HAL
open science

Planning d'affectation des marchandises: problème de transport à quatre indices

Michel Gourgand, Tuyet Hoa Pham, Alain Tanguy

To cite this version:

Michel Gourgand, Tuyet Hoa Pham, Alain Tanguy. Planning d'affectation des marchandises: problème de transport à quatre indices. 9th International Conference on Modeling, Optimization & SIMulation, Jun 2012, Bordeaux, France. hal-00728613

HAL Id: hal-00728613

https://hal.science/hal-00728613v1

Submitted on 30 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

9e Conférence Internationale de Modélisation, Optimisation et SIMulation - MOSIM'12
06 au 08 Juin 2012 - Bordeaux - France
« Performance, interopérabilité et sécurité pour le développement durable »

PLANNING D'AFFECTATION DES MARCHANDISES : PROBLEME DE TRANSPORT A QUATRE INDICES

M. GOURGAND, T-H. PHAM, A. TANGUY

LIMOS, UMR 6158
Université Blaise Pascal
Campus des Cézeaux
63173 Aubière Cedex - France
{gourgand, pham, tanguy}@isima.fr

RESUME : *Le planning de distribution consiste à élaborer des plans d'affectation des marchandises c'est-à-dire à déterminer les quantités de produits à transporter par des moyens de transport par période afin de répondre au mieux à la demande, à moindre coût. Les problématiques traitées diffèrent principalement selon le nombre d'indices : deux indices (l'offre et la demande) et multi-indices. En nous appuyant sur un cas d'étude que nous généralisons, nous utilisons un modèle de transport de type navette pour la planification de distribution entre le fabricant et le client. Notre objectif est de chercher une solution donnant le coût minimal de transport pour le problème de transport à quatre indices (PT4I : l'offre, la demande, le type de marchandises et le type des moyens de transport). Il est peut-être dégénéré et ne vérifie pas la condition d'existence de la solution (CES). Le PT4I est résolu par la méthode Ninh dans le cas où le problème est non dégénéré et CES est vérifiée (Ninh, 1980). Devant la complexité engendrée par l'optimisation d'un tel modèle, nous développons une méthode de résolution, basée sur un couplage du modèle mathématique et un algorithme, pour résoudre tous les cas non traités, où le PT4I est dégénéré et la CES est non vérifiée. Nous programmons cette méthode en langage Fortran 95 et la testons sur des instances de taille petite, moyenne et grande. Une approche vers des variables entières sera proposée pour le transport d'un nombre de pièces. Celle-ci sera implantée dans le système de gestion de production utilisé par l'entreprise aéronautique AAS qui est un sous traitant de premier rang pour Airbus.*

MOTS-CLES : *problème de transport à quatre indices, optimisation d'un programme linéaire (PL), condition d'existence de la solution d'un PL, dégénérescence d'un PL, méthode des potentiels.*

1 INTRODUCTION

L'étude du transport routier de marchandises regroupe l'ensemble des méthodes et des activités qui ont pour but d'assurer la coordination des flux physiques en optimisant tous les facteurs intervenant dans chaque maillon de la chaîne logistique. Depuis que le premier problème de transport classique, appelé le problème de transport à deux indices (PT2I), a été proposé par Hitchcock, la recherche dans ce domaine a obtenu des résultats satisfaisants sous différentes extensions. Il y a deux principales directions de recherche : théorique et opérationnelle recherche. Sous l'angle théorique, la recherche est très développée au niveau macroéconomique avec le problème de transport à *n* indices. Sous l'angle opérationnel, les résultats sot encore limités car l'application des modèles de transport est compliquée. Ainsi, un problème actuel consiste à chercher des méthodes de résolution pour des problèmes de transport particuliers.

Une classification des problèmes de transport peut être établie en fonction de la typologie du nombre d'indices et de la méthode de résolution correspondante qu'elle nécessite. Nous pouvons distinguer quatre grands groupes : 2 indices, 3 indices, 4 indices et *n* indices. Cet article s'intéresse au problème de transport à quatre indices (PT4I), il s'agit d'une extension du problème de transport Hitchcock, dont les indices sont l'origine, la destination, le type des marchandises transportées et le type des camions utilisés. Il s'agit d'un modèle particulièrement bien adapté pour l'optimisation du transport utilisant un système de navettes régulières desservant plusieurs sites industriels.

Cet article est articulé de la manière suivante : dans une première partie, nous présentons le cas d'étude industrielle sur lequel s'appuie notre étude. Dans une deuxième partie, un état de l'art sur les modèles de transport et les méthodes de résolution correspondantes sera proposé. Dans ce dernier, nous nous focaliserons sur les contributions portant sur le problème de transport à quatre indices, permettant ainsi de situer notre problématique. Dans une troisième partie, la formalisation du PT4I, basée sur le problème de transport à *n* indices, sera présentée. La partie suivante sera consacrée à la présentation d'une méthode de résolution et d'une extension de la méthode Ninh (Ninh, 1980), basée sur celle des potentiels ainsi que des résultats numériques obtenus. Enfin, nous élaborons un programme en langage Fortran 95 basé sur notre méthode exacte et l'exécutons sur des données artificielles. Ce sont les premiers tests pour l'implantation de cet algorithme et sa mise en œuvre avec des données industrielles réelles.

2 CAS D'ETUDE INDUSTRIEL

Depuis quelques années, la stratégie d'Airbus en France est de confier une partie de la fabrication et du montage à divers sous-traitants. En effet, le principal site de Saint Eloi, spécialisé dans la fabrication de mâts de réacteur, se situe au cœur de la ville Toulouse posant des problèmes géographiques d'expansion : il ne peut facilement s'étendre alors qu'il faut intégrer la fabrication des mâts pour les nouveaux programmes A400M et A350.

Comme pour des nombreuses industries, Airbus utilise l'approvisionnement à flux tendu afin d'éviter le stockage qui représentent de la trésorerie dormante. La tendance pour Airbus est donc de privilégier sur son site une grande partie montage. Auvergne Aéronautique Slicom (AAS) est le principal fournisseur en pièces élémentaires et sous-ensembles pour quatre sites d'Airbus : Saint Eloi, Nantes, Méaulte et Saint Nazaire. Elle fabrique plusieurs références de pièces pour différents sites. Les pièces d'équipement de mât représentent la plus grande part dans le délestage de production. La principale destination de ces pièces est l'usine de St Eloi. Précisons que toutes les références qui ne sont pas les pièces d'équipement de mât sont issues de tous nœuds origines et partent vers tous les neufs de destinations.

AAS fabrique trois grandes familles : γt (capots, portes, tôles) γu (tuyauteries) et γp (pièces usinées).
Sur le site d'Aulnat, la capacité de production est : αcapots=0,5T ; αportes=1,2T ; αtôles=0,6T ; αtuyaux=1T ; αpièces=3T. Ainsi, la capacité totale $\alpha A = \sum \alpha = 6{,}3T$
Même opération pour le site de Cournon. La capacité des capots $\alpha_{cC} = 4T$. La capacité totale $\alpha C = 7{,}2T$.
La quantité des capots à produire est : $\gamma_{tc} = \alpha_{cA} + \alpha_{cC} = 4{,}5T$. Même opération pour les quantités des portes, tôles, tuyaux et pièces.
Pour le site de St Eloi, la commande est : βcapots=4T ; βportes=1T ; βtôles=2T ; βtuyaux=2T ; βpièces=0,6T. Ainsi, la demande totale $\beta E = \sum \beta = 9{,}6T$
On fait de même pour les sites de Nantes, Méaulte et St Nazaire.
Il y quatre types de camion dont la charge utile est : $\delta 1$ = 0.65T, $\delta 2$ = 1.5T, $\delta 3$ = 3T et $\delta 4$ = 5.5T.
Le système de distribution se divise en deux :

- Système 1 : deux sites (Aulnat et Cournon) fournissent un seul type de produits (capots) à un site client (Saint Eloi) par deux types de camion (1,5T et 5,5T).
- Système 2 : deux sites (Aulnat et Cournon) fournissent quatre types de produits (portes, tôles, tuyaux, pièces usinées) à trois sites clients (Nantes, Méaute et St Nazaire) par quatre camions (0,65T, 1,5T, 3T et 5,5T).

