LA SINTASSI LOGICA DELLA MATEMATICA GRECA

FABIO ACERBI

SOMMARIO

Fonti di uso frequente e loro sigle v

PRELIMINARI

Il silenzio dei greci ix
Cenni di storia del testo degli Elementi xi

1. LA MACCHINA DEDUTTIVA

1.0. *La struttura generale di una proposizione matematica* 1
1.0.1. Il valore del verbo «essere» nell'esposizione 11
1.0.2. La funzione delle lettere denotative 12
1.0.3. Il ruolo del diagramma 18
1.0.4. La struttura indefinita dominante 20
1.0.5. La rete anaforica 26
1.1. *Enunciato e conclusione* 33
1.2. *Supposizione ed* ἔκθεσις *«esposizione»* 40
1.2.1. Determinazione 58
1.3. *Il ruolo delle costruzioni* 67
1.4. *Anafora* 74
1.5. *Dimostrazione* 76
1.5.1. Logica delle relazioni 77
1.5.1.1. ARISTOTELE E GALENO SULLE RELAZIONI 77
1.5.1.2 RELAZIONI E PREDICATI 80
1.5.1.3. IL CRITERIO FONDAMENTALE: LA POSIZIONE DELL'OPERATORE RELAZIONALE 82
1.5.1.4. INTERAZIONI TRA RELAZIONI E MACCHINA DEDUTTIVA: TRANSITIVITÀ, SIMMETRIA, STABILITÀ 89
1.5.1.5. PROBLEMI TESTUALI 100
1.5.2. Marcatori metamatematici: dimostrazioni potenziali, analogiche, richiami all'evidenza ed interni, forme verbali personali 103
1.5.3. Argomenti posposti 111
1.5.4. Citazioni di enunciati, istanziate e non 112
1.5.5. Assunzioni e coassunzioni 114

2. LA SINTASSI LOGICA

2.1. *Quantificazione; generalità implicita ed esplicita* 121
2.1.1. Quantificatori 123
2.1.2. Determinativi di arbitrarietà 133
2.1.3. Determinativi di indefinitezza 139
2.1.4. Qualificativi generalizzanti 145
2.1.5. Uso dell'articolo 154
2.1.6. I condizionali indefiniti nella dialettica stoica 158

2.2. *Modalità* 161
2.2.1. Riduzioni all'assurdo 162
2.2.2. Argomenti per contrapposizione 170
2.3. *Condizionale* 174
2.4. *Paracondizionale* 178
2.5. *Negazione* 184
2.6. *Disgiunzione* 192
2.7. *Congiunzione* 203
2.8. *L'avverbio* ἅμα *«insieme»* 212
2.9. *Ordinali come variabili* 217
2.10. *Somme di oggetti matematici; l'aggettivo* συναμφότερος 220
2.11. *I connettori* ἄρα *«quindi»,* ὥστε *«così che»,* δή *«pertanto»,* οὖν *«dunque»* 226

CONCLUSIONE

Perché una logica «proposizionale» non quantificata? 237

Bibliografia 239

INDICI

Indice dei nomi 249
Indice dei manoscritti e dei papiri 251
Indice dei passi citati 253
Indice analitico 267
Glossario greco-italiano 273

FONTI DI USO FREQUENTE E LORO SIGLE

I titoli degli scritti degli autori classici sono abbreviati come nel Liddell-Scott-Jones; le pagine sono quelle delle edizioni menzionate nell'indice dei passi citati, ivi identificate dal nome dell'editore. Le abbreviazioni dei titoli delle opere matematiche sono autoevidenti; alle proposizioni è fatto riferimento tramite libro e numero, come ad esempio «*El*. III.15». La *Collectio* di Pappo è citata per libro e capitolo dell'edizione di Hultsch. Se privi d'indicazione d'opera, i riferimenti sono a libro.proposizione dell'edizione di Heiberg degli *Elementi*, ad esempio VII.34. Inoltre, def sta per definizione, post per postulato, nc per nozione comune, *alt* per (dimostrazione) alternativa. Un porisma (= corollario) ad una proposizione numero *x* è denotato da *x*por, un lemma che si trovi tra le proposizioni di numero *x* e *y* dal simbolo *x*/*y*. Nel caso vi siano più gruppi di definizioni nello stesso libro, più lemmi tra due proposizioni o più dimostrazioni alternative, questi sono numerati con cifre romane per le definizioni e i lemmi, arabe per le alternative: X.defII sono le definizioni seconde del libro X, 28/29II è il secondo lemma tra le proposizioni 28 e 29, 28*alt*2 la seconda dimostrazione alternativa della proposizione 28. Si ricordi che gli *Elementi* terminano con un lemma; è stato indicato con 18/19 pur non essendoci la proposizione 19. Fonti che ricorrono frequentemente sono citatate secondo le sigle seguenti, seguite da «volume, pagina.riga», come in *AOO* II, 128.12-16:

AGE: *Apollonii Pergaei quae graece exstant, cum commentariis antiquis*, edidit et latine interpretatus est J.L. Heiberg. 2 vol. Leipzig, B.G. Teubner 1891-93.

AOO: *Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii*, iterum edidit J.L. Heiberg. 3 vol. Leipzig, B.G. Teubner 1910-15.

DOO: *Diophanti Alexandrini opera omnia cum graeciis commentariis*, edidit et latine interpretatus est P. Tannery. 2 vol. Leipzig, B.G. Teubner 1893-95.

EE: *Euclidis Elementa*, post J.L. Heiberg edidit E.S. Stamatis. 5 vol. Leipzig, B.G. Teubner 1969-1977.

EOO: *Euclidis Opera Omnia*, ediderunt J.L. Heiberg et H. Menge. Vol. VI: *Euclidis Data, cum commentario Marini et scholiis antiquis*, edidit H. Menge (1896). Vol. VII: *Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis*, edidit J.L. Heiberg (1895). Vol. VIII: *Euclidis Phaenomena et Scripta Musica*, edidit H. Menge. *Fragmenta*, collegit et disposuit J.L. Heiberg (1916). *Supplementum: Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*, edidit M. Curtze (1899). Leipzig, B.G. Teubner.

HOO: *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Volumen I. Pneumatica et Automata*, recensuit G. Schmidt (1899). *Volumen II. Mechanica et Catoptrica*, recensuerunt L. Nix et W. Schmidt (1903). *Volumen III. Rationes dimetiendi et Commentatio dioptrica*, recensuit H. Schoene (1903). *Volumen IV. Heronis Definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur Geometrica*, edidit J.L. Heiberg (1912). *Volumen V. Heronis quae feruntur Stereometrica et De mensuris*, edidit J.L. Heiberg (1914). Leipzig, B.G. Teubner.

iA: *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, texte établi et annoté par A. Rome. *Tome I. Pappus d'Alexandrie*, *Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste*. Studi e Testi 54 (1931). *Tome II. Théon d'Alexandrie*, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste*. Studi e Testi 72 (1936). *Tome III. Théon d'Alexandrie*, *Commentaire sur les livres 3 et 4 de l'Almageste*. Studi e Testi 106 (1943). Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana.

iE: *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ex recognitione G. Friedlein. Leipzig, B.G. Teubner 1873 (ristampa: Hildesheim, Georg Olms Verlag 1992).

POO: *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia, Vol. I. Syntaxis mathematica*, edidit J.L. Heiberg. 1 vol. in 2 parti (1898-1903). *Vol. II. Opera astronomica minora*, edidit J.L. Heiberg (1907). Leipzig, B.G. Teubner.

PRELIMINARI

Il silenzio dei greci

Lo scopo di questo libro è fornire una descrizione per quanto possibile completa dello stile dimostrativo[1] della matematica greca e della sua prassi deduttiva: in poche parole, cosa "fanno", e quali risorse linguistiche impiegano, i matematici greci quando dimostrano un risultato. Cercherò inoltre di mostrare se e in che modo la loro soluzione a questo fondamentale problema espressivo possa essere messa in parallelo con le elaborazioni delle scuole logiche antiche, in particolare quella stoica. Il lettore non deve quindi attendersi che tesi storiografiche forti siano prospettate o anche solo discusse: il filo conduttore è semplicemente lo studio sistematico di una pratica stilistica. La trattazione è divisa in due parti. L'oggetto della prima è il sistema di inferenze che costituisce una proposizione matematica: passaggio da inferenza a condizionale, esposizione, logica delle relazioni, dimostrazioni potenziali. La seconda parte descrive la struttura microscopica di una proposizione matematica, cioè la messa in opera di costrutti inferenziali oppure proposizionali non semplici per mezzo di singoli termini o, al massimo, di brevi sintagmi: uso dei connettori, espressioni atte a rinforzare la generalità di un enunciato, particelle di vario genere.

Nei testi matematici greci non si fa mai menzione di questioni logiche o metodologiche. Le lettere prefatorie, che accompagnavano l'invio di molti trattati, descrivono il contenuto o affilano alcune punte polemiche[2]. *A fortiori* nessun cenno è dato trovare alla logica soggiacente o alla giustificazione di certe scelte linguistiche o pratiche deduttive. Né la situazione è migliore in campo opposto: rarissimi sono i riferimenti alla matematica in opere logiche, limitandosi in sostanza a una serie seppur corposa di passaggi aristotelici e a Galeno nella sua *Istitutio logica*, e pochissimi i filosofi con *penchant* logico-metodologico di cui sia noto che si occuparono di questioni matematiche; tra questi spicca Posidonio, delle cui riflessioni ci è però giunto ben poco. Indagando la struttura fine di trattati come gli *Elementi*, però, ci si accorge rapidamente della persistenza di strutture logiche ben definite. Esse presentano somiglianze sorprendenti o addirittura identità di formulazione con alcune tra quelle introdotte in àmbito dialettico, specialmente ad opera dell'antica Stoa. Viene naturale chiedersi se si tratti di coincidenze, e, qualora così non fosse, se ci sia possibile determinare una direzione privilegiata di influenza. Una prima difficoltà risiede nel fatto che non sempre si riesce a stabilire quali elaborazioni siano dovute a Crisippo e quali a Stoici a lui successivi, ed a volte non è neanche chiaro se certe dottrine fossero realmente stoiche o no: il pensiero della prima Stoa ci è giunto quasi esclusivamente tramite testimonianze indirette, e le fonti più corpose per le dottrine logico-dialettiche non risalgono a prima del II secolo dell'era volgare: sono costituite da certe sezioni delle *Vitae* di Diogene Laerzio, dalle opere di impianto scettico di Sesto Empirico e dai trattati di alcuni grammatici, ad esempio Apollonio Discolo. Situazione opposta per quanto riguarda la dottrina aristotelica. Le opere logiche "originali" ci sono pervenute e sono intessute di esempi tratti dalla matematica, ma il sillogismo aristotelico nella sua formulazione finale è particolarmente inadatto a catturare le strutture inferenziali tipiche della matematica greca.

D'altra parte, il periodo in esame vede la scienza della logica *in statu nascendi*, e non possiamo certo assumere, come d'altronde non possiamo farlo ora, che da qualche parte fosse stata elaborata *la* logica, per quento quella di Crisippo fosse concordemente ritenuta la logica degli Dei. È dunque ametodico trascurare come hanno fatto sinora gli interpreti (con l'unica eccezione di Mueller 1974, ma per emettere un giudizio di indipendenza reciproca che ha pesato su tutto l'approccio esegetico successivo) il solo esempio veramente corposo di deduzioni dispiegate per cercare di ricostruire una

[1] La qualificazione è essenziale in quanto non si tratta dell'unico codice stilistico in uso; si veda Acerbi 2012b.
[2] Tra le rare eccezioni vi sono le discussioni archimedee per giustificare l'uso da parte sua di un particolare lemma (si veda ad esempio la lettera prefatoria a *Quadr.*) e le procedure di quadratura descritte in *Meth.*

parte del contesto in cui le due grandi scuole logiche antiche si svilupparono. C'è di più: se è vero che tra alcune formulazioni raccomandate dalla logica stoica e certe strutture logiche impiegate dai matematici sussistono somiglianze o identità di formulazione, è altrettanto vero che si registrano divergenze notevoli, in particolare nell'identificazione delle strutture argomentative ritenute, esplicitamente nel primo caso e implicitamente nel secondo, valide. In altri termini, la pratica matematica si costituisce a sistema logico indipendente e autocontenuto, una vera e propria "terza scuola".

Occorre ovviamente operare una selezione nel *corpus* antico, e la scelta degli *Elementi* come campione di cui analizzare la sintassi logica è la più naturale. Alcuni problemi che il testo ci porrà potranno essere risolti soltanto ricorrendo alle varianti manoscritte o alla tradizione testuale indiretta, costituita dalle traduzioni arabo-latine. Studi recenti mostrano che queste ultime sono necessarie per ogni tentativo di ricostruire un testo più vicino a quello originale. Per questo motivo, oltre che per fissare una serie di convenzioni e per discutere la misura degli interventi redazionali antichi, la prossima sezione offre una sintetica storia del testo degli *Elementi*.

Il lettore troverà anche discussioni sulla pratica logico-linguistica archimedea ed apolloniana e dei *Data* euclidei. La mia scelta di escluderli dal campionamento sistematico è deliberata. In primo luogo, la lingua archimedea è troppo idiosincratica e arcaizzante dal punto di vista logico-lessicale. Ciò è del massimo interesse se cerchiamo di ricostruire come venisse scritta la geometria pre-euclidea, ma in questo studio sarò interessato a come si formò uno *stile* matematico, cioè una pratica condivisa. Apollonio va escluso per il motivo opposto: troppo geometrica, troppo poco semplice la sua matematica per non doversi ingenerare tensioni linguistiche, troppo disuguale il suo stile, troppo impegnato l'autore a riflettere sullo stile tradizionale per non essere allusivo, sottilmente variante – infine, troppo incombente il sospetto che molto di quanto leggiamo sia stato riscritto da Eutocio o risenta della collazione di versioni divergenti. I *Data* sono il luogo deputato di uno stile rigidissimo e a mio avviso sostanzialmente intatto, ma sono troppo poco variati quanto al contenuto e alla molteplicità formulare per fornire campioni non distorti.

Dovendo indagare la pratica linguistica della matematica greca, si pone un problema di metodo: si può dire che negli *Elementi* si usi un certo tipo di logica, se l'unica evidenza sono dati statistici? – e si tenga presente che anche una regolarità che non ammette eccezioni di fatto è solo un dato statistico. È però vero che il puro uso sistematizzato ci mette a disposizione un significato: ciò che la pratica scientifica effettiva mostra è la base migliore per ricostruire le sue categorie concettuali di riferimento. Un tale modo di procedere non costituisce ovviamente una novità. Le cosiddette leggi grammaticali, metriche, filologiche si sono costituite su basi statistiche e d'uso condiviso[3], e solo in un secondo momento intervennero eventualmente istanze regolative. I limiti dell'approccio erano evidenti già agli scettici pirroniani (si leggano le critiche in Sesto Empirico, *M* I.221-227): è l'unico possibile che abbia una parvenza di scientificità in caso di indagine che verta su dati di fatto e proprio per questo risulta sostanzialmente tautologico.

Un problema enorme e non immediatamente sormontabile si pone a chi studi le opere matematiche antiche sotto l'aspetto della pratica argomentativa: nessun testo è completamente affidabile se pretendiamo di andare oltre un certo grado di finezza di analisi. Non bisogna però pensare che questi dati di fatto debbano condurre ad uno scetticismo generalizzato da cui concludere che i testi che leggiamo sono prodotti tardo-antichi, dai quali possiamo salvare sì e no alcuni «contenuti». Una serie di considerazioni ci aiuta ad uscire dalla paralisi. Primo, in anni recenti, e in particolare grazie allo studio della tradizione arabo-latina dei testi greci, sono stati sviluppati metodi abbastanza raffinati atti

[3] Sulle ultime citate si vedano le considerazioni in Pasquali 1998, 49-66. Ovviamente, gli *hapax* costituiscono un nodo irresolubile in questa prospettiva.

a reperire i differenti strati testuali. Secondo, ben difficilmente una forma logica e argomentativa così irregimentata come quella adottata nelle opere matematiche greche potrebbe essere la forma finale di una successione di riscritture posteriori, oppure il frutto di una sistematizzazione puntuale. Tutto il *corpus* matematico antico è scritto allo stesso modo, e la rigidità del linguaggio formulare si ritrova negli *Elementi* come negli *Sphaerica* di Teodosio. Terzo, si apprendeva a scrivere matematica facendo matematica, ed esercitandosi con lo studio dei trattati elementari più importanti; la cogenza degli argomenti matematici veniva *anche* percepita grazie alla rigidità delle strutture linguistiche impiegate. È quindi plausibile che la forma espressiva peculiare tendesse ad autoriprodursi anche su scale temporali di parecchi secoli. D'altro canto, uno stile si crea quando si ha a disposizione un modello, e ciò è particolarmente vero nel mondo greco, dove la dittatura del testo canonico è più forte che in altre civiltà. Ebbene, gli *Elementi* furono sempre esplicitamente addidati a modello. Resta il fatto che non possiamo assumere che il testo sancito più di un secolo fa nell'edizione teubneriana rifletta esattamente l'originale; la prossima sezione ne delinea la complessa tradizione, sia diretta che indiretta, indicando come verranno utilizzate entrambe nel presente volume.

CENNI DI STORIA DEL TESTO DEGLI *ELEMENTI*

Il curatore dell'edizione critica di riferimento degli *Elementi* (1883-88), J.L. Heiberg, identificò due recensioni differenti. La prima è contenuta nel solo *Vat. gr.* 190 (*siglum* **P**), il più antico manoscritto degli *Elementi* e uno dei più antichi codici in minuscola conosciuti. I manoscritti greci restanti sono denominati teonini per il fatto di contenere tutti la ἔκδοσις di Teone di Alessandria, come risulta dalle sottoscrizioni ai vari libri degli *Elementi*. L'unico altro indizio esterno in favore di questa identificazione è la presenza in essi di una proposizione, posta di séguito a VI.33, che, nel proprio commento all'*Almagesto*, Teone stesso dichiara di aver aggiunto «nella [propria] edizione degli *Elementi* alla fine del sesto libro» (*iA,* 492.7-8). I manoscritti teonini anteriori al XIII secolo, e gli unici collazionati estensivamente da Heiberg, sono: *Bodleianus D'Orville* 301 (*siglum* **B**), *Laur. Plut.* 28.3 (**F**), *Vindob. phil. gr.* 31 Nessel (= 103 Lambeck; **V**), *Bon.* A 18-19 (**b**), i *Par. gr.* 2466 e 2344 (**p** e **q**), *Vat. gr.* 1038 (**v**), *Scorial.* Φ III 5 (**S**).

Il manoscritto **P** utilizza come testo di base una recensione differente da quella teonina, ma in un'annotazione marginale del copista leggiamo che il teorema XIII.6 è assente «nella maggior parte [dei mss.] della nuova edizione mentre si trova in quelli della vecchia» (*EE* IV, 144.19 *in app.*). La proposizione in questione manca in effetti in **b** e **q**. Lo stesso copista afferma, in margine a XI.38 *vulgo*, che «la 35 (*sic*) non è recata in alcuni antigrafi» (ivi, 192.16 *in app.*), ed infatti la proposizione XI.38 *vulgo* manca in **b**. Queste testimonianze, e le peraltro poche varianti di **T** che la prima mano di **P** riporta in margine, mostrano che il copista aveva a propria disposizione esemplari di due recensioni differenti, a meno di non supporre che questi *marginalia* fossero già tali nell'antigrafo. È perciò erroneo asserire che **P** contiene un'edizione non-teonina pura – solo il suo antigrafo di riferimento era tale – e che il suo copista ha accesso *alle* due recensioni: ha accesso a rappresentanti di due recensioni che con un certo grado di plausibilità identifichiamo con le due famiglie di Heiberg.

In ogni caso, la conclusione si impose ad Heiberg che **P** offra un testo più vicino all'originale: da qui la decisione di privilegiarlo nella costituzione del testo critico: egli dichiara di seguire eventualmente i teonini, a parte interpolazioni evidenti in **P**, solo nelle varianti adiafore (*EE* V,1, xxxii-xxxv). In realtà, le differenze tra **P** e **T** sono poco più che trascurabili dal punto di vista *matematico*: la grande massa delle varianti mira a normalizzare lessico e sintassi (ivi, xxxix-lviii). La preminenza esclusiva di **P** va quindi considerata in certa misura frutto di una scelta indipendente da un'analisi completa e non aprioristica delle varianti.

Un'edizione di un testo matematico, in realtà, differisce molto da quella di un testo letterario. La critica interna permette quasi sempre di risolvere in modo coerente gli eventuali problemi causati da corruzione meccanica o da errore di copista, in modo da restituire un testo matematicamente sensato. Il tipo di varianti cui è interessato l'editore di scritti matematici, se vuole ricostruire la storia del testo, è pertanto di taglia differente da quelle di opere di altri generi, e legato alla constatazione che i trattati matematici non venivano semplicemente letti, ma usati e ripensati da matematici: il vero problema sono quindi le alterazioni *volontarie* del testo. Tra queste, le varianti lessicali e sintattiche non incidono praticamente mai sul contenuto matematico, e possono risultare rilevanti solo per chi, come chi scrive, si interessi al linguaggio formulare della matematica greca e alla logica ad esso soggiacente. Il punto delicato consiste nelle varianti macroscopiche: segmenti di testo o intere proposizioni che possono essere stati aggiunti o riscritti da editori posteriori per motivi che possono essere estremamente variabili.

La tradizione degli *Elementi* presenta, tra le opere matematiche antiche, il campionario più ricco di alterazioni di questo genere: materiale aggiunto o soppresso, cambiamenti d'ordine di princìpi o proposizioni, cambiamenti di ruolo (ad esempio da porisma a proposizione), fusione di due dimostrazioni o separazione di una in due, sostituzione di dimostrazioni, dimostrazioni alternative, aggiunta o soppressione di casi all'interno della stessa proposizione – e, ad un livello più fine, inserimento di clausole esplicative (spesso posposte), abbreviazione di passaggi. Sono ad ritenersi sospetti *a priori* quegli elementi testuali che tendano a perfezionare, o ancor peggio a saturare, la struttura deduttiva in maniera "non naturale": lemmi, corollari, spiegazioni posposte, casi addizionali di proposizioni, dimostrazioni alternative. Chiaramente, qui il problema risiede nel cosa si consideri "naturale" da un punto di vista deduttivo, ma la ricca tradizione indiretta permette di andare ben oltre le scelte di Heiberg, che aveva correttamente condannato come inautentico, sulla base della sola tradizione greca, una parte di materiale dei tipi appena menzionati.

Tra i manoscritti greci spicca il *Bon*. A 18-9. Esso presenta un testo particolarmente divergente, più stringato e privo di una proposizione, anche se limitatamente alle ultime quattro proposizioni del libro XI e all'intero libro XII. Tali divergenze trovano un riscontro nella tradizione indiretta arabo-latina. Conosciamo, contenuta in due soli manoscritti, anche una traduzione latina direttamente dal greco (Murdoch 1966 e Busard 1987), eseguita dalla scuola siciliana che fiorì nel terzo quarto del XII secolo: è la migliore delle traduzioni medievali ma ebbe scarsissima diffusione; forse fu nota a Leonardo Pisano. Il testo greco utilizzato era sicuramente teonino, ma non presenta parentele dirimenti con nessuno dei manoscritti greci noti.

La tradizione araba ed arabo-latina degli *Elementi* è di gran lunga la più complessa. Furono eseguite più versioni in arabo, nel quadro del movimento di traduzione che fu all'origine della nascita della scienza araba. Tutto le notizie che abbiamo concordano a farci ritenere che i *traduttori* impegnati fossero molto fedeli alle fonti greche. Gli stessi autori arabi distinguevano con puntiglio fra le traduzioni ed altri prodotti di letteratura matematica eventualmente risalenti alle stesse fonti, come le recensioni, le revisioni o i compendi. Gli *Elementi* furono ovviamente tra i primi ad essere tradotti, e più volte, prima ad opera di al-Ḥajjāj (due versioni sensibilmente differenti, la seconda delle quali «più concisa ed in forma abbreviata»; cfr. Djebbar 1996, 96-8), poi di Isḥāq ibn Ḥunayn (morto a Baghdad nel 910-1), rivista in séguito da Thābit ibn Qurra (*ca*. 824-901). La versione di Isḥāq-Thābit è conservata; quella di al-Ḥajjāj è ricostruibile in parte per mezzo di riferimenti e notizie contenuti in commentari posteriori, singoli manoscritti dell'altra versione o ulteriori traduzioni. Sfortunatamente, non esiste ancora un'edizione critica degli *Elementi* in arabo, e a dire il vero neanche un regesto definitivo dei manoscritti. Edizioni parziali dei libri V e VII-IX, non pubblicate, non tengono conto di alcuni manoscritti importanti (Engroff 1980 e De Young 1981). Quelli tenuti in conto mostrano che la

tradizione araba si ripartisce in due famiglie, chiamate *A* e *B*, la cui consistenza varia però da libro a libro. In ogni caso, essa si caratterizza in modo netto in termini strutturali: oltre ad altri tipi di varianti, essa presenta un testo meno ricco di quella greca. Tra definizioni, proposizioni, lemmi, porismi e dimostrazioni alternative vi "mancano" più di 100 unità testuali.

Le versioni arabe furono tradotte in latino nel corso del Medioevo, e queste traduzioni a loro volta compendiate oppure ampliate (Clagett 1953). Le due traduzioni primarie sono quella di Gerardo da Cremona (Busard 1984, *siglum* **G**), eseguita non prima del terzo quarto del XII secolo, e quella di Adelardo di Bath (Busard 1983, *siglum* **A**), che risale al secondo quarto del XII secolo. Gerardo offre ben di più, dato che eseguì collazioni su rami differenti della tradizione e riporta le varianti citando spesso la fonte. Le due versioni latine presentano divergenze strutturali e linguistiche cospicue; queste sono quasi sempre spiegabili in termini della divergenza tra le versioni di al-Ḥajjāj e di Isḥāq-Thābit come vengono descritte concordemente dagli autori arabi. Adelardo potrebbe quindi aver attinto a copie contenenti stralci della prima versione. Redazioni compendiate sono le cosiddette Adelardo II (Busard, Folkerts 1992) e Adelardo III (Busard 2001), mentre quella di Ermanno di Carinzia contiene svariate dimostrazioni scorciate dal traduttore (Busard 1967-72). L'edizione di Campano, infine, è più propriamente una recensione basata su una varietà di fonti (Busard 2005).

Il problema del peso da dare alla tradizione indiretta degli *Elementi* fu sollevato nel periodo in cui Heiberg stava preparando l'edizione critica del testo greco. Gli studiosi in gioco furono M. Klamroth (1881), che sottolineava la fedeltà dei traduttori arabi e vedeva un indice di conformità all'"originale" nella maggiore asciuttezza della tradizione araba, e lo stesso Heiberg (1884), che negava fiducia ai traduttori e interpretava le assenze di materiale come vere e proprie lacune deduttive. Heiberg risolse rapidamente, e a dire il vero piuttosto tendenziosamente, il contenzioso in favore della superiorità della tradizione greca. In più, egli giocò sporco nei *prolegomena critica* alla propria edizione degli *Elementi*, redatti dopo l'articolo del 1884: buona parte del materiale greco che aveva addotto nel 1884 per mostrare che quello arabo era un ramo della tradizione degenere in quanto lacunoso fu da Heiberg stesso relegato in appendice all'edizione in quanto spurio, senza che questo lo inducesse a riconsiderare la propria posizione. Egli liquida dunque la tradizione araba in una manciata di pagine (*EE* V,1, lxxiv-lxxvi): la versione più concisa di *El*. XI.36-XII.17 contenuta nel manoscritto **b** sarebbe una recensione bizantina ai limiti dell'epitome; le traduzioni arabe, che sono molto vicine a quella versione nella parte del testo in cui **b** diverge, condannate sulla stessa base.

Klamroth e Heiberg conoscevano però solo una parte molto limitata della base di dati attualmente a disposizione. La questione è stata riaperta recentemente da uno studio di Knorr (1996), che si è concentrato su *El*. XI.36-XII.17 confrontando il testo di **PT** con quello di **b** e delle traduzioni latine medievali. In effetti, la fedeltà dei traduttori latini dall'arabo permette di assumere le loro versioni come surrogato di quelle originali, specialmente in mancanza di un'edizione degli *Elementi* in arabo. Knorr ebbe l'intuizione di scegliere, guidato ovviamente da **b**, una parte di testo in cui le traduzioni latine non differiscono apprezzabilmente né tra loro né da **b**, ma ne trasse estrapolazioni indebite alla totalità degli *Elementi*. In realtà, le versioni di Adelardo e Gerardo sono quasi sempre apprezzabilmente differenti, ed inoltre i testi degli *Elementi* nelle tradizioni greca e arabo-latina divergono in grado estremamente variabile da libro a libro. La divergenza è massima appunto per il libro XII, dove le versioni (arabo-)latine hanno un testo molto vicino a quello di **b** nella parte in cui questo manoscritto si discosta dal resto della tradizione greca (tra l'altro, uno scolio in **P** presuppone l'assegnazione di lettere di **b**!; cfr. *EE* V,2, 285.15-286.19). L'accordo termina però con XII.12 e non si estende a tutto il libro, dato che, al contrario di **b**, la tradizione arabo-latina non ha le proposioni XII.13-4. L'analisi del libro X conferma la presenza di varianti strutturali importanti, in grandissima maggioranza sotto forma di aggiunte – molti lemmi, diverse proposizioni e qualche porisma – nella

sola tradizione greca, ma mostra che la tradizione latina medievale non è per niente omogenea (Rommevaux *et al*. 1999, e Vitrac 1990-2001 III, 381-399 e *passim*). Nel caso del libro V, invece, le varianti strutturali, per quanto presenti, sono di portata minore, mentre interessanti intrusioni linguistiche nel testo greco hanno modificato il senso matematico di molte asserzioni concernenti la generalità di applicazione della famosa definizione 5 (Acerbi 2003).

Gli studi mettono in rilievo tre dicotomie fondamentali all'interno del materiale: 1) quella tra **P** e i manoscritti teonini, la meno marcata dal punto di vista delle varianti strutturali; 2) quella all'interno delle tradizioni latine medievali, Adelardo da una parte e Gerardo da Cremona dall'altra, che riflette probabilmente le differenze tra le traduzioni primarie di al-Hajjāj e di Ishāq-Thābit e che offre più varianti della prima; 3) infine quella tra l'edizione di Heiberg e la tradizione arabo-latina, caratterizzata da un'ingente massa di varianti. La prima dicotomia coinvolge un numero limitatissimo di unità testuali, e non offre nessuna sostituzione di dimostrazione, nessun cambiamento d'ordine, nessun lemma che compaia in un ramo e non nell'altro. Nel caso di doppie dimostrazioni, queste si trovano nello stesso ordine in **P** e in **T**. La seconda dicotomia si riduce a zero per i libri stereometrici[4], coinvolgendo nel resto poco meno di 20 definizioni, una decina di proposizioni e 2 corollari. Il fenomeno più saliente è l'elevato numero di dimostrazioni alternative raccolte da Gerardo nella sua traduzione. Quanto all'ultima dicotomia, essa coinvolge l'esistenza o meno di una ventina di definizioni ed altrettanti porismi e di una buona dozzina di proposizioni, molti cambiamenti d'ordine, quasi tutte le sostituzioni di dimostrazione, ed infine, ovviamente[5], tutto il materiale «aggiuntivo». Quest'ultimo fu in buona parte relegato da Heiberg nelle appendici (così la massa di dimostrazioni alternative) sulla base di altri criteri, ma include anche molto materiale rimasto nel testo critico principale, come lemmi e casi addizionali[6]. In linea generale, le versioni arabe sono sensibilmente meno ricche ma introducono più varianti nell'ordine di presentazione.

Il risultato più rilevante è dunque la presa d'atto che la tradizione greca e ancor più quella araba degli *Elementi* sono completamente contaminate[7], e che il lavoro di compilazione spiega la presenza di buona parte del materiale addizionale e un fenomeno tutto sommato sorprendente come l'abbondanza di dimostrazioni alternative nella tradizione greca[8]. Il confronto con la tradizione indiretta permette però di sviluppare criteri ragionevolmente affidabili[9], sia interni che linguistici, per riconoscere quando tali unità linguistiche presenti nel testo greco siano interpolazioni, di origine scolastica o più probabilmente erudita. Nel corso della trattazione che segue farò interagire più volte la tradizione greca e quella arabo-latina, suggerendo soluzioni per problemi altrimenti inattaccabili.

Questo lavoro ha usufruito di un aiuto dell'Agence Nationale de la Recherche recante il riferimento ANR-09-BLAN-0300-01.

[4] Due glosse marginali in due manoscritti della versione di Ishāq-Thābit asseriscono in effetti che Ishāq era arrivato a tradurre solo fino al libro X compreso. Le testimonianze in Engroff 1980, 9.
[5] Che può essere dichiarato tale solo per confronto con la tradizone arabo-latina.
[6] Ma Heiberg (nei suoi *Prolegomena critica*, *EE* V,1, lxi-lxiii) guarda *a priori* con sospetto ad entrambe le tipologie, così come è di principio la sua perplessità di fronte alle dimostrazioni multiple – e che occorra scegliere la prima tra le alternative. Resta il fatto che tutte le dimostrazioni alternative finiscono in appendice, mentre molti lemmi e casi addizionali restano nel testo principale.
[7] Heiberg stesso lo riconosce per la tradizione greca, rifiutandosi di proporre uno stemma della famiglia teonina; si vedano i suoi *Prolegomena critica* in *EE* V,1, xxxvii.
[8] La presenza di queste ultime è molto probabilmente, ed in molti casi sicuramente, conseguenza della compilazione di dimostrazioni differenti, conservate come uniche in rami diversi della tradizione.
[9] Uno studio sistematico è offerto in Vitrac 1990-2001 IV, 32-71.

