométrie
 - Convention
- > La géométrie comme science de l'espace est synthétique
- > Partage des rôles entre le physicien et le mathématicien en géométrie
-



La réalité ne se tient pas dans l'espace comme dans une caserne à loyers rectangulairement homogène, devant laquelle tous ses différents jeux de force pourraient passer tout en l'ignorant (;) mais elle s'y tient au contraire comme l'escargot construit et agence lui-même la matière de sa maison.





Casernes à loyers
'Mietskasernen'

Le programme de refondation: La géométrie par contact

La transition de la géométrie d'Euclide à celle de Riemann est basée en principe sur la même idée que celle qui a conduit [de la physique des actions à distance] à la physique des actions par contact [=physique des champs]

[...]

Le principe consistant à comprendre le monde à partir de son comportement dans l'infiniment petit est le motif épistémologique qui dirige tant la physique des actions par contact que la géométrie de Riemann [...]

Espace-Temps-Matière, 3^e, p81

De la physique à distance à la physique de contact

Loi de Coulomb (à distance)

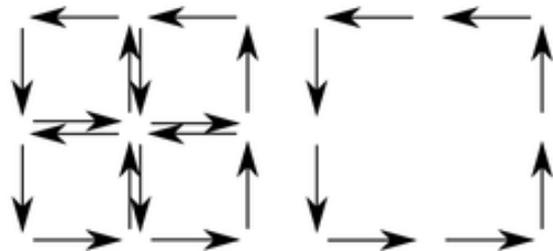
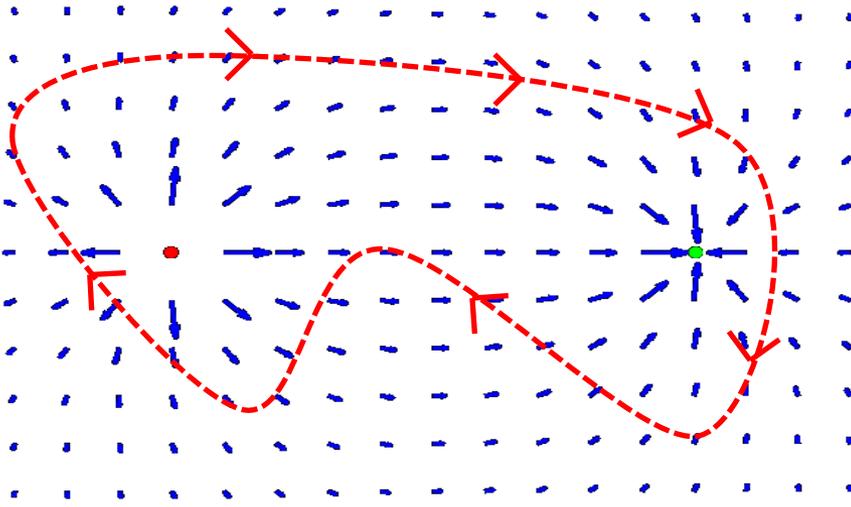
$$\vec{E} = - \int \frac{\rho \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} dV$$

Lois de Maxwell (par contact)

$$(1) \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E}(x)) = \vec{0} \quad (\text{cas électrostatique})$$

$$(2) \quad \overrightarrow{div}(\vec{E}(x)) = \rho \quad (\text{cas électrostatique})$$

Exemple de traduction possible du fini à l'infinitésimal: Le rotationnel



$$\oint_{\partial D} \vec{E}(x) d\vec{r} = 0$$

$$\iint_D \overrightarrow{rot}(\vec{E})(x) d\vec{S} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E})(x) = \vec{0}$$

L'équivalence entre les deux points de vue ne valait que parce que:

1) On se place dans un cas statique. En général:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E})(x) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2) On pose l'annulation du potentiel à l'infini

Le cas général nécessite de passer au point de vue par contact.

Conclusions de Weyl:

- Les lois fondamentales sont les lois « par contact »
- Pour dépasser la physique du XIXe, il ne faut pas seulement penser le contenu de l'espace, mais l'espace(-temps) lui-même comme ayant des propriétés se propageant par contact.