Compte tenu de la quantité croissante de charge envoyée par Airbus et de la complexité accrue de certaines pièces, la gestion du transport nécessite un outil d'aide à la décision pour pouvoir organiser la livraison de ces pièces en intégrant le coût du transport mis en gardant bien à l'esprit de respect des délais de livraison et la réactivité. Ainsi, le problème de transport posé est induit par la variation non négligeable des gammes, des quantités, des volumes et des différents types de pièces à livrer. De plus, un déséquilibre entre l'offre et la demande apparaît de manière assez régulière dans ce système. En effet, AAS retourne à Airbus les pièces en sous-traitance de certaines pièces (par ex, les nervures équipant les mâts moteurs sont livrés à AAS pour le redressage en chaudronnerie puis retournés chez Airbus). Par conséquent, lors de retour des pièces en délestage, il faut prendre en compte la livraison d'autres pièces fabriquées entièrement par AAS. D'autre part, il y a des pièces qu'AAS ne peut pas livrer faute de place, elles le seront pour la prochaine navette en fonction de la contrainte urgence pour éviter une rupture d'approvisionnement sur la chaîne de montage. Ainsi, la taille, le poids, les quantités sont des paramètres importants pour le choix des types de camions à utiliser en fonction de la limitation de son volume et sa charge utile (PTAC).

Nous modélisons le problème de transport d'AAS (figure 1) en fixant les hypothèses comme suit :

- Origine : groupe de deux sites (Aulnat et Cournon d'Auvergne).
- Destination : groupe de quatre sites (Saint Eloi, Nantes, Méaulte et Saint Nazaire).
- Type de marchandises : 3 grandes familles soit 5 grands types de produit.
- Type de camions : 1 voiture de 0,65 tonne, 1 camion de 1,5 tonne, 1 camion de 3 tonnes, 2 camions de 5,5 tonnes.

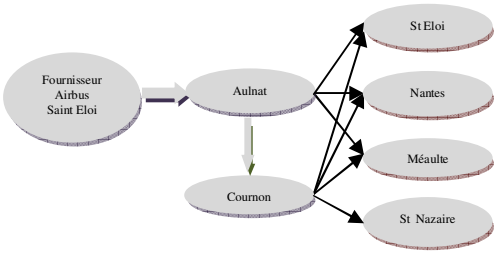

Figure 1 : Le système de transport d'AAS

Le but de notre formalisation est de fournir le plan de distribution des pièces minimisant le coût de transport. Traditionnellement, dans le modèle à deux indices, on traite l'offre et la demande ; trois indices : l'offre, la demande et le type des marchandises ou le type des camions. Dans cette étude, la contrainte de quatre indices impose au type de marchandises et au type de moyens de transport (camion), basée sur deux indices classiques d'offre et de demande ainsi qu'un déséquilibre entre eux sur la quantité. L'objectif est donc de proposer le planning d'affectation des produits afin de vérifier toutes les contraintes avec le coût minimal.

Dans la section suivante, un état de l'art centré sur les problèmes de transport ainsi que leurs méthodes de résolution seront présentés. Un accent particulier est mis sur les contributions classées en fonction du nombre des indices des problèmes traités.

3 ÉTAT DE L'ART

Le premier problème de transport a été élaboré en 1941 par Hitchcock. La première méthode de résolution est celle des potentiels présentée en 1949 par Kantorovich et Gavourin. Ensuite, G.B. Danzig propose une autre méthode de résolution pour le problème de transport classique, basée sur la méthode du simplex. En 1958, Gleyzal présente une méthode en utilisant l'algorithme du simplex dual et en 1963, Kuhn propose une méthode pour résoudre le problème d'affectation, un cas particulier du problème de transport, en développant l'idée d'un mathématicien hongrois en 1931. Bien que la méthode des potentiels soit proposée au milieu du 20ème siècle, jusqu'à maintenant elle reste encore la plus utilisée dans la recherche et l'enseignement (Ninh, 1980), (Zitouni, 2007), (Gourgand *et al,* 2011)… On utilise un rectangle : une arrête représente les offres et l'autre représente les demandes. Chaque case représente un arc (ij) dans laquelle on note le coût c_{ij} et la quantité des marchandises x_{ij}. Après avoir calculé les potentiels, le critère d'optimalité est contrôlé. S'il n'est pas vérifié, on améliore cette solution pour obtenir une meilleure solution.

Le problème Hitchcock est à la base de l'étude des systèmes de transport. Cependant, il fournit peu de possibilités d'application dans la réalité. La taille la plus grande vérifiée est $m = 40, n = 40$ (Dubeau et Guèye, 2008). Pour seulement chercher la « bonne » solution initiale, il y a plusieurs méthodes. En effet, à côté des méthodes classiques (coin du Nord-Est, Vogel, …) deux nouvelles méthodes sont proposées : la méthode DOR (Dubeau et Guèye, 2008) et une méthode approchée pour le problème Hitchcock (Sharma et Prasard, 2003). Suite à ce problème, l'extension de la méthode des potentiels est proposée pour résoudre le problème de transport à deux indices à capacité (PT2IC). Son extension étant une classe du PT2IC avec des bornes sur conditions, concernant la disponibilité aux origines et les exigences des destinations, trouve ses applications dans les réseaux de télécommunication, la production-distribution, le système de fret automatisé où la capacité des ressources est limitée (véhicules, quais, places de stationnement). (Dahiya et Verma, 2007). Une autre extension du problème Hitchcock est de résoudre des problèmes à contraintes d'exclusion (TPESC). Le modèle est basé sur plusieurs problèmes pratiques de distribution et de stockage. Comme dans le problème traditionnel, des marchandises doivent être expédiées et stockées dans un ensemble d'entrepôts. Cependant, un entrepôt ne peut pas être automatisé pour recevoir simultanément des marchandises dans le même établissement en raison des dommages ou des détériorations, par exemple les matières dangereuses telles que les explosifs, produits inflammables, des éléments oxydants devraient être séparés les uns des autres afin d'éliminer la possibilité de dommages (Sun, 2002).

Dans le problème classique, les paramètres sont des paramètres déterministes. Le problème à deux indices a été étendu avec les coefficients de coût flous, l'offre et la demande floues et entières (Chanas et Kuchta, 1998).
Ils ont utilisé une méthode exacte pour résoudre ce problème en deux étapes. Premièrement, le problème est transformé en un problème différent. Puis, ils ont proposé une méthode pour le résoudre en résolvant plusieurs problèmes Hitchcock. Pour un simple modèle avec offres et demandes floues, la taille traitée est très petite : $m = 2$; $n = 3$. Ainsi, plusieurs algorithmes sont proposés pour résoudre les problèmes de transport dans un environnement flou mais dans tous ceux-ci, les paramètres sont représentés par des nombres flous normaux. En mettant l'accent sur cette direction, une nouvelle approche utilisée est la fonction de classement, proposée pour résoudre un type particulier du problème de transport flou en supposant que seul le coût est incertain mais il n'a aucune incertitude sur l'offre et la demande. Ainsi, ces coûts de transport sont représentés par des nombres flous trapézoïdaux généralisés (Kaur et Kumar, 2011).