1. LA MACCHINA DEDUTTIVA

1.0. La struttura generale di una proposizione matematica

Per introdurre la questione è opportuno trascrivere, con traduzione, una proposizione degli *Elementi*, al cui testo farò riferimento nel corso di tutta l'esposizione (deliberatamente non riporto la figura). Leggiamo dunque III.2, dove si dimostra che il cerchio è una figura convessa (*EE* I, 95.18-96.24):

1	ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.	Qualora sulla circonferenza di un cerchio siano presi due punti come càpita, la retta congiunta ai punti cadrà all'interno del cerchio.
2	ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.	Sia un cerchio ΑΒΓ, e sulla sua circonferenza siano presi due punti come càpita Α, Β: dico che la retta congiunta da Α fino a Β cadrà all'interno del cerchio.
3	μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.	No in effetti, ma se possibile cada all'esterno come ΑΕΒ, e sia preso il centro del cerchio ΑΒΓ, e sia Δ, e siano congiunte ΔΑ, ΔΒ, e sia condotta oltre ΔΖΕ.
4	ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ. μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.	Poiché dunque ΔΑ è uguale a ΔΒ, anche un angolo ΔΑΕ è quindi uguale a ΔΒΕ; e poiché risulta prolungato avanti un solo lato ΑΕΒ di un triangolo ΔΑΕ, l'angolo ΔΕΒ è quindi maggiore di ΔΑΕ. E ΔΑΕ è uguale a ΔΒΕ: ΔΕΒ è quindi maggiore di ΔΒΕ. E sotto l'angolo maggiore si tende il lato maggiore: ΔΒ è quindi maggiore di ΔΕ. E ΔΒ è uguale a ΔΖ. ΔΖ è quindi maggiore di ΔΕ, la minore della maggiore; il che è impossibile. Non si darà quindi il caso che la retta congiunta da Α fino a Β cada all'esterno del cerchio. Del tutto similmente dimostreremo che neanche sulla circonferenza stessa: quindi all'interno.
5	ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Qualora quindi sulla circonferenza di un cerchio siano presi due punti come càpita, la retta congiunta ai punti cadrà all'interno del cerchio: il che si doveva dimostrare.

Sono evidenziate nelle celle le parti specifiche della proposizione, nell'ordine **1**) enunciato (πρότασις), **2**) esposizione + determinazione (ἔκθεσις + διορισμός), **3**) costruzione (κατασκευή), **4**) dimostrazione (ἀπόδειξις), **5**) conclusione (συμπέρασμα). La suddivisione ricalca quella proposta da Proclo (*iE*, 203.1-207.25). Si tratta di uno schema isagogico atto a facilitare la memorizzazione, costruito prendendo a modello un «teorema» geometrico dalla struttura particolarmente semplice[10], e per questo motivo la pratica matematica se ne discosta anche di parecchio. In particolare, la

[10] Cioè una proposizione matematica che non è un problema né concerne la teoria dei numeri, in cui sia dimostrato un solo risultato e la cui costruzione non sia inframezzata da dimostrazioni parziali. Il campo d'applicazione si restringe dunque notevolmente.

terminologia è calcata, con qualche incertezza[11], su quella relativa a corrispondenti nozioni aristoteliche (è opinione comune che sia avvenuto l'inverso, ma tale ricostruzione è erronea). Almeno tre degli appellativi impiegati da Proclo (πρότασις, ἀπόδειξις, συμπέρασμα) sono da ritenersi tradizionali del dominio logico-matematico fin dai primordi; κατασκευή è termine tecnico della dialettica aristotelica e denota l'atto di «stabilire» una tesi grazie ad un argomento; è quindi nozione più debole di «dimostrazione»[12]. Il verbo κατασκευάζειν per «effettuare una costruzione» è presente già in Archimede (una ventina di occorrenze) e il sostantivo corrispondente va quindi considerato anch'esso termine ben stabilito a designare una parte specifica della proposizione. Solo ἔκθεσις e διορισμός non sono rintracciabili prima di Proclo con questo significato. Si tratta di denominazioni alquanto mal scelte, la seconda interferendo addirittura con il significato del tutto differente, e molto meglio attestato, di «determinazione» delle condizioni di risolubilità di un problema (cfr. sez. 1.2.1).

Fin qui la struttura macroscopica; vediamone in sintesi estrema i tratti stilistici salienti in una prospettiva logico-matematica. È bene sottolineare che già una descrizione come questa, che elenca in parte fatti grammaticali e sintattici ben noti, non è neutra da un punto di vista interpretativo.

A) Diagrammi e lettere rappresentano e denotano oggetti matematici, anche nel caso della teoria dei numeri. Il linguaggio è formulare e generativo, con strutture sintattiche identiche di volta in volta adattate al contesto per mera sostituzione delle lettere denotative e formazione di un lessico tecnico per mezzo di abbreviazioni sprovviste di senso fuori contesto. Questa caratteristica dà rilevanza alla forma di un'espressione, di modo che certe conclusioni possono essere tratte in virtù della sola struttura sintattica in cui le catene argomentative che le deducono sono presentate: si tratta di argomenti che concludono *per forma* (cfr. sez. 1.5.1). I verbi che denotano azioni sono sistematicamente al passivo o in forme impersonali (un oggetto matematico "subisce" le operazioni), le costruzioni regolarmente rese con il perfetto. Anche se queste caratteristiche tendono ad evacuare la temporalità e l'autore dai trattati matematici greci, permangono certi marcatori di intenzionalità autoriale, per quanto spesso disseccati a tratti stilistici, che è bene elencare in dettaglio:

a) la formula stereotipata λέγω ὅτι «dico che» che introduce la determinazione. Va osservato che tali marcatori, così come il δεῖ «si deve» tipico della determinazione di problemi, risolvono un problema logico-sintattico non banale: introdurre un "segno di asserzione" in un luogo dove non venga tratta alcuna conclusione, e quindi non si possa adibire ἄρα «quindi» all'uopo. Evidentemente, un potenziale cadidato come δή non venne ritenuto sufficientemente connotato, ed infatto lo troviamo solo a rafforzare le espressioni modali appena menzionate (sez. 2.11).
b) aggettivi verbali in espressioni dal carattere metamatematico spiccato: δεικτέον «va dimostrato», tipico di Archimede (ma viene da chiedersi se sia o no più personale del λέγω canonico);
c) la formula ὁμοίως δὴ δείξομεν «del tutto similmente dimostreremo» che introduce una dimostrazione potenziale (sez. 1.5.2);
d) certe occorrenze di forme verbali medie, dove è il matematico che "fa per sé", ad esempio nel caso del verbo «produrre» nelle definizioni liminari dei *Data*;
e) l'uso dell'imperativo in certe definizioni e nelle costruzioni;
f) le definizioni introdotte da forme personali di καλέω «chiamo»;

[11] Si noti tra l'altro che la πρότασις e il συμπέρασμα, quando entrambi presenti, coincidono sempre, il che è impossibile in un sillogismo aristotelico in forma propria.
[12] Il verbo che denota l'atto opposto è ἀνασκευάζειν «demolire» una tesi, di norma tramite un controesempio (si veda ad esempio la discussione a *Top*. B 3, 110a32-b7).

g) il modo ottativo nella clausola canonica γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν «si troverebbe ad essere quanto prescritto».

B) L'unità logica fondamentale in una dimostrazione (nel senso della parte specifica **4**) è ciò che chiameremmo «asserto» e gli Stoici αξίωμα, cioè un enunciato completo dotato di valore di verità. Sussiste una netta distinzione tra asserti semplici e non (quale ad esempio un condizionale), ed una altrettanto netta tra asserti non semplici e inferenze, queste ultime da intendersi, per dirla ancora alla maniera stoica, come «ciò che è composto di una premessa, di una coassunzione e di una conclusione» (D.L. VII.76, e cfr. Sesto Empirico, *PH* II.135 e *M* VIII.301). L'intera dimostrazione è un'inferenza, che può contenere sotto-macrostrutture deduttive indipendenti e la cui conclusione coincide più o meno strettamente con una forma istanziata (cioè dotata di lettere denotative degli enti geometrici in gioco) dell'enunciato. All'interno di una dimostrazione, connettori e particelle scandiscono il passaggio da un asserto all'altro in una maniera ben più marcata di quanto già accada in prosa greca ordinaria.

Tra i connettori sono distinti quelli che danno luogo a proposizioni non-semplici da quelli che introducono coassunzioni o conclusioni di inferenze. Tra i primi si contano gli usuali connettori εἰ «se», ἐάν «qualora», ἐπεί «poiché», καί «e» (e in forma più o meno marcatamente avversativa δέ), ἤτοι «oppure». Le coassunzioni sono introdotte da καί, ἀλλά «ma» oppure δέ. Le conclusioni sono identificate dalla presenza di ἄρα «quindi», che predomina, e in misura minore da ὥστε «così che». Transizioni di ordine differente sono introdotte da οὖν «dunque», δή «pertanto». Non è sempre facile distinguere la funzione connettiva di δή da quella semplicemente rafforzativa. Nel primo caso, è spesso opportuno tradurlo con «ora», per mantenere anche in italiano la sfumatura temporale. A parte μέν, meno frequente che in prosa letteraria, e γάρ «in effetti», tutte le altre particelle, e la lingua greca ne è ricchissima, scompaiono nel lessico matematico. Ad esempio, γε «certamente» non compare né negli *Elementi* né nei *Data*, e μήν «a dire il vero» conta solo 44 occorrenze nelle stesse opere, 43 delle quali a rafforzare un ἀλλά o un οὐδέ «neanche» che introducono coassunzioni.

Nelle altre parti specifiche di una proposizione trovano impiego frasi in forma non assertoria, facilmente riconoscibili dal verbo all'imperativo e dunque formulate nel modo cosiddetto «suppositivo» della scuola logica stoica (Bobzien 1997). Sono espresse in questo modo assunzioni di vario genere, e in ogni caso le supposizioni principali della proposizione, contenute nell'«esposizione», e le costruzioni da eseguire perché la dimostrazione possa mettersi in moto. L'inizio stesso della dimostrazione vera e propria è isolabile come struttura sintattica a sé stante, introdotta da ἐπεί «poiché» e recentemente battezzata «anafora» (Federspiel 1995, 1999). Descrivo i principali marcatori di questa struttura logico-matematica a più livelli (si veda anche Acerbi 2012b)[13].

1) *Tempi e modi verbali*. La struttura verbale è molto ricca, i tempi e i modi essendo distribuiti tra le parti specifiche di una proposizione in modo caratteristico e rigido.

i) *Presente*. Indicativo: ubiquitario nella dimostrazione; esprime la semplice presa d'atto di una successione, ordinata logicamente, di stati di cose relativi agli oggetti matematici introdotti nell'esposizione e nella costruzione. Lo stesso vale per gli enunciati di teoremi in forma assertoria, come ad esempio quello di *El*. I.16 (*EE* I, 24.15-17), che è citato in forma istanziata e

[13] Nell'analisi che segue prendo per comodità in considerazione la conclusione generale priva di lettere denotative (συμπέρασμα), sebbene essa sia un artefatto proprio alla sola tradizione degli *Elementi*: nel *corpus* antico le conclusioni sono totalmente assenti, salvo appunto in quest'opera, l'assetto attuale del testo greco della quale è sicuramente dovuto in questo rispetto alla mano di editori posteriori.

scorciata nell'«anafora» di *El*. III.2 appena letta: παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν. Di norma il presente figura anche nel conseguente di un enunciato formulato come condizionale, e nell'antecedente dei condizionali che, all'interno di una dimostrazione, introducono le dimostrazioni per assurdo. A volte l'indicativo futuro sostituisce il presente, come nell'enunciato di III.2, ma si tratta di una variante priva di sistematicità e irrilevante dal punto di vista stilistico. Il congiuntivo presente trova impiego quasi unicamente nell'antecedente di un enunciato in forma condizionale, quando si impieghino forme del verbo «essere». L'imperativo presente è rappresentato principalmente dalla forma ἔστω(σαν), ad introdurre l'esposizione. Il verbo «essere» ha in questo caso valore "presenziale" (Ruijgh 1979), fatto confermato dal suo occorrere in ambiente di perfetto (si veda la sez. 1.0.1).

ii) *Aoristo*. La presenza del congiuntivo aoristo in un enunciato, obbligatorio per verbi diversi da «essere», è di norma legata ad operazioni subite dagli oggetti: non denota in questo caso un'azione puntuale ma assenza di connotazioni aspettuali o temporali. È estremamente significativo il fatto che in *El*. III.2 la "stessa" operazione sia formulata nell'enunciato con un congiuntivo *aoristo* passivo (ληφθῇ qui sopra), nella costruzione con un imperativo *perfetto* medio-passivo (εἰλήφθω). Forme finite di aoristo sono praticamente assenti nelle altre parti specifiche, fatte salve alcune eccezioni legate a verbi particolari, come ad esempio ἐμπίπτειν «incidere», detto di una retta che incide su due parallele, ad esempio ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν in *El*. I.46 (*EE* I, 62.15-17). Forme participiali sono invece relativamente frequenti, in particolare nell'identificazione degli oggetti «dati» (si legga l'enunciato di *El*. I.2 qui sotto). Gli enunciati dei problemi di costruzione (*El*. III.2 e I.16 sono *teoremi*) sono caratterizzati dal verbo all'infinito (con ovvia connotazione iussiva), sostituito nella conclusione e in tutte le citazioni di costruzioni, che ne ricalcano il modello (sez. 1.0.5), da un indicativo perfetto resultativo, che in greco, giova ricordarlo, si riferisce al tempo *presente* di chi proferisce una frase che lo contiene. Al medio dell'enunciato si sostituisce una voce passiva nella conclusione, che, a differenza dei teoremi, è sempre dotata di lettere denotative: l'attore passa dal soggetto operante, che "deve" eseguire la costruzione, all'oggetto matematico. Esempio: in *El*. I.2 (*EE* I, 8.11-12 e 9.13-14): l'enunciato è πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι, la conclusione πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ (κεῖμαι funziona da passivo, con funzione perfettiva, di τίθημι). L'infinito non trova applicazioni di rilievo in altre parti specifiche della proposizione, se non in clausole esplicative del tipo διὰ τό + infinito, da ritenersi in linea generale spurie.

iii) *Perfetto*. Dà la propria impronta allo stile dimostrativo. Occorre distinguere tra il suo uso all'indicativo e quello in altri modi, in particolare l'imperativo. Il primo ricorre, come abbiamo appena visto, nelle conclusioni di problemi e nelle rare loro citazioni all'interno della dimostrazione, come quella di *El*. I.16 nell'«anafora» di *El*. III.2. Il perfetto ha in questo caso valore resultativo. Nell'esposizione e nella costruzione è usato esclusivamente, con l'unica eccezione del verbo «essere» e di alcuni verbi per cui è invalso l'uso del *praesens pro perfecto* (ad esempio πίπτειν), l'imperativo perfetto medio-passivo. Il perfetto assume in questa fattispecie il suo valore aspettuale di ἐνεστὼς συντελικός «presente compiuto», svincolato da connotazioni temporali o di durata. Infine, si rintracciano forme residue di perfetto, in modo non suppositivo e con valore non resultativo, in forme verbali di origine presumibilmente arcaica, con pura connotazione di stato: βεβηκέναι «trovarsi a insistere», detto di un angolo su un arco di circonferenza (*El*. III.def.9), ἀντιπεπονθέναι «trovarsi in relazione inversa», detto di grandezze

(VI.15), τετμῆσθαι «trovarsi secata», detto di retta secata in rapporto estremo e medio (VI.def.3), γεγονέτω «trovarsi a essere», formula di inizializzazione di un'analisi, κεκλίσθαι «trovarsi inclinato», detto di un piano rispetto ad un piano (XI.def.7). Nel sistema verbale del greco c'è poco di più impersonale di un imperativo perfetto medio-passivo: il complemento d'agente sarebbe un'appendice innaturale nel modo imperativo; il valore aspettuale del perfetto presenta la costruzione come "già pronta all'uso', indipendentemente dalla sua storia passata; la diatesi indica che l'azione è subita dall'oggetto matematico. Tutto ciò permette al matematico operante di "scomparire" dietro la propria dimostrazione. (Potremmo leggere questa scelta stilistica come una risposta implicita alle critiche di Platone in *Rsp*. 527A6 sui matematici che λέγουσι μέν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως.)

2) *Particelle*. La struttura sintattica generale di una proposizione, e in particolare di una dimostrazione, è una paratassi argomentale. Strutture ipotattiche si incontrano solo nel caso di asserti non semplici, come i condizionali che incontriamo negli enunciati e ad introdurre le argomentazioni per assurdo, oppure i paracondizionali che identificano l'«anafora». Rare sono le occorrenze di genitivo assoluto (si veda ad esempio l'enunciato di *El*. I.16 letto sopra). L'articolazione dell'argomentazione deve quindi essere assicurata da coordinanti e leganti: le particelle. Nel prospetto seguente elenco la stringa di particelle che è possibile estrarre da *El*. III.2 appena letta, mantenendo la divisione per parti specifiche:

enunciato	ἐάν	qualora
esposizione	καί	e
determinazione	ὅτι	che
costruzione	γάρ, ἀλλ' εἰ, καί, καί, καί, καί	in effetti, ma se, e, e, e, e
dimostrazione	ἐπεὶ οὖν, ἄρα καί, καὶ ἐπεί, ἄρα, δέ, ἄρα, δέ, ἄρα, δέ, ἄρα, οὐκ ἄρα, δή, ὅτι, οὐδέ, ἄρα	poiché dunque, quindi anche, e poiché, quindi e, quindi, e, quindi, e, quindi, non quindi, del tutto, che, neanche, quindi
conclusione	ἐὰν ἄρα	qualora quindi

Avvenimenti logici distinti si svolgono quindi nelle differenti parti specifiche. Enunciato e conclusione sono sterili dal punto di vista deduttivo, in quanto costituiti da un singolo asserto. La costruzione e l'esposizione sono caratterizzate dalla struttura esclusivamente paratattica. Ciascuno dei due ἄρα nell'«anafora» serve semplicemente ad introdurre il conseguente del paracondizionale in cui è contenuto; è solo a partire da qui che si formano catene conclusione / assunzione → coassunzione → conclusione / assunzione tra loro connesse.

La grande abbondanza di particelle in una dimostrazione riflette una caratteristica *generale* della lingua greca; essa è però spinta all'estremo, nella misura in cui tutte le connotazioni non-logiche sono cancellate. Si riconoscono almeno tre livelli, il primo adibendo naturalmente la particella come *Satzadverbium*, mentre nel secondo prevale la funzione di particella di legame (coordinante), per quanto la sua portata si estenda all'intera frase. Ovviamente, i livelli possono sovrapporsi, e le particelle ad essi strettamente connesse viaggiare a coppie.

a) Il livello più esterno è caratterizzato da particelle di portata massimale, come γάρ, οὖν, δή, ὅτι (ed anche ἄρα quando introduca la conclusione): esse segnalano il passaggio ad una differente parte specifica di una proposizione o la ripresa di un'argomentazione dopo uno iato deduttivo; operano su intere catene di argomenti (in particolare su complessi di unità linguistiche che contengono le

particelle del livello successivo). L'assenza di queste particelle all'inizio della parte dimostrativa che segue l'«anafora» mostra che essa ne era considerata (e non solo da Proclo) il segmento iniziale, e non una parte specifica indipendente. In *El*. III.2, una particella di livello più esterno è assente all'inizio dell'esposizione in quanto essa è introdotta dal verbo «essere», e i dati linguistici a nostra disposizione mostrano che i due tipi di marcatori sono in questa funzione particolare in alternativa. Infine, il γάρ della costruzione di *El*. III.2 ha il doppio ruolo di introdurre sia la parte specifica che uno dei nessi canonici che inizializzano un'inferenza per assurdo.

b) Il livello delle particelle con valore inferenziale, che rendono esplicito il gioco assunzione–coassunzione–conclusione di ogni unità deduttiva autonoma: δέ, ἀλλά, καί avverbiale, δή, ἄρα, ὥστε; a queste va aggiunto il γάρ esplicativo, che introduce unità linguistiche *a priori* sospette. Le coassunzioni sono introdotte da καί, ἀλλά oppure δέ, quest'ultimo di gran lunga il più comune. Le conclusioni sono identificate dalla presenza di ἄρα, che predomina, e in misura minore da ὥστε, usato di preferenza per evitare due ἄρα consecutivi, cioè quando la deduzione sia "a una sola premessa'. Transizioni ancora più deboli sono introdotte da δή, che di norma segnala la constatazione di un fatto matematico ovvio una volta assunto quanto precede. Non è sempre facile distinguere la funzione connettiva di δή da quella semplicemente rafforzativa e dal suo uso come marcatore di uno iato deduttivo (livello precedente).

c) Il livello delle particelle con funzione di connettore, che servono a formare asserti non semplici a partire da asserti semplici: καί, ἤ(τοι), μέν… δέ…, εἰ, ἐάν, ἐπεί. L'unico impiego di ἄρα a questo livello si riscontra talvolta nell'introdurre il conseguente di un paracondizionale.

Schematizzo nel prospetto che segue il flusso argomentale della «dimostrazione» di *El*. III.2 letta sopra, tenendo separati i tre livelli:

οὖν								δή		
καί		δέ	ἄρα	δέ	ἄρα	δέ	ἄρα	οὐκ ἄρα		ἄρα
ἐπεί […] ἄρα	καὶ ἐπεί […] ἄρα								οὐδέ	

3) *Designatori*. Sono impiegate le lettere denotative, in quanto nomi degli enti geometrici *indefiniti* introdotti nell'esposizione o nella costruzione: si ripensi a ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ in *El*. III.2, dove è cruciale l'assenza dell'articolo davanti al nome della specie geometrica: «sia un cerchio ΑΒΓ» (su tutto ciò maggiori dettagli nelle sez. 1.0.1-4). Le assegnazioni di lettere sono univoche, esigenza primaria in una dimostrazione geometrica, caratterizzata da una struttura in oggetti particolarmente ricca.

Riassumo i marcatori che permettono di distinguere in maniera univoca le varie parti specifiche:

enunciato	assenza di lettere denotative
esposizione	introdotta da una particella di primo livello *oppure* da verbo «essere» incipitario con valore "presenziale"; verbi all'imperativo; prima comparsa delle lettere denotative
determinazione	introdotta da λέγω ὅτι (teoremi) o δεῖ δή (problemi); verbo all'indicativo
costruzione	verbi all'imperativo; introdotta da una particella di primo livello
dimostrazione	verbi all'indicativo; introdotta da una particella di primo livello; l'«anafora» incipitaria è costituita da una serie di «paracondizionali»
conclusione	ripresa dell'enunciato; nel caso di problemi di costruzione permangono le lettere denotative e il verbo è posto al perfetto.

I dati linguistici si intrecciano dunque con una struttura logico-matematica a più livelli, identificata da marcatori di natura a volte radicalmente differente:

1) Al livello degli enti matematici, occorre distinguere tra oggetti (figure geometriche, grandezze, numeri), relazioni non oggettualizzate ma designate da sostantivi (rapporti, proporzioni), relazioni identificate soltanto da predicati (commensurabilità, uguaglianza). Le relazioni sono identificabili in base ad un tratto stilistico fondamentale: l'operatore relazionale (verbo + predicato) si trova all'esterno della coppia ordinata di termini in relazione. Questi ultimi sono di norma contigui, a meno che non intervengano motivi grammaticali superiori, che determinano ad esempio l'inserimento di particelle dalla forte connotazione argomentale quali ἄρα, δέ, la cui posizione all'interno della frase è governata da regole piuttosto rigide e prevalenti. Mai si trovano inserite disgiunzioni o congiunzioni. Valga per tutti il bell'esempio della relazione, tipica del linguaggio dei «dati», τὸ Α τοῦ Β δοθέντι μεῖζόν ἐστι ἢ ἐν λόγῳ «A di B è maggiore che in rapporto per una data», dove l'operatore relazionale è l'intero sintagma δοθέντι μεῖζον εἶναι ἢ ἐν λόγῳ «essere maggiore che in rapporto per una ‹grandezza› data». Quando il verbo sia separato dal predicato, è la posizione di quest'ultimo ad essere determinante. Come in altri casi, si tratta di una struttura corrente in prosa greca ordinaria, dove la grande libertà nell'ordinare le parole di una frase tende a creare naturalmente siffatte «coppie stilistiche»; la significatività nei testi matematici deriva dalla loro frequenza predominante (cfr. sez. 1.5.1).
2) Al livello del contenuto inferenziale, occorre distinguere tra asserti in modo suppositivo, caratterizzati da una struttura logica eminentemente giustappositiva, e asserti in modo indicativo, caratterizzati da una struttura logica di subordinazione deduttiva.
3) Vi sono poi almeno tre livelli *metamatematici* interni segnalati da particelle o espressioni formulari:
    a) ἄρα, ὥστε, che segnalano la conclusione di un'inferenza, ed operano sui singoli asserti,
    b) οὖν, γάρ, ecc., che segnalano il passaggio ad una differente parte specifica di una proposizione o la ripresa di una dimostrazione dopo uno iato, ed operano su catene di argomenti (in particolare su unità linguistiche che contengono le particelle del livello precedente),
    c) ὁμοίως δὴ δείξομεν «del tutto similmente dimostreremo» o simili, che rinviano ad una dimostrazione omessa e che operano sull'intera proposizione (*idem*): è in gioco la libera scelta del matematico, segnalata da una prima persona plurale congelata a tratto stilistico, di manipolare il proprio testo.
4) Vi è infine il livello metamatematico esterno e di origine autoriale o, più spesso, scolare: citazioni non istanziate di teoremi precedenti (mai di problemi), interpolazioni esplicative di vario genere. La presenza di espressioni metalinguistiche è ancora la guida che occorre assumere per la loro identificazione:
    a) in dimostrazioni analogiche, segnalate da varie espressioni: διὰ τὰ αὐτὰ δή «proprio per gli stessi motivi», ὡσαύτως «allo stesso modo», ed altre;
    b) in dimostrazioni potenziali, introdotte da ὁμοίως δή «del tutto similmente» + forme del futuro di δεικνύναι «dimostrare»;
    c) nei riferimenti a proposizioni o passaggi già dimostrati: si usano praticamente sempre forme di δεικνύναι «dimostrare». Da notare però che nel caso di iato all'interno di

una dimostrazione il passaggio ripreso viene ripetuto ma senza aggiungere forme verbali. Un'eccezione seria sono le dimostrazioni per assurdo con più diramazioni.

d) nei richiami di supposizioni, normalmente preceduti da ὑπόκειται δέ «ed è stato supposto»; raramente si trovano riferimenti a operazioni effettuate nella costruzione.

Da tutto ciò risulta che lo schema di Proclo riflette una realtà linguistica ben precisa, scandita da marcatori quali le particelle, le forme verbali, le lettere denotative.

La questione di cui mi occuperò nelle sottosezioni seguenti è: per quale motivo sia generale una dimostrazione geometrica "alla greca", cioè condotta su di un oggetto quale il cerchio ὁ ΑΒΓ, apparentemente particolare per quanto rappresentante generico di una classe (riprendo qui Acerbi 2011c). La risposta tradizionale (su cui la formulazione della domanda è ricalcata, e vedremo quanto quest'ultima ne risulti distorta) risale a Proclo e si è poi costituita a *vulgata*; è espressa molto chiaramente nel passo seguente (*iE*, 207.4-25):

τό γε μὴν συμπέρασμα διπλοῦν εἰώθασι ποιεῖσθαί τινα τρόπον· καὶ γὰρ ὡς ἐπὶ τοῦ δεδομένου δείξαντες καὶ ὡς καθόλου συνάγουσιν ἀνατρέχοντες ἀπὸ τοῦ μερικοῦ συμπεράσματος ἐπὶ τὸ καθόλου. διότι γὰρ οὐ προσχρῶνται τῇ ἰδιότητι τῶν ὑποκειμένων, ἀλλὰ πρὸ ὀμμάτων ποιούμενοι τὸ δεδομένον γράφουσι τὴν γωνίαν ἢ τὴν εὐθεῖαν, ταὐτὸν ἡγοῦνται τὸ ἐπὶ ταύτης συναγόμενον καὶ ἐπὶ τοῦ ὁμοίου συμπεπεράνθαι παντός. μεταβαίνουσι μὲν οὖν ἐπὶ τὸ καθόλου, ἵνα μὴ μερικὸν ὑπολάβωμεν εἶναι τὸ συμπέρασμα. εὐλόγως δὲ μεταβαίνουσιν, ἐπειδὴ τοῖς ἐκτεθεῖσιν, οὐχ ᾗ ταῦτά ἐστιν, ἀλλ' ᾗ τοῖς ἄλλοις ὅμοια, χρῶνται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν. οὐ γὰρ ᾗ τοσήδε ἐστὶν ἡ ἐκκειμένη γωνία, ταύτῃ τὴν διχοτομίαν ποιοῦμαι, ἀλλ' ᾗ μόνον εὐθύγραμμος. ἔστι δὲ τὸ μὲν τοσόνδε τῆς ἐκκειμένης ἴδιον, τὸ δὲ εὐθύγραμμον πασῶν τῶν εὐθυγράμμων κοινόν. ἔστω γὰρ ἡ δεδομένη ἡ ὀρθή. εἰ μὲν οὖν τῇ ἀποδείξει τὴν ὀρθότητα παρελάμβανον, οὐκ ἠδυνάμην ἐπὶ πᾶν τὸ εἶδος τῆς εὐθυγράμμου μεταβαίνειν, εἰ δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν αὐτῆς οὐ προσποιοῦμαι, τὸ δὲ εὐθύγραμμον σκοπῶ μόνον, ὁμοίως ὁ λόγος ἐφαρμόσει καὶ παρὰ ταῖς εὐθυγράμμοις γωνίαις.

A dire il vero, ‹i geometri› sono soliti trarre in un certo senso una doppia conclusione: sia in quanto dimostrano per ciò che è dato sia in quanto deducono in generale, risalendo dalla conclusione particolare a quella generale. Questo perché non fanno uso delle particolarità del soggetto, ma ponendo ciò che è dato davanti agli occhi tracciano l'angolo o la retta, e ritengono che ciò che è dedotto per questi sia concluso anche per ogni ‹caso› simile. Passano dunque ad un piano generale, affinché non riteniamo che la conclusione sia particolare. E a buon diritto lo fanno, poiché appunto per la dimostrazione fanno uso degli enti esposti non in quanto sono questi, ma in quanto sono simili agli altri. In effetti, non lo seco a metà in quanto l'angolo esposto è questo qui, bensì soltanto in quanto rettilineo. E "questo qui" è proprio di quello esposto, mentre "rettilineo" è comune a tutti quelli rettilinei. In effetti, sia quello dato quello retto. Se dunque impiegassi nella dimostrazione l'essere retto, non potrei passare a ogni forma di ‹angolo› rettilineo; se invece non metto in opera il suo essere retto, ma considero soltanto l'essere rettilineo, l'argomento si adatterà in modo simile anche agli angoli rettilinei.

Queste considerazioni contengono quasi tutti gli ingredienti in cui si articola un'argomentazione coerente ed ampiamente diffusa, ma largamente fuori bersaglio: il ruolo primario erroneamente concesso alla figura, l'esposizione vista altrettanto erroneamente come il luogo dove sono introdotti oggetti particolari, il cui uso si propaga a tutta la dimostrazione, l'enfasi (corretta) sulle determinazioni di oggetto non menzionate, la confusione tra gli enti introdotti nel testo e quelli tracciati nel diagramma, e tra ciò che è dato e quanto "esposto" nell'ἔκθεσις. Di suo, Proclo aggiunge la pretesa,

innocua ai nostri fini, che ogni proposizione geometrica debba essere dotata di una conclusione generale che ripeta l'enunciato, mentre ciò è vero solo in una minima parte dei casi se ci riferiamo all'intero *corpus* (se eccettuiamo il libro IV, già quasi nessuno dei problemi degli *Elementi* ha una conclusione priva di lettere, e solo una minoranza di teoremi ce l'ha).

Seguito in questo dalla tradizione filosofica posteriore, Proclo fa inoltre tutt'uno di due problemi che, per quanto non totalmente disgiunti, vanno nondimeno tenuti distinti. Quello cui siamo interessati riguarda lo statuto dell'oggetto matematico «cerchio ΑΒΓ» introdotto nell'esposizione: è un problema in cui, come vedremo, si intrecciano aspetti sintattici (il ruolo dell'articolo determinativo), denotativi (le lettere), raffigurativi (il diagramma); è un problema, va sottolineato da sùbito, cui finora è stata data una risposta sbagliata, se elevata al rango di spiegazione con pretese di plausibilità storica. L'altro è il problema prettamente linguistico di come identificare la classe più ampia di oggetti cui una dimostrazione sia applicabile, e pertiene ad una definizione della generalità matematica che rifletta adeguatamente la pratica stilistica condivisa. La soluzione, basata sull'osservazione che si generalizza automaticamente sulle determinazioni sottaciute[14], venne fornita già da Aristotele nella teoria esposta in *APo*. A 4-5, ed è a questa soluzione che Proclo, indirettamente come suo solito, fa riferimento. Naturalmente, il secondo problema, e la sua soluzione, non potranno non avere un ruolo nella soluzione del primo, ma nondimeno non potranno esaurirlo.