La géométrie de contact [Nahegeometrie]

Fixer *a priori* l'infinitésimal

Laissé indéterminées les structures à distance finie (→Physique)

Ce qui est fixé a priori (Essence de l'espace):

- 1) La structure locale des relations spatiales
(sur les espaces tangents)
- 2) Le mode de connexion qui lie un espace tangent à ses voisins

L'apport de Weyl aux connexions

La construction de la géométrie infinitésimale riemannienne a, au cours des dernières années, beaucoup gagné en simplicité et en clarté grâce au concept de déplacement parallèle infinitésimal d'un vecteur, découvert par Levi-Civita. Levi-Civita l'a introduit en s'appuyant sur l'hypothèse que l'espace riemannien R pouvait être plongé dans un espace euclidien E ayant un nombre supérieur de dimensions. [Weyl décrit le procédé] Un tel procédé, étant déterminé uniquement par le champ métrique de R , se trouve être indépendant des conditions de son plongement dans E . J'ai donné une caractérisation intrinsèque naturelle de ce concept et je dois maintenant la décrire.

H.Weyl, L'analyse mathématique du problème de l'espace, 2e Conférence, p11

$$\xi'^{\mu} = \xi^{\mu} + d\xi^{\mu}$$

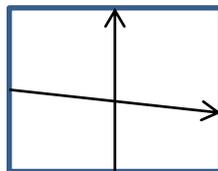
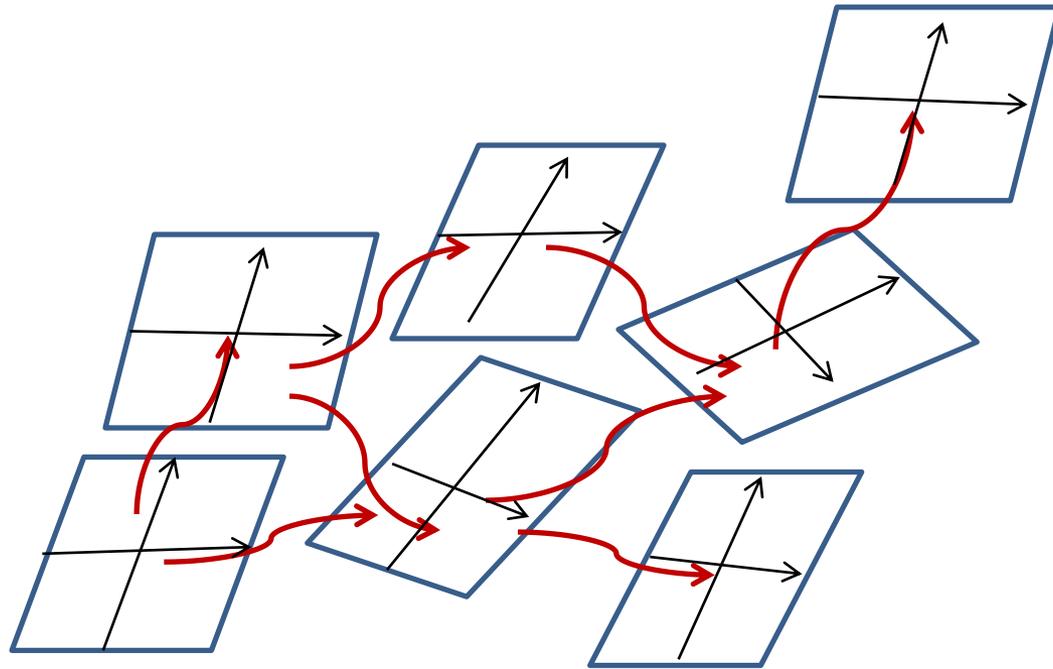
$$\text{avec } d\xi^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} \xi^{\beta}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{2} g^{i\alpha}(x) \left(\frac{\partial g_{j\alpha}(x)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}(x)}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

$$\xi^{\mu} d\xi_{\mu} = 0$$

Weyl: la connexion de Levi-Civita, une notion bâtarde

La géométrie de contact : Strate affine



Les espaces tangents de la variété différentiable



La connexion ?

