HAL
open science

EVALUATION EXACTE DE LA FIABILITÉ DES RÉSEAUX IMPARFAITS- UNE APPROCHE BASÉE SUR LA RÉDUCTION POLYGÔNE-À CHAINE

Mohamed-Larbi Rebaiaia, Daoud Ait-Kadi

To cite this version:

Mohamed-Larbi Rebaiaia, Daoud Ait-Kadi. EVALUATION EXACTE DE LA FIABILITÉ DES RÉSEAUX IMPARFAITS- UNE APPROCHE BASÉE SUR LA RÉDUCTION POLYGÔNE-À CHAINE. 9th International Conference on Modeling, Optimization & SIMulation, Jun 2012, Bordeaux, France. hal-00728602

HAL Id: hal-00728602

https://hal.science/hal-00728602v1

Submitted on 30 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

9th International Conference of Modeling, Optimization and Simulation - MOSIM'12
June 06-08, 2012 – Bordeaux - France
"Performance, interoperability and safety for sustainable development"

EVALUATION EXACTE DE LA FIABILITÉ DES RÉSEAUX IMPARFAITS BASÉE SUR LE PRINCIPE DE FACTORISATION POLYGONE-À CHAINE

M-L. REBAIAIA, D. AIT-KADI

CIRRELT/GMC University Laval
Pavillon Adrien-Pouliot, local 1504
1065 avenue de la médecine
Québec (Qc) Canada G1V 0A6
Mohamed-larbi.rebaiaia@cirrelt.ca, daoud.aitkadi@gmc.ulaval.ca

RESUME : *L'évaluation de la fiabilité des systèmes est nécessaire dans de nombreux réseaux sensibles. Malgré l'efficacité accrue des ordinateurs et la proposition d'algorithmes ingénieux, trouver une valeur exacte de la fiabilité d'un réseau complexe reste pour le moment un problème difficilement surmontable. Cet article présente une démarche mathématique pour déterminer la fiabilité exacte des réseaux basée sur le principe de réduction polygone-à chaine. L'objectif est de montrer que même dans le cas où les nœuds et les liens d'un réseau peuvent être sujets à des défaillances, l'évaluation de la fiabilité devient possible qu'une fois le réseau est prouvé décomposable. Pour cela, nous proposons des transformations mathématiques qui permettent de faciliter les réductions et les calculs.*

MOTS-CLES : *Fiabilité, Réseaux, Algorithme, Factorisation, Polygone-à chaîne, Décomposition.*

1 INTRODUCTION

L'analyse de la fiabilité des réseaux a été le sujet de nombreuses publications depuis les années cinquante. Plusieurs méthodes plus ou moins connues ont été développées. Ces méthodes fondamentalement basées sur des algorithmes d'énumération [1, 9, 12, 13, 20], les sommes des produits-disjoints [1, 9, 13] et les diagrammes binaires de décision [2, 3, 9, 18] sont très efficaces mais ne permettent malheureusement pas de traiter des réseaux complexes. Dans la pratique, il n'existe pas une expression mathématique générale pour dériver la valeur exacte de la fiabilité sauf pour certaines structures particulières données la table suivante.

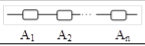
Structures	Fonction de structure	Forme mathématique
A	$\Phi(X(t)) = x(t) = \begin{cases} 1 & si\ i\ fonctionne \\ 0 & si\ i\ est\ en\ panne \end{cases}$	$R(t)$
 A_1 A_2 A_n	$\Phi(X(t)) = \prod_{i=1}^{n} x_i(t)$	$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$
	$\Phi(X(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i(t))$	$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t))$
	$\Phi(X(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n} x_{i,j}(t))$	$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n} R_{i,j}(t))$
	$\Phi(X(t)) = \prod_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - x_{i,j}(t)))$	$R(t) = \prod_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - R_{i,j}(t)))$
K parmi ***n***	$\Phi(X(t)) = \begin{cases} 1, si\ \sum_{j}^{n} x_j(t) \geq k \\ 0, sinon \end{cases}$	$R(t) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j p^j (1-p)^{n-j}$

Table 1. Structures simples, fonctions de structures et fonctions de fiabilité

Le problème d'évaluation de la fiabilité des réseaux est un problème NP-difficile [22], d'où la nécessité de développer de nouveaux outils de calcul pour à la fois évaluer la fiabilité et optimiser la conception des systèmes. Pour surmonter ce handicap, la décomposition du réseau en sous-réseaux qui est l'un des concepts de base de la théorie des graphes (on se souvient facilement de la notion de composantes connexes) a été proposée par plusieurs chercheurs. Moskowitz fût l'un des premiers pionniers pour avoir introduit en 1958 une solution basée sur le théorème de décomposition par factorisation [28] qui s'apparente avec le théorème des probabilités totales. Depuis lors, de nombreux articles ont été consacrés à ces idées et publiés successivement par Misra [29], Murchland [30], Rusenthal [31], et Nakazawa [32], mais sans tenir compte des difficultés générées par les réseaux complexes, du fait que leurs algorithmes ne traitent que des réseaux à dimension très réduite. Plusieurs autres chercheurs ont fait valoir l'idée de réduction par factorisation polygone-chaine pour diminuer la complexité des calculs sans pour autant considérer le cas de défaillances nœuds-et-liens [4, 7, 15, 16, 17, 19, 23, 26, 27]. Satyanarana *et* Chang [27], Satyanarana *et* Wood [26] et Wood [23], ont proposé un cadre unifié sur la base du théorème de factorisation permettant d'évaluer la fiabilité des réseaux dont les nœuds sont totalement fiables (uniquement les nœuds). Il est bien connu que dans la pratique, les réseaux deviennent très sensibles et imposent le fait

de considérer aussi les nœuds comme possiblement défaillants et donc non fiable à 100%, c'est le cas par exemple des réseaux de télécommunication.
Le but de ce papier est de proposer un cadre général pour l'évaluation de la fiabilité des réseaux complexes dans le cas où les nœuds et les liens soient considérés comme possiblement défaillants. Ce travail apporte une extension notable aux travaux de Satyanarana *et al.* et ceux de Theologou *et* Carlier publiés respectivement dans [26] et [21]. Dans [21], Theologou *et* Carlier ont fait valoir que la décomposition polygone-à chaîne ne peut être appliquée lorsque les nœuds d'un réseau sont supposés défaillants. Nous allons à travers ce papier, montrer dans la même logique proposée par Wood [23] pour le cas des réseaux avec des nœuds fiables, qu'il est possible d'obtenir un algorithme polynomial lorsqu'on considère que les liens et les nœuds soient imparfaits. La méthode qu'on propose simplifie les graphes de type-1, de type-2 jusqu'au type-7 (voir de plus près [26] pour comprendre les notions de type-1, etc.) par application directe du théorème de factorisation. Pour bien expliquer notre raisonnement sur le principe de transformation, nous énoncerons deux théorèmes qui mettent en place des moyens mathématiques de transformation. Naturellement, il aurait été plus judicieux de détailler toutes les réductions relatives aux transformations polygone-à chaîne de type-1, type-2,…, type-7, mais faute de place d'écriture, nous présenterons que celles du type-1 et du type-7. Par contre, un tableau récapitulatif de toutes les transformations sera donné à la fin de l'article.

Le contenu de ce document est structuré comme suit : la section 2 présente quelques notions de base. À la section 3, les modèles traitant la factorisation polygone-à chaîne de type-1 et de type-7 sont détaillés. Un exemple pratique et la conclusion sont présentés dans les sections 4 et 5.