La questione del grado di generalità di una proposizione geometrica è entrata nel dibattito filosofico moderno come caso specifico, ed in effetti come esempio archetipico, di quella, più ampia, dello statuto ontologico degli oggetti generali. Essa è nota in una parte della letteratura recente come "problema di Locke-Berkeley". Fatto singolare per quanto comprensibile, il dibattito moderno non prende le mosse direttamente dal testo greco, ma da una traduzione d'uso corrente che ne rende in maniera canonica, ed apparentemente naturale, certe strutture sintattiche peculiari (e che differisce notevolmente da quella proposta sopra, corretta e che tuttavia non mette ancora in rilievo, come vedremo, tutte le potenzialità del testo). Tale traduzione *vulgata*, però, si basa su una grossolana incomprensione della funzione del verbo «essere» nell'esposizione e del ruolo dell'articolo, e risulta pertanto semplicemente erronea sotto certi rispetti e pesantemente fuorviante sotto altri. Per questo motivo, la *vulgata* presenta effettivamente un difetto di generalità, dovendo quindi (tacitamente) applicarsi argomenti addizionali come quello di Proclo per supporla ripristinata. Nessuno si è curato di rivedere come sia scritta una dimostrazione greca, mentre i grecisti che hanno indicato per primi la corretta interpretazione di alcune delle suddette strutture (*in primis* il fondamentale Federspiel 1995) non ne hanno sottolineato la rilevanza filosofica. Non si tratta infatti di sottigliezze che pertengono soltanto alla grammatica: le incomprensioni sintattiche comportano una valutazione del tutto scorretta del ruolo della figura e delle lettere denotative, ed una concezione in massimo grado confusa dell'esposizione, che finisce per identificarla con una forma amputata di costruzione o con un procedimento omonimo ma radicalmente differente messo in gioco nella sillogistica aristotelica (lo stesso errore commise Proclo, o chi prima di lui, quando decise di chiamare ἔκθεσις questa parte specifica).

Inutile passare in rassegna tutti gli autori che dopo Proclo hanno sostenuto un'opinione analoga alla sua, pur con sfumature dovute più all'ampliarsi dei termini del dibattito e delle problematiche filosofiche connesse che ad un apprezzamento critico della prassi stilistica greca. Tra gli interpreti della tradizione matematica e filosofica greca basta nominare Heath (1949, 219-220), Mueller (1981,

[14] Cioè non rese esplicite *nel testo*, e non semplicemente ignorate, ché quest'ultimo è atteggiamento psicologico e quindi irrilevante. Il matematico non *ragiona* sulla figura, ed Aristotele stesso insiste sul fatto che la generalità si raggiunge come conseguenza di una dimostrazione, cioè del dispiegamento di un'argomentazione organizzata logicamente (si veda ad esempio la definizione ad *APo*. A 4, 73b32-33).

11-14), Smith (1982, 123-125), Hussey (1991, 126-127) e, limitatamente al ruolo delle lettere, Barnes (2007, 347-354). Tra i filosofi si pensi a Berkeley (1734, *Introduction*, §§ 12-16), come parte della sua risposta alla teoria degli oggetti generali di Locke (si veda in particolare la celebre descrizione del "triangolo generale" in Locke 1700, IV.viii, § 9), e dopo a Kant (B 744), De Morgan (1966, 170, 266), Russell (1908, 156 della ristampa). Quest'ultimo offre una formulazione che risente della teoria della quantificazione ed introduce opportune distinzioni linguistiche, ma che ricalca nondimeno quella di Proclo e fa propria l'idea che una dimostrazione geometrica abbia come oggetto *un* (numerale, non articolo) triangolo (corsivi nell'originale; la "particular enunciation" è ovviamente l'esposizione; si noti l'uso di deittici quali "this one", esattamente come fa Proclo):

> The distinction [*scil. tra* all *e* any] is roughly the same as that between the general and particular enunciation in Euclid. The general enunciation tells us something about (say) all triangles, while the particular enunciation takes one triangle and asserts the same thing of this one triangle. But the triangle taken is *any* triangle, not some one special triangle; and thus, although, throughout the proof, only one triangle is dealt with, yet the proof retains its generality. If we say "Let *ABC* be a triangle, then the sides *AB* and *AC* are togheter greater than the side *BC*", we are saying something about *one* triangle, not about *all* triangles; but the one triangle concerned is absolutely ambiguous, and our statement consequently is also absolutely ambiguous. We do not affirm any one definite proposition, but an undetermined one of all the propositions resulting from supposing *ABC* to be this or that triangle.

Se quanto segue mostrerà in dettaglio dove la breve esposizione di Russell sia profondamente erronea come descrizione di quanto leggiamo in un testo matematico greco, giova confutare sùbito una credenza: contrariamente a quanto egli suggerisce, solo una trentina di proposizioni degli *Elementi* (su 465) sono enunciate in maniera esplicitamente generale (cioè con forme di πᾶς o ἅπας nell'enunciato): la struttura quantificazionale è assente già nella «general enunciation».

Una soluzione molto interessante fu offerta, solidalmente all'elaborazione della risorsa formale dei *tableaux* semantici, da E.W. Beth (si veda ad esempio Beth 1956/57). Egli non risolse certo il problema storicamente posto, ma gettò le basi (si legga Beth 1953/54 in aggiunta) per quella rivisitazione della teoria kantiana della matematica che sarà perseguito da Hintikka allo scopo di affermare l'ampliatività dell'inferenza deduttiva (1973, cap. VI-IX, 1977, Hintikka, Remes 1974, cap. IV-V – ma si ricordi che la posizione di Hintikka, oltre a costituire uno stravolgimento delle pur non perspicue riflessioni di Kant, è largamente parassitica di quella di Beth). Il carattere sintetico di un'inferenza è da questi autori legato all'introduzione di nuovi individui, in esatto parallelo con ciò che avviene, nella lettura di Hintikka del contenuto di una proposizione geometrica, sia nell'esposizione che nella costruzione: in Hintikka è in effetti sistematica l'assenza di distinzione tra ἔκθεσις matematica ed aristotelica, e tra la prima e la costruzione.

Viene da chiedersi, tra l'altro, che cosa renda tali gli oggetti (falsamente) particolari putativamente introdotti nell'esposizione. L'essere denotati da lettere? La loro rappresentazione in un diagramma? Si tratta di posizioni molto ingenue – per questo, forse, si ritiene ammissibile attribuirle ad uno stadio pretesamente aurorale della matematica – e che una riflessione appena più approfondita mostra indifendibili, ma che non discuterò qui (si vedano ad esempio le critiche alla posizione di Berkeley in Husserl 1922, *Seconda ricerca*, in particolare §§ 18-20 e 30, dove però è presa per buona la traduzione canonica delle frasi nell'esposizione). Il mio scopo attuale è semplicemente mostrare che l'interpretazione corrente è erronea già come descrizione della pratica stilistica greca. Se dunque la tradizione, probabilmente resa insensibile dal miraggio del "contenuto matematico", ha finito per sovvertire inconsapevolmente quest'ultima, attribuendole dimostrazioni esposte all'accusa di difettare

in generalità, be', tanto peggio per chi crede che i greci redigessero proposizioni geometriche servendosi di strumenti linguistici inadeguati.

Non discuterò neanche la questione del perché Proclo, che in fin dei conti è un parlante greco, non "veda" le strutture sintattiche che andrò descrivendo nel séguito. È immediato rispondere che nel V secolo le eventuali motivazioni soggiacenti all'adozione di un codice stilistico, ormai fossilizzato e non più sostenuto da un'attività matematica effettiva, dovevano essere passate ben oltre l'orizzonte cognitivo di qualsiasi interprete. Il complemento di risposta che chiunque darebbe "dietro le quinte" è che tutto quanto leggiamo in Proclo rivela, in ciò che pertiene agli aspetti tecnici, un compilatore coscenzioso ma spesso confuso, privo della sensibilità linguistica e degli strumenti logico-matematici necessari anche solo a percepire problemi di una certa portata. Se vogliamo essere più caritatevoli, basta ricordare che per un neoplatonico tardo il movimento di andata e ritorno dal generale al particolare è uno schema interpretativo naturale ed omnipervasivo. Il contributo più "originale" di Proclo alla filosofia della matematica, la teoria dello statuto intermedio degli oggetti matematici e della φαντασία «immaginazione», la facoltà atta al tempo stesso ad accoglierli e percepirli, si pone su tutt'altro piano nozionale ed argomentativo – ed è ad ogni buon conto poco più che un *collage* di elaborazioni precedenti (si veda Nikulin 2008, anche se naturalmente l'autore non sembra accorgersi del carattere compilativo della dottrina). A ciò si aggiunga che la confusione tra i due problemi cui ho accennato sopra, e la soluzione aristotelica del secondo di essi, mettevano a disposizione una risposta a buon mercato (che forse Proclo mutua, come suo costume, da una fonte anteriore) per un problema che sicuramente egli non sentiva come particolarmente urgente. Tale risposta non può che diventare canonica per chi si muovesse lungo coordinate intellettuali che privilegiavano l'ecolalia concettuale e linguistica. Né, a voler essere onesti, possiamo far carico al solo Proclo di una cecità che si è riprodotta senza tentennamenti in tutti gli interpreti posteriori. Dopotutto, il problema dello statuto degli oggetti generali ha assunto una posizione di rilievo nel dibattito filosofico moderno, e i termini in cui questo si è sviluppato, importanti di per sé, non lasciano molto spazio ad un'analisi rinnovata della soluzione implicitamente offerta nella pratica matematica antica. La forma *vulgata* che quest'ultima ha assunto permette anzi di postulare l'esistenza di un venerabile problema archetipo, che conferisca la dignità di un'origine greca alla questione, e al tempo stesso di identificare una posizione, caratterizzata da una benvenuta assenza di sfumature e da una creaturale *naïveté* in materie filosofiche, cui opporre le proprie argomentazioni per antitesi.

Non è mia intenzione stabilire se la "soluzione" greca del problema della generalità sia corretta, o anche solo simile a qualche proposta moderna. Vorrei soltanto descriverla in termini meno fuorvianti di quanto venga fatto correntemente. Scandirò la discussione soffermandomi su cinque aspetti linguistico-sintattici, tre dei quali fin qui del tutto trascurati: 1) il valore non copulativo del verbo «essere» nell'ἔκθεσις; 2) la funzione delle lettere denotative; 3) il ruolo del diagramma; 4) la struttura indefinita dominante; 5) la rete anaforica.

1.0.1. *Il valore del verbo «essere» nell'esposizione*

Chiarisco preliminarmente il ruolo dell'esposizione, su cui ritornerò nella sez. 1.2. Essa è formata a partire dall'enunciato nel modo seguente. I due membri di quest'ultimo diventano due proposizioni semplici indipendenti: nel caso l'enunciato sia un condizionale, il suo antecedente, che contiene l'elenco dei dati della proposizione, è trasformato in una supposizione con verbo all'imperativo, il conseguente in una dichiarativa retta da «dico». Nel caso degli altri due tipi di enunciati (teorema in forma dichiarativa o problema) la trasformazione segue procedure più elastiche. I verbi e la struttura di

enunciato ed esposizione sono strettamente correlati, e in larga misura identici, fatta salva l'introduzione delle lettere denotative e la trasformazione della forma verbale in un imperativo.

Il punto cruciale è il seguente: il verbo «essere» che si trova di frequente in posizione incipitaria nelle esposizioni non funziona da copula, né ha portata strettamente esistenziale[15]. Si tratta invece di una "dichiarazione di contesto", una maniera di presentare gli oggetti di cui tratta la proposizione, in vista della susseguente dimostrazione, differenziandoli da altre specie (triangoli, quadrati, linee, ecc.); chiamerò questa funzione "espositiva". Il verbo «essere» nell'esposizione è nient'altro che l'espressione di inizializzazione di un *elenco*. Altri verbi potrebbero essere usati a questo scopo, ma i possibili candidati («dare», «concepire», «prendere», «fissare», «supporre») sono già adibiti ad usi speciali: la presenza di «essere» è quindi un puro tratto stilistico. Noi risolveremmo il problema fornendo una lista dotata di *item*, come ad esempio «Ipotesi: *a*) un cerchio, *b*) due punti su di esso, ecc.» (si noti la funzione anaforica del pronome dimostrativo; ritorneremo sulla questione tra breve)[16].

L'inizio dell'esposizione di III.2 ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ non significa, e quindi non va tradotto, «sia ΑΒΓ un cerchio» (valore copulativo) o «ci sia un cerchio ΑΒΓ» (valore esistenziale), ma «sia un cerchio ΑΒΓ». Le prime due alternative vanno in effetti escluse per motivi cogenti. La seconda è semplicemente troppo ingenua e modernizzante per essere sostenibile. La prima, dove le lettere designatrici funzionano da soggetto e il sostantivo indefinito da nome del predicato, è resa impraticabile da enunciati dall'antecedente minimale contenenti un verbo «essere» dal chiaro valore espositivo, come quelli di *Data* 17-19 o di II.1, la struttura della cui esposizione è indistinguibile da quella di qualsiasi altra con «essere» incipitario. Leggiamo II.1 (*EE* I, 67.9-10 e 13-14):

ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, […]	Qualora siano due rette, e l'una o l'altra di esse sia secata in quanti mai si voglia segmenti, […]
ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα.	Siano due rette Α, ΒΓ, e sia secata ΒΓ, come càpita, secondo i punti Δ, Ε.

Tra l'altro, formulazioni come queste mostrano che ci troviamo in realtà di fronte ad un esempio di presente del verbo «essere» con valore perfettivo. In questo aspetto verbale, la funzione di copula non è possibile *a priori*.

Le lettere non sono quindi il soggetto delle frasi in modo suppositivo che figurano nell'esposizione, ma non possono neanche essere il nome del predicato, dato che in questo caso dovrebbero essere prive di articolo. Il verbo «essere» non può quindi funzionare da copula, se non altro perché la parte nominale del predicato è assente. Se i gruppi di lettere non sono i soggetti logici o grammaticali dell'esposizione (il che fa cadere un puntello alla pretesa presenza di oggetti particolari in una dimostrazione), è legittimo chiedersi che cosa siano.

1.0.2. *La funzione delle lettere denotative*

Rileggiamo l'esposizione di III.2 (*EE* I, 96.1-2):

[15] Federspiel (si veda ad es. 1995, e prima ancora 1992), che per primo ha messo in rilievo il fenomeno, utilizza «esistenziale» per designare la connotazione complementare a «copulativo», ma la questione è più articolata. Si vedano il classico Kahn 1973, in particolare il capitolo VI, e l'importante contributo posteriore Ruijgh 1979 (cui si aggiunga Ruijgh 1984), che suggerisce di impiegare il termine "presenziale" per un valore del verbo «essere» analogo a quello in gioco nell'esposizione (si veda però in ultimo Federspiel, 2010). Ulteriori dettagli nella sez. 1.2. Per «essere» con funzione esplicitamente esistenziale in certe clausole introduttive di dimostrazioni per assurdo si vedano le sez. 2.1.3 e 2.2.1.

[16] Sulle basi storiche di questa interpretazione delle lettere designatrici come "letter labels" ritornerò in altra sede. Frasi nominali pure come quella appena costruita non sono sconosciute al *corpus* tecnico: si veda [Aristotele], *Pr*. XV.9-10.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β.	Sia un cerchio ΑΒΓ, e sulla sua circonferenza Siano presi due punti come càpita Α, Β.

Nell'esposizione viene denotato tramite lettere l'oggetto su cui verte il teorema, cioè κύκλος «*un* cerchio»[17]. Esse seguono il sostantivo e sono a loro volta precedute dall'articolo: si trovano dunque in posizione *appositiva* al soggetto «un cerchio». L'articolo che precede le lettere ha due funzioni[18]. La prima è distinguere tra oggetti designati da stringhe identiche, in quanto mantiene il genere del sintagma nominale corrispondente: ὁ ΑΒΓ è un cerchio ma τὸ ΑΒΓ è un triangolo (ad esempio inscritto nel cerchio). La seconda è produrre un'espressione adatta alle esigenze di una lingua flessiva: il caso in cui si trova il sostantivo «articolo + lettere» è esperibile unicamente dal caso in cui si trova l'articolo. La semplice presenza dell'articolo rende in effetti il sintagma costituito dalla stringa di lettere una locuzione sostantivata, senza bisogno di postulare un sostantivo sottinteso, e ciò accade anche quando le lettere facciano parte di un sintagma preposizionale, come ad esempio ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, che denota un angolo. Risulterebbe, tra l'altro, alquanto bizzarra un'espressione del tipo ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ se fosse la contrazione di una frase in cui l'articolo rinvia ad un sostantivo sottinteso, come *ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλος «sia un cerchio il cerchio ΑΒΓ», e ancora di più se dessimo valore copulativo al verbo: «sia il cerchio ΑΒΓΔ un cerchio».

La questione merita qualche chiarimento. Il fenomeno di formazione di sostantivi tramite anteposizione dell'articolo a interi sintagmi è corrente nella lingua greca: nel linguaggio matematico l'esempio principe usualmente addotto è l'espressione ἡ ἐκ τοῦ κέντρου «raggio», ma occorre andare cauti. Il sintagma preposizionale non è infatti in questo caso invariante, come risulta chiaro dalla presenza del plurale τῶν κέντρων nella definizione di cerchi uguali in III.def.1 (*EE* I, 93.2-3):

ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν, ἢ ὧν <u>αἱ ἐκ τῶν κέντρων</u> ἴσαι εἰσίν.	Cerchi uguali sono quelli i cui diametri sono uguali, o <u>i</u> cui <u>raggi</u> sono uguali.

Sia come sia, quest'esempio mostra che dobbiamo resistere alla tentazione di leggere sistematicamente espressioni del tipo ἡ ὑπὸ ΑΒΓ come brachilogie con un sostantivo sottinteso: ἡ ΑΒ deriverebbe così da ἡ ΑΒ εὐθεῖα e ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, con l'aggiunta di un opportuno participio, da ἡ ὑπὸ ΑΒΓ περιεχομένη γωνία. La locuzione lunga può aver contribuito come riferimento alla formazione di quella breve, ma la prima non va postulata in ogni occorrenza come forma decontratta effettiva della seconda. Tra l'altro, nel caso dell'angolo, la decontrazione dovrebbe prevedere anche un sostantivo aggiuntivo a qualificare le lettere: ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εὐθείων περιεχομένη γωνία, oppure, nel caso si veda l'angolo come compreso da una singola retta κεκλασμένη «inflessa», ἡ ὑπὸ τῆς ΑΒΓ εὐθείας περιεχομένη γωνία. Tutto ciò dovrebbe lasciare come residuo nella forma breve canonica almeno un τῶν o un τῆς, mentre essa ne è priva (e quando se ne trovino, il che non è infrequente ad esempio in autori come Pappo, dobbiamo supporre che si tratti di una vera abbreviazione dell'espressione completa). Ne dobbiamo concludere che la formula per l'angolo ha ormai perso contatto da quella originaria, e si è costituita come sostantivo a sé stante (la presenza della preposizione ὑπό permette tra l'altro di distinguere un angolo da una retta denotata da tre lettere, caso

[17] La stessa espressione nominale priva di articolo può denotare anche «il cerchio» inteso come nome di specie matematica generale, ma questa lettura è incompatibile con l'impiego che dell'espressione è fatto nei testi. L'articolo in ὁ κύκλος ha invece, anche in assenza di determinativi ulteriori, una marcata funzione particolarizzante, legata alla sua connotazione fortemente anaforica, che non si riscontra in italiano. La lingua matematica greca non impiega mai, per quanto ciò sia grammaticalmente possibile ed ampiamente attestato in altri contesti, l'articolo determinativo per designare una specie matematica, neanche nelle definizioni (il fenomeno, del tutto generale, è denominato *Definitionsstil*).

[18] L'unica eccezione all'uso sistematico dell'articolo anteposto alle lettere si rintraccia nell'espressione canonica di un rapporto, dove talvolta può essere assente, come ad esempio in ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ.

che si presenta non di rado e che abbiamo visto in III.2 con la retta ἡ ΔΖΕ – si noti che sarebbe scorretto scrivere "la retta ΔΖΕ" senza l'articolo ἡ, che va invece nelle traduzioni in quanto il sintagma è usato e non menzionato.

Lo stesso deve essere postulato per molte altre designazioni tramite lettere, anche se non per tutte. Ad esempio, le formule τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ per il quadrato e τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ per il rettangolo vanno intese sistematicamente (cioè quando abbiano l'articolo "in più") come brachilogie per forme complete con sostantivi sottintesi, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφὲν τετράγωνον e τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, in accordo con le espressioni archetipiche prive di lettere, un cui analogo non esiste né per la retta né per l'angolo, stabilite rispettivamente nell'enunciato di I.46 e in II.def.1 (*EE* I, 62.2 e 67.2-4):

ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.	Descrivere su una retta data un quadrato.
πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.	Ogni parallelogrammo rettangolo è detto essere compreso dalle due rette che comprendono l'angolo retto.

Quando un quadrato o un rettangolo sia invece visto sotto la specie della figura, riceve un designatore indipendente in accordo con la procedura descritta sopra. Il seguente passo di II.5 è rivelatore (*EE* I, 74.20-75.2):

ἀλλὰ ὁ ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ <u>τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον</u>, ὅ ἐστιν <u>ἀπὸ τῆς ΓΒ</u>· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ <u>τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ</u>.	Ma lo gnomone ΜΝΞ e ΛΗ come totale sono <u>il quadrato ΓΕΖΒ</u>, che è ‹descritto› <u>su ΓΒ</u>: il rettangolo compreso da ΑΔ, ΔΒ più il quadrato su ΓΔ è quindi uguale <u>al quadrato su ΓΒ</u>.

Il passaggio aggiuntivo di identificazione del quadrato come quadrilatero con la figura «descritta» su una certa retta è necessario per formulare il risultato, che segue immediatamente nel testo, in accordo con la sua espressione canonica data nell'enunciato.

Da quanto detto si trae la seguente, cruciale, conclusione. Il significato dell'esposizione è altrettanto indefinito, e quindi generale, dell'enunciato, *pur con l'introduzione delle lettere denotative*: il motivo è che gli oggetti matematici ivi introdotti non sono denotati dalle lettere, ma da sostantivi che non acquisiscono ancora l'articolo determinativo[19]. La particolarizzazione conseguente all'introduzione delle lettere e al preteso riferimento alla figura non è quindi soltanto apparente, ma semplicemente del tutto inesistente, in quanto è conseguenza di una incomprensione della sintassi della frase. Le lettere non hanno una funzione ostensiva né indiciale (Peirce 1931-1935, 2.305, che si riferisce alle lettere in un diagramma, tutt'altra questione è cosa siano nel testo): i complessi di lettere sono invece *nomi di second'ordine* degli oggetti denotati dai sostantivi indefiniti introdotti in enunciato e mantenuti tali nell'esposizione[20]: sono cioè nomi propri, ma denotano oggetti linguistici (a loro volta dei

[19] Occorre distinguere tra indefinitezza del significato ed indeterminatezza (cioè assenza dell'articolo determinativo anteposto) del significante. I due fenomeni non sono biunivocamente correlati, come vedremo, né ciascuno di essi lo è con l'(in)determinatezza del relato (si pensi all'espressione «il cerchio»: può essere «il cerchio» appena nominato oppure «il cerchio» come figura geometrica). Con l'articolo indeterminativo in Italiano traduco espressioni il cui *senso* è indefinito; trasferisco dunque per stipulazione al significante una proprietà del significato.

[20] Il che funziona egregiamente anche per distinguere i vari oggetti geometrici: se ad esempio in una dimostrazione intervengono più di due rette, come identificarle? Una soluzione, perfettamente legittima ma impraticabile, potrebbe essere identificare univocamente le varie rette in gioco con designatori del tipo «prima retta», «seconda retta», ecc. (si confronti con la pratica invalsa in linguistica di identificare con un numerale a pedice occorrenze dello stesso termine con riferimento differente). Ciò mostra che nell'identificazione tramite lettere non c'è niente di cogente.

designatori), e solo *par ricochet* oggetti matematici. Le lettere non hanno una funzione deittica ma anaforica.

In linea di principio i complessi di lettere che fungono da nomi sono arbitrari. Si noti ad esempio che la lettera Γ in III.2 è menzionata solo nella denominazione del cerchio ὁ ΑΒΓ, ed è illegittimo ritenere che identifichi un punto nel diagramma. Ancora più probante l'esempio della lettera E nella denominazione della retta ἡ ΑΕΒ. Se designasse un punto, la costruzione della retta ἡ ΔΖΕ che viene tracciata sùbito dopo richiederebbe il verbo «congiungere», che trova sempre impiego quando gli estremi della retta siano entrambi già nominati, e non διάγειν «condurre oltre», esclusivo dell'identificazione di rette con un estremo libero (cfr. sez. 1.3). Se ne conclude che, oltre a E, anche la lettera Z fa semplicemente parte del nome della retta: solo in sèguito risulterà chiaro che si tratta della sua intersezione con il cerchio. Ovviamente, un qualche riferimento alla concreta situazione geometrica è richiesto da ovvi motivi di trasparenza. Una tale esigenza induce la *pratica* largamente predominante, e che non ha niente a che vedere con la pretesa necessità di additare ai punti del diagramma, di denotare con singole lettere entità geometriche di base quali i punti; figure più complesse sono in questo modo identificabili per mezzo di combinazioni di lettere che denotino punti notevoli su di esse in grado di determinarle univocamente. È dunque il carattere *composizionale* della denotazione per punti (due rette adiacenti ἡ ΑΒ ed ἡ ΒΓ danno luogo alla retta ἡ ΑΓ, per eliminazione dell'estremo comune) che la rende così efficiente ed adatta alla pratica matematica greca, e che finisce per imporla nell'uso.

Non si tratta però, occorre insistere, di una caratteristica essenziale della denotazione tramite lettere: solo per accidente i nomi degli oggetti complessi finiscono per essere identificati con nomi di punti su di essi[21]. Il carattere di accidentalità è ulteriormente rafforzata dal fatto che gli oggetti matematici principali della geometria greca sono le linee, e non i punti. Negli *Elementi* il sistema delle «richieste» pone in effetti in primo piano il segmento di retta, naturalmente identificabile con i suoi estremi (I.post.1): 2 punti e quindi 2 lettere. A parte il cerchio, le figure sono combinazioni di rette e quindi dei loro estremi: non avrebbe senso introdurre lettere aggiuntive per denotarle come un tutto indipendente dagli estremi[22], anche se vedremo immediatamente un controesempio alla generalizzazione di quest'affermazione. Nel corso della dimostrazione le lettere diventano delle semplici abbreviazioni di sintagmi nominali, che permettono un richiamo privo di ambiguità all'oggetto da essi (e *non* "da esse", si badi bene) denotato. Altri argomenti corroborano quest'interpretazione:

1) Vi sono residui di una notazione differente, che mostra come la canonizzazione della pratica denotativa alla corrispondenza lettera-punto sia il risultato di una dinamica interna. Si tratta della designazione eterodossa degli angoli. Nelle opere euclidee di ottica viene spesso utilizzata una sola lettera, e senza preposizione a precederla: ἡ Α invece di ἡ πρὸς τῷ Α, quest'ultima modalità trovando largo impiego già negli *Elementi*. I dati di presenza della prima espressione sono i seguenti (nell'ultima colonna il numero di occorrenze)[23]:

[21] Esempio: negli *Elementi* (ma *non* nei *Data*) uno «gnomone» è sempre denotato con tre lettere, ma è più plausibile che ognuna di esse denotasse uno dei tre parallelogrammi di cui si compone ogni gnomone che non l'intersezione di certe rette con un arco di circonferenza a tratteggio che di norma identifica lo gnomone stesso nelle figure dei manoscritti (Heiberg riproduce fedelmente questa caratteristica, si veda ad es. il libro II degli *Elementi*).

[22] Di norma viene fatta una certa economia nell'assegnazione delle lettere: *solitamente* ciò si svolge in accordo con il modo di generazione che individui un oggetto in maniera minimale, ma la pratica di denotare un cerchio con almeno tre lettere anche quando certe risultino superflue (è il caso della lettera Γ in III.2 – la tradizione arabo-latina offre un testo chiaramente ritoccato, e non costituisce una testimonianza attendibile) suggerisce di non trarre conclusioni affrettate. Questa pratica crea un problema che non è semplice risolvere, visto che possono aver giocato un ruolo decisivo riscritture e normalizzazioni tardive.

[23] L'*Ottica* euclidea ci è giunta in due redazioni sensibilmente differenti, denotate con **A** e **B**.

Ottica **A**	9, 38, 42*alt*, 43*alt*, 48, 53	6
Ottica **B**	4, 7-8, 18, 24, 29, 34, 41-44, 48, 52	13
Catottrica	1-6, 13-15, 20-21, 24-25, 28, 30	14

La casistica delle designazioni degli angoli nella redazione **B** dell'*Ottica* e nella *Catottrica* è in realtà piuttosto complessa. In **B** essa si ripartisce in questo modo (l'articolo che precede le lettere denotative è ovviamente sempre presente):

i) un angolo è designato da due lettere indipendenti, una che denota il vertice e una l'angolo: prop. 4, 7, 8, 34, 41-44.
ii) un angolo è designato da una sola lettera, che coincide con quella del vertice: 9, 18, 24, 29, 43, 44, 48, 52.
iii) una lettera ma con il πρός: 19, 20, 23, 24, 28, 31, 36, 39, 58.
iv) tre lettere: 6, 20, 23, 26, 35, 36, 40, 55.
v) sono menzionati angoli senza che siano denotati da lettere: 5, 38, 45, 46, 47.

Nella *Catottrica*:

i) doppia lettera, vertice e angolo: 1-6, 13-15, 21, 24-25, 28, 30.
ii) una sola lettera, che coincide con quella del vertice: 20.
iii) una lettera ma con il πρός: 5, 13.
iv) tre lettere: 19, 20, 21, 22, 30.

Quello che ci interessa è il caso *i*), piuttosto ben rappresentato. Come il caso *ii*), esso è localmente composizionale: l'uso di una singola lettera permette infatti di denotare una somma di angoli per mezzo delle semplice giustapposizione delle lettere: l'angolo ἡ AB è la somma degli angoli ἡ A e ἡ B[24]. Ciò avviene principalmente nella *Catottrica*, dove solo le proposizioni 13, 24, 28, 30 non contengono somme indicate tramite giustapposizioni. È però chiaro che, contrariamente a ciò che avviene per i punti, non sono possibili estensioni ad altre specie matematiche di questo carattere composizionale, che oltretutto fa variare il numero di lettere potenzialmente attribuibili ad un angolo. Esso risulta pertanto sostanzialmente sterile[25]. Il punto importante è che si tratta di una notazione ovviamente ridondante, e che branche della matematica greca ammettevano senza problemi tali forme di denominazione.

È stato proposto che la designazione di un angolo con una singola lettera sia un arcaismo che si è mantenuto nel dominio ottico. Vengono addotti a questo proposito gli esempi di Diocle, *Sugli specchi ustori* 1-3, Erone, *De speculis* 6-8 e 10, e soprattutto Aristotele, ad esempio *APr*. A 24, 41b13-22[26], *APo*. B 11, 94a28-34, e *Mete*. Γ 5, 376a29. Si osservi però che tale procedura non è ignota negli *Elementi*: la si ritrova in I.42, 44, 45, VI.7, X.32/33. Queste proposizioni suggeriscono che il numero di lettere impiegato per nominare un angolo fosse semplicemente legato all'uso che dell'angolo si faceva nel corso della dimostrazione. Un teorema di ottica necessita di poche costruzioni ausiliarie;

[24] Che nel testo le due lettere siano separate da una virgola non significa niente, perché questa sarà sicuramente stata introdotta a qualche stadio di copia.
[25] Tale notazione si ritrova anche nel dominio aritmetico, ad esempio in una redazione alternativa delle prop. 3 e 6 della *Sectio canonis* euclidea, e nella ben nota dimostrazione di Archita (tradotta da Boezio, *Inst. mus*. III.11, ed affine alla prima delle due proposizioni appena menzionate) sull'impossibilità di inserire un medio proporzionale tra gli estremi di un rapporto superparticolare.
[26] La somma di due angoli è anche qui indicata per giustapposizione.

pertanto, il corredo di oggetti matematici irriducibili, cioè denotati con una singola lettera, può essere più ampio di quello geometrico, che è di solito ristretto a punti o rette. Questa osservazione suggerisce cautela nell'accettare la proposta dell'arcaismo lessicale[27].