Dans plusieurs cas réels, les systèmes de transport doivent répondre à la fois à plusieurs objectifs. Selon cette extension, les problèmes multi-objectifs ont été élaborés : coefficients flous « possibilistes » de la fonction objective (Hussein, 1998), paramètres intervalles (Das *et al.*, 1999)… La programmation floue est essentiellement utilisée pour les résoudre. La taille des modèles illustrés est très petite avec le nombre de critères $k = 2$; le nombre d'origine $m = 2$, le nombre de destination $n = 3$ pour le problème Hussein, un problème propose un ensemble des solutions complètes dont l'efficacité est liée à une probabilité $\alpha \in [0,1]$ et $k = 2, m = 3, n = 4$ pour le problème Das. Avec ce problème, les auteurs examinent des exemples correspondants à trois cas traités : pour le cas 1, l'offre et la demande sont déterministes et le coût en intervalle ; l'inverse pour le cas 2 et pour le cas 3, tous les paramètres sont en intervalles. De plus, une nouvelle méthode, basée sur la résolution des problèmes avec des paramètres en nombre flous, est proposée pour trouver la solution d'un problème à plusieurs objectifs linéaires en représentant tous les paramètres en nombres flous intervalles. Afin d'illustrer leur méthode, des modèles simples et de petite taille sont présentés avec $k = 2, m = 3, n = 4$ (Gupta et Kumar, 2011).

Parallèlement à la programmation discrète, le problème de transport des masses, un exemple typique dans la programmation continue, est proposé en première fois par Gaspard Monge en 1971. La base de ce problème est de niveler un terrain. Il est continu car le lieu d'arrivée des terres est chaque point d'une masse de terrain c'est-à-dire une zone plane et c'est pareil pour le lieu de départ. Ce problème est discrétisé par Hitchcock pour devenir le PT2I de manière suivante : dans le plan (X, Y), prendre un rectangle suffisamment grand (A, B) ; diviser A en *m* petits segments A_i $(i = 1 \dots m)$; le segment A_i est considéré comme l'offre d'origine A_i $(i = 1 \dots m)$; noter $\alpha_i = \mu(A_i)$ à ce segment ; diviser B en *n* petits segments B_j $(j = 1 \dots n)$; le segment B_j est considéré comme la demande de destination B_j $(j = 1 \dots n)$; noter $\beta_j =$

$\mu(\beta_j)$ à ce segment ; le rectangle $A \times B$ est divisé en $m \times n$ petits rectangles ; sur le petit rectangle $A_i \times B_j$, prendre la valeur approximative c_{ij} avec $c(x,y)$: $(x,y) \subset (A_i \times B_j)$. Par la suite, Kantorovich a présenté ce problème sous forme géométrique et Kangabo a utilisé la programmation continue pour le résoudre. Une taille moyenne avec $m = 40, n = 40$ est traitée (Kangabo, 1998).

Par l'augmentation du nombre d'indices, le problème de transport à trois indices (PT3I) est élaboré et résolu par une extension de la méthode des potentiels. On utilise un parallélépipède : une arrête représente l'origine $O_i(i = 1 \dots m)$, l'autre représente la destination $D_j(j = 1 \dots n)$ et la troisième arrête représente le type des marchandises S_k ou le type des moyens de transport $H_k(k = 1 \dots p)$. Avec l'utilisation du parallélépipède, nous trouvons que les contraintes du PT3I sont représentées sous la forme d'une série de rectangles qui représente les contraintes de deux indices quand une variable est gardée, les autres sont changées et se sont superposées les uns sur les autres. Ainsi, la réalisation des opérations dans un parallélépipède, par exemple, la recherche de la première solution ou l'élaboration d'un cycle dans un parallélépipède, n'est pas simple. Ses extensions sont donc moins variées : une méthode approchée, basée sur l'ajout de paramètres supplémentaires pour créer un nouveau problème déterministe, est proposée pour résoudre le problème en intervalle. Concernant le problème flou, une simple méthode approchée en le transformant en intervalle (Jiménez et Verdegay, 1998) et un algorithme évolutionnaire basé sur approche paramétrique sont présentées (Jiménez et Verdegay, 1999). De plus, un algorithme génétique amélioré, pour résoudre le problème à multi-objectifs avec nombres flous, est proposé. Un exemple numérique est résolu avec $m = n = p = 3$ et le nombre de critères $k = 3$ (Li *et al.,* 1997).

Simultanément, on continue à généraliser le problème de transport, en un problème général à *n* indices. Il y a $(n-1)$ problèmes à *n* indices (PT*n*I) en fonction de la sommation des contraintes sur $(n-1)$ indices. De manière différente de la réflexion précédente, P.X. Ninh n'utilise pas la super box à *n* dimensions pour le résoudre, il propose une méthode exacte sur le plan, une extension des potentiels, qui coordonne la résolution du problème primal et celle du dual. Cependant, ce résultat ne couvre pas la solution de tous les $(n-1)$ problèmes particuliers car il a seulement trouvé une condition nécessaire et une condition suffisante pour que le problème ait une solution (Ninh, 1979). En général, la plupart des problèmes à *n* indices n'ont qu'une valeur sur le plan théorique. C'est pourquoi, Ninh a choisi de résoudre un cas particulier avec la sommation sur $(n-1)$ indices qui apporte d'avantage de signification sur le plan économique (Ninh, 1979). Le problème est formulé comme suit :

Déterminer $x_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq 0, i_j = 1 \dots n_j \; j = 1 \dots n$ pour

$$minL(X) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} c_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} \qquad (1)$$

et vérifier les contraintes

$$\sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1}^{I_1} \quad i_1 = 1 \dots n_1 \qquad (2)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_2}^{I_2} \quad i_2 = 1 \dots n_2 \qquad (3)$$

……

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{n_{n-1}} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_n}^{I_n} \quad i_n = 1 \dots n_n \qquad (4)$$

$a_{i_1}^{I_1} > 0, a_{i_2}^{I_2} > 0, \dots, a_{i_n}^{I_n} > 0, c_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq 0$ sont connus et déterministes.

Ce problème est résolu par la méthode exacte, une extension de la méthode des potentiels, en faisant la coordination de la résolution du problème primal et dual (Ninh, 1979). Ninh a aussi trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (1…4) ait une solution (CES). Ce problème est aussi présenté sous la forme géométrique (Queyranne et Spieksma, 2007). Ils utilisent une super box à k dimensions dans lesquelles, la $r^{ième} A(r)$ dimension se compose de n_r segments. La section A_{ri} est une super box à $k-1$ dimensions étant liée au segment i de l'arrête A_r. Une méthode approché,e divisée en deux étapes, est proposée. Initialement, en fixant un indice h, ils résolvent $(k-1)$ problèmes à deux indices de A_h à A_r $(r \neq h)$. La solution du problème à k indices est induite par ces $(k-1)$ solutions. Puis ils résolvent $h = 1 \dots k$ problèmes et choisissent la meilleure solution. La taille observée du problème s'arrête à trois indices $(i_1 = 1 \dots 3,\ i_2 = 1 \dots 3,\ i_3 = 1 \dots 4)$.

Parmi les cas particuliers du problème multi-indices, le PT4I est un modèle bien adapté pour l'optimisation du système des navettes, qui a suscité l'intérêt de P.X. Ninh. En remplaçant le nombre d'indices $n = 4$, il obtient la CES pour le PT4I avec la sommation sur 3 indices comme suit :

Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour que le PT4I ait une solution :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = \sum_{l=1}^{q} \delta_l \qquad (5)$$

Si le PT4I a une ou des solutions, ce problème a certainement une solution optimale.