2. PRÉLIMINAIRES

2.1. Notions de base

Un réseau est un graphe $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini de n nœuds (sommets) et E un ensemble fini de m arêtes (arcs) qui sont les liens permettant de rendre possible la communication entre les nœuds. Si le graphe est orienté, on parlera d'arcs au lieu d'arêtes. On associe à chaque arc et à chaque nœud une probabilité de bon fonctionnement dite fiabilité. On considère que ces dernières sont statistiquement indépendantes. Nous adoptons la notation s et t pour définir le choix du sommet source et du sommet de destination et l'on parlera alors d'un problème 2-terminaux, dit aussi terminal-paire (Deo *et* Medidi, 1992), (Yoo *et* Deo, 1988), (Dotson *et* Gobien, 1979). Pour certains réseaux, on peut s'intéresser à l'évaluation de la probabilité que K- nœuds soient reliés entre eux, on parlera alors de la fiabilité K-terminaux notée $R(G_K)$ qui représente la probabilité que tous les K-nœuds soient reliés entre eux par une arborescence. Noter que les K-nœuds sont dessinés par des rond pleins qui veulent aussi dire que le K-nœud est parfait et par conséquent sa fiabilité est égale à 1. La généralisation d'une telle notion parait nécessaire pour certaines classes de problèmes, dits tous-terminaux. Notez aussi qu'un 2-terminaux suffit amplement à définir la fiabilité du réseau.

Dans la pratique deux situations peuvent se produire lorsqu'il est question de calculer la fiabilité d'un réseau. Soit que ce réseau est réductible et qu'on lui applique successivement une série de règle de réductions simples du type série, série-parallèle, réduction de degré-2, delta-étoile et vice-versa, ou bien, dans le cas contraire le graphe est alors irréductible (voir figure 1), alors on procède par l'application d'une série de réductions dites polygones-à chaîne (Wood, 1986) associées avec des réductions simples.

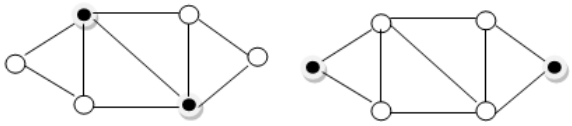


Figure 1 : Gauche : Graphe réductible Droite : Graphe irréductible

2.2. Principe de factorisation

Les méthodes de factorisation dites aussi de réduction, utilisent le théorème de factorisation de Moore & Shannon. Elles consistent essentiellement à décomposer un graphe en faisant des hypothèses sur l'état d'un composant, jusqu'à ce que l'on obtienne des graphes à configuration simple. Le théorème des probabilités totales permet alors de calculer la fiabilité du graphe à partir des graphes obtenus. L'idée derrière ce processus étant de postuler dans un graphe qu'un arc ***e*** est bon qui se note $(\Phi(X(t)) = 1|x_e = 1)$ ou $\Phi(X(t))$ représente la fonction de structure du réseau et $X(t)$ étant le vecteur d'état du système. Ce qui signifie que la communication à travers l'arc e est assurée. Le cas contraire s'écrit $(\Phi(X(t)) = 1|x_e = 0)$. Dans un graphe orienté, une communication parfaite entre deux nœuds signifie qu'il est possible de les contracter en un seul nœud et l'impossibilité de communiquer à travers un arc entraine simplement sa suppression. En utilisant le théorème des probabilités totales, cela permet de calculer la fiabilité du réseau à partir des graphes obtenus.

Considérons un graphe G et un composant e choisi arbitrairement. Le théorème des probabilités totales permet pour ce composant e, d'exprimer la fiabilité du graphe G par la relation (1).

$$R = \Pr(\Phi(X(t)) = 1) = \Pr(\Phi(X(t)) = 1|x_e = 1) \times \Pr(x_e = 1) + \Pr(\Phi(X(t)) = 1|x_e = 0) \times \Pr(x_e = 0) \quad (1)$$

où $\Pr(x_e = 1)$ est la probabilité que le composant j fonctionne et $\Pr(x_e = 0)$ le contraire.

Il s'ensuit que si l'on substitue $\Pr(x_e = 1)$ par (R_e) et $\Pr(x_e = 0)$ par $(1 - R_e)$, on obtient l'expression de la fiabilité, qui est alors donnée par l'équation (2).

$$R = \Pr(\Phi(X(t)) = 1) = \Pr(\Phi(X(t)) = 1 | x_e = 1) \times R_e + \Pr(\Phi(X(t)) = 1 | x_e = 0) \times (1 - R_e) \quad (2)$$

Ce processus de décomposition se poursuit autant de fois qu'il est nécessaire, autrement dit, jusqu'à ce qu'une structure simple soit trouvée (si elle existe) et dont la fiabilité est facile à évaluer. Il est à noter que le choix de certains composants peut parfois diminuer et par conséquent, la solution est obtenue plus rapidement.

A partir du théorème des probabilités totales, certains auteurs ont énoncé le théorème de factorisation qui permet de définir que pour un composant ***e*** choisi arbitrairement, la fiabilité du réseau (G) se présente comme suit :

$$R(G) = p_e R(G * e) + (1 - p_e) R(G - e) \quad (3)$$

où,

$R(G)$: la fiabilité du réseau (G).
$R(G * e)$: la probabilité que le système fonctionne lorsque le composant ***e*** fonctionne (l'arc ***e*** est contracté).
$R(G - e)$: la probabilité que le système fonctionne lorsque le composant ***e*** est défaillant (l'arc ***e*** est éliminé).

Il est simple d'identifier par comparaison des équations (2) et (3) que $R(G * e)$, $R(G - e)$ et p_e ne sont autres que $\Pr(\Phi(X(t)) = 1 | x_e = 1)$, $\Pr(\Phi(X(t)) = 1 | x_e = 0)$ et R_e.

L'exemple de la figure 2, permet d'illustrer l'application du théorème de factorisation en choisissant le lien 1 comme pivot. Nous supposerons que les *K*-nœuds sont le nœud *a* (sommet initial) et le nœud *c* (sommet terminal). Le calcul sur les sous-graphes ainsi obtenus, détermine la fiabilité du réseau et ce, par application de l'égalité (3) étant donné que le pivot correspond au lien 1. Cela donne ce qui suit :

$$R(G) = p_e[R(G * e)] + (1 - p_e)[R(G - e)] = p_1[p_2 + p_3 - p_2 p_3] + (1 - p_1)[p_2] = p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3$$

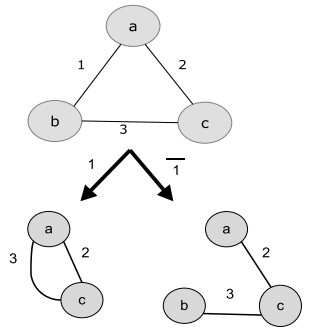


Figure 2 : Application de la factorisation

3. FACTORISATION DES RÉSEAUX AVEC NŒUDS ET ARÊTES IMPARFAITS

Afin de mieux situer notre démarche, nous admettons les hypothèses suivants :

- Les arêtes et les nœuds sont sujets à des défaillances.
- Les défaillances sont s-indépendantes avec des probabilités connues.
- Tous les *K*-nœuds du graphe sont parfaitement fiables.