2) Non mancano, più in generale, gli esempi di figure complesse denotate da una sola lettera, una volta che serva solo nominarle. Molte delle figure in Archimede ricevono un semplice segno grafico. Ma proprio il fatto che di norma l'assegnazione delle lettere sia più complessa mostra che la figura non costituisce una componente essenziale della dimostrazione: altrimenti basterebbe una sola lettera per designare ognuno degli oggetti in gioco. Un certo residuo del grado di arbitrarietà nella designazione di oggetti geometrici si ritrova nel numero variabile di lettere usate: si ricordi la retta denotata con ἡ ΔΖΕ in III.2, dove canonicamente ci si aspetterebbero due sole lettere. Allo stesso modo, l'appellativo di un quadrilatero contiene di solito 4 lettere, ma possono bastare le due relative a due vertici opposti[28]. Caso estremo di denotazioni forzate dal contesto è quello dei cerchi nel libro IV, che sono designati da tante lettere quanti sono i vertici dei poligoni che in essi vanno di volta in volta inscritti (o ad essi circoscritti): si scopre molto avanti nella dimostrazione che queste saranno anche le lettere designatrici del poligono, e cioè di punti (i suoi vertici); prima fanno solo parte del nome del cerchio.

3) Come visto sopra, alcune lettere sono impiegate all'interno di designatori prima di essere condotte ad identificare dei punti (in III.2 lo sono le lettere E e Z). Un esempio veramente clamoroso è costituito dalla descrizione della costruzione del cubo in XIII.15 (*EE* IV, 167.5-12):

ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ <u>ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ</u> μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση <u>ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ</u>, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος.

Sia fissato un quadrato ΕΖΗΘ che ha il lato uguale a ΔΒ, e da Ε, Ζ, Η, Θ ad ‹angoli› retti con il piano del quadrato ΕΖΗΘ siano condotte ‹rette› <u>ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, e sia sottratta da ciascuna delle ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ ciascuna delle ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ</u> uguale a una sola delle ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, e siano congiunte ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ: risulta quindi costruito un cubo ΖΝ compreso da sei quadrati uguali.

Nella parte sottolineata, i designatori αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ di certe rette ricorrono 3 volte. Nella prime due occorrenze le lettere Κ, Λ, Μ, Ν sono semplicemente parte del nome delle rette, supposte di estensione indefinita; non designano punti flottanti su di esse in una posizione imprecisata. Nella terza occorrenza sono invece nomi di punti, cioè degli estremi dei segmenti, uguali a segmenti dati, staccati su queste rette indefinite. Si noti anche che il cubo è denotato con 2 sole lettere, mentre il suo quadrato di base ne richiede 4!

È dunque scorretto pensare che l'uso delle lettere nelle dimostrazioni geometriche introduca una falsa particolarizzazione: è un abbaglio preso già nell'antichità (come abbiamo visto nel fondamentale passo di Proclo letto all'inizio) e che si perpetua fino ad oggi: le lettere sono solo abbreviazioni di designatori, cioè di quelle espressioni nominali vere e proprie, del tipo «un cerchio», che portano il riferimento agli oggetti geometrici. Le lettere, dunque, non possono neanche essere uno strumento di

[27] Si osservi anche che il testo delle prime 4 proposizioni della *Catottrica* nel *Vat. gr.* 204 è corretto da una seconda mano: le designazioni degli angoli con singola lettera sono sistematicamente sostituite con nomi canonici a tre lettere. Vediamo dunque il ruolo decisivo che può avere un correttore o semplicemente un copista erudito: niente si può concludere dal fatto che le designazioni siano quelle canoniche.

[28] Ambiguità con la designazione della diagonale identificata dai due stessi punti non sono possibili, perché in greco «diagonale» è femminile e «quadrilatero» è neutro.

espressione della generalità e di dispiegamento della forma logica come lo sono in un sillogismo aristotelico (così già Alessandro, *in APr.*, 53.28-54.2, che usa l'interessante aggettivo δεικτικά «indicatori» per denotare questa loro funzione, mostrando che la intende, come faranno dopo anche gli stoici con i numerali che caratterizzano i «modi» dei loro sillogismi, in maniera analoga a quella delle lettere schematiche – cfr. sez. 2.9), ma al contrario tenderebbero a particolarizzare in mancanza di accorgimenti linguistici atti a neutralizzare tale predisposizione. Occorre dunque una ben sviluppata elaborazione dei modi di espressione della generalità per potersi permettere di usare le lettere in una dimostrazione matematica.

1.0.3. *Il ruolo del diagramma*

Recentemente viene data eccessiva importanza alle figure in quanto parte integrante di una dimostrazione[29]. Si tratta di un grosso abbaglio storiografico, basato sull'assunzione del tutto immotivata che i diagrammi dei manoscritti medievali rispecchino fedelmente quelli originali. In alcuni casi è addirittura ben noto il contrario: ad esempio Eutocio ridisegna tutte le figure nella sua edizione delle *Coniche* di Apollonio (Decorps-Foulquier 1999). Le figure sono invece estremamente utili per integrare le informazioni sulle parentele tra i manoscritti fornite dall'esame dei testi. Ma anche qui occorre procedere *cum grano salis*. Il testo era trascritto lasciando per le figure, tracciate in un secondo momento, spazi congrui, di solito sotto forma di indentature nello scritto[30]. Queste erano riempite dall'illustratore, che non aveva nessun interesse a verificare che la figura fosse coerente con il testo, e quasi mai le capacità per farlo. Ogni genere di problemi può presentarsi come conseguenza di questa procedura: manoscritti con indentature vuote e neanche una figura[31], oppure con tutte le figure insieme alla fine del testo dell'intero trattato[32], indentature vuote perché troppo piccole e figure tracciate nel margine o che si sovrappongono al testo[33], figure deformate per farle entrare nel poco spazio concesso[34], parti della figura tracciate da mani secondarie nell'antigrafo e riprodotte senza segnalare la differenza, scolî diagrammatici presi per figure del testo principale (fenomeni analoghi a quello delle annotazioni marginali che scivolano nel testo), lettere omesse o aggiunte. Occorre inoltre considerare che gli strumenti tecnici a disposizione erano limitati a riga e compasso: le ellissi sono spesso rappresentate da due archi di circonferenza ed hanno quindi una coppia di punti angolosi. Clamoroso è l'esempio di certe figure di *Sph. cyl.* di Archimede e di quella di *El.* IV.16. Occorre tracciare un poligono con molti lati inscritto in un cerchio. Siccome i lati del poligono tenderebbero a confondersi con gli archi che sottendono, la soluzione adottata consiste nel tracciare i lati in forma di archi con la concavità opposta a quella della circonferenza in cui il poligono è inscritto. Insomma, le uniche caratteristiche su cui si possa fare affidamento per stabilire relazioni genealogiche tra manoscritti sono quelle topologicamente invarianti, come la presenza o meno di intersezioni: neanche la distinzione tra linee rette e curve resiste alle modifiche dettate dall'estro di un illustratore e dalle limitazioni dagli strumenti a sua disposizione.

[29] Tutt'altra questione, anche se molto importante, quella del "codice grafico" in uso in trattati come i *Phaenomena* euclidei, del tutto differente da quello impiegato in opere quali l'*Almagesto* (quest'ultimo coincide con quello della porzione geometrica degli *Elementi*), entrambi a loro volta differenti dal codice applicato nei libri aritmetici degli *Elementi*. Il primo permette di supplire ad inadeguatezze matematiche strutturali legate allo sviluppo ancora embrionale della geometria sferica, e non al problema della generalità. Sulla questione occorrerà ritornare in dettaglio.

[30] Si ricordi che la pratica antica era quella di porre le figure alla fine del teorema cui si riferiscono. Così fanno ancora tutti i manoscritti matematici sufficientemente antichi.

[31] Così sono i manoscritti arabi degli *Specchi ustori* di Diocle.

[32] Questo accade in alcuni manoscritti della *Collectio* di Pappo.

[33] Il manoscritto *Vindob. phil. gr. 31* degli *Elementi* fornisce un'ampia casistica; le sue figure furono ulteriormente ritoccate da un correttore.

[34] La figura di *El.* I.47 subisce deformazioni in quasi tutti i manoscritti.

Anche asserti interpretabili a prima vista come richiami ai diagrammi molto spesso derivano in realtà solo dal testo. Scrivere, come in *El*. III.2, che τὸ Δ è il centro del cerchio ὁ ΑΒΓ già permette di concludere che la retta ἡ ΔΑ è uguale a ἡ ΔΒ in quanto raggi di uno stesso cerchio, e non c'è bisogno del disegno per capirlo. Altri asserti potrebbero essere interpretati come desunti dalla figura, mentre vanno intesi come accorciamenti e mediazioni di proprietà geometriche evidenti dal testo: ancora in III.2, denominare ἡ ΔΖΕ la retta nella supposizione dell'assurdo implica che ἡ ΔΕ sia maggiore di ἡ ΔΖ: dalla disposizione delle lettere è infatti immediato che alla prima manca il segmento ἡ ΖΕ. Oltretutto, anche se non sempre oggetti denotati da lettere sono stati esplicitamente introdotti in precedenza, sono però immediatamente ottenibili dai dati a disposizione, come ad esempio l'angolo ἡ ὑπὸ ΔΑΕ. Che tutto ciò sia evidente *anche* dal diagramma è vero, ma ciò discende banalmente dal fatto che chiunque si guarderebbe bene dal tracciare un diagramma che *non* si accordi con le prescrizioni del *testo*; che il diagramma sia però necessario in queste come in innumerevoli altre occasioni è falso. Il suo ruolo è insomma solo di sostegno alla dimostrazione[35]. In certi casi, l'uso delle figure va sicuramente riferito ad una pratica stilistica: i diagrammi dei libri aritmetici degli *Elementi*, dove i numeri sono rappresentati da segmenti, sono del tutto inutili anche solo per una migliore comprensione della dimostrazione. Né generalità può essere guadagnata tramite la figura, in quanto occorre un esplicito riconoscimento (di solito tramite un non-detto: nel diagramma viene disegnato quasi sempre un triangolo isoscele ma poi nella dimostrazione si dice «un triangolo») di quali caratteristiche particolari della figura non tenere conto. Con un po' di allenamento, di ogni teorema la figura è interamente ricostruibile dal testo, compresa l'esatta posizione delle lettere. Si tratta di un'attività di *routine* per chi si occupi di fare l'edizione di testi matematici antichi, che non di rado sono del tutto privi di figure nei manoscritti.

Un punto ulteriore è quello della genericità della figura connessa ad una proposizione. L'edizione di Heiberg degli *Elementi* è estremamente carente in questo rispetto: il grande filologo evidentemente riteneva che i diagrammi fossero irrilevanti per la storia del testo, e ne ha ritracciati la maggior parte (compreso quello della nostra proposizione paradigmatica III.2, dove curiosamente la lettera Γ è stata omessa[36]), sulla base di esigenze matematiche: i suoi diagrammi rappresentano il caso più generale possibile, anche se talvolta ciò dà luogo ad una figura gravemente scorretta, come quella di III.10. Le figure che troviamo nei manoscritti greci (non solo delle opere euclidee) hanno in effetti, fatto per noi curioso, la caratteristica opposta: illustrano spesso casi particolari e sono metricamente scorrette. Sono in effetti sistematicamente tracciati triangoli rettangoli isosceli, cerchi uguali, rette perpendicolari dove tutto ciò non è richiesto dall'enunciato, e inoltre rettangoli invece di parallelogrammi, segmenti uguali quando siano disuguali e viceversa, addirittura linee rette al posto di curve (in *Meth*. 14 un'arco di parabola è rappresentato da un angolo rettilineo), e in generale figure con proprietà di simmetria non richieste. A volte le figure sono "sbagliate": quella di I.47 ha in certi manoscritti due rombi non quadrati costruiti sui cateti, quella di III.21 in buona parte dei manoscritti pone il centro di un cerchio del tutto fuori centro. Chiaramente, la genericità o accuratezza della figura non ha niente a che fare con la generalità del teorema, ed anzi un diagramma non generale potrebbe proprio aiutare a capire meglio come funziona la generalità: quelle caratteristiche accidentali del diagramma che non si usano

[35] Richiami impliciti alla figura sono indice di rifacimento di una dimostrazione: questi sono molto più facili e naturali col codice che con il rotolo, dove tipicamente la figura, posta al termine dell'intera proposizione, non si vedeva mentre veniva letta la dimostrazione. I richiami impliciti alla figura sono molto frequenti nelle *Coniche* di Apollonio, dove spesso risultano necessari per ricostruire l'esposizione a partire dall'enunciato, ma qui entra anche in gioco la complessità della configurazione geometrica e la necessità di formularla linguisticamente in maniera concisa. Richiami espliciti sono interpolazioni sicure.

[36] In realtà il motivo dell'omissione è poco onorevole: Heiberg mandò "di peso" in tipografia l'intero gioco di figure contenuto nell'edizione di August (1826-29), molto opportunamente collocato in tavole separate in fine di volume, apportandovi solo modifiche puntuali. La lettera Γ manca anche in quest'edizione, e Heiberg non si accorse dell'omissione.

nella dimostrazione non entrano in effetti nelle ipotesi. Impratichirsi con la maniera "simmetrizzante" nel tracciato dei diagrammi costituisce tra l'altro un utile esercizio per comprendere e dissipare le confusioni sul ruolo dell'esposizione, che non può avere alcuna funzione nell'"imbastire la figura"; non si capisce certo da quest'ultima se un triangolo è richiesto essere isoscele: tutti i triangoli lo sono nei diagrammi contenuti nei manoscritti!

1.0.4. *La struttura indefinita dominante*

Come ribadito più volte, è cruciale che nell'esposizione il gruppo articolo + lettere segua il sintagma nominale, *indefinito* e quindi privo di articolo, κύκλος «un cerchio»: ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ «sia un cerchio ΑΒΓ». Nel διορισμός «determinazione» che segue l'esposizione le lettere denotative cambiano posizione: precedono ora il sintagma nominale, ad indicare che l'oggetto matematico è riconosciuto come già introdotto: la forma è ἡ ΑΒ εὐθεῖα. In traduzione può essere opportuno aggiungere l'articolo, in quanto l'oggetto in questione è già stato nominato in precedenza, ma non per questo il sintagma va automaticamente considerato definito. Entra qui in gioco un cruciale fenomeno di neutralizzazione, al livello del significante, dell'opposizione definito / indefinito. Consideriamo per fissare le idee l'espressione ἡ ΑΒ εὐθεῖα. Dal momento che il gruppo ΑΒ necessita in ogni caso dell'articolo, si danno due casi:

1) il determinativo è inserito tra l'articolo proprio del sostantivo e il sostantivo stesso, e il significato dell'espressione sarà definito: «*la* retta AB»;
2) il determinativo è in posizione appositiva anteposta: l'articolo è indispensabile ma determina solo la stringa di lettere; il significato è indefinito: «*una* retta AB».

L'unica espressione completa che sia allo stesso tempo definita e non ambigua è ἡ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, che in forma pura[37] non è *mai* usata nel *corpus* antico. Espressioni come ἡ ΑΒ εὐθεῖα, esclusive della determinazione e della dimostrazione ed in effetti piuttosto rare, possono dunque essere considerate definite non in virtù della loro forma, ma solo in quanto designano oggetti già nominati. Detto in altri termini, specie matematiche introdotte tramite espressioni indefinite possono essere considerate[38] acquistare l'articolo a partire dalla loro seconda occorrenza in parti specifiche della proposizione: si tratta del ben noto valore anaforico dell'articolo determinativo in greco antico (si veda anche più oltre)[39].

In principio sono dunque accettabili anche interpretazioni in cui l'articolo in ἡ ΑΒ εὐθεῖα sia anaforico del riferimento indefinito primario, ripetuto in enunciato e esposizione, e quindi anche traduzioni con l'articolo determinativo, *ma* le pratiche della neutralizzazione e di sottintendere sostantivi come εὐθεῖα o σημεῖον (si veda anche il punto *iii* più oltre) rendono il testo, che nella dimostrazione finisce per contenere principalmente sintagmi del tipo ἡ ΑΒ, totalmente ambiguo e opaco di fronte alla dicotomia definito / indefinito. Oltre che dalla forma completa "neutralizzata" appena vista, infatti, nella serie di costruzioni e inferenze che seguono l'esposizione un oggetto geometrico è quasi sempre direttamente identificato dal solo gruppo di lettere dotato di articolo, che

[37] Cioè se il sostantivo non è accompagnato da un ulteriore determinativo, come ad esempio nel caso dell'espressione formulare συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ «sia costruito, su una retta ΔΕ e su un punto su di essa Δ, un ‹angolo› ΕΔΗ uguale all'angolo ΒΑΓ»: il primo articolo è indotto unicamente dalla presenza del determinativo preposizionale anteposto.

[38] La sfumatura modale è necessaria una volta che siano presenti le lettere denotative, ancora per il fenomeno della neutralizzazione.

[39] Discussione antiche già in Apollonio Discolo, che fa della funzione anaforica dell'articolo il *leitmotiv* della sua trattazione in *Synt.*, I.25, 43-44, 48, 78, 87, 97-98, 133-135, 144, II.9.

ormai può essere assunto denotarlo univocamente, come è immediato verificare nel testo di III.2 letto all'inizio.

Siamo dunque indotti a concludere che una dimostrazione matematica greca è *potenzialmente* condotta dall'inizio alla fine usando soltanto espressioni indefinite. Tra l'altro, la pervicace renitenza dei testi matematici greci a dotare di articolo sostantivi come πλευρά «lato», βάσις «base», γωνία «angolo», e parzialmente λόγος «rapporto», intravista nel caso di γωνία proprio all'inizio dell'anafora di III.2, corrobora quest'interpretazione, se li leggiamo come residui di formulazioni arcaiche *esplicitamente* indefinite mantenute nel corso di tutta la dimostrazione. Un'osservazione di Apollonio Discolo (*Synt*. I.111, 94.7-17 Uhlig) mostra che il fenomeno della neutralizzazione era già stato messo a fuoco, limitatamente ai costrutti participiali, dai grammatici antichi e dalla scuola dialettica stoica (nel secondo esempio il participio è interposto tra articolo e sostantivo, e ne risulta un'espressione neutralizzata):

ἔστι καὶ ἐν προσηγορικοῖς ἡ τοιαύτη σύνταξις, ἐφ' οὗ καὶ τρίτος λόγος ἀνακύπτει. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος τοιοῦτος, χρονικὴν διαφορὰν παρεμφαίνων, ὁ παῖς δειπνήσας κοιμάσθω· ὁ δὲ δεύτερος, ἡνίκα πλῆθος παρεμφαίνεται, ὁ δειπνήσας παῖς κοιμάσθω, ἐφ' οὗ καὶ ἀοριστώδης ἡ σύνταξις γίνεται τοῦ ἄρθρου, ἔνθεν καὶ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς τὰ τοιαῦτα μόρια ἀοριστώδη ἐκάλεσαν· τρίτος δὲ ὃς τὴν αὐτὴν μὲν ἔχει σύνταξιν, οὐ μὴν ἀοριστωδῶς πάντως νοεῖται, ἀναφορικῶς δέ. φέρε γάρ τινα δειπνῆσαι τῶν παίδων καὶ κατὰ τούτου γίνεσθαι τὰ τῆς προστάξεως· καὶ πάλιν τὰ τοῦ λόγου τῇδε καταστήσεται, ὁ δειπνήσας παῖς κοιμάσθω.

Una costruzione siffatta si ritrova anche tra gli appellativi, per i quali viene fuori, inoltre, una terza interpretazione. La prima è questa, con connotazione temporale: "il bambino, dopo aver mangiato, vada a letto"; la seconda, con connotazione di pluralità: "un/il bambino che ha mangiato vada a letto", per la quale risulta, in aggiunta, una costruzione indefinita dell'articolo, ed anche per questo gli Stoici chiamarono queste parti ‹del discorso› "indefinite"; la terza è quella che ha la stessa costruzione, ma non è intesa per niente in senso indefinito, bensì anaforico. Poniamo in effetti che uno dei bambini abbia mangiato e che a costui si riferisca la prescrizione: la frase sarà costruita di nuovo in quel modo: "il bambino che ha mangiato vada a letto".

Il fenomeno della neutralizzazione ci permette di riconoscere come indefinite espressioni per cui la presenza dell'articolo farebbe pensare il contrario. Ciò accade per determinativi meno concisi di una stringa di lettere, che siano participi o aggettivi o intere espressioni preposizionali. Il fenomeno risulta più chiaro se leggiamo un enunciato insieme con l'esposizione corrispondente. Facciamolo per I.29 (*EE* I, 41.6-11):

ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.
εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ.

Una retta che incide su rette parallele fa sia gli angoli alterni uguali tra loro sia quello all'esterno uguale all'interno e opposto sia quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti.
In effetti, una retta ΕΖ incida su rette parallele ΑΒ, ΓΔ.

L'enunciato è indefinito anche se in greco troviamo l'articolo: esso è richiesto dalla presenza di un participio congiunto in posizione appositiva, ulteriormente determinato da un complemento in forma preposizionale. L'articolo determina il participio, non il sostantivo εὐθεῖα «retta»; questo anche se il sostantivo è posto, piuttosto inusualmente, tra l'articolo e il participio. Nell'esposizione, dove il

participio congiunto si trasforma in un imperativo (presente *pro perfecto* come è usuale con πίπτω), l'articolo cade come deve. Non c'è motivo perché in esposizione l'espressione sia indefinita e nell'enunciato no; casomai sarebbe da aspettarsi il contrario: occorre rendere in italiano con l'articolo indefinito in entrambi i casi. Ancora più interessante è l'espressione παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ. La presenza di *un solo articolo* davanti alle lettere denotative mostra che l'intera stringa ΑΒ, ΓΔ è posta in funzione appositiva del sostantivo παραλλήλους εὐθείας, denotante in blocco una bizzarra specie geometrica. Un indizio in più che le lettere si riferiscono ad un oggetto linguistico, non geometrico.

Quanto detto sinora può concretizzarsi in una traduzione "massimalista" del testo greco letto all'inizio:

ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Qualora sulla circonferenza di un cerchio siano presi due punti come càpita, la retta congiunta ai punti cadrà all'interno del cerchio.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Sia un cerchio ΑΒΓ, e sulla sua circonferenza siano presi due punti come càpita Α, Β: dico che la retta congiunta da Α fino a Β cadrà all'interno del cerchio.

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.

No infatti, ma se possibile cada all'esterno come ΑΕΒ, e sia preso il centro del cerchio ΑΒΓ, e sia Δ, e siano congiunte ‹rette› ΔΑ, ΔΒ, e sia condotta oltre ‹una retta› ΔΖΕ.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ. μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

No infatti, ma se possibile cada all'esterno come ΑΕΒ, e sia preso il centro del cerchio ΑΒΓ, e sia Δ, e siano congiunte ‹rette› ΔΑ, ΔΒ, e sia condotta oltre ‹una retta› ΔΖΕ.
Poiché dunque ‹una retta› ΔΑ è uguale a ‹una retta› ΔΒ, anche un angolo ΔΑΕ è quindi uguale a ‹un angolo› ΔΒΕ; e poiché risulta prolungato avanti un solo lato ΑΕΒ di un triangolo ΔΑΕ, un angolo ΔΕΒ è quindi maggiore di ‹un angolo› ΔΑΕ. E ‹un angolo› ΔΑΕ è uguale a ‹un angolo› ΔΒΕ: ‹un angolo› ΔΕΒ è quindi maggiore di ‹un angolo› ΔΒΕ. E sotto l'angolo maggiore si tende il lato maggiore: ‹una retta› ΔΒ è quindi maggiore di ‹una retta› ΔΕ. E ‹una retta› ΔΒ è uguale a ‹una retta› ΔΖ. ‹Una retta› ΔΖ è quindi maggiore di ‹una retta› ΔΕ, la minore della maggiore; il che è impossibile. Non si darà quindi il caso che una retta congiunta da Α fino a Β cada all'esterno del cerchio. Del tutto similmente dimostreremo che neanche sulla circonferenza stessa: quindi all'interno.

ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Qualora quindi sulla circonferenza di un cerchio siano presi due punti come càpita, la retta congiunta ai punti cadrà all'interno del cerchio: il che si doveva dimostrare.

Sarà chiaro al lettore, immagino, che la traduzione "massimalista" assume come indefiniti tutti i riferimenti agli oggetti matematici in gioco, ivi comprese le designazioni per mezzo di lettere precedute dall'articolo (!). Le uniche eccezioni sono dettate dal buon senso matematico: il centro e la circonferenza di un cerchio assegnato sono univocamente determinati, e la presenza dell'articolo determinativo è legata a questa considerazione. Lo stesso si dica per "la" retta che congiunge due

punti. Nel caso della citazione non istanziata di I.19 nella dimostrazione, la presenza dell'articolo è legata al vincolo di replicare la forma del riferimento primario, dove essa sta semplicemente a segnalare che la comparazione avviene tra due lati soltanto, non fra i tre a disposizione in un triangolo.

Dal punto di vista grammaticale la lettura proposta nella traduzione "massimalista", più forte di quella che enfatizza, nella denominazione delle specie nel corso della dimostrazione, il ruolo anaforico dell'articolo così tipico della lingua greca, è perfettamente legittima, per quanto le considerazioni delle sezioni precedenti permettano di azzardare una proposta ancora più radicale. La (necessaria) presenza dell'articolo di fronte ai gruppi di lettere rendendo il sintagma una locuzione sostantivata, non c'è alcun bisogno di postulare sistematicamente, in espressioni come ἡ AB, un sostantivo sottinteso in modo da ottenere espressioni indefinite quale εὐθεῖα ἡ AB «una retta AB» o definite come ἡ AB εὐθεῖα «la retta AB». I gruppi di lettere sono semplicemente abbreviazioni di designatori e il loro riferimento è un oggetto linguistico, non matematico, e così vanno intesi nel corso della dimostrazione: come riferimenti a «quel sintagma "una retta" introdotto nell'esposizione».

Nel corso di una proposizione osserviamo dunque la seguente evoluzione di un termine da semplice sostantivo indefinito a sintagma più o meno complesso: εὐθεῖα (sostantivo indefinito: enunciato) → εὐθεῖα ἡ AB (sostantivo indefinito dotato di nome: esposizione) → ἡ AB εὐθεῖα (espressione neutralizzata: dimostrazione – caso nettamente minoritario) → ἡ AB (designatore puro: dimostrazione – caso di gran lunga più comune) → εὐθεῖα (ἡ AB) (sostantivo indefinito, dotato di nome nel caso di un problema: conclusione). Questa traiettoria è interamente determinata dalla necessità di operare un riferimento efficiente agli oggetti matematici introdotti in enunciato. Riassumo dunque le parti di una proposizione in cui il carattere indefinito è esplicito:

i) Enunciato: assenza di lettere denotative; specie geometriche designate in prima occorrenza da espressioni linguistiche indefinite; dalla seconda occorrenza assumono l'articolo, con puro valore anaforico.

ii) Esposizione: introduzione delle lettere denotative come apposizioni di espressioni linguistiche indefinite; come nel caso dell'enunciato, dalla seconda occorrenza queste ultime *possono essere considerate* assumere l'articolo, con puro valore anaforico.

iii) Costruzione: è la parte specifica della proposizione in cui è più chiaro come vada gestito il fenomeno della preterizione del sostantivo. Nuovi oggetti introdotti nella costruzione sono privi di articolo alla loro prima occorrenza: sono quindi espressioni indefinite, e le lettere designatrici che li accompagnano sono collocate come di consueto in posizione appositiva. Si tratta di un fenomeno comune a tutte le costruzioni e che merita di essere sottolineato. Ad inizio trattato, come in I.2, le costruzioni sono enunciate nella loro forma completa (*EE* I, 8.16-20):

ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, […]	In effetti, sia congiunta dal punto A fino al punto B una retta AB, e sia costruito su di essa un triangolo equilatero ΔAB, e siano prolungate in ‹linea› retta con ΔA, ΔB rette AE, BZ, e con centro B e intervallo BΓ sia tracciato un cerchio ΓHΘ, […]

La formulazione, come vedremo tra breve, si conforma rigidamente ad un prototipo canonico che si costituisce per calco della formulazione primaria, nel nostro caso nell'ordine gli enunciati di I.post.1, I.1, I.post.2, I.post.3. In tutte queste costruzioni l'ente geometrico costruito è nominato esplicitamente, in forma indefinita. Viene quindi tracciata *una* retta di nome ἡ AB, ecc. Nelle proposizioni successive,

come la nostra III.2, le costruzioni sono sistematicamente fornite in forma abbreviata: scompaiono certe determinazioni implicitamente contenute nelle lettere designatrici (come la menzione dei punti di arrivo e di partenza nella formulazione del I postulato) e, con esse, il sostantivo oggetto della costruzione. Non c'è dunque alcun motivo per supporre che i sostantivi da sottintendere non siano in forma indefinita, come nelle formulazioni complete appena lette. Lo stesso va postulato per costruzioni come ad esempio "condurre per un punto una retta parallela ad un'altra", in cui il sostantivo che funziona da soggetto è sistematicamente sottinteso. Leggiamo la formulazione di base in I.31 e la prima applicazione in I.32 (*EE* I, 43.11-12 e 44.17-18):

διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	Condurre per un punto dato parallela ad una retta data una linea retta.
ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.	In effetti, sia condotta per un punto Γ parallela ad una retta ΑΒ ‹una retta› ΓΕ.

Applicazioni successive perderanno anche i sostantivi σημείου ed εὐθείᾳ. Le costruzioni sono indefinite quanto all'oggetto realizzato, non quanto a quello dato (si innestano infatti su oggetti già prodotti, altrimenti trovano impiego verbi speciali): per questo motivo il predicato δοθέν «dato» con cui sono qualificati gli oggetti dati ha l'articolo.

iv) Citazioni di risultati precedenti, che costituiscono una parte rilevante di una dimostrazione e ne accentuano il carattere formulare; le citazioni letterali di enunciati, sia istanziate che non, servono a conservare e richiamare il carattere fondamentalmente indefinito della dimostrazione, insieme con la richiesta che il risultato usato sia identificabile univocamente ed applicabile senza modifiche alla configurazione in oggetto: non sono quindi necessari riferimenti libreschi (questa pratica è tardiva).

v) Conclusione generale (quando presente): ripete alla lettera l'enunciato. Nel caso di un problema la conclusione generale è quasi sempre assente, ma quella istanziata, pur contenendo le lettere denotative, ripristina la struttura esplicitamente indefinita, come vediamo sull'esempio di enunciato e conclusione di I.2 (*EE* I, 8.11-12 e 9.13-14):

πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.	Porre su un punto dato una retta uguale ad una retta data.
πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.	Risulta quindi posta su un punto dato Α una retta ΑΛ uguale ad una retta data ΒΓ: il che si doveva fare.

Vediamo ora le parti di una proposizione in cui il carattere indefinito è implicito oppure neutralizzato:

vi) Anafora: si tratta della frase con cui si apre la dimostrazione ed introdotta da ἐπεί «poiché» (nella terminologia della logica stoica si tratta di un παρασυνημμένον «paracondizionale»); ve ne possono essere più consecutive, come abbiamo visto in III.2. Può contenere sia espressioni indefinite che pure lettere designatrici che espressioni neutralizzate (in III.2 si danno tutti e tre i casi): il fatto che si riferisca *direttamente* a quanto disposto in esposizione o costruzione suggerisce di interpretare il secondo caso come dovuto ad ellissi di un sostantivo indefinito, e di togliere l'ambiguità del terzo leggendolo come espressione indefinita.

vii) Dimostrazione: c'è *sempre* neutralizzazione, eccettuate le citazioni letterali, istanziate e non, di risultati precedenti, e le menzioni, esplicitamente indefinite, di oggetti quali πλευρά «lato», βάσις «base», γωνία «angolo», e parzialmente λόγος «rapporto».

La struttura indefinita soggiacente non opera solo al livello linguistico. La stessa indefinitezza si trasferisce anche ai *relata*, cioè agli oggetti matematici in gioco: la dimostrazione è condotta interamente su specie matematiche indefinite; il problema della particolarizzazione apparente indotta dalle lettere e dal loro preteso riferimento alla figura evapora completamente. Una dimostrazione matematica, pertanto, non si riferisce a oggetti generici in quanto falsamente particolari, ma a veri oggetti indefiniti, designati solo tramite la denominazione di specie. Tale denominazione è sostituita nel corso della dimostrazione da quella in termini di lettere denotative, la quale è semplicemente un nome che permette una radicale economia denotativa, data la sua struttura composizionale. Per questo motivo la denotazione si canonizza naturalmente a designare gli enti più semplici possibili a partire dai quali tutti gli altri possono essere generati tramite un insieme molto ristretto di costruzioni di base, cioè ai punti. La presentazione degli enti geometrici in uso che ha luogo nell'esposizione avviene dunque tramite espressioni indefinite, non certo per mezzo dell'aggiunta delle lettere, che pertanto non hanno funzione deittica.

Qui torna utile operare una distinzione tra ruolo rappresentativo e ruolo referenziale di un nome: le *espressioni indefinite* hanno un ruolo referenziale a specie matematiche generiche, mentre le lettere sono semplicemente anaforiche delle espressioni indefinite ed hanno quindi una mera funzione rappresentativa delle specie stesse: sono abbreviazioni di designatori e non sono certo le "variabili libere" della dimostrazione (ammesso che ve ne siano). Le lettere rappresentano a loro volta i singoli enti astratti nel grafo della configurazione geometrica (*non* gli oggetti matematici), rappresentati a loro volta dal segno grafico nel diagramma. Che, per composizione delle varie funzioni di rappresentazione e riferimento, il diagramma finisca per rappresentare oggetti matematici è dunque un dato di fatto unicamente raffigurativo, e non convoglia informazioni rilevanti per la dimostrazione che non siano esperibili per altre vie. D'altronde, il diagramma prende forma solo una volta che sia descritto dalla costruzione: dipende quindi unicamente da un stato di cose linguistico ed è insensato pensare che nel corso della dimostrazione sia fatto riferimento al diagramma: il suo ruolo, va ribadito, è rappresentativo e non referenziale.