DÉFINITION DE LA CONNEXION AFFINE

- 1) **Une connexion affine au point P doit établir un isomorphisme linéaire entre l'espace tangent en P et chacun des espaces tangents voisins.**

Dans son transport du point $P(x)$ à $Q(x+dx)$, le vecteur ξ^μ devient :

$$\xi'^\mu = \xi^\mu + d\xi^\mu(dx)$$

$$\text{avec } d\xi^\mu(dx) = d\lambda^\mu_{\alpha} (dx) \xi^\alpha$$

(pas nécessairement $\xi^\mu d\xi_\mu = 0$)

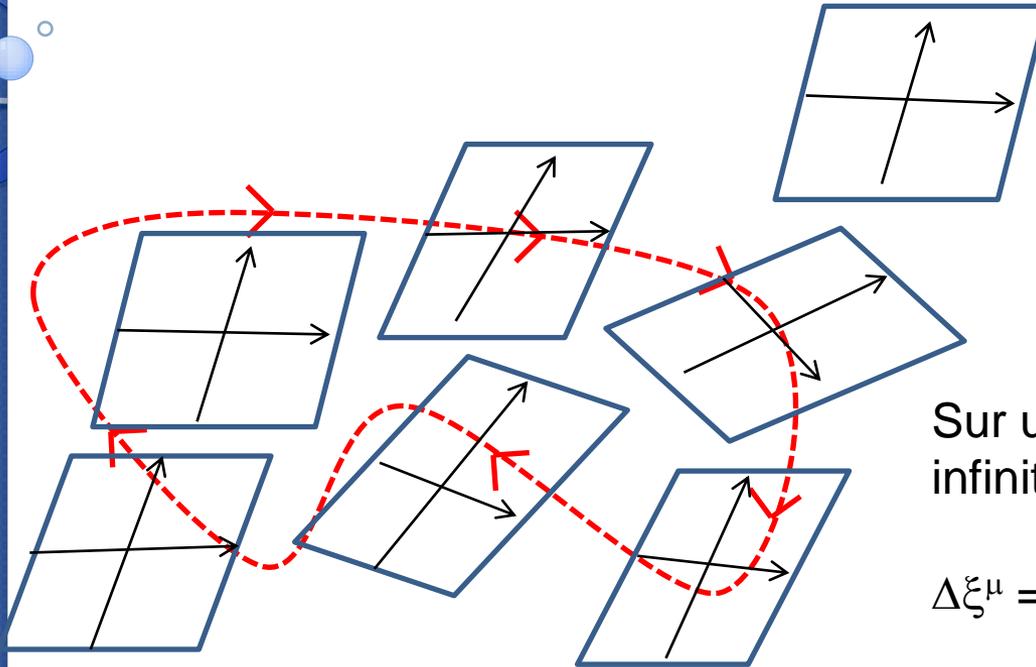
- 2) **Annulation de la connexion**

Dans un système de coordonnées :

$$d\lambda^\mu_{\alpha} = 0 \text{ (uniformément en } dx\text{).}$$

→ $d\lambda^\mu_{\alpha}$ dépend linéaire de dx : $d\xi^\mu = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \xi^\beta$ (Γ sym. en $\alpha\beta$)

La courbure affine



Quand on déplace ξ^μ
sur un chemin fermé il
devient:

$$\xi'^\mu = \xi^\mu + \Delta\xi^\mu$$

Que vaut $\Delta\xi^\mu$?

Sur un parallélogramme
infinitésimal $\Delta x^{ik} = dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i$:

$$\Delta\xi^\mu = F^\mu_{\nu ik} \xi^\nu \Delta x^{ik}$$

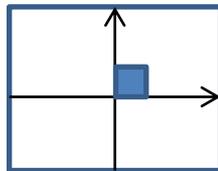
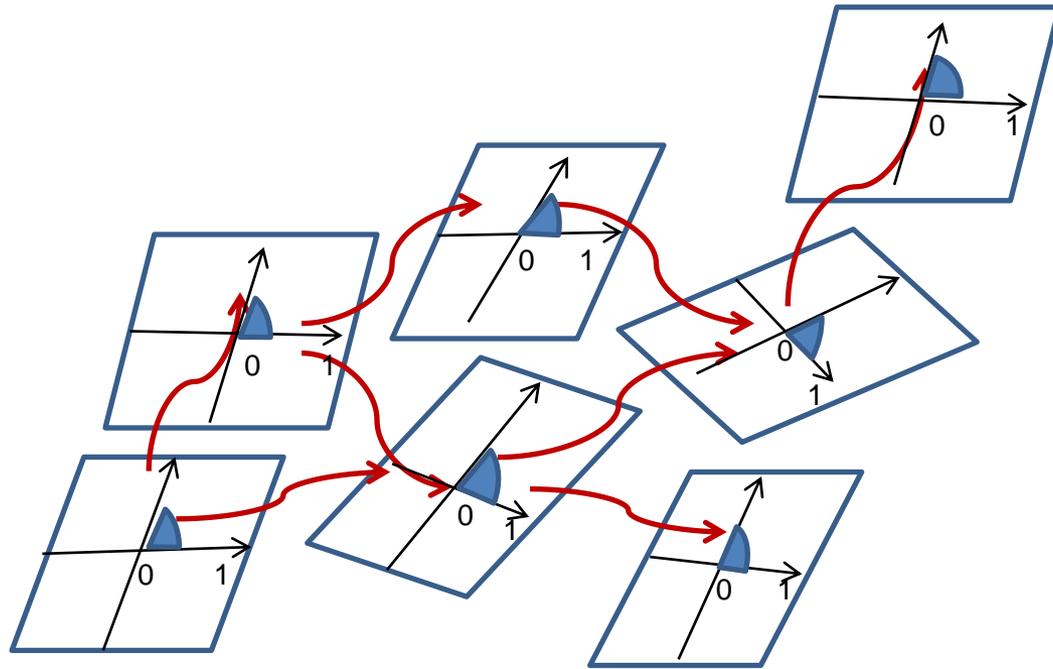
Avec

$$F^\mu_{\nu ik} = \left(\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu k}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu i}}{\partial x_k} \right) + \left(\Gamma^\mu_{ri} \Gamma^r_{\nu k} - \Gamma^\mu_{rk} \Gamma^r_{\nu i} \right)$$

En général, $\Delta\xi^\mu$ vaut:

$$\iint_D F^\mu_{\nu ik} (x) \xi^\nu \Delta x^{ik}$$

La géométrie de contact : Strate Métrique



Les espaces tangents sont munis
d'une classe d'équivalence $[g_{\mu\nu}]$

$$g_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu}$$

$$\text{Si } g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) * \lambda(x)$$

La connexion métrique ?



DÉFINITION DE LA CONNEXION MÉTRIQUE

- 1) **Une connexion métrique au point P doit établir une transformation linéaire (dilatation/contraction) des longueurs entre l'espace tangent en P et chacun des espaces tangents voisins.**

Dans son transport du point $P(x)$ à $Q(x+dx)$, la longueur l devient :

$$l' = l + dl(dx)$$

$$\text{Avec } dl(dx) = -l * d\phi(dx)$$

où $d\phi$ est un facteur de dilatation/contraction infinitésimale quelconque

- 2) **Annulation de la connexion**

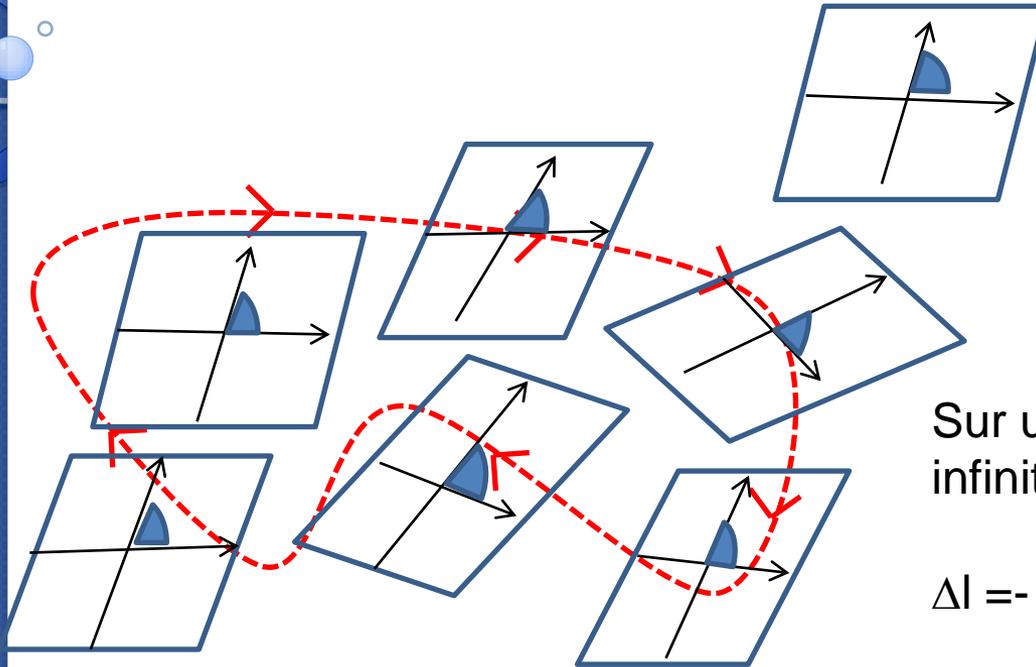
Dans un système de référence (sdc+jauge) :