En se basant sur ce résultat, ce PT4I est résolu par une méthode exacte, une extension de la méthode des potentiels, dans le cas où le problème est non dégénéré et la CES est vérifiée (Ninh, 1980). Suite à ce succès, une condition de la capacité limitée sur le chemin a été ajoutée, le problème de transport à quatre indices à capacités PT4IC (Zitouni, 1994). En 2010, basé sur une grande base des données (771x1500), Djamel a réalisé une étude numérique de comparaison entre trois méthodes pour PT4IC : deux méthodes classiques (simplex, points intérieurs) et méthode Zitouni, proposée sur extension de la méthode Ninh (Zitouni, 2007). Basé sur le critère du nombre d'itérations et du temps d'exécution, le résultat obtenu démontre que la méthode Zitouni est la plus favorable (Djamel, 2010).

Le tableau 1 est extrait de la classification précédente et fait apparaître les auteurs proposant des résultats. Il présente les extensions possibles, méthodes et tailles étudiées par ceux-ci.

Modèle	Référence	Méthode	Taille
2I classique	Teghem *et al.*, 2003	Potentiels	Ori. $m = 40$ Des. $n = 40$
2I à capacité des bornes sur RIM	Dahiya et Verma, 2007	Approchée (plusieurs PT2I)	2×3
2I, offre et demande floues	Chanas et Kuchta, 1996	Exacte (plusieurs PT2I)	2×3
2I, coût en nombre flou trapézoïdal généralisé	Kaur et Kumar, 2011	Approchée sur fonction de classement	3×3
2I multi-objs intervalles	Das *et al.*, 1998	Programmation floue	Critères $k = 2$ 2×3
2I multi-objs, coefficients possibilistes	Hussein, 1998	Programmation floue	Critères $k = 2$ 3×4
2I continu	Kangabo, 1998	Programmation continue	40×40
3I flou	Jiménez et Verdegay, 1999	Algorithme évolutionnaire basé sur une approche paramétrique	Critère $k = 2$ $2 \times 2 \times 2$
3I multi-objs, nombre flou	Li *et al.*, 1997	Algo génétique amélioré	Critères $k = 3$ $3 \times 3 \times 3$
4I	Ninh, 1980	Extension des potentiels	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
4I à capacités	Zitouni, 2007 Djamel, 2010	Extension de méthode Ninh	Sommets : 771 Arrêtes : 1500
n indices	Ninh, 1979	Extension des potentiels	4 indices $2 \times 2 \times 2 \times 2$
Multi indices	Queyranne et Spieksma, 2007	Approchée (plusieurs PT2I)	3 indices $3 \times 3 \times 4$

Tableau 1 : Travaux des problèmes de transport

La recherche des problèmes de transport a obtenu des résultats considérables. Parmi lesquels, le PT4I est un modèle qui s'adapte au type de transport navette et peut utiliser plusieurs types de camions pour transporter des marchandises de la fabrication (origine) à l'entrepôt (destination). Il est résolu dans le cas où le problème est non dégénéré et la CES est vérifiée. En 2011, nous proposons une méthode exacte pour résoudre tous les cas non traités, où le PT4I est dégénéré et la CES est non vérifiée. Le principe de résolution a été présenté (Gourgand *et al.,* 2011a) et programmé en langage Fortran 95 dans le cas où la CES est vérifiée (Gourgand *et al.,* 2011b). Nous terminerons l'implantation en langage Fortran 95 des différents cas de CES non vérifiée afin de compléter intégralement l'algorithme de résolution du PT4I sous l'angle informatique. Ce sera utilisé pour le système de transport de AAS.

4 MODELE

La formalisation du PT4I est basée sur le problème de transport à *n* indices :

- m nœuds origine $O_i (i = 1 \dots m)$. L'offre des marchandises à ce nœud est α_i $(\alpha_i > 0\ i = 1 \dots m)$.
- p types de marchandises S_k $(k = 1 \dots p)$. La quantité totale de ce type à tous les nœuds origine est γ_k $(\gamma_k > 0\ k = 1 \dots p)$.
- n nœuds destination $D_j (j = 1 \dots n)$. La demande des marchandises à ce nœud est β_j $(\beta_j > 0\ j = 1 \dots n)$.
- q types de camions $H_l (l = 1 \dots q)$. La quantité totale des marchandises que le camion de ce type peut transporter est $\delta_l (\delta_l > 0\ l = 1 \dots q)$.

L'hypothèse est fixée par l'inhibition du transport en sens inverse ou du nœud destination au nœud origine.

Pour résoudre le PT4I, les paramètres sont connus et déterminés comme suit :

- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l$ les quantités totales définies précédentes.
- $c_{ijkl} \geq 0$ $(i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, k = 1 \dots p, l = 1 \dots q)$ coût unitaire du transport d'une unité de marchandises du type S_k transportée du nœud origine O_i au nœud destination D_j par le camion du type H_l.

Les variables du PT4I sont :
$x_{ijkl} \geq 0$ $(i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, k = 1 \dots p, l = 1 \dots q)$ quantité de marchandises du type S_k transportée du nœud origine O_i au nœud destination D_j par le camion du type H_l dans la solution à établir.

Le PT4I devient :
Déterminer les variables
$x_{ijkl} \geq 0$ $(i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, k = 1 \dots p, l = 1 \dots q)$
pour

$$minL(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} c_{ijkl} x_{ijkl} \quad (6)$$

et vérifier les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \alpha_i \quad i = 1 \dots m \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \beta_j \quad j = 1 \dots n \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \gamma_k \quad k = 1 \dots p \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ijkl} = \delta_l \quad l = 1 \dots q \quad (10)$$

Ces contraintes concernent l'offre à l'origine *i*, la demande à la destination *j*, la quantité de produit *k* et la quantité transportée par le camion *l*.

5 METHODE DE RESOLUTION

Nous trouvons seulement une condition suffisante pour que le PT4I soit dégénéré. La prévision de l'apparition de la dégénérescence n'est donc pas maîtrisée. Nous traitons la non-validation de la CES sous l'angle théorique et l'apparition de la dégénérescence sous l'angle pratique dans le processus de résolution du PT4I. Basé sur ce résultat, nous proposons un algorithme général pour résoudre le PT4I dans le cas où la CES est vérifiée ou non et le problème est dégénéré ou non.

5.1 Condition de dégénérescence

Nous élaborons une condition suffisante pour que le PT4I soit dégénéré lorsque la CES vérifiée.

5.1.1 Forme générale

Théorème : S'il existe m_1 nombres $\alpha_i (0 < m_1 < m)$, n_1 nombres $\beta_j (0 < n_1 < n)$, p_1 nombres $\gamma_k (0 < p_1 < p)$ q_1 nombres $\delta_l (0 < l_1 < q)$ pour que :

somme de ces α_i = somme de ces β_j =
somme de ces γ_k = somme de ces δ_l
alors, le PT4I est dégénéré.

Nous permutons m_1 équations dont le membre de droite est ces α_i, n_1 équations dont le membre de droite est ces β_j, p_1 équations dont le membre de droite est ces γ_k, q_1 équations dont le membre de droite est ces δ_l aux premières lignes dans chaque groupe. Ainsi, pour simplifier mais ne pas diminuer la généralité du problème, nous présentons cette condition sous la forme réduite.

5.1.2 Forme réduite

Théorème : S'il existe des nombres m_1, n_1, p_1, q_1 $(0 < m_1 < m, 0 < n_1 < n, 0 < p_1 < p, 0 < q_1 < q)$ pour que

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n_1} \beta_j = \sum_{k=1}^{p_1} \gamma_k = \sum_{l=1}^{q_1} \delta_l \quad (11)$$

Alors, le PT4I est dégénéré.

Ainsi, la forme générale peut être transformée en forme réduite et à l'inverse par la permutation d'équations quelconques dans le même groupe.

5.1.3 Démonstration

Notre idée est : pour démontrer le PT4I dégénéré, nous avons seulement besoin de trouver une solution dont le nombre des variables positives est inférieur à $(m + n + p + q - 3)$.