3.1. Réduction polygone-à chaîne

Satyanarayana et Wood (1985) ont démontré qu'il est possible d'utiliser la réduction polygone-à chaîne pour transformer des graphes irréductibles et les ramener sous forme d'arbres en les combinant avec les réductions série-parallèle.
Le remplacement d'un polygone par une chaîne est dite transformée ou simplement réduction polygone-à chaîne. Satyanarayana et Wood (1985) ont défini sept types de polygones et fourni les expressions équivalentes des chaînes résultantes. Un tableau englobant ces polygones et leurs équivalences a été en publié dans Theologou (1991).
La réduction polygone-à chaîne dans le cas des graphes imparfaits est encore plus compliquée par le fait que les transformations cette fois-ci, tiennent compte des états des nœuds et des liens en même temps. Pour les réseaux complexes, il est facile de constater que cette opération est plus compliquée à déterminer. Plusieurs auteurs ont fait prévaloir cette difficulté et d'autre l'ont carrément écartée en affirmant qu'elle ne pourra sans doute ne pas se faire, c'est le cas de Theologou et Carlier (1991). Ces derniers ont néanmoins proposé une méthode qui permet de déterminer les fiabilités des réseaux imparfaits basées sur la factorisation dont la complexité dépend de la taille du réseau. Il est bien entendu que si le réseau est complexe, la solution devient inatteignable.
Dans ce papier nous proposons une solution qui combine la réduction polygone-â chaîne qui utilise les idées de (1991).
Pour enrichir le modèle de Satyanarayana et Wood, nous proposons d'utiliser quelques hypothèses de Theologou *et* Carlier qui permettent d'éviter le problème de dépendance entre les nœuds et les liens. Elles sont résumées comme suit :

Considérons un lien $e = (u, v)$, où *u* et *v* sont des nœuds imparfaits de probabilités respectives p_u et p_v. Nous constatons que le lien *l* fonctionne avec une probabilité p_l lorsque *e*, *u* et *v* fonctionnent avec une probabilité p_i $(i = e, u, v)$ et donc,

$$p_l = p_e p_u p_v \quad (4)$$

Le fait de pivoter sur le lien *l* en appliquant le théorème de factorisation, entrainera la contraction de l'arrête *e* et le fusionnement des nœuds *u* et *v* pour former un nou-

veau nœud parfait. Par contre si le lien *l* s'arrête de fonctionner, la cause de cet arrêt ne peut être connue a priori du fait qu'il se pourrait que ce soit l'arrête ou les deux nœuds qui soient défaillants. De toute façon et dans tous les cas, ce lien sera perdu et donc supprimé.

Après cette opération de pivotage, les fiabilités de *u* et de *v* auront de nouvelles valeurs et leurs expressions sont comme suit :

$$p'_v = \Pr(v \text{ fonctionne} \mid v \text{ ou } e \text{ ou } u \text{ en panne}) = \frac{p_v(q_u + p_u q_e)}{q_v + p_v q_u + p_v p_u q_e} \quad (5)$$

$$p'_u = \Pr(u \text{ fonctionne} \mid u \text{ ou } e \text{ ou } v \text{ en panne}) = \frac{p_u(q_v + p_v q_e)}{q_u + p_u q_v + p_u p_v q_e} \quad (6)$$

Nous pouvons remarquer que ces deux derrières équations montrent clairement que *u* et *v* sont intimement liés. Pour éviter une telle situation compte-tenu des conditions de départ, Théologou *et* Carlier ont apporté une nouvelle construction de *u* et de *v*. L'idée est comme suit :

Supposons que les *K*-nœuds sont tous connectés et parfaits, autrement dit, si ce n'est pas le cas, la fiabilité du réseau original s'écrit :

$$R(G_K) = \prod_{v \epsilon K} p_v R(G'_K) \quad (7)$$

où G'_k et G_k sont construits avec des *K*-nœuds parfaits. Il existe alors au moins deux *K*-nœuds dans le graphe et il est toujours possible de trouver une arête dans le graphe avec une extrémité parfaite. Soit *e* une telle arête d'extrémités *u* (parfait) et *v* (imparfait). Le fait de remplacer dans (6) $p_u = 1$ et comme $p_v \neq 1$, on obtient la relation (8):

$$p'_v = \frac{p_v q_e}{(q_v + p_v q_e)} \quad (8)$$

Nous remarquons que dans l'état actuel, la défaillance du nœud *v* ne dépend que de l'arrête *e* et donc, *u* et *v* sont rendus indépendants.

Comme le nœud *v* reste dans le graphe où le lien *l* est défaillant, alors les autres liens qui ont pour l'une de leurs extrémités *v* peuvent être factorisés et la défaillance de *v* dépendra alors de la défaillance de ces arêtes. Par conséquent, il s'agit de construire la formulation générale qui permet de représenter la fiabilité relative au nœud imparfait *v* à une étape quelconque de la factorisation lorsque les arêtes $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ incidentes à *v* sont factorisées. Cette fiabilité est donnée par (9) après l'application du théorème de factorisation:

$$p''_v = \Pr(v \text{ fonctionne} \mid (v \text{ ou } e_1 \text{ en panne}) \wedge \cdots \wedge (v \text{ ou } e_r \text{ en panne})) = \frac{p_v \prod_{j=1}^{r} q_{e_j}}{q_v + p_v \prod_{j=1}^{r} q_{e_j}} \quad (9)$$

Nous utilisons les éléments présentés ci-dessus pour énoncer et démontrer le théorème 1.

3.1.1. Réduction polygone-à chaîne de type-1

Considérons un graphe contenant un polygone de type-1 (voir la figure 3-a) et soient p_s, p_a et p_b les fiabilité des nœuds *s*, *a* et *b*. Nous pouvons à présent énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit G un graphe contenant un polygone de type-1 tel que présenté dans la figure 3-a, et soit G' le graphe obtenu par transformation du graphe G par remplacement des arêtes e_1 *et* e_2 par e'_1 *et* e'_2 de fiabilité p'_1 *et* p'_2 et les nœuds *a* et *b* sont de fiabilité p'_a *et* p'_2 (figure 3-b). Soit Ω un facteur de multiplication, alors la fiabilité du réseau est $R(G) = \Omega R(G')$, où $\Omega = (\delta + A)(\delta + B)/\delta$, $p'_1 = \delta/(\delta + AC), p'_2 = \delta/(\delta + BD), p'_a = (\delta + AC)/(\delta + A), p'_b = (\delta + BD)/(\delta + B)$ et :

$$\begin{cases} \delta = p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3] \\ A = p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a + p_1 p_3 p_a] \\ B = p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b] \\ C = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \\ D = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)} \end{cases} \quad (10)$$

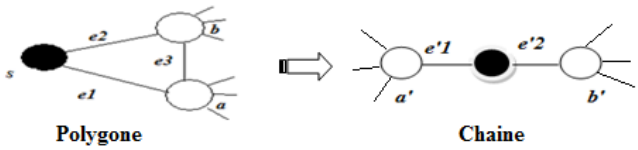


Figure 3: Réduction polygone-à chaîne de type-1

Preuve :

En appliquant le théorème de factorisation sur le lien *(s*, $e_1, a)$, on obtient les graphes réduits $(G * e_1)$ et $(G - e_1)$ (voir figure 4 : première étape de factorisation). L'expression de la fiabilité du graphe *G* devient :

$$R(G) = p_1 p_a R(G * e_1) + (1 - p_1 p_a) R(G - e_1) \quad (11)$$

Appliquons l'équation (8) au nœud *a* qui est un nœud imparfait, il devient lors de la décomposition un nœud pivot. Par conséquent la fiabilité du nœud *a* dans le graphe $(G - e_1)$ sera modifiée comme suit :

$$p'_a = \frac{p_a q_1}{(q_a + p_a q_1)} \quad (12)$$

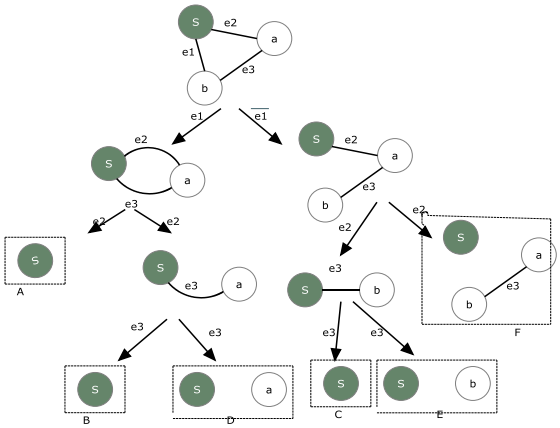


Figure 4: Graphe de type-1 et sa transformation par application du théorème de factorisation.