$$d\phi = 0 \text{ (uniformément en } dx\text{).}$$

→ $d\phi$ dépend linéairement de dx : $d\phi = \phi_\alpha dx^\alpha$

ϕ_α se comporte comme un vecteur covariant lors d'un changement de coordonnées, et devient $\phi_i - \frac{1}{\lambda} * \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}$ lors d'un changement de jauge

La courbure métrique



Quand on déplace l
sur un chemin fermé
elle devient:

$$l' = l + \Delta l$$

Que vaut Δl ?

Sur un parallélogramme
infinitésimal $\Delta x^{ik} = dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i$:

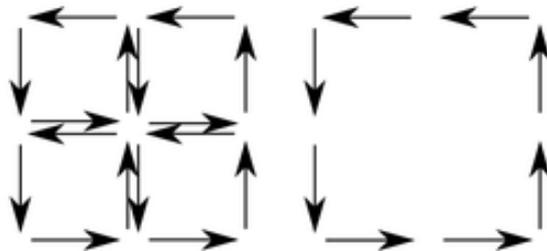
$$\Delta l = - l * f_{ik} \Delta x^{ik}$$

Avec

$$f_{ik} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} \right)$$

En général, Δl vaut:

$$- l * \iint_D f_{ik}(x) \Delta x^{ik}$$



Les liens entre la connexion affine et la connexion métrique

Unicité de la connexion affine pour une connexion métrique donnée

Cette connexion affine vaut alors:

$$\Gamma_{rik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right) + \frac{1}{2} [g_{ir} \phi_k + g_{kr} \phi_i - g_{ik} \phi_r]$$

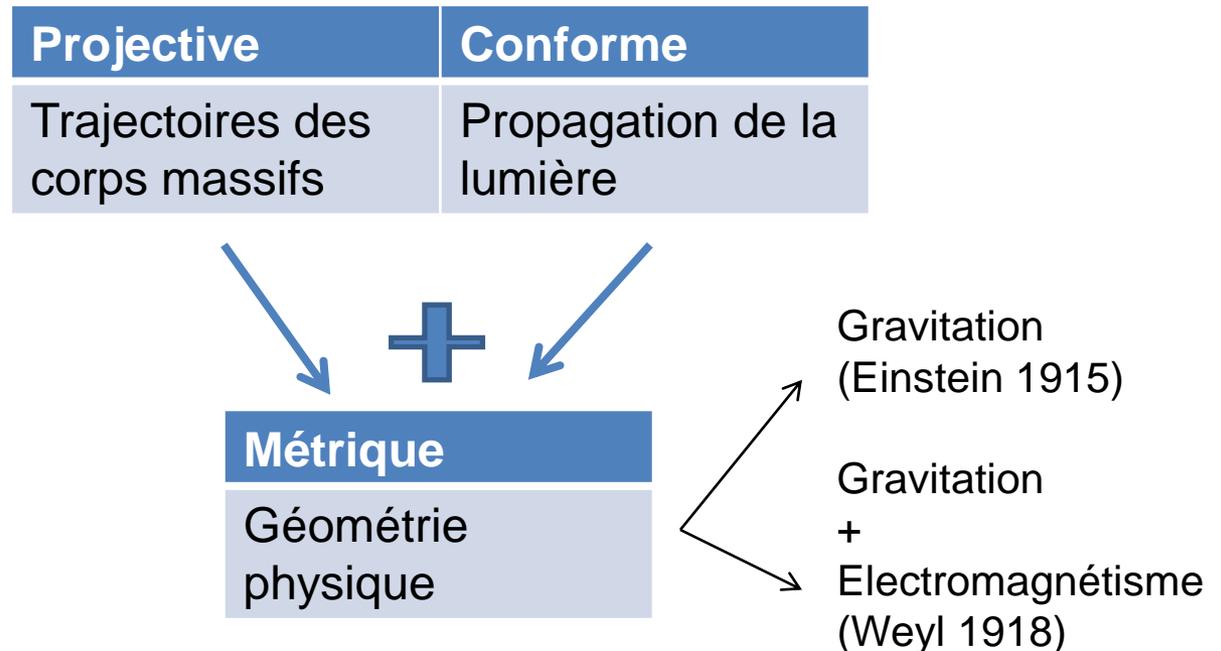
La courbure affine F Se décompose alors de façon unique en la courbure métrique (rotationnel des longueurs) et un nouveau tenseur F^* qui est une sorte de (rotationnel des directions) de vecteurs.