È dunque interamente corretto affermare che la configurazione geometrica oggetto di una dimostrazione è solo un grafo di riferimento (ed è per questo che *non è* particolare, ed *a fortiori* non lo sarà il diagramma associato). Inversamente, il carattere di grafo si riflette nella struttura composizionale dei designatori tramite lettere: ciò risulta evidente in trattazioni prive di "contenuto geometrico" come *El*. V e VII-IX, oppure *Data* 1-23; è meno evidente ma ben presente in geometria piana, dove nessun oggetto è fatto di punti, e i punti servono solo come segnaposti per "identificatori costruzionali" a partire dai quali generare oggetti di ordine superiore come linee o figure. Il diagramma associato ad una configurazione geometrica è insomma un oggetto discreto, in quanto lo è la configurazione stessa. Ciò rende possibile riferirsi a un numero estremamente limitato di oggetti nel corso di una dimostrazione, e di conseguenza nominarli. Questa caratteristica fa sì che tali denominazioni siano a loro volta sostituibili con segni grafici, al tempo stesso convenzionali e ben formati dal punto di vista del linguaggio naturale, come i gruppi di lettere dotati di articolo. È questa peculiarità ad avere ingannevolmente suggerito che esse designassero veri oggetti geometrici, necessariamente individuali.

Da tutto ciò risulta l'assoluta irrilevanza della quantificazione, e quindi la struttura eminentemente proposizionale dell'argomentazione matematica greca: la dimostrazione è tutta condotta solo su nomi di oggetti cui viene fatto riferimento anaforicamente tramite le denominazioni per complessi di lettere, non su oggetti (falsamente) particolari. Non c'è quindi bisogno di nessun passaggio generalizzante ulteriore alla fine della dimostrazione. Non sussiste cioè alcun passaggio di esemplificazione universale da $\forall x F(x)$ a $F(a)$ e viceversa, con a rappresentante generico della classe su cui opera il

quantificatore, per "salire" o "scendere" dall'enunciato alla dimostrazione e viceversa. Una teorema greco *richiede* di dimostrare $F(a)$, e si ritiene concluso quando ciò sia dimostrato. Esattamente questo viene garantito dalla struttura indefinita (che quindi sostituisce quella quantificazionale), la quale permette *automaticamente* di non prendere in considerazione proprietà dell'oggetto che non siano predicate in enunciato. In ciò consiste la teoria astrattiva della generalità matematica esposta da Aristotele in *APo*. A 4-5. Proprio per questo il riferimento ad un diagramma specifico, in quanto si limita a *rappresentare* una configurazione geometrica, non pone problemi: non c'è quindi bisogno di pensare che la dimostrazione offerta vada estesa, per universalizzazione semplice di proprietà, a tutti gli altri oggetti simili, come suggeriva Proclo. La struttura indefinita di una dimostrazione greca non offre però neanche appigli per una sua interpretazione in termini di "schema dimostrativo", del genere di quella proposta da Alessandro per gli schemi sillogistici aristotelici. Una volta che sia chiaro che le lettere designatrici non possono fare veci di lettere mute, restano solo espressioni come «un cerchio» per questo ruolo. Ma è chiaro che non ci sono più istanze possibili di «un cerchio»: non saprebbe esserlo il *"singolo cerchio" semplicemente perché tali oggetti non sono mai denominati, e quindi non hanno dignità d'esistenza, nella matematica greca.

1.0.5. *La rete anaforica*

La storia non finisce qui. Una rete anaforica fittissima risponde al requisito di mantenere la dimostrazione al massimo livello possibile di generalità. Lo stile matematico greco si fonda sul principio della conservazione della forma linguistica; vettore della forma è l'anafora, che permette richiami continui ad espressioni formulari fissate. Queste sono matrici in cui inserire oggetti indefiniti: è dunque l'uso pervasivo dell'anafora che permette di mantenere lo stesso livello di indefinitezza e quindi di generalità in tutte le parti di una proposizione matematica. Per chiarire la questione, consideriamo l'esempio seguente, preso dall'anafora di III.2 (*EE* I, 96.10-13):

καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ.	E poiché risulta prolungato avanti un solo lato AEB di un triangolo ΔAE, l'angolo ΔEB è quindi maggiore di ΔAE.

Si tratta di una citazione istanziata dell'enunciato di I.16 (*EE* I, 24.15-17), quest'ultimo uno dei rari casi in cui la condizione normalmente posta nell'antecedente di un condizionale è espressa in forma di genitivo assoluto:

παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.	Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti.

La presenza, pleonastica in III.2, dell'aggettivo μία, quella altrettanto pleonastica del peculiare verbo προσεκβάλλειν (compare negli *Elementi* solo in I.5, 16 e 32; la forma è peculiare in quanto ha due preverbi), l'abuso di linguaggio consistente nell'assumere come soggetto un lato ma nel denotarlo col nome del suo prolungamento ἡ ΑΕΒ, mostrano che l'intento di ricalcare esattamente la formulazione dell'enunciato è volutamente perseguito, eventualmente omettendone delle parti non rilevanti (il riferimento all'angolo interno o esterno) o non congrue (la menzione di «ogni» triangolo e quella dell'«uno e dell'altro» angolo) nel contesto. Ne è ulteriore testimone ancora la scelta del verbo, che non rimanda ad una delle costruzioni effettivamente eseguite, mentre l'antecedente del

paracondizionale nell'anafora cita normalmente una di esse. La primissima citazione dello stesso teorema I.16 in I.17 offre una testimonianza complementare (*EE* I, 26.8-11):

καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

E poiché un angolo ΑΓΔ è all'esterno di un triangolo ΑΒΓ, è maggiore di uno all'interno e opposto ΑΒΓ.

Qui il contesto impone di cortocircuitare il passo costruttivo reso esplicito nell'enunciato di I.16 (si noti che la costruzione immediatamente precedente in I.17 impiega il canonico ἐκβάλλειν, che ha un solo preverbo) e semplificare il riferimento agli angoli interni: il redattore del testo "trasporta" quindi l'angolo esterno nell'antecedente del paracondizionale, ed è l'enfasi sul suo essere esterno che fa sì che non sia necessario parlare di prolungamento. Tra l'altro, questi esempi mostrano come vada trattato il caso in cui un articolo qualifichi un determinativo avverbiale (ma si noti che in I.17 l'avverbio assume la funzione di predicato e quindi perde l'articolo). Nell'enunciato di I.16 i sintagmi ἡ ἐκτός e τῶν ἐντός sono definiti in quanto sia l'angolo esterno sia i due interni sono univocamente determinati una volta tracciato il prolungamento. Nella citazione in I.17, invece, il determinativo avverbiale è in posizione attributiva anteposta, ed il sintagma va considerato sicuramente indefinito. Ciò è d'altronde richiesto anche dal buon senso matematico, visto che di angoli interni ed opposti ce ne sono due.

In questo balletto di convenzioni citazionali non è semplicemente in gioco un'applicazione del meccanismo generale che De Morgan chiamava *principium et exemplum*. Viene in entrambi i casi ricalcata la forma linguistica (indefinita) dell'enunciato cui è fatto riferimento, ed è questo il meccanismo validante dell'asserto istanziato, che conferisce altresì pertinenza alla citazione. Non c'è, dunque, alcuna necessità di quantificare gli enunciati delle proposizioni geometriche, come mostra la prima delle due citazioni, semplicemente perché il principio che guida la loro applicazione non passa attraverso l'esemplificazione universale, ma attraverso il riconoscimento di un'identità di forma linguistica, per quanto non sempre vi sia una sola forma di riferimento (ma si veda più oltre per quanto riguarda le citazioni di costruzioni). Questa soluzione non ha motivo per apparirci sorprendente. Non si vede perché i meccanismi di riconoscimento della generalità e dell'adesione ad una forma logica ben definita debbano sottostare a regole anche solo lontanamente analoghe a quelle elaborate al termine di un percorso storicamente ben definito e ora d'uso corrente. I greci usavano solo il linguaggio naturale (con la notevole eccezione delle lettere denotative); noi moderni siamo profondamente imbevuti di notazioni simboliche. Non possiamo assumere che la nostra percezione di che cosa pertenga alla forma logica coincida con la loro. Se viene impiegato solo il linguaggio naturale, le regolarità nelle strutture linguistiche sono tutto ciò che è a disposizione per riconoscere, ed eventualmente per creare, argomentazioni la cui validità non dipenda dai termini effettivamente esposti in esse (termini singolari, lettere schematiche, ecc.), cioè argomentazioni che possano essere dette concludere in virtù di una certa forma.

Offro in sintesi una topologia della rete anaforica che sostiene tutta la struttura deduttiva di una dimostrazione geometrica greca. Naturalmente, le strutture anaforiche elencate qui sotto possono presentarsi annidate o in rapporti di subordinazione ancora più complessi; esse caratterizzano la matematica greca molto più della nostra, in quanto l'uso esclusivo del linguaggio naturale richiede la messa in opera di strutture linguistiche più variate atte ad esprimere il concatenamento deduttivo.

a) Riferimento a costruzioni / relazioni stabilite in dimostrazioni precedenti. Occorre distinguere tra

1) riferimenti a teoremi, che spesso contengono porzioni non istanziate (da sospettare *a priori* come non autentiche) e in cui le variazioni sono di norma semplici scorciamenti dell'enunciato originale, ma che non ammettono un'unica forma canonica, come abbiamo appena visto;

2) riferimenti a costruzioni, che sono sempre istanziati e formulati in un'unica forma canonica.

Merita soffermarsi un attimo su questi ultimi. La formulazione degli enunciati dei problemi di costruzione detta in effetti la struttura matriciale del riferimento. Quella dettata da *El*. I.2, il cui enunciato e conclusione abbiamo letto nella sezione precedente, è: κείσθω (πρὸς τῷ Α σημείῳ) (τῇ ΓΔ εὐθείᾳ ἴση) (εὐθεῖα ἡ ΑΒ). Il primo elemento della matrice è di solito preterito, così come il sostantivo εὐθεῖα in entrambe le occorrenze; si noti, qui come nella conclusione di I.2 letta sopra, il verbo κείσθω, che funziona da passivo di θέσθαι. Del tutto analoga la situazione per I.23, che ha un enunciato esattamente parallelo a quello di I.2 (*EE* I, 32.12-14):

πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.	Costruire, su una retta data e su un punto su di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato.

e le cui applicazioni hanno la seguente struttura matriciale, in caso opportunamente scorciata: συνεστάτω (πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ) (καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ) (τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση) (ἡ ὑπὸ ΕΔΗ). Si noti il fenomeno della neutralizzazione all'opera in tutti gli elementi della matrice. Nel primo e nel terzo elemento basta osservare che per effettuare la costruzione sia la retta che l'angolo di riferimento devono essere già stati nominati. Nell'ultimo il sostantivo è preterito e non abbiamo elementi per decidere. Il secondo elemento è neutralizzato fin dall'enunciato, in quanto l'articolo in τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ è obbligatorio davanti al determinativo preposizionale πρὸς αὐτῇ. L'ulteriore determinativo τῷ Δ deve quindi essere collocato posposto, ma questo non pregiudica niente riguardo al carattere definito o indefinito dell'espressione. Un ultimo esempio proviene da I.31, il cui enunciato abbiamo letto nella sezione precedente e da cui si origina la struttura matriciale ἤχθω (διὰ τοῦ Γ σημείου) (τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος) (ἡ ΓΕ).

b) Riferimento a costruzioni / relazioni stabilite in parti precedenti della dimostrazione: sempre istanziato e spesso marcato da espressioni metalinguistiche del tipo «fu dimostrato».

c) Riferimento a tutto l'enunciato in quanto asserto: si tratta dell'esposizione, che ricalca in aspetti cruciali la forma stessa dell'enunciato.

d) Riferimento a esposizione o costruzione o loro conseguenze: il suo luogo deputato è l'anafora.

e) Riferimento a oggetti generici: avviene tramite ordinali, come nel libro V degli *Elementi* (cfr. sez. 2.9), oppure nomi di specie matematiche; questi ultimi possono figurare come espressioni indefinite oppure definite oppure neutralizzate; come già visto, nella denominazione delle specie nel corso della dimostrazione il ruolo anaforico dell'articolo, tipico del greco, è molto forte.

f) Riferimento a nomi di oggetti tramite lettere collocate in posizione appositiva; i gruppi di lettere o i sintagmi preposizionali più complessi con la stessa funzione sono necessariamente dotati di articolo.

g) Riferimento a enti posti a cortissimo raggio d'azione (di norma all'interno della stessa frase) tramite pronomi dimostrativi. Essi sono estremamente frequenti in testi che descrivono algoritmi come i *Metrica* di Erone.

In realtà, non solo la questione della genericità di ogni oggetto esposto in una dimostrazione era stata ben capita da interpreti antichi come Aristotele, ma anche il fatto che il problema della validità delle inferenze deduttive all'interno della dimostrazione (e quindi istanziate) riceve una risposta

eminentemente *formale*, in quanto esse sono convalidate dall'identità di formulazione con espressioni indefinite primarie corrispondenti. Leggiamo in primo luogo Aristotele, *APr*. A 24, 41b13-22; il contesto è quello della presenza necessaria di una premessa generale in ogni sillogismo valido; la ricostruzione della configurazione geometrica, che ha impegnato i commentatori, non c'interessa:

μᾶλλον δὲ γίνεται φανερὸν ἐν τοῖς διαγράμμασιν, οἷον ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει. ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι αἱ Α Β. εἰ οὖν ἴσην λαμβάνοι τὴν Α Γ γωνίαν τῇ Β Δ μὴ ὅλως ἀξιώσας ἴσας τὰς τῶν ἡμικυκλίων, καὶ πάλιν τὴν Γ τῇ Δ μὴ πᾶσαν προσλαβὼν τὴν τοῦ τμήματος, ἔτι δ' ἀπ' ἴσων οὐσῶν τῶν ὅλων γωνιῶν καὶ ἴσων ἀφῃρημένων ἴσας εἶναι τὰς λοιπὰς τὰς Ε Ζ, τὸ ἐξ ἀρχῆς αἰτήσεται, ἐὰν μὴ λάβῃ ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρουμένων ἴσα λείπεσθαι.

Risulta più chiaro nelle dimostrazioni geometriche, ad esempio che quelli alla base dell'isoscele sono uguali. Siano state condotte al centro A B. Se dunque uno assumesse (1) l'angolo AΓ uguale a BΔ senza asserire in generale che (1*a*) quelli dei semicerchi sono uguali, e di nuovo (2) Γ a Δ senza assumere in aggiunta che (2*a*) ognuno di quelli del segmento lo è, ed ancora che, (3) sottratti uguali dagli angoli totali che sono uguali, anche quelli restanti E Z siano uguali, ne risulterebbe una petizione di principio, qualora non assumesse che, (3*a*) sottratti uguali dagli uguali, restano uguali.

La posizione di Aristotele si articola su due livelli. Due asserti che coinvolgono specie geometriche esposte in una dimostrazione (1 e 2) sono convalidati dagli enunciati generali corrispondenti (1*a* e 2*a*), eventualmente provenienti da teoremi. Uno terzo asserto (3), generale se riferito ad una specie geometrica (un angolo), è convalidato da un assioma ancora più generale (3*a*), che figurerà al livello dei princìpi[40]. Aristotele non si limita ad accusare di inconsistenza una ricerca geometrica che operi solo su istanze, per quanto possano essere generiche; è in ballo anche la necessità di ricercare un'identità di formulazione tra enunciati di base e loro controparti più generali. Al livello di pratica dimostrativa corrente, ma senza dover supporre improbabili influenze dirette, la risposta dei matematici alla provocazione di Aristotele sarà (o è stata) un'esposizione con struttura indefinita quale ἔστωσαν γωνίαι τῶν ἡμικυκλίων αἱ Α Β, seguita da un'anafora, che riprende l'esposizione e ne ricalca struttura indefinita e valore espositivo del verbo «essere», del tipo ἐπεί εἰσι γωνίαι τῶν ἡμικυκλίων αἱ Α Β, ἡ Α τῇ Β ἴση ἐστί.

Per quanto la connessione sia passata misteriosamente inosservata agli interpreti moderni, l'argomentazione di Aristotele può essere fruttuosamente messa in parallelo con un'altra, celebre, discussione antica in cui è questione di deduzioni particolari convalidate da assiomi generali. Leggiamo le osservazioni di Galeno sui «sillogismi relazionali» in *Inst. log*. XVI.5-10 (cfr. sez. 1.5.1.1):

5 πολὺ δὲ πλῆθός ἐστιν, ὡς ἔφην, ἐν ἀριθμητικοῖς τε καὶ λογιστικοῖς τοιούτων συλλογισμῶν ὧν ἁπάντων ἐστὶ (κ)οινὸν ἔκ τινων ἀξιωμάτων τὴν αἰτίαν ἴσχειν <u>συστάσεως</u>, […] **6** ὄντος γὰρ ἀξιώματος τοῦδε καθόλου τὴν πίστιν ἔχοντος ἐξ ἑαυτοῦ "τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ‹ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα"›, συλλογίζεσθαί τε καὶ ἀποδεικνύναι ἔστιν ὥσπερ

5 Come dicevo, in aritmetica e logistica vi è un gran numero di sillogismi siffatti, il tratto comune di tutti quanti essendo quello di ricavare la ragione della <u>formulazione</u> da certi assiomi, […][41] **6** Avendo infatti un assioma generale ed autoevidente come questo "gli uguali allo stesso sono anche ‹uguali tra loro›", è possibile argomentare per via dimostrativa

[40] Aristotele include il principio più generale che qui cita tra gli assiomi comuni (*APo*. A 10, 76b20-21, A 11, 77a26-31), e giova ricordare che esso compare come *El*. I.nc.3.

[41] Il testo che ho omesso è sicuramente corrotto, ma la forma attuale non contiene considerazioni rilevanti nella nostra prospettiva.

Εὐκλείδης ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τὴν ἀπόδειξιν ἐποιήσατο τὰς τοῦ τριγώνου πλευρὰς ἴσας δεικνύων· ἐπεὶ γὰρ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, δέδεικται ‹δὲ› τὸ πρῶτόν τε καὶ τὸ δεύτερον ‹τῷ τρίτῳ ἴσον›, ἑκατέρῳ αὐτῶν ἴσον ἂν εἴη οὕτω τὸ ‹τρίτον›. **7** ὄντος δὲ πάλιν ἀξιώματος ἐξ ἑαυτοῦ πιστοῦ τοῦδε "ἂν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, καὶ τὰ ὅλα ἴσα ἔσται", ἐὰν ὡμολογημένων ἴσων ἀλλήλοις εἶναι τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου προστεθῇ τι καθ' ἑκάτερον ἴσον ἴσον, ἔσται καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ ἴσον, ὡδί πως λεγόντων ἡμῶν "ἐπεὶ τὸ πρῶτον ἴσον ἐστὶ τῷ δευτέρῳ, πρόσκειται δὲ τῷ μὲν πρώτῳ τὸ γ, τῷ δὲ δευτέρῳ τὸ δ ἴσα ὄντα καὶ αὐτά, γενηθήσεται ‹καὶ› τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ ἴσον". **8** ὡσαύτως δὲ κἀπειδὰν ἀπό τινων ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, δυνησόμεθα λέγειν "ἐπεὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ ἴσον, ἀφαιρεῖται δὲ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν ἴσα τάδε, καὶ τὸ λοιπὸν ‹τόδε› τῷδε ‹τῷ› λοιπῷ ἴσον ἔσται". **9** οὕτως δὲ καὶ τὸ τοῦ διπλασίου διπλάσιον τετραπλάσιον ἔσται· ἐὰν δή τινος ἕτερον διπλάσιον ληφθῇ κἀκείνου δὲ πάλιν διπλάσιον ληφθῇ, ἔσται τοῦτο τὸ γ τοῦ α τετραπλάσιον. **10** ὁμοίως δὲ κἀπὶ τῶν ἄλλων ἁπάντων ἡ σύστασις τῶν ἀποδεικτικῶν συλλογισμῶν κατὰ δύναμιν ἀξιώματος ἔσται συνημμένου ἐπὶ ἀριθμῶν ἐπί τε ἄλλων πραγμάτων ἐν τῷ πρός τι γένει καὶ αὐτῶν ὑπαρχόντων·

proprio nel modo in cui Euclide condusse la dimostrazione nel primo teorema, mostrando uguali i lati del triangolo; in effetti, poiché gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro, e sia il primo che il secondo è stato dimostrato ‹uguale al terzo›, il ‹terzo›[42] sarebbe così uguale a uno e all'altro di essi. **7** Avendo di nuovo un assioma autoevidente come questo "qualora ad uguali siano sommati uguali, anche i totali saranno uguali", qualora, essendo convenuto che il primo e il secondo siano uguali, qualcosa di uguale sia sommato a uno e all'altro uguale, sarà uguale anche il totale al totale, e potremmo dire più o meno così: "poiché il primo è uguale al secondo, e al primo risulta sommato il 3°, al secondo il 4°, che sono anch'essi uguali, ‹anche› il totale sarà risultato uguale al totale". **8** Allo stesso modo, anche nel caso in cui uguali siano sottratti da uguali qualunque, potremo dire "poiché il totale è uguale al totale, e questi uguali sono sottratti da uno e dall'altro di essi, anche ‹questo› che resta sarà uguale a questo che resta". **9** E così anche il doppio del doppio sarà quadruplo: qualora pertanto sia preso un altro doppio di qualcosa e di quello sia di nuovo preso il doppio, questo 3° del 1° sarà quadruplo. **10** Similmente, anche per tutti gli altri, la formulazione dei sillogismi dimostrativi risulterà in virtù di un assioma congiunto, sia per numeri che per quanto d'altro appartiene al genere relazionale.

Il punto cruciale è il significato del termine σύστασις, che ho reso con «formulazione» ed è impiegato ancora in *Inst. log*. XVI.11-12 e XVII.1-2, in espressioni del tutto analoghe a quelle che abbiamo appena letto. Si tratta del *nomen actionis* derivante dal verbo che canonicamente denota il modo di formazione degli asserti semplici e non semplici stoici (si vedano ad esempio D.L. VII.70 e Sesto Empirico, *M* VIII.108-112). La σύστασις è la «costituzione» dell'asserto a partire da componenti più elementari: un connettore o una negazione ed asserti semplici; al livello linguistico, dunque, coincide con la «formulazione» effettiva dell'asserto a partire da unità più semplici. Stesso significato si deve presuppore nel titolo Crisippeo περὶ τρόπων συστάσεως πρὸς Στησαγόραν «Sulla formulazione di modi a / contro Stesagora» (D.L. VII.194). In questa accezione di σύστασις, la posizione di Galeno è la seguente: in matematica le inferenze sono convalidate da un assioma nel senso estremamente peculiare di possedere una forma linguistica ben definita e stabile, in quanto calcata su quella dell'assioma, oppure di un enunciato o una formulazione istanziata che ne fa le veci. I singoli passaggi di un'inferenza sono dunque in certo senso dominati dalla forma primaria non istanziata, che ne determina la σύστασις: l'anafora è un'operazione di validazione che agisce tramite la determinazione della forma.

[42] Il numerale attestato πρῶτον va sicuramente corretto in questo modo.

Queste considerazioni possono contribuire a chiarire quale sia la differenza sostanziale tra la procedura di Galeno per trattare i sillogismi relazionali, che hanno invariabilmente premesse particolari, e quella di Alessandro (*in APr.*, 21.28-22.25, 68.21-69.4, 344.9-346.6, *in Top.*, 14.18-15.14), che cerca di forzare (Galeno usa più volte il verbo βιάζειν per descriverne la procedura) i sillogismi relazionali in uno schema predicativo. Per fare ciò Alessandro ha bisogno di introdurre un assioma generale *come premessa aggiuntiva*, altrimenti non ne risulterebbe nessuno schema sillogisticamente valido (sarebbero infatti di seconda figura con entrambe le premesse particolari). Egli esclude dunque dalla classe dei sillogismi in forma propria tutti gli argomenti particolari che necessitano di una premessa addizionale generica, e mostra come trasformare la loro formulazione, incorporando la premessa addizionale ed «amalgamando» le due particolari originariamente presenti in un'unica coassunzione, in modo che recuperino una forma sillogistica "corretta". Galeno non prescrive di aggiungere una premessa ulteriore, se interpretiamo, come ho suggerito, il riferimento all'assioma generale come una forma molto ben definita di validazione, *solo eventualmente* resa esplicita dalla presenza dell'assioma stesso quale premessa addizionale. Le menzioni apparenti di premesse aggiuntive in alcuni dei sillogismi proposti da Galeno sono da ricondursi semplicemente alla sua volontà di aderire allo schema argomentativo che trova in *El.* I.1 (*Inst. log.* I.3 e XVI.6), dove l'enunciato di transitività dell'uguaglianza entra esplicitamente come coassunzione, o a un'integrazione per niente cogente di una lacuna nel testo (*Inst. log.* XVI.11)[43]. In tutti gli altri esempi, un sillogismo relazionale è un argomento particolare che, appunto, «ricava la ragione della formulazione da certi assiomi»; ovvero essi ricavano «la credibilità della loro formulazione e della loro forza dimostrativa da un assioma generico» (XVI.12). Nella prospettiva di identificazione della corretta formulazione in vista di una convalidazione per mezzo di un assioma può essere vista anche la discussione di Galeno sulle ἰσοδυναμο(υσῶ)ν προτάσεων «premesse equivalenti» in XVII.4-9.

L'abbaglio su cui si è fondata l'intera tradizione interpretativa è causato dunque dal mancato riconoscimento della struttura indefinita soggiacente e del valore non copulativo del verbo «essere» nell'esposizione. Si potrebbe obiettare che la struttura indefinita sia solo una grammatica di superficie, e che alla fin fine una dimostrazione "alla greca" tratti di oggetti matematici individuali. A questa obiezione è sufficiente replicare che non siamo autorizzati a supporre niente di più profondo della pretesa "superficie" linguistica, che occorre e basta per produrre dimostrazioni dotate del più elevato livello di generalità. Detto in altri termini, se la situazione può essere dichiarata sotto controllo per quanto riguarda il carattere indefinito del segno e del suo significato, ciò non implica niente al livello degli oggetti designati. *A fortiori*, non sembra lecito intravedere indicazioni di un (dis)impegno ontologico quale che sia dalle considerazioni svolte sinora. L'unica certezza mi pare riguardi la totale scomparsa degli oggetti particolari dall'orizzonte della geometria greca. In effetti, i riferimenti a risultati o costruzioni precedenti sono sempre indefiniti anche quando non ne siano nominati esplicitamente i soggetti, e da qui deriva il profondo carattere formulare dello stile matematico greco. La scelta di presentare nel corso della dimostrazione solo espressioni neutralizzate o esplicitamente indefinite è cruciale per mantenere l'ambiguità generale / particolare: la forma adottata per preservare la generalità finisce per indurre una genericità al livello degli oggetti. Contributo decisivo alla coerenza dell'edificio lo dà la genericità degli oggetti costruiti nei problemi, i cui enunciati sono indefiniti come le loro successive citazioni nelle costruzioni. Gli oggetti introdotti nelle costruzioni ausiliarie, pertanto, non sono individui come ritengono certi esponenti della tradizione neo-kantiana.

[43] Si veda ad esempio Hankinson 1994, 69, dove viene proposto un assioma meno generale di quello integrato da Kalbfleisch (Hankinson vede un'ostruzione seria nell'introdurre premesse con doppia generalità come sarebbe richiesto dall'esempio di XVI.11). La possibilità che Galeno non introduca una premessa aggiuntiva ma usi l'assioma come regola d'inferenza è discussa e respinta, con argomenti non convincenti, in Barnes 1993, 184-185.

Ci troviamo dunque di fronte ad una forma di platonismo? Ovviamente no, in quanto vale ad esempio la descrizione alternativa di Aristotele in *APo*. A 4 in termini di istanza arbitraria e primaria. D'altro canto, se nella matematica greca *non esistono* oggetti particolari, non è però detto che essa si occupi di oggetti *arbitrari*, per quanto non ipostatizzati (così invece Hussey 1991).

Un punto di vista alternativo è suggerito dall'osservazione che la dimostrazione è condotta soltanto su (abbreviazioni di) designatori: i termini su cui essa lavora sono semplici espressioni linguistiche. Questo aspetto, e la cura nel massimizzare il carattere indefinito dell'espressione, permettono di suggerire, come implicito nello stile distintivo della matematica greca, un tipo di disimpegno ontologico volutamente perseguito quale quello soggiacente all'approccio moderno in termini di quantificazione sostituzionale (ma solo il disimpegno, ché una dimostrazione alla greca non è di tipo schematico, come abbiamo visto). Se questa è la pratica stilistica condivisa, non è detto che il matematico professionista non potesse sposare un'ideologia in qualche senso opposta: si vedano le considerazioni di Archimede, nella lettera prefatoria di *Sph. cyl.* I (*AOO* I, 2.20 e 4.10), sulle proprietà di certe figure, che τῇ φύσει προυπῆρχεν «preesistevano per natura» in esse ma furono per lungo tempo ignorate dai matematici. Non possiamo però dar peso eccessivo a quest'affermazione. Si tratterà di una manifestazione della metafisica ingenua di tipo realista rivendicata naturalmente, anche e specialmente in tempi moderni, dal matematico poco incline alla riflessione filosofica.

Lo schema di Proclo esposto all'inizio di questa sezione coglie bene le differenti parti specifiche di una proposizione, che si caratterizzano per la presenza di peculiarità linguistiche proprie. Le prossime sezioni sono dedicate ad una loro analisi più dettagliata.

1.1. Enunciato e conclusione

Enunciato e conclusione vanno discussi insieme: sono praticamente identici e sono caratterizzati, uniche tra le parti di una proposizione, dall'assenza di lettere che denotino gli enti geometrici in gioco. Gli *Elementi* conoscono tre tipi di enunciato:

1) Condizionale (si veda anche la sez. 2.3 per un'analisi grammaticale). Si tratta della forma più diffusa.

2) Asserto semplice, eventualmente quantificato. La forma non condizionale sembra essere preferita nei casi in cui, se lo stesso enunciato fosse espresso in forma condizionale, antecedente e conseguente avrebbero lo stesso soggetto grammaticale[44], e sicuramente quando una proprietà sia predicata direttamente di una classe di oggetti molto generale (ad esempio tutti i triangoli, come in I.16-20), oppure non particolarmente generale ma dotata di un nome specifico[45]. La condizione che si troverebbe nell'antecedente del condizionale è di solito predicata del soggetto dell'asserto sotto forma di participio in posizione attributiva.

3) Infinitiva, il cui verbo reggente sottinteso va supposto all'imperativo. Questa è la forma canonica per i problemi, cioè proposizioni geometriche[46] che richiedano l'esecuzione di costruzioni come loro unico scopo. Il soggetto logico della frase è colui cui è dato il compito di eseguire la costruzione.

[44] Quest'affermazione presuppone che ci sia una forma "naturale" in cui un enunciato in forma di asserto semplice possa essere trasformato in un condizionale. Ciò è ovviamente falso in termini strettamente formali, ma la pratica condivisa e il «contenuto matematico» sembrano qui giocare un ruolo decisivo. La regola non costituisce norma: eccezioni in un senso I.14-15 e 41 (la prima e la terza con soggetto ripetuto esplicitamente), nell'altro XI.14.

[45] Nella prima parte dell'enunciato di I.5 «Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro», l'alternativa in forma condizionale «Qualora un triangolo abbia i due lati uguali, gli angoli sulla base sono uguali tra loro» è vanificata dalla presenza del nome di genere «triangolo isoscele».

[46] Per gli enunciati di problemi in teoria dei numeri si veda la sez. 1.3.

Stessa struttura grammaticale hanno i cinque postulati anteposti al I libro; le prime tre stabiliscono appunto l'effettuazione di altrettante costruzioni non ulteriormente riducibili ad altre. Sottocaso marginale di questa forma sono le pochissime proposizioni enunciate con esplicita sfumatura modale, come ad esempio IX.18-19 e XI.22.

Vediamo un esempio per sorte di enunciati, nell'ordine quelli di VII.18, III.21, IV.13 (*EE* II, 124.11-13, e I, 123.23-24 e 171.20-21):

ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.	Qualora due numeri moltiplicando un certo numero facciano certi ‹numeri›, quelli che risultano da essi avranno lo stesso rapporto di quelli che moltiplicano.
ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.	In un cerchio gli angoli nello stesso segmento sono uguali tra loro.
εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.	In un pentagono dato, che è sia equilatero che equiangolo, inscrivere un cerchio.

Le condizioni richieste in un enunciato sono formulate piuttosto raramente sotto forma di genitivo assoluto, e più di frequente per i problemi. Casi interessanti si trovano nel libro X, dove un genitivo assoluto introduce un intero condizionale in X.1 (*EE* III, 2.6-10):

<u>δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων</u>, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.	<u>Fissate due grandezze disuguali</u>, qualora dalla maggiore sia sottratta ‹una grandezza› maggiore che la metà e da quella restata fuori una maggiore che la metà, e questo risulti in successione, sarà restata una certa grandezza, che sarà minore della minore grandezza fissata.

mentre una condizione analoga in X.2 è incorporata nell'antecedente. I due *problemi* X.3-4, che applicano i *teoremi* X.1-2 al reperimento della massima misura comune, sostituiscono naturalmente il participio ἐκκειμένων con δοθέντων, di prammatica nell'enunciato di problemi. Il genitivo assoluto per introdurre gli oggetti dati è più frequente nell'enunciato di problemi in teoria dei numeri[47], ma si rintraccia anche un esempio geometrico in III.25 (*EE* I, 127.9-10)[48]:

<u>κύκλου τμήματος δοθέντος</u> προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα.	<u>Dato un segmento di cerchio</u> descrivere oltre il cerchio di cui è segmento.