En décomposant par la suite sur le lien (s,e_2,b), des graphes réduits $G * e_1$ et $G - e_1$, nous obtenons les sous-graphes $((G * e_1) * e_2)$, $((G * e_1) - e_2)$, $((G - e_1) * e_2)$ et $((G - e_1) - e_2)$. Le dernier sous-graphe est à éliminer puisqu'il supprime tout lien entre le nœud *a* et le nœud *b*. L'expression de la fiabilité du graphe *G* devient :

$$R(G) = p_1 p_a [p_2 p_b R((G * e_1) * e_2) + (1 - p_2 p_b) \times R((G * e_1) - e_2)] + (1 - p_1 p_a)[p_2 p_b R((G - e_1) * e_2)] \quad (13)$$

Comme pour le nœud *a*, la fiabilité du nœud *b* dans le graphe correspondant à $(G * e_1) - e_2$ est modifiée et sera égale a :

$$p'_b = \frac{p_b q_2}{(q_b + p_b q_2)} \quad (14)$$

En décomposant maintenant sur le lien $(s,\ e_3, b)$ du graphe réduit $(G * e_1) - e_2$ et sur le lien $(s,\ e_3, a)$ du graphe réduit $(G - e_1) * e_2$, on obtient finalement (15):

$$\begin{aligned} R(G) = {} & p_1 p_a [p_2 p_b R((G * e_1) * e_2) \\ & + (1 - p_2 p_b)[p_3 p'_b R(((G * e_1) - e_2) * e_3) \\ & + (1 - p_3 p'_b) R(((G * e_1) - e_2) - e_3]] \\ & + (1 - p_1 p_a)[p_2 p_b [p_3 p'_a R(((G - e_1) * e_2) \\ & * e_3) + (1 - p_3 p'_a) R(((G - e_1) * e_2) - e_3)]] \end{aligned} \quad (15)$$

Dans le graphe $((G - e_1) * e_2) - e_3$ la nouvelle fiabilité du nœud *a* est donnée par :

$$p''_a = \frac{p_a q_1 q_3}{(q_a + p_a q_1 q_3)} \quad (16)$$

De même pour le graphe $((G * e_1) - e_2) - e_3$, la nouvelle fiabilité du nœud *b* est donnée par :

$$p''_b = \frac{p_b q_2 q_3}{(q_b + p_b q_2 q_3)} \quad (17)$$

Il est à remarquer que plusieurs états peuvent induire un graphe identique. Pour avoir une idée sur la notion d'équivalence dans ce sens, reportez-vous à la figure 4 (termes A, B et C) pour retrouver les sous-structures équivalentes en termes de fiabilité. On peut donc établir l'égalité suivante :

$$R((G * e_1) * e_2) = R(((G - e_1) * e_2) * e_3 = R(((G * e_1) - e_2) * e_3) \quad (18)$$

En groupant (A, B, C et D, E) et en éliminant des termes (ex. terme F), l'expression de la fiabilité devient :

$$\begin{aligned} R(G) = {} & p_a p_b [p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3] R((G * e_1) * e_2) \\ & + p_1 p_a [1 - p_2 p_b - p_3 p_b + p_2 p_3 p_b] R(((G * e_1) - e_2) - e_3) \\ & + p_2 p_b [1 - p_1 p_a - p_3 p_a - p_1 p_3 p_a] R(((G - e_1) * e_2) - e_3) \end{aligned} \quad (19)$$

Procédons maintenant sur le graphe G'(voir figure 3, graphe de droite). En appliquant le théorème de factorisation sur le lien (s, e'_1, a') on obtient :

$$R(G') = p'_1 p'_a R(G' * e'_1) + (1 - p'_1 p'_a) R(G' - e'_1) \quad (20)$$

La fiabilité du nœud *a* dans le graphe correspondant à $(G' - e'_1)$ a été modifiée pour donner l'équation (21) :

$$(p'_a)' = \frac{p'_a q'_1}{(q'_a + p'_a q'_1)} \quad (21)$$

Finalement l'expression de la fiabilité du graphe *G'* est exprimée par l'équation suivante (22):

$$R(G') = p'_1 p'_a [p'_2 p'_b R(((G' * e'_1) * e'_2) + (1 - p'_2 p'_b) R(((G' * e'_1) - e'_2)] \quad (22)$$

Par contre la nouvelle expression de la fiabilité relative au nœud *b* devient :

$$(p'_b)' = \frac{p'_b q'_2}{(q'_b + p'_b q'_2)} \quad (23)$$

Comme les graphes G and G' sont identiques, nous obtenons les égalités suivantes :

$$R((G * e_1) * e_2) = R((G' * e''_1) * e''_2) \quad (24)$$

et

$$R(((G * e_1) - e_2) - e_3) = R((G' * e''_1) - e''_2) \quad (25)$$

Cette dernière expression est valide si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :

$$p''_a = (p'_a)' \quad (26)$$

$$R\left(\left((G-e_1)*e_2\right)-e_3\right)=R\left(\left(G'-e_1'\right)*e_2'\right) \quad (27)$$

$$p''_b=(p_b')' \quad (28)$$

Finalement, suite à la relation d'équivalence $R(G)=\Omega\, R(G')$, et la dernière formule, nous déduisons le système suivant :

$$\begin{cases} p_a p_b[p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3]=\Omega[p_1'p_2'p_a'p_b'] \\ p_1p_a[1-p_2p_b-p_1p_3+p_3p_b+p_2p_3p_b]=\Omega[p_1'p_a'(1-p_2'p_b')] \\ p_2p_b[1-p_1p_a-p_3p_a+p_1p_3p_a]=\Omega[p_1'p_b'(1-p_2'p_a')] \\ \dfrac{p_aq_1q_3}{(q_a+p_aq_1q_3)}=\dfrac{p_a'q_1'}{(q_a'+p_a'q_1')} \\ \dfrac{p_bq_2q_3}{(q_b+p_bq_2q_3)}=\dfrac{p_b'q_2'}{(q_b'+p_b'q_2')} \end{cases} \quad (29)$$

La résolution du système (29) nous donne l'expression des paramètres Ω, p_1', p_2', p_a' et p_b' qui se résument comme suit :

$$\begin{cases} \Omega=\dfrac{(\delta+\mathrm{A})(\delta+\mathrm{B})}{\delta} \\ \mathrm{p}'_1=\dfrac{\delta}{(\delta+\mathrm{A\,C})} \\ \mathrm{p}'_2=\dfrac{\delta}{(\delta+\mathrm{B\,D})} \\ \mathrm{p}'_a=\dfrac{(\delta+\mathrm{A\,C})}{(\delta+\mathrm{A})} \\ \mathrm{p}'_b=\dfrac{(\delta+\mathrm{B\,D})}{(\delta+\mathrm{B})} \end{cases} \quad (30)$$

et où δ, A, B, C et D sont identifiés par les relations :

$$\begin{cases} \delta=p_ap_b[p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3] \\ A=p_2p_b[1-p_1p_a-p_3p_a+p_1p_3p_a] \\ B=p_1p_a[1-p_2p_b-p_3p_b+p_2p_3p_b] \\ C=\dfrac{p_aq_1q_3}{(q_a+p_aq_1q_3)} \\ D=\dfrac{p_bq_2q_3}{(q_b+p_bq_2q_3)} \end{cases} \quad (31)$$

Finalement, nous notons qu'il est possible de dériver une topologie simplifiée à partir d'une autre plus complexe par application d'une série de réductions tout en gardant inchangée la valeur de la fiabilité. Le problème qui risque de surgir étant, l'automatisation de la reconnaissance d'une certaine topologie dont les calculs se déduisent très facilement. L'idée est très bénéfique à condition de concevoir des algorithmes puissants qui permettent de sauter facilement une telle phase critique du processus de calcul, ou du moins de déterminer les moyens nécessaires de chercher les équivalences entre structures.