$$F_{vik}^{\mu} = F_{vik}^{*\mu} - \frac{1}{2} * \delta_v^{\mu} f_{ik}$$

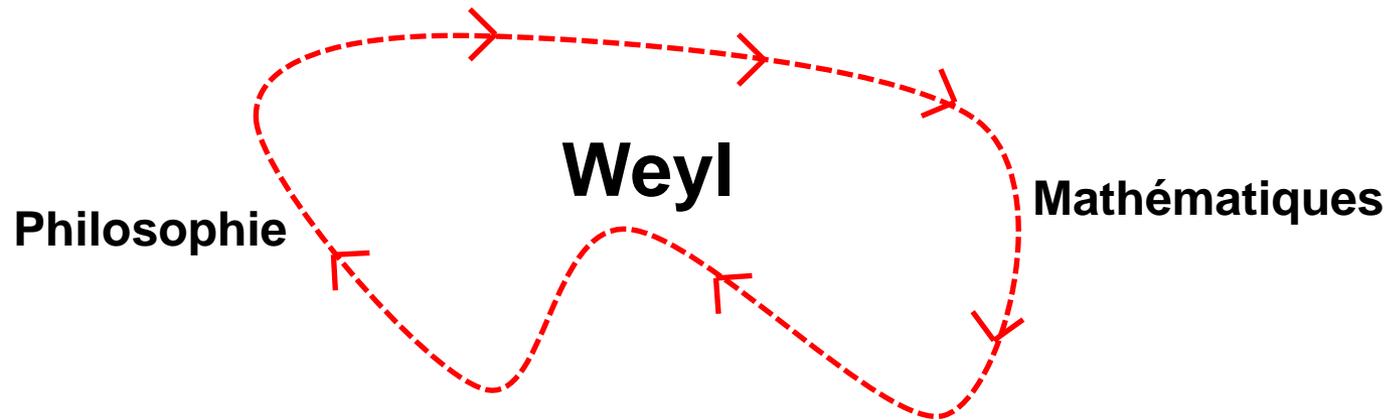
Autres thèmes concernant les apports de Weyl aux connexions

On pourrait développer aussi:

- 1) Le parallèle avec Elie Cartan
- 2)



Et retour à la philosophie...



A priori	A posteriori
Mathématiques	Physique
L'infinitésimal	Le finiment éloigné

Comment justifier épistémologiquement ce partage des tâches?

Justification épistémologique de la géométrie de contact

Refus de l'empirisme radical.

Télé-scepticisme fondé sur une conception du sujet comme sujet incarné situé ponctuellement.

Un idéalisme transcendantal très fort dans l'infinitésimal:

L'analyse mathématique du problème de l'espace

Des exigences de la Raison pure:

- L'homogénéité de l'espace
- Le principe de relativité de la mesure
- La bonne articulation des différentes strates géométriques
- La liberté de la connexion



La géométrie de contact est LA bonne géométrie, la seule répondant à ces exigences rationnelles.