Ancora nel libro X leggiamo nel teorema X.71 (*EE* III, 120.21-23) un enunciato non condizionale la cui ipotesi è formulata con un genitivo assoluto; si notino i costrutti preposizionali privi di articolo, in quanto sono nomi del predicato:

<u>ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου</u> τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ	<u>Composto un ‹dominio› esprimibile e uno mediale</u> ne risultano quattro irrazionali, o una binomiale oppure una

[47] Enunciati con genitivo assoluto nell'introdurre oggetti dati: III.25, VII.2, 3, 33-34, 36, VIII.4, IX.18-19, X.3-4, XII.17 (quest'ultimo con il verbo «essere»).
[48] Il verbo προσαναγράψαι occorre solo in III.25 nel *corpus* euclideo (il doppio preverbo è piuttosto raro).

δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.	bimediale prima oppure una maggiore oppure una ‹retta› che può esprimibile e mediale.

Casi di tipo misto tra 2) e 3) sono le costruzioni dei poliedri regolari nei problemi XIII.13-17. Leggiamo l'enunciato di XIII.17 (*EE* IV, 174.24-26):

δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.	Costruire un dodecaedro e circondar‹lo› con una sfera, con cui anche le predette figure, e dimostrare che il lato del dodecaedro è un'irrazionale, quella chiamata apotome.

È prima richiesto di costruire un dodecaedro e di circoscrivergli una sfera (due costruzioni!) e poi di dimostrare una sua proprietà. L'imperativo nelle prime due richieste è quello canonico per un enunciato di tipo 3). La seconda parte va più propriamente classificata tra gli enunciati di tipo 2), adattata per motivi stilistici al formato con imperativo della prima parte. Per fare ciò è necessario introdurre nell'enunciato il verbo δεῖξαι «dimostrare», ovviamente appartenente al registro metamatematico. Lo stesso registro si riscontra nella prima ripresa dell'enunciato, sotto forma di «determinazione» intermedia (si veda la sez. 1.2.1), dopo che la prima costruzione è stata effettuata (*EE* IV, 178.11-13):

δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.	Si deve pertanto anche circondarlo con una sfera data e dimostrare che il lato del dodecaedro è un'irrazionale, quella chiamata apotome.

Il carattere fittizio del verbo «dimostrare» è confermato dalla sua assenza nella «determinazione» che precede la parte della dimostrazione finalmente dedicata a stabilire la proprietà in predicato (*EE* IV, 179.16-17):

λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.	Dico ora che il lato del dodecaedro è un'irrazionale, quella chiamata apotome.

All'interno di una dimostrazione, la forma 1) trova impiego come premessa maggiore di un *modus ponens* ed è di regola citata in forma non istanziata e identica all'enunciato corrispondente. La forma 2) è di solito direttamente istanziata nelle citazioni. Come detto, non si danno casi di citazioni non istanziate di costruzioni, che invece si conformano alla struttura matriciale sancita nella conclusione istanziata dei problemi: la forma 3) si trova dunque solo negli enunciati. Ecco la ripartizione dei tipi di enunciati negli *Elementi* (nei *Data* 91 enunciati su 94 sono in forma condizionale; eccezioni le prop. 1, 8, 47):

	# prop.	condizionali	non condizionali	problemi
I	48	4, 6, 8, 13-15, 21, 24-28, 41, 48	5, 7, 16-20, 29-30, 32-40, 43, 47	1-3, 9-12, 22-23, 31, 42, 44-46
II	14	1-10	12-13	11, 14

III	37	2-9, 11-13, 18-19, 26-27[49], 32, 35-37	10, 14-16, 20-24, 28-29, 31	1, 17, 25, 30, 33-34
IV	16	/	/	1-16
V	25	1-6, 12-14, 16-25	7-11, 15	/
VI	33	2-3, 5-8, 16-17, 22, 26, 32-33	1, 4, 14-15, 19-21, 23-24, 27, 31	9-13, 18, 25, 28-30
VII	39	1, 5-19, 23-28, 30, 35, 37-38	4, 20-22, 29, 31-32	2-3, 33-34, 36, 39
VIII	27	1, 3, 6-10, 13-17, 20-25	5, 11-12, 18-19, 26-27	2, 4
IX	36	1-17, 21-31, 33-36	20, 32	18-19
X	115	1-2, 6, 8, 11, 13-18, 20, 36-41, 54-59, 73-78, 91-96, 114	5, 7, 9, 12, 19, 21-26, 42-47, 60-72, 79-84, 97-113, 115	3-4, 10, 27-35, 48-53, 85-90
XI	39	2-8, 10, 15-20, 22, 24-25, 28, 35-39	1-2[50], 9, 13-14, 21, 29-34	11-12, 23, 26-27
XII	18	4, 13	1-3, 5-12, 14-15, 18	16-17
XIII	18	1-12	/	13-18
tot.	465	224	146(7)	95

La domanda cruciale è perché si senta il bisogno di dotare un teorema di enunciato e conclusione generali, cioè privi di lettere. Dopotutto, supposizioni istanziate e dimostrazioni erano già intesi, come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, rappresentare il caso generale, e il *corpus* matematico greco pullula di teoremi enunciati direttamente in forma istanziata: questi sono presenti in Archimede, in Apollonio per dimostrazioni dalla struttura in casi particolarmente ricca e quindi frammentati in più proposizioni[51], e in tutta la trattatistica di matematica applicata, dal *corpus* eroniano all'*Almagesto* di Tolomeo. Ebbene, le conclusioni, lo vedremo tra un attimo, sono esclusive degli *Elementi* e largamente un artefatto della tradizione eminentemente scolastica di questo trattato: la questione del loro significato logico-matematico non si pone, in quanto non venivano usate dal matematico al lavoro. Resta il problema dell'enunciato.

Qui entra in gioco la differenza tra generalità di un enunciato e di un teorema. Se vogliamo utilizzare un risultato matematico generale in un altro contesto generale, quello che conta è la formulazione generale dell'enunciato, non la sua validità generale in quanto stabilita da una dimostrazione generale. Un passo inferenziale necessita di rimandi che lo convalidino nella maggiore generalità possibile, e ciò è vero in sommo grado se il rimando è privo di lettere. Raramente le lettere di un rimando istanziato possono coincidere con quelle dell'originale cui fanno riferimento, e può essere fastidioso dover argomentare contro la possibile obiezione che in realtà non si stia usando *lo stesso* enunciato: i riferimenti istanziati sono in realtà prodotti a partire da enunciati generali, e non adattamenti di altre esposizioni. Inoltre, un enunciato generale è ovviamente il più adatto a comprendere in una singola espressione tutti i casi in cui il teorema può eventualmente suddividersi, e questo non succede sempre con le esposizioni, o quando succede può essere faticoso esprimerlo.

In alcuni autori posteriori agli *Elementi* permane un certo bilanciamento, ovviamente per quanto riguarda i teoremi, tra enunciati condizionali e non: nel *corpus* archimedeo troviamo 72 enunciati

[49] Il problema costituito dagli enunciati di III.13, 26-27 e VI.33 sarà affrontato nella sez. 2.7.
[50] L'enunciato è doppio; uno è in forma condizionale, l'altro no.
[51] Archimede: 22 occorrenze e tutte teoremi, in *Sph. cyl.* I.23, 28, 36, 39, 41 (hanno tutti la stessa struttura e stabiliscono risultati similari), *Quadr.* 4-16 (tutti e soli i teoremi relativi alla quadratura "meccanica"), *Meth.* 1, 13-15. Apollonio: 24 occorrenze, in *Con.* I.53, 57 (gli unici due problemi), III.8-10, 25-26, IV. 2-5, 7-8, 10-14, 16-17, 19, 21-23, 28-29; sono sempre casi aggiuntivi di proposizioni precedenti. Nel caso di Apollonio sarà stato decisivo l'intervento di editori successivi.

condizionali, 98 in forma assertoria (più *Meth*. 9 e 11 il cui enunciato non è ricostruibile con sicurezza ma è molto probabilmente un asserto semplice), oltre a 27 problemi.

La forma condizionale prese però il sopravvento, se non altro perché in trattati meno elementari le ipotesi specifiche su cui esplicitamente poggia un risultato tendono a moltiplicarsi. Già nell'Apollonio greco, pur con le riserve dovute al fatto che nelle *Coniche* ricevono un numero d'ordine proposizioni che non sono nient'altro che casi particolari di enunciati precedenti, si riscontrano 176 enunciati condizionali, 32 in forma assertoria, oltre a 18 problemi. Ne vediamo un esempio in *Con*. I.11, dove viene introdotta la parabola. Si tratta dell'enunciato più breve tra quelli nel gruppetto I.11-13, e contiene, fatto piuttosto inusuale, la definizione della curva (*AGE* I, 36.27-38.14):

ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, // ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ᾗ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή.

Qualora un cono sia secato con un piano per l'asse, e sia secato anche con un altro piano che seca la base del cono secondo una retta che è ad ‹angoli› retti con la base del triangolo per l'asse, e ancora il diametro della sezione sia parallelo ad un solo lato del triangolo per l'asse, // qualunque ‹retta› sia condotta dalla sezione del cono parallela alla sezione comune del piano secante e della base del cono fino al diametro del cono, potrà il ‹rettangolo› compreso sia dalla ‹retta› da essa staccata dal diametro fino al vertice della sezione che da un'altra retta, che rispetto alla ‹retta› tra l'angolo del cono ed il vertice della sezione ha rapporto che il quadrato sulla base del triangolo per l'asse rispetto al ‹rettangolo› compreso dai restanti due lati del triangolo; e una sezione siffatta sia chiamata parabola.

Ho separato con una doppia barra // l'antecedente dal conseguente e sottolineato i sintagmi rilevanti. Il tratto distintivo di questo enunciato è l'uso di una varietà di accorgimenti sintattici non canonici dal punto di vista delle dottrine logiche antiche per esprimere le varie relazioni di coordinazione e subordinazione tra le ipotesi e le conseguenze (contrariamente a quanto avverrà in certi commentatori tardivi, come vedremo nella sez. 2.6). L'antecedente è in forma debolmente congiuntiva, grazie al correlativo a tre entrate … δέ… ἔτι δέ…, il secondo congiunto essendo ulteriormente determinato per mezzo di due costrutti participiali annidati. La relativa con sfumatura ipotetica ἥτις ἂν con cui inizia il conseguente ha probabilmente lo scopo di evitare un doppio condizionale annidato; la descrizione del rettangolo nella principale del conseguente è formulata per mezzo del correlativo canonico … τε… καί…, il secondo correlato essendo determinato da due proposizioni relative annidate. È probabile che Apollonio, per niente insensibile a finezze stilistiche come mostrano le sue lettere prefatorie, abbia volutamente introdotto un bilanciamento tra determinazioni annidate in antecedente e conseguente, variandone la forma (le due relative in conseguente seguono la forma normale di espressione di condizioni siffatte, che non troveremmo sotto forma di participi congiunti).

Alla necessità di trattare in forma compatta sistemi di ipotesi piuttosto articolati va aggiunto il dato stilistico, in quanto la forma condizionale è più rigida e quindi avvertita come maggiormente canonica. Così, negli *Sphaerica* di Teodosio gli enunciati condizionali predominano largamente: ve ne sono 43, contro 11 non condizionali e 6 problemi. In forma condizionale sono tutti gli enunciati che Pappo e

Teone, da esegeti puntigliosi, ricostruiscono per i *Porismi* euclidei e per i teoremi dell'*Almagesto* di Tolomeo, questi ultimi regolarmente enunciati solo in forma istanziata[52].

Possiamo aggiungere altre motivazioni, di carattere più strettamente logico-matematico. In primo luogo, la forma condizionale mette in rilievo e differenzia sintatticamente in maniera netta ciò che è assunto e ciò che viene dimostrato. In enunciati non condizionali possono crearsi incertezze dovute a una lettura frettolosa. Si confrontino I.18 e I.19 (*EE* I, 26.20-21 e 27.14-15)[53]:

παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.	Il lato maggiore di ogni triangolo sottende l'angolo maggiore.
παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.	Sotto l'angolo maggiore di ogni triangolo si tende il lato maggiore.

La differenza in greco è minore che in italiano, e consiste in un diverso ordinamento delle parole, solo apparentemente irrilevante, e nell'aggiunta della preposizione ὑπό «sotto» (il verbo è lo stesso anche se dalla traduzione non risulta). I due teoremi sono però uno l'inverso dell'altro, e, se enunciati in forma condizionale, antecedente e conseguente risulterebbero esattamente scambiati. Nel modo in cui sono formulati, insomma, non è immediatamente chiaro per quale teorema la disuguaglianza tra angoli sia il dato e per quale il risultato. Altro esempio è dato dalla coppia III.28 (la sua prima parte) e 29 (*EE* I, 132.2-4 e 133.11-12):

ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι.	Nei cerchi uguali le rette uguali sottraggono archi uguali.
ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.	Nei cerchi uguali rette uguali sottendono gli archi uguali.

Qui l'ambiguità non è sciolta dalla differenza nella forma verbale: ἀφαιρεῖν «sottrarre» in questo senso non è definito ed è usato solo qui e in III.30 (d'altronde in una citazione non istanziata di III.28) in modo piuttosto improprio, quando ci aspetteremmo ἀπολαμβάνειν «staccare»; ὑποτείνειν «sottendere» non è definito se riferito ad archi e corde ed è qui usato per la prima volta nel libro III. D'accordo, in III.28-29 sarà la presenza dell'articolo a discriminare ciò che poniamo nell'antecedente da ciò che va al conseguente, ma quale richiede l'articolo e quale no? Solo la considerazione non ovvia, e suffragata dalla pratica costante negli *Elementi*, di dotare di articolo ciò che è dato anche in caso di enunciati indefiniti fa concludere che l'articolo serve da marcatore del materiale proprio dell'antecedente e non del conseguente.

La forma condizionale è inoltre strettamente legata ad un passaggio cruciale, cioè quello che rende valido l'enunciato di una proposizione a partire dalla dimostrazione. La conclusione generale, quando presente, è infatti identica all'enunciato: contiene in più solo la particella ἄρα «quindi», a segnalare che quest'ultimo è stato validato dalla dimostrazione; nelle conclusioni di problemi il verbo è volto al perfetto, visto che la costruzione risulta portata a termine. Leggiamo le conclusioni relative a due dei tre enunciati letti all'inizio di questa sezione, cioè III.21 e IV.13 (*EE* I, 124.14-15 e 173.21-22):

ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι	In un cerchio gli angoli nello stesso segmento sono

[52] Si vedano rispettivamente *Coll*. VII.16 e *in Alm*. *I.13* (quest'ultimo solo un esempio tra molti, relativo ai cosiddetti teoremi di Menelao).

[53] In I.19 tutti i traduttori rendono al passivo un verbo che in realtà è assunto nella sua forma intransitiva: di conseguenza la preposizione ὑπό non va tradotta come se introducesse un complemento d'agente (che d'altronde richiederebbe un genitivo).

ἀλλήλαις εἰσίν.
εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται.

quindi uguali tra loro.
In un pentagono dato, che è sia equilatero che equiangolo, risulta quindi inscritto un cerchio.

Due princìpi possono essere invocati per giustificare questo passaggio logico cruciale (si noti che il problema sussisterebbe anche se la conclusione generale non fosse esplicitamente formulata: ciò che veramente viene convalidato è l'enunciato di un teorema). Il primo è il principio del condizionale corrispondente o teorema di deduzione: fu esplicitamente formulato in logica stoica, dove era il criterio usato per stabilire la validità di un argomento (Sesto Empirico, *PH* II.137, e cfr. *PH* II.249 e *M* VIII.415):

τῶν δὲ λόγων οἱ μέν εἰσι συνακτικοὶ οἱ δὲ ἀσύνακτοι, συνακτικοὶ μὲν ὅταν τὸ συνημμένον τὸ ἀρχόμενον μὲν ἀπὸ τοῦ διὰ τῶν τοῦ λόγου λημμάτων συμπεπλεγμένου λῆγον δὲ εἰς τὴν ἐπιφορὰν αὐτοῦ ὑγιὲς ᾖ.

Degli argomenti, alcuni sono concludenti, altri non-concludenti, concludenti quando il condizionale che ha come antecedente la congiunzione delle premesse dell'argomento e come conseguente la sua conclusione sia valido.

Una formulazione della regola inversa si trova in D.L. VII.77, dove si afferma che non concludono gli argomenti per cui «il contraddittorio della conclusione non è in conflitto con la congiunzione delle premesse». Le due formulazioni congiunte comportano che la validità del condizionale (Crisippeo) corrispondente sia condizione necessaria e sufficiente alla validità di un argomento – fatto peraltro già implicito nell'uso sestano di ὅταν «quando». Il principio del condizionale corrispondente è un metateorema semantico, e non va confuso con il principio di condizionalizzazione, il secondo a nostra disposizione, che è una regola per manipolare deduzioni. Esso stabilisce che, se una premessa eventualmente unita ad altre permette di dedurre una conclusione, allora le premesse addizionali permettono di dedurre il condizionale che ha come antecedente quella premessa e come conseguente la conclusione. L'assunzione che viene trasferita nell'antecedente del condizionale è detta "scaricata". Non si dànno esempi antichi di formulazione di questa regola, che però sembra quella sottintesa nella pratica matematica greca, sia perché la regola stoica del condizionale è normalmente applicata come criterio di validità di un *argomento*, non di validazione di un condizionale, sia perché raramente le assunzioni nell'antecedente di un enunciato si trovano sotto forma di congiunzione "pulita". È ragionevole supporre che la pratica matematica abbia influenzato la regolamentazione stoica, anche se per la teoria stoica la correttezza, o verità, di un condizionale è nozione analizzata in termini indipendenti (e sono note almeno tre proposte una più restrittiva dell'altra: essa è quindi a ragione posta a fondamento della nozione di argomento valido).

Occorre insistere sul fatto che un teorema rende valido il suo enunciato, e non la sua conclusione. Ho in effetti trascritto sopra solo le conclusioni di III.21 e IV.13 semplicemente perché VII.18 ne è priva, e termina con l'asserto istanziato «è quindi come A rispetto a B, così Δ rispetto a E» (*EE* II, 124.23-25). Nello schema di Proclo, la conclusione generale è però dichiarata necessaria e sempre presente (*iE*, 203.17-18). Egli trova occasione per quest'affermazione nella prima proposizione del I libro, che la tradizione degli *Elementi* trasmette concordemente priva di conclusione, e nell'àmbito di un commento al I libro, dove solo 2/3 delle proposizioni nella tradizione greca hanno una conclusione. Non ci vuol molto per convincersi che il luogo comune propagandato da Proclo, ancora ben presente nella letteratura, è del tutto privo di fondamento: come è chiaro da una semplice ispezione del *corpus* antico, le conclusioni sono totalmente assenti, salvo appunto gli *Elementi*. Per quest'opera, la presenza della conclusione è uno dei casi in cui uno sguardo alla tradizione indiretta permette di chiarire la

questione. Il numero di conclusioni attestate nelle traduzioni arabo-latine (ad esempio 66 su 460 proposizioni in quella che ne ha di più) è significativamente minore di quanto troviamo nella tradizione greca (192 su 465). All'interno di quest'ultima, per i teoremi otteniamo il rapporto 176/370, per i problemi 16/95.

Le cifre libro per libro sono raccolte nella tabella seguente: la seconda riga indica il numero di proposizioni del libro corrispondente nell'edizione di Heiberg**,** la terza e quarta riga riportano rispettivamente il numero di conclusioni attestate nella tradizione greca e nelle due traduzioni arabo-latine. Particolarmente interessante il dato del libro V, contenente l'esposizione della teoria generale delle proporzioni: nella tradizione greca ogni proposizione ha una conclusione, nessuna in quella arabo-latina (in **A** mancano tutto il IX libro e le prime 35 proposizioni del X).

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
#	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18
PT	32	12	31	10	25	22	3	1	0	20	26	7	5
G	30	12	7	1	0	0	4	0	1	7	5	0	0
A	5	0	5	3	0	0	3	0	/	(7)	4	0	2

Le indicazioni sono abbastanza univoche: l'andamento delle differenze tra le cifre riflette all'ingrosso il grado di interesse editoriale posteriore nei confronti di certi libri o certi gruppi di libri. Perfino nel I libro, nessuno dei problemi è dotato di conclusione, che manca anche in 2 teoremi. È del tutto plausibile che le conclusioni generali fossero quasi del tutto assenti nella prima redazione degli *Elementi*, e l'assetto attuale del testo greco sia dovuto in questo rispetto principalmente alla mano di editori posteriori.

1.2. Supposizione ed ἔκθεσις «esposizione»[54]

La supposizione istanziata, o ἔκθεσις «esposizione» secondo la denominazione dello schema di Proclo, è formata a partire da un enunciato condizionale nel modo seguente: l'antecedente, che contiene l'elenco dei dati della proposizione, è trasformato in una supposizione con verbo all'imperativo, il conseguente in una dichiarativa, denominata da Proclo (e da nessuno prima di lui) διορισμός «determinazione»[55]. Lo smembramento dell'enunciato in due proposizioni semplici indipendenti è necessario per mettere in rilievo i dati di partenza e poterli impiegare come premessa della dimostrazione, che è un'inferenza. Questa inizia di norma con un paracondizionale (sez. 2.4), il cui antecedente incorpora appunto una di tali premesse o una sua conseguenza immediata. Nel caso degli altri due tipi di enunciati la trasformazione segue procedure più elastiche, che permettono ad esempio la ripetizione del soggetto. I verbi e la struttura di enunciato e esposizione sono strettamente correlati, con due variazioni rilevanti. Primo, sono introdotte lettere per designare gli enti geometrici coinvolti; in certe circostanze le lettere sostituiscono interi sintagmi. Secondo, il verbo dell'esposizione è invariabilmente all'imperativo, e ciò la fa ricadere nel modo suppositivo (si veda *infra*). Le esposizioni relative ai tre enunciati di VII.18. III.21, IV.13 proposti nella sezione precedente sono le seguenti (*EE* II, 124.14-16, e I, 124.1-3 e 172.1-3):

[54] Questa sezione completa le sez. 1.0.1-2.

[55] In questa sezione presenterò occasionalmente, per ovvie ragioni di coerenza espositiva, la determinazione come se facesse parte dell'esposizione, anche se quest'ultima è propriamente solo la clausola in modo ipotetico. La determinazione in quanto tale verrà discussa nella prossima sezione.

δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

In effetti, due numeri Α, Β moltiplicando un certo numero Γ facciano Δ, Ε: dico che è come Α rispetto a Β, così Δ rispetto a Ε.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Sia un cerchio ΑΒΓΔ, e nello stesso segmento ΒΑΕΔ siano angoli ΒΑΔ, ΒΕΔ: dico che gli angoli ΒΑΔ, ΒΕΔ sono uguali tra loro.

ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Sia un pentagono sia equilatero che equiangolo dato ΑΒΓΔΕ: nel pentagono ΑΒΓΔΕ si deve pertanto inscrivere un cerchio.

Non si deve credere che la distribuzione di ipotesi e tesi tra esposizione e determinazione segua regole ferree, neanche quando l'enunciato sia in forma condizionale. Lo verifichiamo su questo bell'esempio ripartito fra III.11 e il secondo condizionale nell'enunciato di VI.2 (*EE* I, 109.24-110.7, e II, 42.15-18 e 43.16-19):

enunciato	esposizione
ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, <u>ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα</u> καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.	δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι <u>ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα</u> ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α πεσεῖται.
[…] ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, <u>ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα</u> παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.	ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, <u>καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ</u>· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

In entrambi gli enunciati il soggetto del conseguente è una retta qualificata da un'espressione participiale in posizione attributiva, ulteriormente determinata da un complemento in forma preposizionale: le due espressioni sono identiche quanto alla forma e rivestono la stessa funzione sintattica. Mentre, però, l'esposizione di III.11 ricalca la struttura del corrispondente enunciato, in quella di VI.2 la retta è assunta già in esposizione, tramite l'introduzione di un ulteriore congiunto in forma suppositiva (qui una costruzione). La determinazione fa riferimento alla retta semplicemente tramite il suo nome ἡ ΔΕ.

Se l'enunciato si presenta diviso in casi o in più sottoenunciati congiunti, può darsi (ma non è molto frequente) che un'esposizione parziale sia collocata dopo la prima parte della dimostrazione. In questo caso, l'esposizione e la determinazione parziali sono introdotte da opportuni coordinanti, come vediamo per I.26 (*EE* I, 37.16-20):

<u>ἀλλὰ δὴ πάλιν</u> ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω <u>πάλιν</u> ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

<u>Ma ora di nuovo</u> siano uguali i lati che si tendono sotto gli angoli uguali, come ΑΒ a ΔΕ: dico <u>di nuovo</u> che anche i restanti lati saranno uguali ai restanti lati, ΑΓ a ΔΖ, e ΒΓ a ΕΖ, e ancora ‹che› il restante angolo ΒΑΓ è uguale al restante angolo ΕΔΖ.

Non sempre l'esposizione è presente. Può mancare quando il teorema stabilisca un risultato negativo e l'enunciato sia in forma non condizionale. Dopo l'enunciato viene quindi proposto immediatamente il condizionale canonico incipitario di una *reductio*, che di solito contiene una esemplificazione della configurazione "impossibile" (sottolineata) immediatamente seguita dalla costruzione[56], come in X.26 (*EE* III, 41.2-7) – altri esempi in I.7, III.10, 13, 23, XI.1, 13:

μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.	Un mediale non eccede un mediale per un esprimibile.
εἰ γὰρ δυνατόν, <u>μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ</u>, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ.	Se infatti possibile, <u>un mediale AB ecceda un mediale AΓ per un esprimibile ΔB</u>, e sia fissata un'esprimibile EZ, e uguale a AB sia applicato a EZ un parallelogrammo rettangolo ZΘ facendo una larghezza EΘ, e uguale a AΓ sia sottratto ZH.

L'esposizione è assente anche in problemi per la cui costruzione non siano forniti dati iniziali (su questo anche Proclo, *iE*, 204.5-13), come IV.10, X.27-35, 48-53, 85-90[57], XIII.13-18. Non a caso, la costruzione inizia con il verbo ἐκκείσθω «sia fissato», di cui riparleremo tra breve: esso segnala l'introduzione di un oggetto, non sottoposto al vincolo di essere «dato», cui ancorare la costruzione.

Come abbiamo visto nella sezione 1.0.1, il verbo essere con cui si aprono molte esposizioni ha un valore "espositivo" o "presenziale", differente da quello copulativo o esistenziale. Naturalmente, si dà, seppur marginalmente, anche il primo caso, e ciò avviene in particolare se già l'enunciato conteneva una forma di «essere» con questo valore. La prima occorrenza negli *Elementi* di ἔστω incipitario di esposizione con valore copulativo è in I.30, di cui leggiamo anche l'enunciato (*EE* I, 42.17-20):

αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.	Le parallele alla stessa retta sono anche parallele tra loro.
ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.	Sia una e l'altra delle AB, ΓΔ parallela a EZ: dico che anche AB è parallela a ΓΔ.

Un'occorrenza non incipitaria con valore copulativo leggeremo tra breve in XI.10. Valore locativo ha il verbo «essere» in teoremi particolari, di cui prendiamo come esempio enunciato ed esposizione di XII.5 (EE IV, 92.20-25):

αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.	Le piramidi che sono sotto la stessa altezza e che hanno basi triangolari sono tra loro come le basi.
ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.	Siano sotto la stessa altezza delle piramidi, basi delle quali i triangoli ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertici i punti Η, Θ: dico che è come la base ΑΒΓ rispetto alla base ΔΕΖ, così la piramide ΑΒΓΗ rispetto alla piramide ΔΕΖΘ.

[56] Sia esemplificazione che costruzione sono in modo ipotetico e congiunte da un καί, ma solo la prima fa parte del conseguente del condizionale introdotto da εἰ.
[57] Quelle del libro X sono tutte costruzioni in εὑρεῖν «trovare» (cfr. sez. 1.3).

Di un certo interesse sono le forme perifrastiche ἔστω + participio: esse mettono in rilievo la portata presenziale della forma verbale impiegata nell'enunciato, che qualifica l'assunzione iniziale dell'oggetto in questione. Ne leggiamo due esempi, in I.36 e X.42 (*EE* I, 49.14-19, e III, 68.17-20), il primo non un esempio di valore locativo a causa della ripetizione del participio ὄντα, il secondo rappresentativo dell'intera esade X.42-47:

τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.	I parallelogrammi che sono su basi uguali e nelle stesse parallele sono uguali tra loro.
ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ.	Siano parallelogrammi ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ che sono su basi uguali ΒΓ, ΖΗ e nelle stesse parallele ΑΘ, ΒΗ.
ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.	Una binomiale si divide nei nomi secondo un punto soltanto.
ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ.	Sia una binomiale ΑΒ che risulta divisa nei nomi secondo Γ.

Non sempre l'esposizione inizia con il verbo «essere». Sono altrettanto frequenti i casi in cui il verbo posto all'imperativo nella prima clausola dell'esposizione è quello presente nell'enunciato. La differenziazione tra esposizioni con verbo «essere» incipitario e quelle con altro verbo ha motivazioni puramente stilistiche: le due formulazioni sono facilmente trasformabili l'una nell'altra, ad esempio impiegando una costruzione di participio congiunto oppure una vera e propria congiunzione, come vediamo sull'esempio delle esposizioni di XIII.3-4, i cui due enunciati sono dei condizionali con antecedenti identici (*EE* IV, 141.1-3, e 142.10-11)[58]:

εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, […]	In effetti, una certa retta ΑΒ sia secata in rapporto estremo e medio secondo un punto Γ, e segmento maggiore sia ΑΓ, […]
ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ.	Sia una retta ΑΒ, e sia secata in rapporto estremo e medio secondo Γ, e segmento maggiore sia ΑΓ.

Di norma, la presenza del verbo «essere» incipitario è legata alla struttura dell'enunciato: se è in forma non condizionale, l'esposizione inizia appunto con un imperativo di questo verbo con significato espositivo, che presenta l'ente matematico che è il soggetto logico della proposizione; se invece l'enunciato è in forma condizionale, il verbo dell'esposizione coincide con quello dell'antecedente del condizionale ed è posto nella stessa posizione, che di norma non segue immediatamente il connettore ἐάν «qualora». Di conseguenza, verbi incipitari che non siano «essere» sono estremamente infrequenti, e indotti da scelte stilistiche o da vincoli legati all'interferenza con espressioni formulari canoniche, come nella prima parte dell'enunciato di XII.10 (*EE* IV, 104.16-19):

πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.	Ogni cono è terza parte di un cilindro, quello che ha la sua stessa base e altezza uguale.
<u>ἐχέτω</u> γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν	In effetti, <u>abbia</u> un cono sia come base la stessa di un

[58] L'antecedente identico nei due casi è ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ «qualora una linea retta sia secata in rapporto estremo e medio». Si noti, in entrambe le esposizioni, il valore copulativo del verbo «essere» nella sua seconda occorrenza: in una retta secata in rapporto estremo e medio il segmento maggiore è infatti univocamente determinato.

τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον.

cilindro, il cerchio ΑΒΓΔ, che altezza uguale.

Si noti che né al cono né al cilindro sono attribuite lettere, in quanto la dimostrazione opera soltanto sulle loro basi.

Altrettanto poco frequente è il caso in cui l'esposizione sia governata da un verbo differente da quello dell'enunciato. Ciò accade ad esempio se quest'ultimo indica un'azione subita da un oggetto, come nella nostra proposizione prototipica III.2 o nel primo congiunto dell'antecedente dell'enunciato di III.9 (*EE* I, 107.14-20), dove il verbo «essere» nell'esposizione è, con costruzione canonica ἀπὸ κοινοῦ, messo "a fattore comune" delle due frasi che seguono:

ἐὰν κύκλου <u>ληφθῇ</u> τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.
<u>ἔστω</u> κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ.

Qualora <u>sia preso</u> un certo punto all'interno di un cerchio, e dal punto incidano sul cerchio più di due rette uguali, il punto preso è il centro del cerchio.
<u>Sia</u> un cerchio ΑΒΓ, un punto all'interno di esso Δ, e da Δ incidano sul cerchio ΑΒΓ più di due rette uguali ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ.

oppure nei teoremi del libro I che coinvolgono triangoli, come vediamo sull'esempio di I.8 (*EE* I, 15.23-16.8):

ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας <u>ἔχῃ</u> ἑκατέραν ἑκατέρα, <u>ἔχῃ</u> δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.
<u>ἔστω</u> δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας <u>ἔχοντα</u> ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· <u>ἐχέτω</u> δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην.