3.1.2. Réduction polygone-à chaîne de type-7

Nous garderons le même principe de factorisation comme lors de la réduction polygone-à chaîne de type-1, néanmoins, avec une légère différence. Cette fois-ci, nous pouvons remarquer que le nombre d'évènement a augmenté sensiblement. Il est passé de cinq (e_1,e_2,e_3,e_a,e_b) à huit événements $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_a,e_b)$ conduisant les espaces états à se multiplier (voir figure 5). Une solution matricielle s'impose dans ce cas pour représenter les sous-graphes, les états-événements et les équations de transformations. Le théorème suivant énonce le principe de la réduction polygone-à chaîne de type 7 et fournit toutes les expressions d'équivalence. Pour démontrer le théorème, nous procéderons par factorisation sur le polygone, puis sur la chaîne résultante et finalement on établira les équivalences par correspondance.

Théorème 2.

Supposons qu'un graphe G contienne un polygone de type 7 et soit G' le graphe obtenu par transformation du graphe G par le remplacement des arêtes e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 et e_6 de fiabilités originales p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 et pe_6 par e_1' *et* e_2' de fiabilités p_1' *et* p_2' et les nœuds *a* et *b* de fiabilités originales p_a et p_b par les fiabilités p_a' et p_b' (figure 6, ci-dessous) et soit Ω un facteur de multiplication, alors $R(G)=\Omega R(G')$ et,

$$\begin{cases} \Omega=\dfrac{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\delta+\gamma)}{\gamma^2} \\ p_1'=\dfrac{\gamma}{\gamma+\alpha.C} \\ p_2'=\dfrac{\gamma}{\gamma+\beta} \\ p_3'=\dfrac{\gamma}{\gamma+D.\delta} \\ \mathrm{p}'_a=\dfrac{\gamma+\alpha.C}{\gamma+\alpha} \\ \mathrm{p}'_b=\dfrac{(\gamma+D.\delta)}{(\gamma+\delta)} \end{cases} \quad (32)$$

et tels que :

$$\begin{cases} \gamma=p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[1+\dfrac{q_1}{p_1}+\dfrac{q_2}{p_2}+\dfrac{q_3}{p_3}+\dfrac{q_4}{p_4}+\dfrac{q_5}{p_5}+\dfrac{q_6}{p_6}\right] \\ B=p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[\dfrac{q_3q_4}{p_3p_4}+\dfrac{q_2q_5}{p_2p_5}+\dfrac{q_2q_4}{p_2p_4}+\dfrac{q_1q_5}{p_1p_5}+\dfrac{q_1q_6}{p_1p_6}+\dfrac{q_3q_5}{p_3p_5}+\dfrac{q_2q_6}{p_2p_6}\right] \\ B=p_1p_2p_3p_5p_6p_ap_b[1-p_1p_a-p_4p_a+p_1p_4p_a] \\ C=\dfrac{p_aq_1q_4}{(q_a+p_aq_1q_4)} \\ D=\dfrac{p_bq_3q_6}{(q_b+p_bq_3q_6)} \end{cases} \quad (33)$$

Preuve :

Considérons à présent un graphe contenant un polygone de type 7 comme montré à la figure 5 (G), et dont les nœuds *a* et *b* peuvent être sujets à des défaillances avec des fiabilités respectives p_a et p_b.

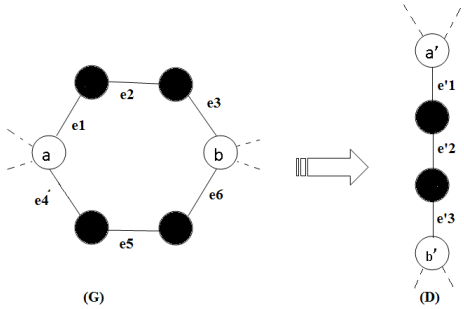


Figure 5 : Réduction polygone-à chaîne de type 7

En pivotant successivement sur e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 et e_6 on obtient les graphes reportés dans la figure 6 et la table 2.

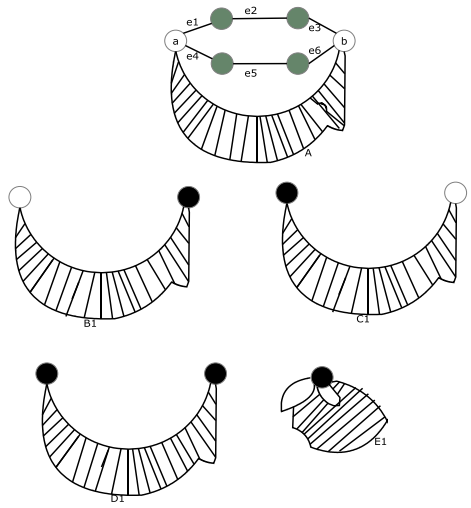


Figure 6 : Graphes non-défaillants induits suite à la réduction polygone-à chaîne de type-7.

G_A	États	Probabilités
B1	$\overline{F_a}\overline{F_1}F_2F_3\overline{F_a}\overline{F_4}F_5F_6$	$\alpha = p_2p_3p_5p_6p_b(1-p_1p_a)(1-p_4p_a) = p_2p_3p_5p_6p_b(1-p_1p_a-p_4p_a+p_1p_4p_a)$
C1	$F_aF_1\overline{F_b}\overline{F_3}F_4F_5\overline{F_b}\overline{F_6}$	$\delta = p_1p_2p_4p_5p_a(1-p_3p_b)(1-p_6p_b) = p_1p_2p_4p_5p_a(1-p_3p_b-p_6p_b+p_3p_6p_b)$
D1	$F_aF_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5F_6F_b$; $F_aF_1\overline{F_2}F_3F_4\overline{F_5}F_6F_b$; $F_aF_1F_2\overline{F_3}\overline{F_4}F_5F_6F_b$; $F_aF_1\overline{F_3}F_4\overline{F_5}F_6F_b$; $F_aF_1\overline{F_2}F_3F_4F_5\overline{F_6}F_b$; $F_a\overline{F_1}F_2F_3F_4\overline{F_5}F_6F_b$; $F_a\overline{F_1}F_2F_3F_4F_5\overline{F_6}F_b$	$\beta = p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[\frac{q_3q_4}{p_3p_4}+\frac{q_2q_5}{p_2p_5}+\frac{q_2q_4}{p_2p_4}+\frac{q_1q_5}{p_1p_5}+\frac{q_1q_6}{p_1p_6}+\frac{q_3q_5}{p_3p_5}+\frac{q_2q_6}{p_2p_6}\right]$
E1	$F_aF_1F_2F_3F_4F_5F_6F_b$; $F_a\overline{F_1}F_2F_3F_4F_5F_6F_b$; $F_aF_1\overline{F_2}F_3F_4F_5F_6F_b$; $F_aF_1F_2\overline{F_3}F_4F_5F_6F_b$; $F_aF_1F_2F_3\overline{F_4}F_5F_6F_b$; $F_aF_1F_2F_3F_4\overline{F_5}F_6F_b$	$\gamma = p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[1+\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}+\frac{q_4}{p_4}+\frac{q_5}{p_5}+\frac{q_6}{p_6}\right]$

Table 2 : Graphes réduits, vecteurs états et les probabilités correspondantes.