Nous prenons les variables x_{ijkl} pour répondre aux contraintes : $\sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{l=1}^{q_1} x_{ijkl} = \alpha_i \;\; i = 1 \dots m_1$

Cela signifie que les premiers m_1 nœuds origine fournissent p_1 premiers types de marchandises aux premiers n_1 nœuds destination par q_1 premiers camions.

Similairement, nous prenons aussi les variables x_{ijkl} pour répondre aux contraintes :

$\sum_{j=n_1+1}^{n} \sum_{k=p_1+1}^{p} \sum_{l=q_1+1}^{q} x_{ijkl} = \alpha_i \;\; i = (m_1 + 1) \dots m$

Cela signifie que les derniers $(m - m_1)$ nœuds origine fournissent $(p - p_1)$ des derniers types de marchandises aux derniers $(n - n_1)$ nœuds destination par $(q - q_1)$ des derniers camions.

Nous représentons les contraintes (7…10) comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \alpha_i & i = 1 \dots m_1 \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \beta_j & j = 1 \dots n_1 \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \gamma_k & k = 1 \dots p_1 \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ijkl} = \delta_l & l = 1 \dots q_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \alpha_i & i = (m_1 + 1) \dots m \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \beta_j & j = (n_1 + 1) \dots n \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{q} x_{ijkl} = \gamma_k & k = (p_1 + 1) \dots p \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ijkl} = \delta_l & l = (q_1 + 1) \dots q \end{cases} \quad (13)$$

Nous étudions indépendamment deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{l=1}^{q_1} x_{ijkl} = \alpha_i & i = 1 \dots m_1 \\ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{l=1}^{q_1} x_{ijkl} = \beta_j & j = 1 \dots n_1 \\ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{q_1} x_{ijkl} = \gamma_k & k = 1 \dots p_1 \\ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{p_1} x_{ijkl} = \delta_l & l = 1 \dots q_1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=n_1+1}^{n} \sum_{k=p_1+1}^{p} \sum_{l=q_1+1}^{q} x_{ijkl} = \alpha_i & i = (m_1 + 1) \dots m \\ \sum_{i=m_1+1}^{m} \sum_{k=p_1+1}^{p} \sum_{l=q_1+1}^{q} x_{ijkl} = \beta_j & j = (n_1 + 1) \dots n \\ \sum_{i=m_1+1}^{m} \sum_{j=n_1+1}^{n} \sum_{l=q_1+1}^{q} x_{ijkl} = \gamma_k & k = (p_1 + 1) \dots p \\ \sum_{i=m_1+1}^{m} \sum_{j=n_1+1}^{n} \sum_{k=p_1+1}^{p} x_{ijkl} = \delta_l & l = (q_1 + 1) \dots q \end{cases}$$

Le sous problème 1 (pour le système 14) répond à sa CES (la relation 11). Nous déterminons l'ensemble des variables nulles qui appartient au système (12) mais pas à celui-ci (14). Ainsi, nous démontrons que l'ensemble de ces variables positives et nulles est la racine du système des contraintes (12). Le nombre des variables positives est maximum $(m_1 + n_1 + p_1 + q_1 - 3)$.

De même, nous démontrons que le nombre des variables positives du système (13) est maximum $\big((m - m_1) + (n - n_1) + (p - p_1) + (q - q_1) - 3\big)$.

$\{x_{ijkl} \geq 0\}$ des systèmes (12) et (13) répondent aux contraintes (7…10). Alors, c'est une solution pour le PT4I.

Le nombre des variables positives de cette solution est au maximum $(m_1 + n_1 + p_1 + q_1 - 3) + \big((m - m_1) + (n - n_1) + (p - p_1) + (q - q_1) - 3\big) = (m + n + p + q - 6) < (m + n + p + q - 3)$

Ainsi, cette solution est dégénérée.

5.2 Dégénérescence, méthode générale

Basé sur la condition suffisante pour que le PT4I soit dégénéré, nous trouvons que la cause de dégénérescence du PT4I est que ce problème peut se diviser en deux sous problèmes indépendants ou chaque sous problème répond à la CES. Ainsi, afin d'éliminer la dégénérescence, il faut que nous modifiions le problème pour qu'il ne puisse pas se diviser en deux sous problèmes indépendants, c'est-à-dire, chaque sous problème ne répond pas à la CES. Pour obtenir ce but, nous ajoutons des paramètres supplémentaires dans les membres de droite du système de contraintes de ce problème afin que chaque sous problème ne répondions pas à la CES mais le problème initial répond toujours à sa CES.

Ainsi, l'idée principale de la méthode de résolution est que, nous additionnons dans le sous problème 1 et soustraire dans le sous problème 2 les mêmes ε. Nous additionnons ε dans le membre de droite d'une équation des contraintes au groupe i du sous problème 1, et à la fois soustraire ε dans le membre de droite d'autre équation des contraintes au groupe i du sous problème 2. La CES n'est pas donc annulée. Nous démontrons que le nouveau problème, établi après la modification du problème de transport initial, est non dégénéré et soluble.

5.3 Dégénérescence, méthode pratique

En réalité, la recherche des éléments m_1, n_1, p_1, q_1 reste relativement difficile même si dans le cas où nous savons qu'ils existent. Ainsi, la condition suffisante de dégénérescence en forme réduite (11) ou celle-ci en forme générale est seulement valable sur le plan théorique. Nous proposons donc une méthode pratique afin

de reconnaître un problème de transport dégénéré et éliminer cette dégénérescence pour les deux cas :
Cas 1 : La dégénérescence apparaît dans le processus d'élaboration de la première solution et la CES vérifiée.
Cas 2 : La dégénérescence apparaît dans le processus de transformations des solutions et la CES vérifiée.

5.3.1 Cas 1

Pendant le processus de détermination d'une variable positive, si nous perdons plus d'une équation dans les contraintes, c'est-à-dire qu'il y a plus d'un membre de droite dont la valeur devient zéro, la solution est dégénérée. Supposons que pendant le processus de détermination d'une variable $x_{ijkl} > 0$ de la première solution, nous perdons deux équations dans les contraintes, c'est-à-dire il y a deux équations dont la valeur des membres de droite devient zéro. Pour éliminer la dégénérescence, nous gardons la valeur zéro au membre de droite d'une équation et pour la valeur zéro au membre de droite de la deuxième équation, nous additionnons ε ($\varepsilon > 0$ et infinitésimal) et simultanément nous retranchons ε au membre de droite d'une équation qui appartient à ce groupe d'indices afin que le problème répond toujours à la CES.

Nous avons quatre grands cas particuliers pour la détermination d'une variable $x_{i_0 j_0 k_0 l_0}$ de la première solution. Parmi lesquels, le premier cas illustre une solution non dégénérée, les autres cas illustrent la dégénérescence.

$x_{i_0 j_0 k_0 l_0} = min[\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}] = \alpha_{i_0}$
$x_{i_0 j_0 k_0 l_0} = min[\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}] = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0}$
$x_{i_0 j_0 k_0 l_0} = min[\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}] = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0} = \gamma_{k_0}$
$x_{i_0 j_0 k_0 l_0} = min[\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}] = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0} = \gamma_{k_0} = \delta_{l_0}$

5.3.2 Cas 2

Supposons que pendant la modification d'une solution non optimale afin de chercher une meilleure solution, nous trouvons une solution avec deux variables x_{ijkl} qui deviennent zéro, cela signifie que le nombre des variables positives de cette solution a moins de $(m + n + p + q - 3)$. Ainsi, elle est une solution dégénérée. Pour éliminer la dégénérescence, nous gardons la valeur zéro de première variable et additionnons $\varepsilon(\varepsilon > 0$ et infinitésimal) dans la deuxième variable zéro. Ainsi, la CES s'est toujours adaptée mais les sommes de quatre membres $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l$ augmentent plus de ε. Sous l'angle mathématique, le nouveau problème est différent du problème initial car la somme totale des marchandises à transporter augmente plus de ε. Cependant, sous l'aspect pratique, cela n'est pas si important car il n'influence pas les résultats d'exploitation réels. Dans le cas où il y a plus de deux variables $x_{ijkl} = 0$, nous additionnons $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ dans ces variables avec le principe ci-dessus pour éliminer la dégénérescence. Après avoir obtenu la solution optimale, nous remplaçons tous ces ε par zéro, nous obtenons donc le résultat du PT4I initial.