Qualora due triangoli <u>abbiano</u> i due lati rispettivamente uguali a[i] due lati, e <u>abbiano</u> anche la base uguale alla base, avranno anche l'angolo compreso dalle rette uguali uguale all'angolo.
<u>Siano</u> due triangoli ΑΒΓ, ΔΕΖ <u>che hanno</u> i due lati ΑΒ, ΑΓ rispettivamente uguali ai due lati ΔΕ, ΔΖ, ΑΒ a ΔΕ e ΑΓ a ΔΖ; e <u>abbiano</u> anche ΒΓ come base uguale a ΕΖ come base.

Dei due verbi «avere» nell'antecedente del condizionale, il primo è trasformato in un participio attributivo retto da un verbo «essere» con portata espositiva, il secondo segue la regola predominante di trasformazione in imperativo. Imperativi di «essere» non incipitari si rintracciano se già questo era il verbo dell'antecedente ed ha significato copulativo, mentre per converso se il significato è espositivo già nell'enunciato l'esposizione inizia regolarmente con «essere», come vediamo sugli esempi di XI.10 e V.22 (*EE* IV, 15.10-15, e II, 32.14-20):

'ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων <u>ὦσι</u> μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.
δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων <u>ἔστωσαν</u> μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.
ἐὰν <u>ᾖ</u> ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ

Qualora due rette che si toccano tra loro <u>siano</u> parallele a due rette che si toccano tra loro non nello stesso piano, comprenderanno angoli uguali.
In effetti, due rette ΑΒ, ΒΓ che si toccano tra loro <u>siano</u> parallele a due rette ΔΕ, ΕΖ che si toccano tra loro non nello stesso piano.
Qualora <u>siano</u> quante si voglia grandezze e altre uguali ad esse in molteplicità, e nello stesso rapporto prese

λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.
ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

due a due, anche tramite uguale saranno nello stesso rapporto.
Siano quante si voglia grandezze A, B, Γ e altre uguali ad esse in molteplicità Δ, E, Z, nello stesso rapporto prese due a due, come A rispetto a B, così Δ rispetto a E, e come B rispetto a Γ, così E rispetto a Z.

Un altro tratto stilistico curioso fa sì che venga sempre inserito un γάρ (non esplicativo ma "strutturante", a segnalare lo stacco argomentativo: «in effetti» o «di fatto», oppure, in quanto tratto idiomatico di grado zero della lingua greca, potrebbe anche non essere tradotto) all'inizio delle esposizioni introdotte da un verbo diverso da «essere» o da uno dei suoi rari sostituti presenziali, mentre quelle con «essere» incipitario ne sono sistematicamente prive. Le eccezioni a questa regola nel testo principale degli *Elementi* sono pochissime, e tutti esempi con verbo «essere» incipitario: si tratta di I.18, 20, III.24, V.11, 15, 19, VI.21, VII.20, X.80, 105, XI.9[59], XII.9, 14. Nessuna eccezione nei *Data* o in Apollonio[60]. Che si tratti di una variante stilistica, per quanto strettamente minoritaria[61], è confermato dalle esposizioni analoghe di I.30 e XI.9, che contengono, come abbiamo appena visto, esempi di verbo «essere» con funzione copulativa (*EE* I, 42.19-20, e IV, 14.14-18):

ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.
ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Sia una e l'altra delle AB, ΓΔ parallela a EZ: dico che anche AB è parallela a ΓΔ.
In effetti, sia parallela a EZ una e l'altra delle AB, ΓΔ che non sono nel suo stesso piano: dico che AB è parallela a ΓΔ.

Quest'osservazione conferma che il verbo «essere» incipitario funziona da marcatore linguistico atto a identificare l'esposizione. M. Federspiel (2010, 109-12) ipotizza che una tale compartimentazione si sia prodotta in conseguenza dell'evoluzione del formato dimostrativo di una proposizione, che in origine non sarebbe stata aperta da un enunciato generale ma direttamente dall'esposizione, introdotta da un ἔστω presenziale. Il γάρ strutturante sarebbe stato ovviamente inutile nel tratto iniziale di una proposizione.

Passiamo ora a studiare uso e significato del termine ἔκθεσις e affini nel dominio matematico.

Il sostantivo ἔκθεσις è forma nominale derivata da ἐκτιθέναι. Il significato del verbo in contesti matematici è «fissare», riferito ad un ente matematico non assunto tra i dati del problema ma che il matematico si pone concretamente davanti come oggetto della propria dimostrazione. Così andrà tradotto ad esempio sin dalla sua prima occorrenza negli *Elementi*, l'inizio della costruzione di I.22: ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ «sia fissata una certa retta ΔΕ» (*EE* I, 31.9). Nel *corpus* euclideo il sostantivo ricorre solo due volte, in due dimostrazioni alternative della redazione **b** dei *Phaenomena*. Il verbo ricorre invece 177 volte, 174 delle quali come forme di ἐκκεῖσθαι (un presente *pro perfecto*), che come è noto fa spesso le veci del passivo di (ἐκ)τιθέναι. *Nessuna* di queste occorrenze si trova nell'esposizione: sono tutte nella costruzione, e già questo fatto indica chiaramente quanto il termine ἔκθεσις sia mal scelto. Il libro X da solo esaurisce tre quarti delle 163 occorrenze nel complesso degli

[59] Si noti che V.11, VI.21 e XI.9 dimostrano rispettivamente la transitività di identità di rapporto, similitudine e parallelismo nello spazio.
[60] Archimede offre molte più occorrenze, in *Sph. cyl.* I.4, 27, 28*, 30, 32*, 33, 34, 38, 40, 41, 43, II.3por, *Con. sph.* 4, 5, 21, 26, 27*, 29, *Quadr.* 17, 18, 19, 20, 22, 24, *Spir.* 19, *Fluit.* I.4 (* = esposizione non incipitaria).
[61] Essa è anche piuttosto antica: solo per X.105 l'apparato di Heiberg riporta una variante significativa (i mss. teonini omettono il γάρ; cfr. *EE* III, 190.20 *in app.*).

Elementi: vi se ne contano 121. La classificazione delle linee irrazionali presuppone infatti l'aver «fissato» come riferimento una retta, chiamata ῥητή «esprimibile». Questa assunzione cruciale (una retta non può essere irrazionale in sé, ma solo in riferimento ad un'altra assunta come *standard*)[62] viene ripetuta in buona parte dei teoremi del libro X[63], semplicemente perché la linea esprimibile adatta alle esigenze di ogni singola dimostrazione varia da teorema a teorema. Tale assunzione è di norma formulata ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ «sia fissata un'esprimibile ΑΒ» (si noti ancora la forma indefinita). Vengono impiegate forme dell'imperativo di ἐκκεῖσθαι e non di εἶναι in quanto la linea esprimibile figura raramente tra gli oggetti menzionati nell'enunciato: per questo motivo le assunzioni in ἐκκείσθω sono fatte nella costruzione e non nell'esposizione, come vediamo sull'esempio di X.108 (*EE* III, 194.6-14):

ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.	Sottratto da un ‹dominio› esprimibile uno mediale la ‹retta› che può il dominio restante risulta una sola di due irrazionali, o apotome oppure minore.
ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.	In effetti, da un ‹dominio› esprimibile ΒΓ sia sottratto un mediale ΒΔ: dico che la ‹retta› che può ΕΓ restante risulta una sola di due irrazionali, o apotome oppure minore.
<u>ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ</u>, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ.	<u>In effetti, sia fissata un'esprimibile ΖΗ</u>, e uguale a ΒΓ sia applicato a ΖΗ un parallelogrammo rettangolo ΗΘ, e uguale a ΔΒ sia sottratto ΗΚ.

Nelle occorrenze in cui l'esprimibile è menzionata come data nell'enunciato, nell'esposizione viene a volte adottato l'imperativo ἐκκείσθω invece di ἔστω, un'eccezione notevole alla pratica degli *Elementi*. Leggiamo come esempio l'inizio di X.60 (*EE* III, 103.19-104.1):

τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.	Il ‹quadrato› su una binomiale applicato a un'esprimibile fa una larghezza binomiale prima.
ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ <u>ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ</u>, […]	Sia una binomiale ΑΒ che risulta divisa nei nomi secondo Γ, così da essere il nome maggiore ΑΓ, e <u>sia fissata un'esprimibile ΔΕ</u>, […]

Del tutto analogamente a quanto accade per un'esprimibile, anche un'unità è «fissata» in VIII.9 e IX.32.

Lo spettro d'impiego del verbo ἐκκεῖσθαι è piuttosto ampio, anche all'interno del libro X, e merita una discussione dettagliata. Iniziamo dai dati: nella tabella seguente riporto la distribuzione, nel testo principale degli *Elementi*, di ἐκτιθέναι / ἐκκεῖσθαι per forma verbale e tipo di ente matematico presentato; marcati con asterisco i teoremi in cui la forma verbale ricorre nell'enunciato (l'occorrenza in X.2, che non registro, va considera spuria):

	oggetto geometrico	numeri	grand.	esprimibile
ἐκκείσθω	I.22, IV.10-11, VI.23,	VIII.9, IX.32		X.23, 25-26, 29-30, 38, 41, 41/42, 44,

[62] Questa dialettica viene sussunta, nel materiale scolare annesso agli *Elementi*, sotto la contrapposizione tradizionale fra «natura» e «convenzione»; cfr. ad esempio lo scolio n. 1 *ad El. X*, *EE* V,2, 83.1-15.
[63] In X.27-35 vengono assunte più esprimibili in certe relazioni tra loro.

	XI.36, XIII.13, 13/14, 14-16, 18			47, 48-53, 60-61, 64, 71-72, 75, 78, 81, 84, 85-90, 108-109, 111, 114-115
ἐκκείσθωσαν	VI.12, XI.23/24, XII.13, XIII.17	IX.36, X.10, 28/29, 29-30, 48-53, 85-90		X.27-28, 31-35
ἐκκειμεν–	XII.11	VII.1*, IX.36	X.1*, XII.2	X.18/19, def.II*, 49, 52-54, 60, 63, 65-66, 71-72 X.85-103, def.III*, 108-113
ἐκτιθέναι	XIII.18*	IX.36*		

Particolarmente interessanti le occorrenze nell'enunciato. Leggeremo quella in XIII.18 tra breve. VII.1, IX.36 e X.1 sono teoremi di un genere particolare: sono fissati (verbo ἐκκεῖσθαι appunto) numeri o grandezze e su di essi si innesta una procedura iterativa dotata di una condizione di arresto. In VII.1 la procedura è l'algoritmo euclideo di sottrazioni successive applicato a numeri, la condizione di arresto il raggiungimento di un'unità. In X.1 la procedura è la sottrazione successiva di una grandezza maggiore di metà di una fissata, la condizione di arresto il raggiungimento di una soglia stabilita dall'altra delle due grandezze prefissate[64]. In queste proposizioni, dunque, il verbo ἐκκεῖσθαι funziona da sinonimo di δίδοσθαι «essere dato», che presumibilmente non viene usato, con una demarcazione stilistica molto pronunciata, in quanto si tratta di teoremi e non di problemi. In effetti, quando la procedura di sottrazioni successive viene applicata all'interno di problemi, come in VII.2-3 e X.3-4, le grandezze assegnate sono regolarmente dotate del predicato «dato». In IX.36 la procedura è l'esposizione dei termini successivi di una progressione geometrica di ragione 2, la condizione di arresto è che la loro somma sia un numero primo. Il verbo ha la sfumatura propria della teoria dei numeri, dove gli oggetti introdotti da ἐκκείσθω sono di norma sottoposti a vincoli più rigidi di quanto lo siano le entità normalmente assegnate come date. Leggiamo l'esposizione di IX.36 (*EE* II, 224.18-23) – il verbo è presente in esposizione perché lo è nell'enunciato:

ἀπὸ γὰρ μονάδος <u>ἐκκείσθωσαν</u> ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω.	In effetti, a partire da un'unità <u>siano fissati</u> quanti mai si voglia numeri in proporzione raddoppiata, fino a che il totale composto sia primo, Α, Β, Γ, Δ, e uguale al totale sia Ε, e Ε moltiplicando Δ faccia ΖΗ.

Assegnazioni numeriche di altro genere si trovano nei problemi X.10, 28/29, 29-30, 48-53 e 85-90[65], di cui leggiamo quella in X.48; ovviamente c'è anche la retta esprimibile (*EE* III, 77.14-18)[66]:

<u>ἐκκείσθωσαν</u> δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ <u>ἐκκείσθω</u> τις ῥητὴ ἡ Δ, […]	<u>Siano fissati</u> due numeri ΑΓ, ΓΒ, così da avere quello composto da essi ΑΒ rispetto a ΒΓ rapporto che un numero quadrato rispetto a un numero quadrato, e rispetto a ΓΑ non avere rapporto che un numero quadrato rispetto a un numero quadrato, e <u>sia fissata</u> una certa esprimibile Δ, […]

[64] X.1 è caratterizzata da ἔστω incipitario in esposizione che sostituisce l'atteso ἐκκείσθω. Ciò conferma ulteriormente l'identificazione del valore espositivo del verbo «essere» in questo contesto.
[65] In X.29-30 e 90 la forma verbale è "a fattore comune" tra esprimibile e assegnazione numerica
[66] Nella seconda esade l'assegnazione numerica è scambiata con quella geometrica.

Nella tradizione aritmetica neopitagorica, rappresentata per esempio dagli scritti di Nicomaco e Giamblico[67], la clausola in ἐκκείσθω divenne la formulazione canonica con cui introdurre sequenze numeriche particolari.

Sono necessarie due parole di introduzione al contenuto del libro X per comprendere meglio la distribuzione in esso delle occorrenze di forme di ἐκκεῖσθαι. Dopo una serie di risultati preliminari e la costruzione della prima linea irrazionale – la «mediale» – vengono introdotte 6 linee irrazionali ottenute per somma di rette esprimibili o mediali che siano tra loro in opportune relazioni di (in)commensurabilità (X.36-41). Lo stesso meccanismo è impiegato per generare 6 linee irrazionali per sottrazione (X.73-78): le due rette di base non sono sommate ma sottratte una dall'altra. Vediamo in un prospetto le corrispondenze tra le denominazioni delle 6 specie ottenute per somma e le 6 per sottrazione:

	somma		sottrazione
X.36	binomiale	X.73	apotome
X.37	bimediale prima	X.74	apotome prima di una mediale
X.38	bimediale seconda	X.75	apotome seconda di una mediale
X.39	maggiore	X.76	minore
X.40	‹retta› che può esprimibile e mediale	X.77	‹retta› che con un esprimibile fa il totale mediale
X.41	‹retta› che può due mediali	X.78	‹retta› che con un mediale fa il totale mediale

I nomi delle ultime quattro si riferiscono esplicitamente alla maniera della loro formazione. Il resto del libro X contiene la dimostrazione che le 6 irrazionali definite per somma e le 6 per sottrazione sono univocamente determinate ed identificano classi distinte di irrazionali. A questo compito sono dedicate 5 proposizioni, una per ogni specie; è inclusa la definizione e costruzione di 6 sottospecie di binomiale e di 6 sottospecie di apotome. Siccome le dimostrazioni sono ripetute per ognuna delle 6 + 6 irrazionali (ognuna di queste sequenze di 6 proposizioni analoghe è detta "esade"), la mole del libro X si spiega facilmente: 1 proposizione in cui è introdotta la specie più 5 di classificazione, che moltiplicato per 12 dà 72 proposizioni. In realtà ne troviamo 70: le proposizioni 67 e 104, d'altronde strettamente parallele, inglobano eccezionalmente due specie (le due bimediali e le due apotomi di una mediale) in uno solo teorema. La teoria vera e propria inizia dalla proposizione 36, il che fa arrivare a 105 proposizioni; si aggiungano 5 teoremi che costruiscono le 12 specie principali a partire da somme o sottrazioni di domìni (71-72 e 108-110) e il teorema con cui si dimostra che un'apotome non è la stessa di una binomiale (111), e resta lo spazio per 4 risultati finali, concordemente riconosciuti spuri. Ecco contenuto e demarcazioni del cuore del libro X:

	somma	sottrazione
costruzione lineare delle 6 irrazionali	36-41	73-78
unicità della divisione in rette componenti	42-47	79-84
definizione delle 6 sottospecie	defII	defIII
costruzione delle 6 sottospecie	48-53	85-90
prima relazione tra le 6 specie e le 6 sottospecie	54-59	91-96
seconda relazione tra le 6 specie e le 6 sottospecie	60-65	97-102
stabilità di ogni specie sotto commensurabilità	66-70	103-107

[67] La forma nominale ἔκθεσις e i due verbi ἐκτιθέναι ed ἐκκεῖσθαι contano numeri pressappoco uguali di occorrenze sia nella *Introductio arithmetica* di Nicomaco che nel rifacimento di Giamblico, con leggere prevalenza accordata al sostantivo.

identificazione tramite domìni	71-72	108-110

Nelle tabelle seguenti riporto la distribuzione delle forme ἐκκείσθω ed ἐκκειμεν– nelle esadi del libro X: ciò indica come e quando venga introdotta l'esprimibile, e in quali teoremi si faccia riferimento ad essa nel corso della dimostrazione (di norma come citazione istanziata delle defII o III). In due delle menzioni in cui l'esprimibile è introdotta da ἔστω «sia», è poi richiamata con un participio ἐκκειμένη. Prima la tabella dell'imperativo:

I	II	III	IV	V	VI	ident.
/ / 38 / / 41	/ / 44 / / 47	48-53	/	60 61 / / 64 /	/	71-72
/ / 75 / / 78	/ / 81 / / 84	85-90	/	/ / / / / /	/	108 109 /

e poi quella del participio:

I	II	III	IV	V	VI	ident.
/	/	/ 49 / / 52 53	54 / / / /	60 / / 63 / 65	66 / / / /	71 72
/	/	85-90	91-96	97-102	103 / / / /	108 109 110

Le occorrenze dell'imperativo rispettano una notevole simmetria se escludiamo la quinta esade. Le occorrenze sporadiche (ma parallele) nelle prime due esadi sono legate al fatto che solo due delle sei irrazionali necessitano per essere generate di una costruzione "piana", in cui un dominio opportuno viene applicato all'esprimibile fissata. I teoremi della quarta e quinta esade menzionano l'esprimibile nell'enunciato. Le esposizioni della quarta esade mantengono il verbo dell'enunciato; non vi compaiono quindi verbi espositivi e l'esprimibile è designata direttamente da lettere; lo stesso accade per le due esprimibili negli enunciati di X.36 e 73. Nella quinta esade l'enunciato è trasformato in una esposizione con verbo «essere» incipitario, e l'elenco che segue comprende anche la retta esprimibile: solo in tre occasioni (X.60-61, 64) questa è ulteriormente introdotta da ἐκκείσθω. Tra le identificazioni finali, l'intera costruzione è preterita in X.110. Tutte le occorrenze delle forme participiali seguono quelle primarie in defII e defIII (*quater* ciascuna, nella definizione delle prime 4 sottospecie), in cui, fatto notevole, l'esprimibile è introdotta dal genitivo assoluto ὑποκειμένης ῥητῆς «supposta un'esprimibile». Le esadi delle irrazionali ottenute per sottrazione hanno il participio in tutte le occorrenze possibili, quelle delle irrazionali ottenute per somma solo occasionalmente, anche se in due casi su tre il participio è presente nella prima proposizione dell'esade.

Al di fuori della teoria delle linee irrazionali, gli oggetti *geometrici* presentati o qualificati da forme di ἐκκεῖσθαι sono in senso forte lasciati alla scelta del matematico responsabile della dimostrazione, in quanto non soggetti a vincoli ulteriori. Il verbo è in effetti impiegato per assegnare tali enti in situazione di totale indeterminazione, quando cioè gli oggetti non siano menzionati nell'enunciato né forzati nella loro costruzione. Ciò avviene sempre nelle costruzioni, in I.22, IV.10, VI.12, 23, X.29, 48, 50, 52-53, 62, XI.23/24 XII.13 (retta), IV.11 (triangolo), XI.36 (angolo solido), XIII.11, 13-16, 18 (diametro che ha funzione di esprimibile), XIII.18 (spigoli dei poliedri regolari), XIII.13, 16 (cerchio), XIII.14-15 (quadrato), XIII.17 (due facce di un cubo), a cui possiamo aggiungere *Data* 6 (grandezza), 24 (retta data *tout court*), 39 (retta data in posizione), 42 (in grandezza), 40-41, 43, 55, 80 (grandezza e posizione).

In Apollonio forme di ἐκκεῖσθαι si rintracciano solo in *Con.* II.51 (*bis*), 52, 53[68]. Sono 4 occorrenze dell'imperativo all'interno di costruzioni e introducono oggetti arbitrari ausiliari (una retta e due cerchi) totalmente disconnessi dai dati del problema. Archimede fa un uso peculiare di ἐκκεῖσθαι; le occorrenze sono ripartite secondo il prospetto seguente (quelle prive di indicazione d'opera si trovano in *Sph. cyl.*):

	esposizione	costruzione	conclusione
ἐκκείσθω	I.5, 16, 18-20, 24, *Con. sph.* 21	I.15, 18, 25,	
ἐκκείσθωσαν		I.16, 19, 20, 24, 34, II.3	
ἐκκειμένῳ			I.26

Le occorrenze nelle costruzioni rientrano nella tipologia appena descritta per gli *Elementi* ed i *Data*, in *Sph. cyl.* I.34 come sinonimo di ἔστωσαν εἰλημμέναι, in I.5 come sinonimo di δεδόσθω oppure ἔστω + participio δοθέν. Nelle altre esposizioni la presenza del verbo è spiegata dalla peculiarità dei risultati da dimostrare, di un genere non presente né negli *Elementi* né nelle *Coniche* di Apollonio, come leggiamo in *Sph. cyl.* I.18 (*AOO* I, 76.18-78.2):

παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου.

ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΑΔ, ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ΗΘΚ τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ, ἔστω δὲ ἡ ΔΖ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ΘΗΚ κώνου ἔστω τὸ ΘΛ· ἴσον δή ἐστιν τὸ ΘΛ τῇ ΔΖ· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ.

Ad ogni rombo composto da coni isosceli è uguale un cono che ha base uguale alla superficie di un cono tra quelli che comprendono il rombo, altezza uguale alla ‹retta› condotta dal vertice dell'altro cono perpendicolare ad un solo lato dell'altro cono.

Sia un rombo composto da coni isosceli ΑΒΓΔ, base del quale il cerchio intorno al diametro ΒΓ, altezza ΑΔ, e sia fissato un certo altro ‹cono› ΗΘΚ che ha la base uguale alla superficie del cono ΑΒΓ, l'altezza uguale alla ‹retta› condotta dal punto Δ perpendicolare a ΑΒ oppure a quella condotta in ‹linea› retta con essa, sia ΔΖ, e l'altezza del cono ΘΗΚ sia ΘΛ – ΘΛ è pertanto uguale a ΔΖ: dico che il cono è uguale al rombo.

Occorre dunque stabilire l'uguaglianza tra due oggetti geometrici: il primo è un rombo conico dato, il secondo un cono dalle caratteristiche dimensionali ben precise, specificate tramite uguaglianze con componenti del rombo conico. Quest'ultimo è ottenuto come risultato finale di un procedimento che lo *dimostra* uguale ad un *terzo* cono uguale al rombo dato, il terzo cono essendo regolarmente introdotto da ἐκκείσθω *all'inizio della costruzione*. Il cono che figura in enunciato è dunque di un ente fittizio, lì presente solo per necessità espositive (si noti anche l'ordine dei due termini in gioco). Per questo motivo è introdotto nell'esposizione da ἐκκείσθω: non è un oggetto *su cui* verte la dimostrazione, ma un'anticipazione del risultato finale: la descrizione definita di un ente complesso generato come "membro destro" di un'uguaglianza.

Non si tratta dell'ennesima prova di eterodossia archimedea, ma di una mossa che si radica in una delle caratteristiche più sorprendenti della geometria greca, cioè la "attualizzazione" delle grandezze

[68] *AGE* I, 300.4 e 27, 308.1, 312.18. La doppia occorrenza in II.51 è dovuta al formato di analisi e sintesi. La retta fissata in II.51 è denominata δεδομένη, e dobbiamo a mio avviso supporre un intervento maldestro di un revisore; solo nella prima occorrenza l'arbitrarietà della retta è rimarcata da un τις.

in gioco tramite la produzione di duplicati, in particolare nel quadro di dimostrazioni per analisi e sintesi (si veda Acerbi 2011a). In questo quadro, l'uso di forme di ἐκκεῖσθαι è esattamente quanto ci dobbiamo attendere di trovare. Vediamo come leggendo Teodosio, *Sph*. I.18 (32.6-24):

τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι.	Fissare il diametro di un cerchio dato in una sfera.
ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι.	Sia un cerchio dato in una sfera ΑΒΓ: si deve pertanto fissare il diametro del cerchio ΑΒΓ.
εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΔΕΖ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΔΕ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ, τὴν δὲ ΕΖ τῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ε σημείου τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ. ἤχθω δὴ διάμετρος τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΓΘ.	Siano presi sulla circonferenza del cerchio punti come càpita Α, Β, Γ, e da tre rette sia costruito un triangolo ΔΕΖ, così da essere ΔΕ uguale a quella da Α fino a Β, ΔΖ uguale a quella da Α fino a Γ, ΕΖ a quella da Β fino a Γ, e dal punto Ε ad ‹angoli› retti con ΕΔ sia condotta ‹una retta› ΕΗ, e da Ζ ad ‹angoli› retti con ΔΖ sia condotta ‹una retta› ΖΗ, e sia congiunta ΔΗ. Sia ora condotto un diametro ΑΘ del cerchio ΑΒΓ, e siano congiunte ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΓΘ.
ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστί, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΗΖ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΘ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ ἴση ἐστί, καί ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα τῇ ΔΗ ἴση ἐστί. καί ἐστιν ἡ ΑΘ διάμετρος τοῦ κύκλου· ἡ ΔΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου.	Poiché dunque due ΑΒ, ΒΓ sono rispettivamente uguali a due ΔΕ, ΕΖ, e una base ΑΓ è uguale a una base ΔΖ, un angolo ΑΒΓ è quindi uguale a un angolo ΔΕΖ. Ma ΑΒΓ è uguale a ΑΘΓ, e ΔΕΖ è uguale a ΔΗΖ: anche ΑΘΓ è quindi uguale a ΔΗΖ. Ma anche ΑΓΘ retto è uguale a ΔΖΗ retto, ed è ΑΓ uguale a ΔΖ: anche ΑΘ è quindi uguale a ΔΗ. Ed è ΑΘ un diametro del cerchio: ΔΗ è quindi uguale al diametro del cerchio.

Il matematico cui è richiesto di «fissare» un oggetto matematico, qui il diametro di un cerchio dato su una sfera, non si limita a tracciare ἡ ΑΘ (come viene pur fatto alla fine della costruzione) e a dire "eccolo", ma replica la configurazione geometrica e dà l'appellativo di «fissato» all'elemento della replica uguale al diametro precedentemente tracciato. Si tratta dell'esatta controparte della definizione di «dato in grandezza» come ciò «di cui possiamo produrre (πορίζειν) un uguale». Solo con la replica abbiamo a che fare in *El*. XIII.18, dove è richiesto di fissare gli spigoli dei cinque poliedri regolari (*EE* IV, 180.19-21):

τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.	Fissare e confrontare tra loro i lati delle cinque figure.
ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, […]	Sia fissato il diametro della sfera data ΑΒ, […]

Operazione preliminare, effettuata nella costruzione (il problema è privo di esposizione), è «fissare» un diametro della sfera invariante su cui si basano le costruzioni dei poliedri in XIII.13-17[69]; per questo la costruzione ha l'articolo: la sfera è stata introdotta in precedenza. Di conseguenza, anche gli

[69] Potremmo ipotizzare che ciò avvenga tramite la procedura di *Sph*. I.19, la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella di I.18.

spigoli sono «fissati», in quanto l'enunciato non fornisce «dati» a partire da cui costruirli (non menziona neanche la sfera, che è quindi data solo in quanto legata in modo invariante ai poliedri) e in quanto sono generati all'interno di una configurazione geometrica ausiliaria uguali ai rispettivi originali nel poliedro effettivamente inscritto nella sfera data. Allo stesso modo, occorre supporre che l'operazione di «fissare» arbitrariamente un oggetto cui il geometra ricorre talvolta per ancorare le sue costruzioni consista nel «produrne» (πορίσασθαι) una copia conforme: così per un'esprimibile, così per un'unità, così per fissare il particolare triangolo isoscele in IV.11, che abbiamo imparato a costruire in IV.10. Del triangolo «fissato» in IV.11 (*EE* I, 167.13-20) viene a sua volta prodotta una copia, in conformità con IV.2, su cui costruire il poligono cercato:

ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ·

Sia fissato un triangolo isoscele ΖΗΘ che ha uno e l'altro degli angoli su Η, Θ doppio di quello su Ζ, e sia inscritto nel cerchio ΑΒΓΔΕ un triangolo ΑΓΔ equiangolo al triangolo ΖΗΘ, così da essere all'angolo su Ζ uguale ΓΑΔ, e quelli su Η, Θ siano rispettivamente uguali a ΑΓΔ, ΓΔΑ:

Analoga funzione hanno alcune delle rare costruzioni introdotte da νενοήσθω «sia concepito», come quelle in IV.12 e XI.12 (*EE* I, 169.7-12, e IV, 18.15-18)[70] – si noti l'assenza del γάρ: il verbo è un sostituto di «essere» con funzione espositiva:

νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Siano concepiti punti degli angoli del pentagono inscritto Α, Β, Γ, Δ, Ε, così da essere gli archi ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ uguali; e per Α, Β, Γ, Δ, Ε siano condotte tangenti al cerchio ‹rette› ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ, e sia preso Ζ centro del cerchio ΑΒΓΔΕ, e siano congiunte ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

Sia concepito un certo punto in alto Β, e da Β perpendicolare al piano soggiacente sia condotta ‹una retta› ΒΓ, e per il punto Α parallela a ΒΓ sia condotta ‹una retta› ΑΔ.

Nel libro XII il verbo è impiegato per la presentazione di solidi univocamente determinati, e in XII.17 e 18 si trova in esposizione ed ha come soggetto delle sfere. Apollonio impiega quest'ultimo verbo in maniera analoga nelle costruzioni in *Con*. I.52, 54, 56 (*AGE* I, 160.18, 168.14, 178.12; solo forma νοείσθω), dove però è questione di «concepire» un cono di vertice e cerchio di base dati (e quindi univocamente determinato); Archimede ne fa largo uso (66 occorrenze in tutto il *corpus*), in un'ampia varietà di situazioni geometriche: è di uno dei molti tratti stilistici che caratterizzano la sua prosa.

Nella sillogistica aristotelica il termine ἔκθεσις «esposizione» ed il verbo associato assumono una varietà di significati[71]. Il primo è riservato a designare un tipo di dimostrazione di validità sillogistica

[70] Altre occorrenze nel testo principale degli *Elementi* in XII.4/5, 13 (νοείσθω), 14-15, 17 (*ter*, verbo ἐννοεῖν), 18 (*bis*).
[71] La migliore discussione della questione si trova in Di Lascio 2002; si veda con cautela Smith 1982 per una messa a punto precedente, basata su un parallelismo fuorviante con l'esposizione di una dimostrazione geometrica.

della conversione dell'universale negativa (*APr*. A 2, 25a14-19) e degli schemi assertori *Darapti* (A 6, 28a17-26), *Datisi* (A 6, 28b14-15), *Bocardo* (A 6, 28b20-21) e modali *Baroco* e *Bocardo* con premesse e conclusione necessarie (A 8, 30a6-14). In esso viene utilizzato, come termine per costruire un sillogismo ausiliario, un oggetto (falsamente) particolare contenuto nell'estensione dei termini in gioco, come è confermato dal fatto che Aristotele si riferisce ripetutamente all'ente istanziato come τι τῶν… «uno dei…» (ad esempio 25a16 e 28a24; si veda la discussione dell'evidenza testuale in Malink 2008). La procedura coincide con ciò che modernamente viene chiamato «esemplificazione esistenziale»[72] di un individuo avente le proprietà generiche della classe di termini in oggetto[73]: l'operazione denotata è esattamente la θέσις ἐκ «il porre fuori» l'individuo dalla sua classe. A quest'individuo, però, è fatto riferimento tramite l'espressione indefinita τι τῶν…, e non per mezzo del nome proprio di un particolare concreto.

Il secondo significato di ἔκθεσις è legato ad espressioni del tipo ἔκθεσις τῶν ὅρων «esposizione dei termini», che si rintraccia in *APr*. A 10, 30b31, A 34, 48a1-48a8 e 48a25, A 35, 48a29, A 39, 49b6, B 4, 57a35. La locuzione designa semplicemente il procedimento che permette di estrarre da un'argomentazione informale i tre termini necessari alla sua formulazione in un appropriato schema sillogistico oppure, nella prima ed ultima occorrenza, l'esemplificazione di uno schema tramite termini concreti, ad esempio per mostrare che da certe premesse non segue sillogisticamente una conclusione (30b31). I due procedimenti non hanno niente a che vedere con la designazione di termini concreti di un sillogismo tramite lettere, né presentano connessioni con pratiche matematiche note.