Comme la décomposition utilise les liens e_1 et e_4 comme pivots dans le graphe réduit B1 et sur e_3 et e_6 dans le graphe réduit C1, il s'en vient que les nouvelles valeurs des fiabilités des nœuds *a* et *b* sont donnée par les équations suivantes :

$$p_a'' = \frac{p_a q_1 q_4}{q_a + p_a q_1 q_4} \tag{34}$$

$$p_b'' = \frac{p_b q_3 q_6}{q_b + p_b q_3 q_6} \tag{35}$$

Reprenons l'application du théorème de factorisation sur le graphe réduit *G'* de *G* (polygone de type 7) et soient e_1, e_2 *et* e_3 les arêtes de *G'* de fiabilités respectives p_1, p_2 *et* p_3. La table 3 nous donne les graphes induits suite à la décomposition de *G'*, les états et les probabilités relatives.

Graphe	États	Probabilité
B'	$\overline{F_a}\overline{F_1}F_2F_3F_b$	$\alpha' = (1-p_1'p_a')p_2'p_3'p_b'$
C'	$F_aF_1F_2\overline{F_3}\overline{F_b}$	$\delta' = (1-p_3'p_b')p_1'p_2'p_a'$
D'	$F_aF_1\overline{F_2}F_3F_b$	$\beta' = p_1'q_2'p_3'p_a'p_b'$
E'	$F_aF_1F_2F_3F_b$	$\gamma' = p_1'p_2'p_3'p_a'p_b'$

Table 3. États non-défaillants et les probabilités des graphes induits par le processus de factorisation du graphe $G'_{K'}$.

Les graphes suivants (figure 7), expliquent les formules des états et les probabilités correspondantes de la table 3.

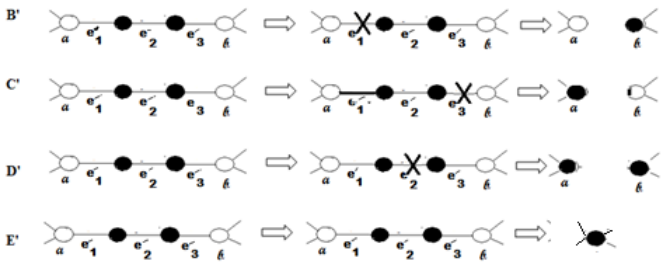


Figure 7 : Transformation du graphe réduit *G'* par application de la factorisation

Notez que pour le graphe B' et C' respectivement les probabilités conditionnelles sur le nœud *a* et le lien e'_1 (graphe B'), le nœud *b* et le lien e'_3 et (graphe B') sont données par les deux équations suivantes :

$$p_a'' = (p_a')' = \frac{p_a' q_1'}{(q_a' + p_a' q_1')} \tag{36}$$

$$p_b'' = (p_b')' = \frac{p_b' q_3'}{(q_b' + p_b' q_3')} \tag{37}$$

Utilisons présentement la relation $R(G) = \Omega R(G')$, nous pouvons alors identifier les coefficients α, β, δ et γ comme suit :

$$\alpha.R(G_{B,K_B}) + \delta.R(G_{C,K_C}) + \beta.R(G_{D,K_D}) + \gamma.R(G_{E,K_E}) =$$

$$\Omega[\alpha' R\left(G'_{B',K_{B'}}\right) + \beta' R\left(G_{C',K_{C'}}\right) + \delta' R\left(G_{D',K_{D'}}\right) + \gamma' R\left(G_{E',K_{E'}}\right)] \quad (38)$$

et,

$$\frac{p_a q_1 q_4}{q_a + p_a q_1 q_4} = \frac{p_a' q_1'}{(q_a' + p_a' q_1')} \quad (39)$$

$$\frac{p_b q_3 q_6}{q_b + p_b q_3 q_6} = \frac{p_b' q_3'}{(q_b' + p_b' q_3')} \quad (40)$$

Égalisons les termes des deux cotés de l'équation $R(G) = \Omega R(G')$, il s'ensuit l'expression des égalités suivantes :

$$\begin{cases} p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[1+\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}+\frac{q_4}{p_4}+\frac{q_5}{p_5}+\frac{q_6}{p_6}\right] = \Omega p_1'p_2'p_3'p_a'p_b' \\ p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[\begin{array}{c}\frac{q_3q_4}{p_3p_4}+\frac{q_2q_5}{p_2p_5}+\frac{q_2q_4}{p_2p_4}+\frac{q_1q_5}{p_1p_5}+\frac{q_1q_6}{p_1p_6} \\ +\frac{q_3q_5}{p_3p_5}+\frac{q_2q_6}{p_2p_6}\end{array}\right] = \Omega p_1'q_2'p_3'p_a'p_b' \\ p_1p_2p_4p_5p_a[1-p_3p_b-p_6p_b+p_3p_6p_b] = \Omega\,(1-p_3'p_b')p_1'p_2'p_a' \\ p_1p_2p_3p_5p_6p_b[1-p_1p_a-p_4p_a+p_1p_4p_a] = \Omega\,(1-p_1'p_a')p_2'p_3'p_b' \\ \frac{p_aq_1q_4}{(q_a+p_aq_1q_4)} = \frac{p_a'q_1'}{(q_a'+p_a'q_1')} \\ \frac{p_bq_3q_6}{(q_b+p_bq_3q_6)} = \frac{p_b'q_3'}{(q_b'+p_b'q_3')} \end{cases} \quad (41)$$

En résolvant le système (41) on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma = p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[1+\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}+\frac{q_4}{p_4}+\frac{q_5}{p_5}+\frac{q_6}{p_6}\right] \\ \beta = p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b\left[\begin{array}{c}\frac{q_3q_4}{p_3p_4}+\frac{q_2q_5}{p_2p_5}+\frac{q_2q_4}{p_2p_4}+\frac{q_1q_5}{p_1p_5}+\frac{q_1q_6}{p_1p_6} \\ +\frac{q_3q_5}{p_3p_5}+\frac{q_2q_6}{p_2p_6}\end{array}\right] \\ \delta = p_1p_2p_4p_5p_a[1-p_3p_b-p_6p_b+p_3p_6p_b] \\ \alpha = p_1p_2p_3p_5p_6p_b[1-p_1p_a-p_4p_a+p_1p_4p_a] \\ C = \frac{p_aq_1q_4}{(q_a+p_aq_1q_4)} \\ D = \frac{p_bq_3q_6}{(q_b+p_bq_3q_6)} \end{cases}$$

$\Omega = \frac{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\delta+\gamma)}{\gamma^2}$; $p_1' = \frac{\gamma}{\gamma+\alpha.C}$; $p_2' = \frac{\gamma}{\gamma+\beta}$; $p_3' = \frac{\gamma}{\gamma+D.\delta}$; $p_a' = \frac{\gamma+\alpha.C}{\gamma+\alpha}$; $p_b' = \frac{\gamma+D.\delta}{\gamma+\delta}$

4. EXAMPLE DE DEMONSTRATION

Soit le réseau imparfait de la figure 8, appliquons lui les transformations polygone-à chaîne.