Grâce à l'ajout des ε dans le problème initial, nous l'avons transformé en nouveau problème, indivisible en deux sous problèmes indépendants et il répond toujours à la CES. Ce nouveau problème est donc soluble et ses variables sont obtenues en appliquant l'algorithme du PT4I non dégénéré. Cependant, il existe des ε dans ces variables acquises. En remplaçant des ε par zéro, nous obtiendrons la solution optimale du problème initial.

5.4 CES non vérifiée, méthode de résolution

Si un PT4I ne répond pas à la CES, il n'est pas soluble. C'est pourquoi, nous le modifions pour le transformer en un nouveau problème qui répondra à nos attentes. Le principe de modification est d'ajouter des nœuds fictifs et des paramètres fictifs (nœud origine $m + 1$; nœud destination $n + 1$; type des marchandises $p + 1$; type de camion $q + 1$) pour créer l'égalité entre les quatre sommes. Le coût de transport est considéré comme nul : d'un nœud fictif origine aux tous nœuds destination, de tous nœuds origine au nœud fictif destination, transporter des marchandises fictives ou pour l'utilisation du camion fictif. Cela signifie qu'en pratique, par exemple, quand l'offre est inférieure à la demande soit on cherche un fournisseur temporaire soit on diffère la livraison. Basé sur ce principe, nous élaborons le nouveau problème en fonction de trois grands cas particuliers.

- Une somme est supérieure aux autres

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i > max\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j, \sum_{k=1}^{p} \gamma_k, \sum_{l=1}^{q} \delta_l\right)$$

- Deux sommes sont égales et supérieures aux autres

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j > max\left(\sum_{k=1}^{p} \gamma_k, \sum_{l=1}^{q} \delta_l\right)$$

- Trois sommes sont égales et supérieures à la dernière

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k > \sum_{l=1}^{q} \delta_l$$

5.5 Algorithme de résolution

Il y a deux principaux cas : si le PT4I est non dégénéré et sa CES vérifiée, nous utilisons la méthode Ninh (Ninh, 1980) ; si non, notre méthode sera utilisée afin de le transformer en le problème du premier cas. Les étapes de notre algorithme général pour résoudre le PT4I dans tous les cas particuliers sont présentés comme suit :

Étape 1
Nous testons la CES (la relation 5)
Si oui aller à l'étape 3 sinon aller à l'étape 2.

Étape 2
Chercher $max\ (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \sum_{k=1}^{p} \gamma_k, \sum_{l=1}^{q} \delta_l)$
Suppose que

$$max\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \sum_{k=1}^{p} \gamma_k, \sum_{l=1}^{q} \delta_l\right) = \sum_{l=1}^{q} \delta_l = A$$

Ajouter un nœud fictive (m+1) avec la quantité $\alpha_{m+1} = A - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, ainsi $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = A = \sum_{l=1}^{q} \delta_l$.
Prendre $c_{m+1,jkl} = 0$, pour tous j, k, l.
Exécuter de façon similaire pour toutes les sommes qui sont inférieures à A pour obtenir la CES.
Aller à l'étape 3.

Étape 3
Chercher la première solution

1. Cycle 1

Déterminer $x_{i_0 j_0 k_0 l_0} = min\ (\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0})$

❖ Si $\min(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}) = \alpha_{i_0}$

Considérons $x_{i_0 j_0 k_0 l_0} = \alpha_{i_0}$

ainsi, $x_{i_0 jkl} = 0$ avec $j = 1 \dots n, k = 1 \dots p, l = 1 \dots q$, $(jkl) \neq (j_0 k_0 l_0)$

Le membre de droite des contraintes devient

$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i\ (i = 1 \dots m, i \neq i_0)$ et $\alpha_{i_0}^{(1)} = 0$

$\beta_j^{(1)} = \beta_j\ (j = 1 \dots n, j \neq j_0)$ et $\beta_{j_0}^{(1)} = \beta_{j_0} - \alpha_{i_0}$

$\gamma_k^{(1)} = \gamma_k\ (k = 1 \dots p, k \neq k_0)$ et $\gamma_{k_0}^{(1)} = \gamma_{k_0} - \alpha_{i_0}$

$\delta_l^{(1)} = \delta_l\ (l = 1 \dots q, l \neq l_0)$ et $\delta_{l_0}^{(1)} = \delta_{l_0} - \alpha_{i_0}$

❖ Si $\min(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}) = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0}$

- Remplacer β_{j_0} par $\beta'_{j_0} = \beta_{j_0} + \varepsilon$, β_j par $\beta'_j = \beta_j - \varepsilon$ $j \in [1, j_0[\cup]j_0, n]$

❖ If $\min(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}) = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0} = \gamma_{k_0}$

- Remplacer β_{j_0} par $\beta'_{j_0} = \beta_{j_0} + \varepsilon_1$, β_j par $\beta'_j = \beta_j - \varepsilon_1$ $j \in [1, j_0[\cup]j_0, n]$
- Remplacer γ_{k_0}par $\gamma'_{k_0} = \gamma_{k_0} + \varepsilon_2$, γ_k par $\gamma'_k = \gamma_k - \varepsilon_2$ $k \in [1, k_0[\cup]k_0, p]$

❖ Si $\min(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}, \gamma_{k_0}, \delta_{l_0}) = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0} = \gamma_{k_0} = \delta_{l_0}$

- Remplacer β_{j_0} par $\beta'_{j_0} = \beta_{j_0} + \varepsilon_1$, β_j par $\beta'_j = \beta_j - \varepsilon_1$ $j \in [1, j_0[\cup]j_0, n]$
- Remplacer γ_{k_0}par $\gamma'_{k_0} = \gamma_{k_0} + \varepsilon_2$, γ_k par $\gamma'_k = \gamma_k - \varepsilon_2$ $k \in [1, k_0[\cup]k_0, p]$
- Remplacer δ_{l_0} par $\delta'_{l_0} = \delta_{l_0} + \varepsilon_3$, δ_l par $\delta'_l = \delta_l - \varepsilon_3$ $l \in [1, l_0[\cup]l_0, q]$

Ainsi, avec $i \neq i_0$ nous avons la CES

$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \alpha_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k^{(1)} = \sum_{l=1}^{q} \delta_l^{(1)} = A - \alpha_{i_0}$

Les autres cas sont traités de façon similaire.

2. Cycle 2

Déterminer $x_{i_1 j_1 k_1 l_1} = \min\ (\alpha_{i_1}^{(1)}, \beta_{j_1}^{(1)}, \gamma_{k_1}^{(1)}, \delta_{l_1}^{(1)})$.

Si le nombre des variables positives de la solution est inférieur à $(m + n + p + q - 3)$, retourner au cycle 1. Toutes les variables $\{x_{m+1,jkl}\ \forall(jkl), x_{i,n+1,kl}\ \forall ikl, x_{ij,p+1,l} \forall ijl, x_{ijk,q+1}\ \forall ijk\}$ seront déterminées à la fin.

Aller à l'étape 4.

Étape 4

Contrôler l'optimalité de la solution *X*.

1. Déterminer les potentiels

$u_i^I, u_j^J, u_k^K, u_l^L\ (i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, k = 1 \dots p, l = 1 \dots q)$

pour $u_i^I + u_j^J + u_k^K + u_l^L = c_{ijkl}$ avec $x_{ijkl} > 0$.