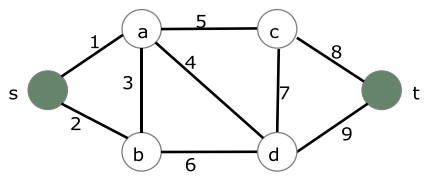
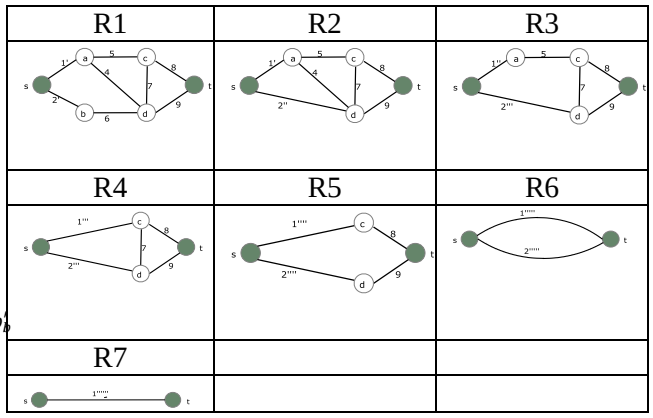


Figure 8 : Un graphe à 6-noeuds

Les fiabilités relatives à chaque lien et à chaque nœud imparfait sont égales à 0.9, sauf pour le lien 4 et le lien 9 qui sont de l'ordre de 0.81.

Nous donnerons dans la figure suivante toutes les étapes de transformation. Nous remarquons que seule la factorisation polygone-à chaîne de type 1 peut s'appliquer à ce réseau.



Réseaux\ Liens-Nœuds	1	2	3	a	b
Initial	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
R1	0.9908	0.9908	-	0.9075	0.9075
R2	0.9908	0.8093	0.81	0.9075	0.9
R3	0.9928	0.9883			
R4					
R5					
R6					
R7					

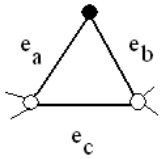
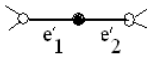
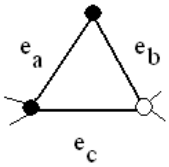
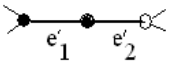
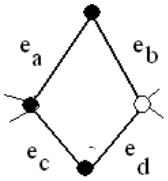
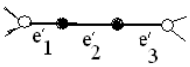
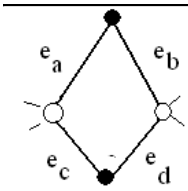
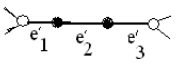
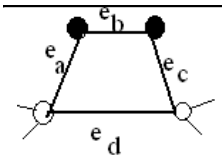
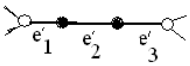
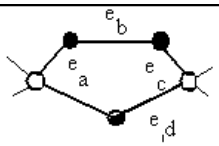
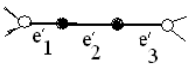
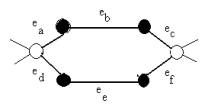
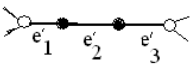
5. CONCLUSION

La factorisation et la réduction sont des méthodes efficaces qui permettent l'évaluation de la fiabilité des réseaux indépendamment de leurs tailles et du nombre de nœuds terminaux. Nous avons démontré que même si les réseaux sont imparfaits ils peuvent aussi être décomposés tout autant que ceux qui possèdent des nœuds non-défaillants. L'algorithme développé dans le cadre de ce travail permet de calculer la fiabilité des réseaux après avoir appliqué des réductions simples et des réductions polygone-à chaîne. Nous avons montré par des manipulations élémentaires des probabilités conditionnelles sur les nœuds et les arêtes, comment construire une solution dont le temps d'exécution est à moindre coût. L'idée étant de choisir les arêtes dont l'une de leurs extrémités soit non-défaillante et l'ensemble des transformations nous conduit vers une structure simplifiée d'où l'on peut facilement calculer la fiabilité du réseau. Nous pouvons remarquer sans démonstration préalable que l'algorithme de calcul est polynomial et le nombre de réductions est fini. L'algorithme général et les calculs sur des ben-

chmarks non pu être présentés dans ce travail, cela nécessite une programmation plus poussée pour une implémentation efficace. Aussi, comme perspective, nous envisageons d'étendre ce modèle vers d'autres structures plus complexes et d'écrire un programme plus efficace que celui déjà implémenté sous MatLab qui utilise des structures de données simples pour la mémorisation des calculs intermédiaires et des structures en décomposition.

REFERENCES

1. Abraham, J. A., 1979, An improved algorithm for network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, 28, 58–61.
2. Brace, K., Rudell, R.and Bryant, R., Efficient implementation of a BDD package, *Proceedings of the 27th ACM/IEEE Design Automation Conference*, 40-45.
3. Bryant, R., 1986, Graph based algorithms for boolean function manipulation, *IEEE Transactions on Computers*, 35(8), 677-691.
4. Choi., Jun C.H, 1995, Some variants of polygon-to-reductions in evaluating reliability of undirected networks, *Microelectronics and Reliability*, 1(35), 1-11.
5. Deo N. and Medidi M., 1992, Parallel algorithms for terminal-pair reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, 41, 201-209.
6. Dotson, W. P. and Gobien, J. 0.. 1979, A new analysis technique for probabilistic graphs, *IEEE Transactions Circuits and Systems*, 26, 855-865.
7. Fratta, L. and Montanari, U. G.. 1973, A boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 20, 203-211.
8. Hardy, G., Lucet, C., and Limnios, N., 2007, K-Terminal network reliability measures with binary decision diagrams, *IEEE Transaction on Reliability*, 56(3), 506-515.
9. Heidtmann, K.D., 1989, Smaller sums of disjoint products by subproduct inversion, *IEEE Transactions on Reliability*, 38, 305-311.
10. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1990, IEEE Standard Computer Dictionary: A Compilation of IEEE Standard Computer Glossaries, New York, NY, 1990.
11. Kuo, S.Y., Yeh, F.M. and Lin, H.Y., 2007, Efficient and exact reliability evaluation for networks with imperfect vertices, *IEEE Transactions on Reliability*, 56, 288-298.
12. Lin, H.Y., Kuo, S.Y. and Yeh, F.M., 2003, Minimal cutset enumeration and network reliability evaluation by recursive merge and BDD, *Proceedings of the Eighth IEEE International Symposium on Computers and Communication*, 1530-1346.
13. Liu, H. H., Yang, W. T. and Liu, C. C., 1993, An improved minimizing algorithm for the summation of disjoint products by Shannon's expansion, *Microelectronic Reliability*, 33(4), 599-613.
14. Locks, M. O. and Wilson, J. M., 1992, Note on disjoint products algorithms, *IEEE Transactions on Reliability*, 41, 81-84.
15. Page, L.B. and Perry, J.E., 1988, A Practical Implementation of the factoring theorem for network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 259-267.
16. Page, L.B. and Perry, J.E., 1989, Reliability of directed network using the factoring theorem, *IEEE Transactions on Reliability*, 38, 556-562.
17. Resende, M.G.C., 1986, A program for reliability evaluation of undirected networks via polygon-to-chain reductions, *IEEE Transaction on Reliability*, R-35, 24-29.
18. Rudell, R., 1993, Dynamic variable ordering for ordered binary decision diagrams, *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Aided Design*, 42-47.
19. Simard, C., 1996, *Contribution au problème d'évaluation de la fiabilité des réseaux*, Mémoire de Maîtrise Sciences, Laval University, Québec, Canada. TJ-7.5-UL-1996.
20. Tarjan, R.E., 1972, Depth first search and linear graph algorithms, *SIAM Journal of Computing*, 1, 146-160.
21. Theolougou, R., and Carlier, J.G., 1991, Factoring & Reduction for networks with imperfect vertices, *IEEE Transactions on Reliability*, 40, 210-217.
22. Valian, L.G., 1979, The Complexity of enumerating and reliability problems, *SIAM Journal of Computing*, 8, 410-421.
23. Wood, R. K.. 1986, Factoring algorithms for computing K-terminal network reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, R-35, 269-278.
24. Yan, L., and Taha, H. A., 1994, A recursive approach for enumerating minimal cutsets in a network, *IEEE Transaction on Reliability*, 43, 383-388.
25. Yoo Y. B. and Narsingh Deo, 1988, A Comparison of algorithms for terminal-Pair reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, 2(37), 210-215.
26. Satyanarayana. A., Wood. R.K, A linear-time algorithm for computing K-terminal reliability in series-parallel networks, *SIAM J. computing*, vol 14, 1985 Nov, pp 818-832.
27. Satyanarayana. A., Chang M., Network reliability and the factoring theorems, *Networks*, vol 13, 1983, pp. 107-120.
28. Moskowitz. F, The analysis of redundancy networks, *AIEE Trans*. (Commun. Electron.), vol 39, 1958, pp 627-632.
29. Misra. K.B., An algorithm for the reliability evaluation of redundant networks, *IEEE Trans. Reliability*, vol R-9, 1970, pp 146-151.
30. Murchland. J., Calculating the probability that a graph is disconnected, Working paper n0 18, 1973.
31. Rosenthal. A., Computing reliability of complex systems, PhD Thesis, University of California, Berkely, 1974.
32. Nakazawa. H., Bayesian decomposition method for computing reliability of oriented network, *IEEE Trans. Reliability*, vol R-25, 1976, pp 77-80.
33. Moore and Shannon, Reliable circuits using less reliable relay, J. Franklin Insti. 262, 1956, 191-208, 281-297.
34. Sheng-DeWang, Cha-HonSun, Transformations of star-delta and delta-star reliability networks**,** *IEEE Transactions on Reliability*, 1(45), 120-126.

		$\delta = p_a p_b[p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3]$ $A = p_2p_b[1 - p_1pa - p_3pa + p_1p_3pa]$ $B = p_1p_a[1 - p_2p_b - p_3p_b + p_2p_3p_b]$ $C = \frac{p_aq_1q_3}{(q_a + p_aq_1q_3)}$ $D = \frac{p_bq_2q_3}{(q_b + p_bq_2q_3)}$	$\Omega = \frac{(\delta+A)(\delta+B)}{\delta}$; $p'_1 = \frac{(\delta)}{(\delta + AC.)}$ $p'_2 = \frac{(\delta)}{(\delta + B.D)}$ $p'_a = \frac{(\delta + A.C)}{(\delta + A)}$ $p'_b = \frac{(\delta + B.D)}{(\delta + B)}$
		$\delta = p_a p_b[p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3]$ $A = p_2p_b[1 - p_1pa - p_3pa + p_1p_3pa]$ $B = p_1p_a[1 - p_2p_b - p_3p_b + p_2p_3p_b]$ $C = \frac{p_aq_1q_3}{(q_a + p_aq_1q_3)}$ $D = \frac{p_bq_2q_3}{(q_b + p_bq_2q_3)}$	$\Omega = \frac{(\delta+A)(\delta+B)}{\delta}$ $p'_1 = \frac{(\delta)}{(\delta + A.C)}$ $p'_2 = \frac{(\delta)}{(\delta + B.D)}$ $p'_a = \frac{(\delta + A.C)}{(\delta + A)}$ $p'_b = \frac{(\delta + B.D)}{(\delta + B)}$
		$\delta = p_1p_2p_3p_4p_a[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4}]$ $A = p_1p_2p_3p_4p_a[1 + \frac{q_1q_4}{p_1p_4} + \frac{q_2q_3}{p_2p_3} + \frac{q_1q_3}{p_1p_3}]$ $B = p_1p_3[1 - p_2p_a - p_4p_a + p_2p_4p_a]$ $C = \frac{p_aq_2q_4}{(q_a + p_aq_2q_4)}$	$\Omega = \frac{(\delta+A)(\delta+B)}{\delta}$ $p'_1 = \frac{(\delta)}{(\delta + A.C)}$ $p'_2 = \frac{(\delta)}{(\delta + B.C)}$ $p'_a = \frac{(\delta + B.C)}{(\delta + B)}$
		$\gamma = p_1p_2p_3p_4p_ap_b[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4}]$ $B = p_1p_2p_3p_4p_ap_b[\frac{q_1q_4}{p_1p_4} + \frac{q_2q_3}{p_2p_3}]$ $A = p_2p_4p_b[1 - p_1p_a - p_3p_a + p_1p_3p_a]$ $\delta = p_1p_3p_a[1 - p_2p_b - p_4p_b + p_2p_4p_b]$ $C = \frac{p_aq_1q_3}{(q_a + p_aq_1q_3)}$ $D = \frac{p_bq_2q_4}{(q_b + p_bq_2q_4)}$	$\Omega = \frac{(\gamma+A)(\gamma+B)(\delta+\gamma)}{\gamma^2}$ $p'_1 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)}$ $p'_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p'_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}$ $p'_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)}$ $p'_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$
		$\gamma = p_1p_2p_3p_4p_ap_b[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4}]$ $B = p_1q_2p_3q_4p_ap_b$ $A = p_2p_3p_b[1 - p_1p_a - p_4p_a + p_1p_4p_a]$ $\delta = p_1p_2p_a[1 - p_3p_b - p_4p_b + p_3p_4p_b]$ $C = \frac{p_aq_1q_4}{(q_a + p_aq_1q_4)}$; $D = \frac{p_bq_3q_4}{(q_b + p_bq_3q_4)}$	$\Omega = \frac{(\gamma+A)(\gamma+B)(\delta+\gamma)}{\gamma^2}$ $p'_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)}$ $p'_1 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)}$ $p'_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}$ $p'_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p'_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$
		$\gamma = p_1p_2p_3p_4p_5p_ap_b[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5}]$ $B = p_1p_2p_3p_4p_5p_ap_b[\frac{q_3q_4}{p_3p_4} + \frac{q_2q_5}{p_2p_5} + \frac{q_2q_4}{p_2p_4} + \frac{q_1q_5}{p_1p_5}]$ $A = p_2p_3p_5p_b[1 - p_1p_a - p_4p_a + p_1p_4p_a]$ $\delta = p_1p_2p_4p_a[1 - p_3p_b - p_5p_b + p_3p_5p_b]$ $C = \frac{p_aq_1q_4}{(q_a + p_aq_1q_4)}$ $D = \frac{p_bq_3q_5}{(q_b + p_bq_3q_5)}$	$\Omega = \frac{(\gamma+A)(\gamma+B)(\delta+\gamma)}{\gamma^2}$ $p'_1 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)}$ $p'_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p'_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)}$ $p'_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$ $p'_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}$
		$\gamma = p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b[1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_4}{p_4} + \frac{q_5}{p_5} + \frac{q_6}{p_6}]$ $B = p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_ap_b \frac{q_3q_4}{p_3p_4} + \frac{q_2q_5}{p_2p_5} + \frac{q_2q_4}{p_2p_4} + \frac{q_1q_5}{p_1p_5}$ $+ \frac{q_1q_6}{p_1p_6} + \frac{q_3q_5}{p_3p_5} + \frac{q_2q_6}{p_2p_6}]$ $A = p_2p_3p_5p_6p_b[1 - p_1p_a - p_4p_a + p_1p_4p_a]$ $\delta = p_1p_2p_4p_5p_a[1 - p_3p_b - p_6p_b + p_3p_6p_b]$ $C = \frac{p_aq_1q_4}{(q_a + p_aq_1q_4)}$ $D = \frac{p_bq_3q_6}{(q_b + p_bq_3q_6)}$	$\Omega = \frac{(\gamma+A)(\gamma+B)(\delta+\gamma)}{\gamma^2}$ $p'_1 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + AC)}$ $p'_2 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + B)}$ $p'_3 = \frac{(\gamma)}{(\gamma + D\delta)}$ $p'_a = \frac{(\gamma + AC)}{(\gamma + A)}$ $p'_b = \frac{(\gamma + D\delta)}{(\gamma + \delta)}$