2. Calculer les éléments

$\Delta_{ijkl} = c_{ijkl} - \left(u_i^I + u_j^J + u_k^K + u_l^L\right)$ avec $\forall x_{ijkl} = 0$

Tester $\forall \Delta_{ijkl} \geq 0$ (15)

- Si la condition (15) est vérifiée, aller à l'étape 6.
- La solution *X* n'est pas optimale, aller à l'étape 5.

Étape 5

Modifier la solution *X* pour chercher une meilleure solution

1. Déterminer les éléments

Déterminer $\Delta_{i^* j^* k^* l^*} = min \Delta_{ijkl} < 0$

S'il y a plusieurs Δ_{ijkl} qui prennent la valeur minimale, prendre n'importe quel Δ_{ijkl} parmi ceux-ci.

Déterminer t_{ijkl} pour

$$\sum_{(ijkl):x_{ijkl}>0} t_{ijkl}.P_{ijkl} + P_{i^* j^* k^* l^*} = 0$$

La partie droite de ces contraintes est le vecteur 0.

P_{ijkl} le vecteur-coefficient des variables dans les contraints. Il y a un vecteur colonne qui a quatre composantes 1 en lignes *i*, *m+j*, *m+n+k*, *m+n+p+l*, les autres sont nulles.

2. Élaborer une nouvelle solution

Déterminer θ pour $\theta = min \frac{x_{ijkl}}{|t_{ijkl}|}$ avec $t_{ijkl} < 0$

$x'_{ijkl} = x_{ijkl} + \theta.t_{ijkl}$ avec $x_{ijkl} > 0$

$x'_{i^* j^* k^* l^*} = \theta$

$x'_{ijkl} = x_{ijkl}$ avec $x_{ijkl} = 0$ et $(ijkl) \neq (i^* j^* k^* l^*)$

Nous testons, parmi ces variables x'_{ijkl}, s'il n'y en a qu'une qui est nulle.

- Si oui la solution n'est pas dégénérée.
- sinon garder une valeur d'une variable et considérer que la valeur des autres variables sont respectivement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$

Retourner à l'étape 4.

Étape 6

- Remplacer ε par zéro pour les variables obtenues.
- Éliminer les variables qui correspondent aux nœuds et paramètres fictifs dans l'étape 2.

Nous obtenons la solution optimale du problème initial.

6 RESULTATS

6.1 Exemples numériques

Pour illustrer la méthode proposée, nous donnons trois exemples numériques (tableaux 2 et 3) de taille $m = n = p = q = 2$.

Nous étudions trois cas :

- Cas 1 : CES vérifiée et la dégénérescence apparaît dans la première solution.
- Cas 2 : CES vérifiée et la dégénérescence apparaît pendant la modification des solutions.

Cas 3 : CES non vérifiée.

Unité : tonne

	α			β			γ			δ		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3
1	30	30	30	30	35	35	38	38	38	40	40	40
2	40	13	-	40	8	35	32	5	32	30	3	30

Tableau 2 : Offre, demande, quantité des produits et charges utiles des camions

Unité :€/ tonne

			Origine 1			Origine 2		
			C1	C2	C3	C1	C2	C3
Des 1	Mses 1	Cam 1	8	8	8	7	7	-
		Cam 2	10	2	3	9	5	-
	Mses 2	Cam 1	17	4	4	16	3	-
		Cam 2	14	6	6	13	4	-
Des 2	Mses 1	Cam 1	3	9	3	8	8	-
		Cam 2	1	1	1	5	5	-
	Mses 2	Cam 1	10	7	7	2	2	-
		Cam 2	5	5	5	4	4	-

Tableau 3 : Coût de transport unitaire

En utilisant notre algorithme, nous obtenons les résultats intermédiaires (tableau 4) et la solution optimale finale (tableau 5).

Solution Unité : tonne *Coût Unité : €*

	1rt Solution		L1		L2	
	Solution	**Coût**	**Solution**	**Coût**	**Solution**	**Coût**
C1	x_{1111}=30	428	x_{1111}=30	428-ε	x_{1111}=22+ε	348+9ε
	x_{2211}=8		x_{2111}=ε		x_{2111}=8	
	x_{2221}=2		x_{2211}=8-ε		x_{2221}=10-ε	
	x_{2222}=30		x_{2221}=2		x_{2222}=22+ε	
	dégénérée		x_{2222}=30		x_{1212}=8-ε	
C2	x_{1111}=30	315	x_{1111}=27	285	x_{1111}=27	285+8ε
	x_{2111}=5		x_{2111}=8		x_{2111}=8	
	x_{2211}=3		x_{2221}=5		x_{2211}=ε	
	x_{2221}=2		x_{1212}=3		x_{2221}=5	
	x_{2222}=3		dégénérée		x_{1212}=3	
C3	x_{1111}=30	240	x_{1111}=27	219	$x_{2111} = \frac{43}{2}$	70,5
	x_{2111}=5		x_{2111}=8		x_{2221}=5	
	x_{2211}=3		x_{2221}=5		$x_{1212} = \frac{33}{2}$	
	x_{2221}=2		x_{2222}=27		$x_{2222} = \frac{27}{2}$	
	x_{2222}=30		x_{1212}=3		$x_{1121} = \frac{27}{2}$	

Tableau 4 : Solutions intermédiaires

Solution Unité : tonne *Coût Unité : €*

	L3		L4		LO	
	Solution	**Coût**	**Solution**	**Coût**	**Solution**	**Coût**
C1	-	-	-	-	x_{1111}=22	348
	-		-		x_{2111}=8	
	-		-		x_{2221}=10	
	-		-		x_{2222}=22	
	-		-		x_{1212}=8	
C2	-	-	-	-	x_{1111}=27	285
	-		-		x_{2111}=8	
	-		-		x_{2221}=5	
	-		-		x_{1212}=3	
	-		-		-	
C3	x_{2111}=8	30	x_{2111}=8	30	x_{1212}=30	30
	x_{2221}=5		x_{2221}=5		-	
	x_{1212}=30		x_{1212}=30		-	
	x_{2121}=27		x_{2121}=27		-	
	dégénérée		x_{2222}=ε		-	

Tableau 5 : Solutions optimales

6.2 Performance

Nous programmons la méthode en langage Fortran 95. Le programme traite jusqu'à 100.000 variables en 42 secondes avec un ordinateur équipé d'un CPU Intel Core2 Quad à 1,97Ghz. Le tableau 6 présente un extrait des performances du programme intégral, basé sur notre algorithme, pour la résolution du PT4I dans tous les cas où le problème est dégénéré ou non et la CES est vérifiée ou non.

Ainsi, sous l'angle théorique, notre méthode a permis de résoudre intégralement le PT4I dans tous les cas et donne des résultats exacts. Cependant, sous l'angle du calcul numérique, les résultat sont approchés car les ε ne sont pas encore éliminés. Ils peuvent être éliminés en les traitant à part mais ce n'est pas gênant car actuellement nous arrondissons manuellement.

Nom	*m*	*n*	*p*	*q*	Nb Var	Nb Iter	T. Exe (s)
H2-KO	1	2	2	2	8	3	0,00056
H4-KO	2	3	4	4	96	9	0,00185
H10-KO	4	2	10	4	320	17	0,00987
H20-OK	4	2	20	4	640	47	0,1875
H40-OK	4	2	40	4	1280	126	0,6250
H60-OK	4	4	60	6	5760	243	1,9531
H55-OK	4	5	55	7	7700	279	2,4531
H70-OK	4	8	70	5	11200	348	4,6562
H100-OK	4	4	100	4	6400	355	6,6562
H95-OK	10	10	95	7	66500	791	24,4375
H100-OK	10	10	100	10	100000	958	42,8437

Tableau 6 : Résultat d'exécution

6.3 Aspects industriels

Nous extrairons un résultat pour l'illustration d'élaboration d'un planning journalier avec l'hypothèse des produits en vrac, basé sur les données d'un simple modèle du deuxième système avec 2 origines (Aulnat, Cournon) , 3 destinations (Nantes, Méaulte, St Nazaire), 4 grands types de produits (porte, tôle, tuyau, pièces usinées), 4 types de camions (0,65T, 1,5T, 3T, 5T) et ce modèle répond à la CES.

Unité : tonne

	Origine	**Destination**	**Références**	**Camion**	**Quantité**
Planning	Aulnat	Nantes	Portes	0,65T	0,65
	Aulnat	Nantes	Tôle	0,65T	0,65
	Aulnat	Nantes	Tuyau	5T	0,075
	Aulnat	Méaulte	Tôle	1,5T	1,699
	Aulnat	Méaulte	Pièces	5T	1,3
	Aulnat	St Nazaire	Tôle	1,5T	0,225
	Cournon	Nantes	Tuyau	3T	1,425
	Cournon	Nantes	Pièces	1,5T	1,5
	Cournon	Nantes	Pièces	3T	0,699
	Cournon	St Nazaire	Tôle	5T	2,425
Coût de transport : 68,6099€					
Nombre d'itérations : 23					
Temps d'exécution : 0,109375s					

Tableau 7 : Planning optimal

Le coût de transport obtenu par ce modèle est de 68,6099€, acceptable car le coût actuel de l'entreprise AAS est approximativement de 90€. Cependant, l'implantation du modèle de transport à quatre indices dans l'industrie fait apparaitre des points faibles. En effet, le modèle n'intervient pas sur la distinction des données représentant l'offre et la demande de chaque type de marchandises à chaque nœud origine et chaque nœud destination. Il ne peut intervenir dans l'élaboration d'un planning de distribution pour chaque entrepôt. Le responsable doit donc élaborer un planning de distribution interne au sein de son réseau d'entrepôts, après la réception des produits, pour répondre de façon exacte aux exigences de l'approvisionnement de tel produit pour un entrepôt donné. De plus, les variables du modèle sont continues alors que dans la réalité, les entreprises ont un besoin de transporter de produits unitaire, par exemple un capot, trois tubes de dégivrage… Ainsi, nous testons les données du cas 1 (partie 6.1) et obtenons des solutions qui donnent la même valeur de coût (348€) en utilisant le logiciel

GLPK et Lpsolve en nombres entiers. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 8 comme suit :

Notre méthode (nombre réel)	Méthode approchée (nombre entier)	
	Solution 1	Solution 2
$x_{1111} = 22$	$x_{1111} = 22$	$x_{1111} = 11$
$x_{1212} = 8$	$x_{1212} = 8$	$x_{1212} = 19$
$x_{2111} = 8$	$x_{2112} = 8$	$x_{2111} = 8$
$x_{2221} = 10$	$x_{2221} = 18$	$x_{2122} = 11$
$x_{2222} = 22$	$x_{2222} = 14$	$x_{2221} = 21$

Tableau 8 : Résultats des solutions en nombres entiers

Ce sont les résultats obtenus. Nous devrons apporter d'avantage d'amélioration sur le modèle afin de niveler l'écart entre le modèle théorique et les applications industrielles attendues.

7 CONCLUSION

Notre travail a abouti à la résolution de tous les cas du PT4I non traités auparavant sous l'angle mathématique exacte. Ainsi, nous avons proposé un nouvel outil pour l'optimisation des problèmes de transport des marchandises. Pour implanter ce modèle dans l'industrie, nous avons réalisé un programme en langage Fortran 95. Le temps d'exécution est assez rapide pour les moyennes et grandes tailles. Cependant, dans ce modèle, les variables sont continues et les paramètres sont déterministes. Suite à cette extension, nous prévoyons d'étudier deux problèmes. Nous traiterons le PT4I avec les variables entières par des méthodes approchées à l'aide de bibliothèques Fortran et des outils logiciels GLPK et LPsolve. Puis nous étudierons le PT4I stochastique. Ces derniers travaux s'adapteront plus aux exigences de l'industrie.

REFERENCES

Chanas, S. and D. Kuchta, 1998. Fuzzy integer transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 98(3), p. 291-298.

Dahiya, K. And V. Verma, 2007. Capacitated transportation problem with bounds on RIM conditions. *European Journal of Operational Research,* Vol 178(3), p. 718-737.

Das, S.K., A. Goswani and A. Alam., 1999. Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters. *European Journal of Operational Research*, Vol 117(1), 100-112.

Djamel, A., 2010. *Étude numérique comparative entre des méthodes de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacités.* Mémoire Magistère: Mathématique d'application, Université de Constatine, Algérie.

Dubeau, F. and M. Guèye., 2008. Une nouvelle méthode d'initialisation pour le problème de transport. *Rairo Operations Research*, Vol 42(1), 389-400.

Gourgand, M., T.H. Pham and A. Tanguy., 2011. Four index transportation problem: principle, resolution and application in industry., *3rd IEEE International Symposium Logistics and Industrial Informatics (LINDI'2011)*, Budapest, Hungary.

Gourgand, M., T.H. Pham and A. Tanguy., 2011. Mathematical model and industrial application of four index transportation problem. *25th European Simulation and Modelling Conference (ESM'2011)*, Guimaraes, Portugal.

Gupta, A. and A. Kumar., 2011. A new method for solving linear multi-objective transportation problems with fuzzy parameters. *Applied Mathematical Modelling*, Vol 35(12), p. 5652-5661.

Hussein, M.L., 1998. Complete solutions of multiple objective transportation problems with possibilistic coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 93(3), p. 293-299.

Jimenez, F. and J.L. Verdegay, 1998. Uncertain solid transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 100(1-3), 45-57.

Jimenez, F. and J.L. Verdegay, 1999. Solving fuzzy solid transportation problems by an evolutionary algorithm based parametric approach. *European Journal of Operational Reseach*, Vol 117(3), 485-510.

Kangobo, I., 1998. *Contribution à la résolution du problème de transport continu*. Thèse de Doctorat, Université de Montréal, Canada.

Kaur, A. And A. Kumar, 2011. A new approach for solving fuzzy transportation problem using generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Applied Soft Computing*. Online 31 October 2011.

Li, Y., K. Ida and M. Gen., 1997. Improved genetic algorithm for solving multiobjective solid transportation problem with fuzzy numbers. *Computeurs & Industrial Engineering*, Vol 33(3-4), p. 598-592.

Ninh, P.X., 1979. *n* index transportation problem. *Mathematical Journal*, Vol 7(1), 18-25, Vietnam.

Ninh, P.X., 1980. *Les problèmes de transport à plusieurs indices*. Thèse de Doctorat, Institut Polytechnique de Hanoï, Vietnam.

Queyranne, M. and F.C.R. Spiesksma., 2007. Approximation algorithms for multi-index transportation problem with decomposable costs. *Discrete Applied Mathematics*, Vol 76(1-3), 239-253.

Sharma, R.R.K. and S. Prasad, 2003. Obtaining a good primal solution to the incapacitated transportation problem. *European Journal of Operational Research*, Vol 144(3), p. 560-564.

Sun, M., 2002. The transportation problem with exclusionary side constraints and two branch-and-bound algorithms. *European Journal of Operational Research*, Vol 140(3), p. 629-647.

Teghem, T., F. Glineur, and D. Tuyttens., 2003. Programmation linéaire. *2nd Edition revue et augmentée, Edition Allipses*, Belgique.

Zitouni, R., 1994. *Le problème de transport à quatre indices à capacités*. Thèse Magistère : Mathématique d'application, Université D'Oran-Es-Senia, Algérie.

Zitouni, R., 2007. A note on the algorithm of resolution of a capacitated transportation problem with four subscripts. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol 26(3), p. 769-778.