Un testo di interpretazione più difficile merita una discussione dettagliata, in quanto permette di introdurre al meglio la problematica del significato assunto in matematica dal termine ἔκθεσις. In *APr*. A 41, 49b33-50a4, e in altri passaggi, Aristotele fa osservare che caratteristiche accidentali o materiali delle rappresentazioni degli oggetti matematici che troviamo nei diagrammi geometrici non comportano che i geometri facciano affermazioni false riguardo agli oggetti rappresentati. Leggiamo il testo[74]:

οὐ δεῖ δ' οἴεσθαι παρὰ τὸ ἐκτίθεσθαί τι συμβαίνειν ἄτοπον· οὐδὲν γὰρ προσχρώμεθα τῷ τόδε τι εἶναι, ἀλλ' ὥσπερ ὁ γεωμέτρης τὴν ποδιαίαν καὶ εὐθεῖαν τήνδε καὶ ἀπλατῆ εἶναι λέγει οὐκ οὔσας, ἀλλ' οὐχ οὕτως χρῆται ὡς ἐκ τούτων συλλογιζόμενος. ὅλως γὰρ ὃ μὴ ἔστιν ὡς ὅλον πρὸς μέρος καὶ ἄλλο πρὸς τοῦτο ὡς μέρος πρὸς ὅλον, ἐξ οὐδενὸς τῶν τοιούτων δείκνυσιν ὁ δεικνύων, ὥστε οὐδὲ γίνεται συλλογισμός. τῷ δ' ἐκτίθεσθαι οὕτω χρώμεθα ὥσπερ καὶ τῷ αἰσθάνεσθαι, τὸν μανθάνοντα λέγοντες· οὐ γὰρ οὕτως ὡς ἄνευ τούτων οὐχ οἷόν τ' ἀποδειχθῆναι, ὥσπερ ἐξ ὧν ὁ συλλογισμός.

Non si deve credere che risulti un assurdo per il fatto di esporre qualcosa: non facciamo infatti per niente uso del fatto che sia un certo qualcosa, ma come il geometra chiama questa "lunga un piede" e "retta" e "senza larghezza" pur non essendolo, non per questo ne fa uso come se deducesse a partire da queste. In generale, infatti, ciò che non è come tutto rispetto a parte o un altro rispetto a questo come parte rispetto a tutto, colui che dimostra non dimostra a partire da niente di siffatto, e dunque non può neanche esservi sillogismo. Utilizziamo infatti l'esporre come il percepire, nel senso di chi apprende: cioè non come ‹se› senza queste non fosse possibile dimostrare, come invece accade per ciò a partire da cui risulta il sillogismo.

[72] Da non confondere con la forma di esemplificazione universale in gioco nel procedimento matematico.

[73] Alessandro (*in APr*., 99.19-100.26) ed altri commentatori dopo di lui lessero questa mossa come identificazione del termine tramite percezione, tratto che è del tutto assente nel testo aristotelico. Una lettura alternativa, argomentata in Łukasiewicz 1957, 59-67, e Patzig 1968, 156-168, sostiene che il termine istanziato è una sottoclasse di uno dei termini contenuti nelle premesse, e non un suo individuo rappresentativo.

[74] Detto *en passant*, è chiaro che uno di questi passaggi è la fonte dell'esempio che troviamo in Berkeley (1734, *Introduction*, § 12).

Negli altri passaggi resta il riferimento alla linea lunga un piede, ma l'attività del geometra è ora quella di ὑποτίθεσθαι «porre delle supposizioni», come in *APo*. A 10, 76b39-77a3[75]:

οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.

Né il geometra suppone il falso, come affermano alcuni sostenendo che non si deve far uso di ciò che è falso, e che il geometra afferma il falso chiamando "lunga un piede" quella che non è lunga un piede oppure "retta" quella tracciata che non è una retta. Ma il geometra non conclude niente per il fatto che la linea sia proprio quella che lui stesso ha detto, bensì quanto è reso chiaro tramite ciò.

Altri passi analoghi si trovano in *Metaph*. I 1, 1052b31-33, M 3, 1078a17-21, N 2, 1089a21-26 (nel secondo il geometra «traccia per terra e chiama "lunga un piede" quella che non è lunga un piede»). Sembra chiaro che Aristotele si riferisca in tutti questi testi al fatto che un disegno non può rappresentare esattamente un oggetto geometrico (e non che teoremi generali siano dimostrati tramite ricorso ad una figura particolare – qui non solo *apparentemente* particolare). Il geometra traccia invece una linea a caso e per ragioni apparentemente oscure la chiama ποδιαία (cfr. Acerbi 2008a).

La presenza del verbo ἐκτίθεσθαι nel primo passaggio non deve far pensare[76] che l'attività matematica evocata coincida con l'esposizione (ἔκθεσις) degli enti geometrici oggetto di una dimostrazione. Tale identificazione è solo apparentemente in linea con l'interpretazione di Alessandro della procedura cui Aristotele allude come introduzione delle lettere denotative nelle esposizioni schematiche della sillogistica (*in APr*., 379.14-380.27; si tratterebbe dunque di un terzo significato del termine). In questa interpretazione, porre una ποδιαία diventerebbe una versione deteriore (in quanto caricata di connotazioni materiali) dell'asserire ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, assunzione distintiva di un'esposizione geometrica. Questa lettura sta in piedi solo se continuiamo a pensare che le lettere hanno una funzione deittica, con riferimento alla rappresentazione di un oggetto geometrico in un diagramma (si badi bene che questa identificazione va tenuta distinta da quella con la riga materialmente presente nel disegno). Che tutto ciò non stia in piedi è reso chiaro dalle altre caratteristiche della linea assunte dal geometra nei passaggi aristotelici, cioè essere retta e senza larghezza[77]: Aristotele afferma dunque che la caratteristica *astratta* di essere esattamente lunga un piede è ciò che viene stravolta nel diagramma tracciato dal geometra, in quanto nessuna linea materiale può essere tale (e neanche retta o senza larghezza). Ed in effetti la ποδιαία fungeva da retta di riferimento nella proto-teoria delle linee irrazionali elaborata da Teodoro e Teeteto (cfr. Platone, *Tht*. 147D). In quella del libro X sarà sostituita, come abbiamo visto, dalla «retta esprimibile», ma in entrambi i casi si tratta di oggetti geometrici astratti. Ciò che accade in un'esposizione geometrica è quindi ben lontano da quanto asserisce Aristotele a proposito della ποδιαία, dato che nella prima non entrano certo in gioco caratteristiche materiali degli oggetti esposti. L'esposizione matematica è anzi un luogo deputato all'astrazione matematica quanto lo è l'enunciato – e quanto lo è la *costruzione*

[75] Il bersaglio polemico è Protagora (cfr. *Metaph*. B 2, 997b35-998a4), come nel passaggio parallelo in *Metaph*. N 2, 1089a21-26. Ritorneremo sul verbo alla fine di questa sezione.

[76] Né deve farlo quella del verbo ὑποτίθεσθαι nel secondo. Si tratta di un'allusione al modo suppositivo di presentazione di una frase, cioè all'uso di forma verbali all'imperativo, che si ritrovano tanto nell'esposizione che nella costruzione.

[77] In realtà, nessun geometra assumerebbe esplicitamente che una retta sia priva di larghezza. Tale caratteristica, tuttavia, è un attributo essenziale di una linea, dal momento che la definizione la pone essere una «lunghezza senza larghezza» (cfr. *El*. I.def.2; la definizione era nota ad Aristotele, che la critica in prospettiva antiplatonica a *Top*. Z 6, 143b11-32). Aristotele ha quindi ragione a sostenere che un geometra fa (implicitamente) quest'assunzione.

dove una versione aggiornata della ποδιαία viene effettivamente introdotta –, ed è questa caratteristica che viene sovvertita dalla rappresentazione nel diagramma. La procedura di esposizione va pertanto tenuta totalmente distinta dalla rappresentazione della configurazione geometrica per mezzo di un diagramma, non solo dalle caratteristiche materiali di quest'ultimo. Il parallelo aristotelico in *APr*. A 41 letto sopra farà dunque riferimento, come risulta piuttosto chiaramente dal contesto del passo, all'esemplificazione di uno schema sillogistico tramite termini concreti.

Data l'identità terminologica, è naturale supporre che tra l'esposizione aristotelica e quella matematica ci sia una stretta parentela, ma la nostra discussione ha come risultato che si deve escludere, contrariamente a quanto sostenuto dai commentatori (in tempi moderni a partire da Einarson 1936), che il nome ἔκθεσις avesse un significato ben determinato in matematica e che Aristotele abbia preso a prestito nome e tecnica[78]. Più probabile è invece l'inverso, cioè che tale designazione per una parte specifica di una proposizione sia un'invenzione posteriore conseguente alla percezione di un parallelismo superficiale ed infondato con l'uso aristotelico del termine visto sopra, quasi sicuramente sulla base del passo di *APr*. A 41 letto nella sezione precedente. In questo passaggio Aristotele stabilisce invece semplicemente un'analogia tra il *proprio* procedimento di ἐκτιθέναι, come mostra la posizione strategica delle due forme verbali all'esterno del corno matematico dell'analogia, ed un'attività matematica che *non* è quella che trova compimento nell'esposizione, ma nell'esecuzione della figura.

Quanto abbiamo detto finora ci fa insomma supporre che chi coniò il termine ispirandosi a quel retaggio non avesse compreso il funzionamento dell'esposizione in uso in matematica, che appunto *non* esemplifica sulla base di un'istanza falsamente particolare. La ἔκθεσις seleziona in effetti un oggetto arbitrario in una certa classe e lo fa tramite una espressione linguistica *indefinita*: Proclo (o chi prima di lui) le dette quel nome perché non capì in cosa consista l'arbitrarietà di tale oggetto né la struttura sintattica indefinita soggiacente ad ogni esposizione. Ne concludo dunque che l'introduzione del termine ἔκθεσις per designare una parte specifica della proposizione è un'invenzione scolastica tardiva e sicuramente accettata da Proclo e dai commentatori che da lui dipendono per questi aspetti tecnici (si veda tra breve per altre testimonianze).

Resta il dubbio se la stessa parte specifica avesse una designazione alternativa in àmbito matematico, o se per lo meno la pratica suggerisca una qualche costellazione lessicale ben definita stabilmente associata ad essa. Il dubbio mi pare possa dirsi sciolto dalle considerazioni seguenti.

La ὑπόθεσις «supposizione» fu riconosciuta dagli Stoici come un λεκτόν «dicibile» indipendente, quest'ultimo un ente mentale corrispondente approssimativamente al nostro «significato» (D.L. VII.65-68). Tra essi venne identificata la categoria dei dicibili αὐτοτελῆ «completi», quelli cioè che hanno una struttura proposizionale e il cui corrispondente linguistico è una frase completa. I dicibili completi più importanti sono gli ἀξιώματα «asserti», apparentabili alle nostre proposizioni e il cui corrispondente linguistico è una frase dichiarativa (ἀποφαντικόν). Gli asserti hanno un valore di verità ben definito. Le supposizioni stoiche sono caratterizzate da un uso dell'imperativo privo di sfumature iussive, che invece identificano un altro λεκτόν «dicibile», il προστακτικόν «imperativo» vero e proprio. Come tutti i dicibili che non siano asserti, le supposizioni sono prive di valore di verità, e danno luogo per così dire a un mondo provvisorio (si veda Bobzien 1997). Crisippo scrisse una serie di opere sulle supposizioni e sugli argomenti ipotetici (D.L. VII.196), raccolte nella quarta σύνταξις del λογικὸς τόπος πρὸς τοὺς λόγους καὶ τοὺς τρόπους «*corpus* argomentale sugli argomenti e i modi»; la quarta delle opere elencate reca il titolo λόγοι ὑποθετικοὶ θεωρημάτων «argomenti ipotetici dei teoremi», dalla possibile coloritura matematica, l'ultima περὶ ἐκθέσεων πρὸς

[78] Si ricordi anche (*Mem*. 449b30-450a7) che per Aristotele è impossibile pensare se non per rappresentazioni istanziali e che egli riconosce in questa una caratteristica peculiare dell'argomentare matematico.

Λεοδαμάντα «Sulle esposizioni contro / a (?) Leodamante»[79]. Lo stesso autore (VII.66) menziona lo ὑποθετικόν «suppositivo» in un elenco di «dicibili», ma una lacuna ci priva dell'esempio.

Esempi di supposizioni troviamo in Epitteto: «sia notte» e «sia che tu sia sfortunato», Ammonio: «si supponga che la terra sia centro della sfera del sole», l'anonimo del lungo scolio liminare al *De interpretatione*: «si supponga che la terra abbia rapporto di un punto rispetto al sole»[80]. Simplicio propone un esempio di argomento ipotetico stoico atto a mostrare che all'esterno del cosmo c'è il vuoto (*in Cael*., 284.28-285.2); l'argomento inizia con una supposizione: «Sia qualcuno che si trova all'estremità della sfera celeste e tende la mano verso l'alto». All'interno di un elenco di forme di λόγος, Ammonio menziona anche «esposizione» insieme a «supposizione», ed esemplifica la prima con la frase di forte connotazione ostensiva ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἥδε «sia questa una linea retta»[81]. L'esempio contiene un dimostrativo, il che, come abbiamo visto, costituisce una caratterizzazione erronea dell'esposizione matematica. Ammonio attribuisce l'elenco agli Stoici, ma, ammesso che l'attribuzione sia attendibile, chissà quando questa lista si costituì: può ben darsi sia semplicemente il prodotto del lavoro compilatorio di eruditi tardivi. In ogni caso darei per scontato che l'esempio di Ammonio risalga a materiale esegetico canonico, la cui fonte più immediata sarà stata quest'affermazione di Proclo (*iE*, 208.16-17) nel commento a *El*. I.1 e la cui connotazione ostensiva è altrettanto erronea:

μετὰ δὲ τὴν πρότασιν ἑξῆς ἡ ἔκθεσις· Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἥδε.	E di séguito dopo l'enunciato, l'esposizione: Sia questa la retta data limitata.

Occorrerà dunque accordare scarso peso alle menzioni di argomenti ipotetici o istanziali dei commentatori tardivi. Nonostante le pretese degli stessi commentatori, pertanto, non abbiamo elementi per supporre che le esposizioni degli Stoici abbiano connessioni con il procedimento istanziale tipico della matematica. Riferendosi al senso di «supposizione» come ἀρχὴ ἀποδείξεως «principio di una dimostrazione»[82], Sesto Empirico (*M* III.7-17) la dichiara caratterizzata dall'assunzione di un oggetto particolare come dato e, di conseguenza, dall'impiego della forma verbale all'imperativo δεδόσθω «sia dato» (mai usato negli *Elementi*, che impongono come canonica la locuzione con verbo «essere» + participio δοθέν «dato»)[83]. Nessuna fonte accenna all'uso delle lettere.

Quando, nel corso di una dimostrazione, è fatto riferimento ad un dato assunto come tale nell'esposizione, questo è segnalato dalla clausole canonica ὑπόκειται «è stato supposto». Per converso, il verbo ὑποκεῖσθαι «essere supposto» rimanda senza eccezioni ad una assunzione fatta in esposizione o (in 9 occorrenze contro 50) nel corso di una costruzione. Nel prospetto che segue sono elencate le parti di una proposizione cui sono effettuati richiami di questo tipo, affermativi o negativi, all'interno di dimostrazioni dirette e indirette. Se una proposizione è divisa in casi o ha un enunciato multiplo, tutti i richiami alle esposizioni parziali sono rubricati nella voce « esposizione principale».

[79] È suggestivo ricordare il Leodamante di Taso menzionato da Proclo insieme a Archita e Teeteto tra coloro dai quali «furono aumentati i teoremi e ricondotti ad una formulazione più scientifica», e che, sempre secondo Proclo, fu uno dei primi ad applicare il metodo di analisi e sintesi (*iE*, 66.14-18 e 211.18-23). Lo iato temporale è notevole, a meno di non supporre un'opera a lui indirizzata *post mortem*.

[80] Nell'ordine in *Diss*. I.25.11 e 13, *in Int*., 2.32, e ΣArist. *Int*., 93b28. In *Diss*. I.7.22 Epitteto afferma che «talvolta è necessario richiedere [αἰτῆσαι] una qualche ipotesi come pietra angolare dell'argomento seguente».

[81] A *in Int*., 2.31, e cfr. ΣArist. *Int*., 93b30-31, con la citazione aberrante della seguente frase istanziale esemplare: «i geometri dicono l'esposizione», chiaramente un'epitome di un asserto non capito del tipo «frase istanziale è ciò che i geometri chiamano esposizione».

[82] Sesto assume erroneamente, nella sua critica, che un'ipotesi abbia un valore di verità ben definito.

[83] Se ne rintracciano 1 occorrenza in Apollonio, *Con*. II.4 (la proposizione è sicuramente spuria) e 13 nel *corpus* archimedeo, sempre a introdurre delle esposizioni, in *Sph. cyl*. I.6, II.4, *Con. sph*. 7, 19-20, *Spir*. 5-6 (*bis*), 7-9. *Aequil*. I.1.

L'esposizione locale è quella che precede una dimostrazione indiretta, ed introduce nuovi enti rispetto a quella principale. Sono inclusi anche argomenti, o intere unità testuali, chiaramente spuri.

esposizione principale	I.26, 29, 48, V.5, 6, 18, 19, VI.3, 5, 6 (*bis*), 7 (*ter*), 22, VII.2, 7, 20, 33, IX.10 (*bis*), 14, 30, 34, X.9por, 9/10, 21, 3, 38, 41/42, 47, XI.5, 16, 23 (*bis*), 34 (*bis*), 35, XII.4/5, XIII.2/3, 7 (*bis*) X.13*alt*, 39*alt*
esposizione locale	IX.12, 13, 18, 20, 36, X.16 (*bis*)
costruzione	IV.10, IX.20, X.33, XI.23, 23 (*bis*), 26, X.54, 55[84]
supposizioni dell'assurdo (spurie)	X.42, XII.12 X.28/29II (*bis*)

L'imperativo ὑποκείσθω compare nel *corpus* euclideo 8 volte, di cui 2 nel testo principale degli *Elementi*. Significativa l'occorrenza in VI.7, a introdurre, in un'esposizione parziale, la seconda delle condizioni aggiuntive sugli angoli di due triangoli di cui si vuole dimostrare la similitudine. La supposizione sostituisce l'esposizione principale, tramite esplicitazione della sola condizione variante (*EE* II, 52.14-19 e 53.22-54.1):

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς. ἀλλὰ δὴ πάλιν <u>ὑποκείσθω</u> ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς.	Siano due triangoli ΑΒΓ, ΔΕΖ che hanno un solo angolo uguale a un solo angolo, ΒΑΓ a ΕΔΖ, e intorno ad altro angoli ΑΒΓ, ΔΕΖ i lati in proporzione, come ΑΒ rispetto a ΒΓ, così ΔΕ rispetto a ΕΖ, e uno e l'altro dei restanti ‹angoli› su Γ, Ζ in primo luogo insieme minore di un retto. Ma ora di nuovo <u>sia supposto</u> uno e l'altro di quelli su Γ, Ζ non minore di un retto.

In altri casi vengono poste supposizioni che funzionano da princìpi: l'imperativo ὑποκείσθω introduce le assunzioni all'inizio dell'*Ottica* (entrambe le redazioni) e, nei *Phaenomena*, l'assunzione fondamentale che il cosmo sia sferico. In Apollonio troviamo l'imperativo in II.6, 49 (*ter*), III.7, 47-49, IV.5, 18, in locuzioni del tipo ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά «le altre siano supposte le stesse» oppure, se non vi sono variazioni, ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά «in effetti, siano supposte le stesse», mentre è attestata 21 volte la locuzione abbreviata τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων «supposte le stesse», con cui iniziano casi aggiuntivi, che si trovino all'interno di proposizioni oppure siano trasformati in proposizioni a sé stante. In ogni occasione il riferimento è a quanto disposto nell'esposizione primaria. Il *corpus* archimedeo offre una situazione analoga a quello euclideo: del verbo troviamo occorrenze in cui sostituisce l'intera esposizione (ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα «sia supposto quanto detto» in *Con. sph.* 17, e altri tipi di abbreviazione ad esempio in *Sph. cyl.* I.1 e 3) o la costruzione (*Fluit.* II.10); introduce o segue le assunzioni di base di un intero trattato (*Fluit.* I e *Aequil.* I – così viene fatto riferimento anche al famoso modello eliocentrico di Aristarco e alle supposizioni archimedee in *Ar.*) o supposizioni aggiuntive poste in corso d'opera (*Fluit.* I, immediatamente prima della prop. 8), o supposizioni locali (*Fluit.* I.8), o espressioni «le altre siano supposte le stesse» come in Apollonio (*Fluit.* II.8, e altre del genere ad esempio in *Sph. cyl.* I.2por). Il verbo fa anche riferimento a supposizioni fatte in esposizione o enunciato (*Con. sph.* 19-20)[85].

La terminologia è dunque non completamente univoca: il termine denota qualsiasi supposizione che sia posta alla base di una dimostrazione o di una serie di dimostrazioni, sia che abbia lo statuto di

[84] A rigore, in X.54 e 55 si fa riferimento a conseguenze immediate della costruzione.
[85] Da notare che 25 delle 40 occorrenze si trovano nei due trattati "applicati" *Ar.* e *Fluit.*

principio o di posizione istanziale all'inizio di una singola proposizione[86]. Nella sua discussione di I.6 come conversa di I.5 (*iE*, 252.5-24), Proclo afferma che in coppie siffatte si scambiano tra loro τὰ συμπεράσματα καὶ τὰ ὑποθέσεις «le conclusioni e le supposizioni». Egli prende come supposizione di I.6 l'asserto che gli angoli alla base siano uguali, mentre quella di I.5 è semplicemente il soggetto logico della proposizione, cioè il triangolo isoscele.

Pur in un contesto sostanzialmente ambiguo in questo rispetto, Aristotele[87] sembra riferirsi in prevalenza al senso istanziale di «supposizione», dotandolo di una forte connotazione esistenziale nelle sue discussioni dei princìpi su cui si basa una dimostrazione matematica in *APo*. A 2, 72a18-24, e A 10, 76b23-77a4, in particolare 76b35-39[88]. In virtù del carattere "presentativo" del verbo «essere» nelle esposizioni matematiche, non hanno più ragione di essere interpretazioni sintatticamente contorte come quella in Gomez-Lobo 1977, che argomenta per un senso copulativo di «essere» nei passaggi aristotelici allo scopo di metterli in linea con la pretesa evidenza matematica. Per converso, la sua identificazione delle «supposizioni» aristoteliche con le assunzioni poste in esposizione dai matematici riceve una conferma a mio avviso decisiva da tutta la discussione svolta in questa sezione (si ricordi anche il passo di *APo*. A 10 letto sopra e contenente il riferimento alla linea «lunga un piede»)[89].

Nella tradizione esegetica successiva di ispirazione aristotelica, le «supposizioni» presero a denotare in modo generico i princìpi primi di una scienza (cfr., ad esempio, Alessandro, *in APr*., 13.7-11), inglobando dunque anche gli assiomi ed i postulati: così Proclo al termine del suo tendenzioso riassunto di *APo*. A 10 a *iE*, 76.4-77.6[90]. All'inizio del commento sui postulati, però, afferma di aver trattato le «supposizioni e i termini, così sono chiamati, in quanto detto prima» (*ibid*., 178.1-8). Evidentemente, Proclo si trovava in imbarazzo a stabilire una corrispondenza tra la tripartizione aristotelica dei princìpi e quella proposta all'inizio degli *Elementi*, e finisce per identificare le supposizioni con le definizioni, contro l'esplicita differenziazione di Aristotele in *APo*. A 2.

Sia come sia, uno dei significati fermamente attestati di ὑπόθεσις fin dai primordi della produzione matematica antica, e dalla riflessione filosofica su di essa, è dunque quello di «supposizione locale» posta in esposizione. Ciò suggerisce che la denominazione stoica di ὑπόθεσις per il significato di una frase caratterizzata dal verbo all'imperativo attingesse, astraendone come di consueto una peculiarità *sintattica* unificatrice, ad una terminologia matematica già stabilita, o per lo meno ne traesse le dovute conseguenze nella formazione del sostantivo, e che ἔκθεσις per un'esposizione matematica sia un conio posteriore agli Stoici.

1.2.1. *Determinazione*

Nel suo commento a *El*. I, Proclo chiama διορισμός «determinazione» l'asserzione di ciò che va dimostrato o costruito, posta sùbito dopo l'esposizione. A seconda di quanto richiesto, la clausola è introdotta da λέγω ὅτι «dico che» (teorema) oppure δεῖ δή «si deve pertanto» (problema). Non tutti i

[86] In àmbito logico, troviamo denominato «supposizione» l'antecedente di un condizionale (Filopono, *in APr*., 243.15-24).

[87] Più cautamente deve essere presa la menzione delle supposizioni nei ben noti passi platonici in *Men*. 86D-87B, *Phd*. 100A-101E e *Rsp*. 510B-511E, anche se si tratta molto probabilmente di ipotesi locali dalla funzione euristica.

[88] Si ricordi che le due discussioni ripartiscono e denominano i princìpi sulla base di parametri di riferimento differenti.

[89] Aristotele riconosce dunque solo definizioni e nozioni comuni come princìpi di una dimostrazione matematica. L'identificazione delle «supposizioni» con i postulati euclidei, proposta in Lee 1932 sulla base del preteso carattere esistenziale di questi ultimi ed accettata come valida per decenni, è da ritenersi infondata; si veda in ultimo Mueller 1991, 66-81. Ciò non vuol dire che Aristotele non riconosca che assunzioni costruttive abbiano un ruolo fondante nella costruzione di una dimostrazione, come mostrerò in uno studio a parte.

[90] L'originaria discussione aristotelica introduceva solo una ripartizione tra ipotesi e assiomi, basata sul grado di familiarità che un supposto discente ha con il principio da porre. Proclo divide questo parametro in due componenti indipendenti, che il principio sia autoevidente oppure noto o no al discente, in modo che la combinatoria produca una classificazione tripartita. L'esempio che dà di ipotesi è la definizione di cerchio.

problemi hanno una determinazione: ciò (non) accade in IV.10, VI.10, IX.18-19, X.27-35, 48-53, 85-90, XIII.18. In Archimede, *Sph. cyl.* I.5, troviamo una (sola) determinazione introdotta da δεῖ οὖν (*AOO* I, 18.14), le altre da δεῖ δή. Va osservato che Archimede impiega sistematicamente δεικτέον ὅτι (75 occorrenze), con sfumatura modale analoga a quella di δεῖ δή dei problemi, per introdurre la determinazione dei teoremi, eccetto che in *Sph. cyl.*, dove predomina il canonico λέγω ὅτι (44 occorrenze in tutto il *corpus*, di cui 30 in quest'opera a fronte delle 11 di δεικτέον).

Così come ci sono esposizioni parziali, troviamo determinazioni parziali quando una proposizione sia dimostrata dopo divisione in casi (fattispecie estremamente rara, e a volte sospetta: si vedano IX.19, XI.34, XIII.7) oppure l'enunciato sia composto di più enunciati congiunti (come in I.34 o III.8-9). Più interessanti sono fenomeni come quello in I.46, II.4 e nelle costruzioni in IV.6-7, 11-12, 15, dove un poligono è dimostrato essere regolare verificando in successione l'uguaglianza dei lati e poi quella degli angoli (sempre in quest'ordine, che è quello canonico della formulazione del predicato composto ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον «sia equilatero che equiangolo»). Leggiamo la determinazione parziale in IV.15, che evidentemente completa una prima determinazione parziale con portata esclusiva sull'equilateralità (*EE* I, 176.11-12):

[…] ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον.	[…] l'esagono ΑΒΓΔΕΖ è quindi equilatero. Dico ora che anche equiangolo.

Come in quest'esempio, le determinazioni parziali che presentano dimostrazioni aggiuntive sono introdotte canonicamente da λέγω δὴ ὅτι καί «dico ora che anche» o «dico ora anche che» a seconda che il καί avverbiale operi dentro o sulla dichiarativa (o da λέγω δὴ ὅτι οὐδέ «dico ora che neanche» nei casi negativi, come ad esempio in VIII.6), scorciato di tutte le combinazioni possibili di δή e καί per varianti stilistiche o interventi di copisti. I problemi di costruzione sono di norma dotati di doppia determinazione: la prima riprende canonicamente una parte dell'enunciato ed è introdotta da δεῖ δή (problema), la seconda segue la costruzione, asserisce che questa risolve il problema, ed è introdotta da λέγω ὅτι (teorema). Leggiamo I.11; si noti che è la seconda determinazione che ricalca esattamente l'enunciato (*EE* I, 18.20-19.8):

ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· <u>δεῖ δὴ</u> ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· <u>λέγω ὅτι</u> τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.	Sia una retta data ΑΒ, un punto dato su di essa Γ: <u>si deve pertanto</u> condurre dal punto Γ ad angoli retti con la retta ΑΒ una linea retta. Sia preso su ΑΓ un punto come càpita Δ, e uguale a ΓΔ sia posta ΓΕ, e sia costruito su ΔΕ un triangolo equilatero ΖΔΕ, e sia congiunta ΖΓ: <u>dico che</u> una linea retta ΖΓ risulta condotta ad angoli retti con la retta data ΑΒ dal punto dato Γ su di essa.

Altri asserti differenti dalla determinazione principale sono introdotti da λέγω ὅτι: sono le "determinazioni locali" che precedono un argomento per assurdo. A volte sono molto prossime a quella principale, e danno l'impressione di una doppia determinazione, come nel caso di IX.12 (*EE* II, 200.5-11):

ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ· <u>λέγω ὅτι</u> ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ	Siano a partire da un'unità quanti mai si voglia numeri in proporzione Α, Β, Γ, Δ: <u>dico che</u> da quanti numeri

πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται.
μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ.

primi sia misurato Δ, dagli stessi sarà misurato anche A.
In effetti, Δ sia misurato da un certo numero primo E: dico che E misura A.

La denominazione διορισμός «determinazione» per la specifica parte della proposizione appena discussa è rintracciabile per la prima volta in Proclo. In realtà, anche le eventuali condizioni di risolubilità di un problema sono introdotte da δεῖ δή, e sono denominate διορισμοί, e questo era sicuramente il significato originale. Forse è semplicemente perché sono introdotte dalla stessa espressione che Proclo, o la sua fonte, chiama così l'asserzione di ciò che va costruito in un problema. La discussione di Proclo è per certi rispetti sorprendente (*iE* 204.20-205.12). Egli si sofferma piuttosto a lungo sul primo significato di «determinazione», menzionando l'altro solo altrove e *en passant*[91]. Non offre chiarimenti ulteriori nel suo commento a I.22, la prima proposizione degli *Elementi* che ha una "vera" determinazione. Contrariamente a quanto tacitamente assunto dagli interpreti, Proclo non fa mai riferimento all'asserto che segue l'esposizione di un *teorema* e che è introdotta dall'espressione canonica λέγω ὅτι «dico che» come un διορισμός. La sua discussione sembra addirittura suggerire che sia «esposizione» che «determinazione» esistono solo come parti di *problemi*.

La questione del doppio significato di διορισμός è affrontata brevementa da Eutocio nel suo commentario alle *Coniche* di Apollonio (*AGE* II, 178.4-15), allo scopo di spiegare il riferimento alle determinazioni nella descrizione dello stesso Apollonio del libro II del trattato (ivi, I, 4.5-8). Eutocio cita come esempio di determinazione l'enunciato completo di *El*. I.22. La mossa ingannò Heiberg che, contro la lezione unanime dei codici, corresse δή in δέ in *El*. I.22 e VI.28, seguendo il lemma di Proclo e la lezione erronea nella citazione di Eutocio per I.22, una proposta di August per VI.28. Heiberg fece marcia indietro nell'edizione del libro XI (*EE* IV, 33.9 *in app. I*), dopo che ebbe stabilito che anche Eutocio leggeva δή. La questione non può essere decisa solo su basi filologiche, dato che lo scambio delle due particelle è un errore di copia frequente; ma in una determinazione il carattere connettivo di δή è di gran lunga più adatto. Nell'Apollonio greco troviamo solo due determinazioni, in II.50 e 53: la prima è introdotta da δεήσει ἄρα, fatto dovuto alla sua posizione alla fine dell'analisi[92], la seconda da δεῖ δή (*AGE* I, 290.21 e 310.22).

La determinazione vera e propria è collocata all'interno dell'enunciato, è esplicitamente formulata come una condizione necessaria, essendo introdotta da δεῖ δή (che traduco «occorre»), ed è sempre espressa come vincolo sui dati del problema. Gli unici enunciati con determinazione negli *Elementi* sono quelli di I.22, VI.28 e XI.23. Leggiamo I.22; escludo le parti a ragione giudicate spurie da Heiberg (*EE* I, 30.23-31.3):

ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Costruire un triangolo da tre rette che sono uguali a tre date: occorre pertanto che due sostituite in ogni modo siano maggiori della restante.

Nell'esposizione la condizione è di norma inclusa tra le assunzioni, in forma di subordinata participiale o relativa, evitando così una doppia occorrenza di δεῖ δή (*EE* I, 31.4-8):

[91] *iE*, 66.22-67.1 e 202.2-5, il secondo è quasi sicuramente un passaggio tratto da Gemino, il primo un breve accenno nel cosiddetto «catalogo dei geometri» – le caratterizzazioni della determinazione in questi passaggi sono identiche e vanno attribuite alla stessa fonte.

[92] La determinazione manca nell'enunciato; cfr. l'analoga mossa archimedea introdotta da δεῖ ἄρα alla fine dell'analisi di *Sph. cyl.* II.7, *AOO* I, 208.13-14.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Siano tre rette date Α, Β, Γ, due delle quali sostituite in ogni modo siano maggiori della restante, Α, Β di Γ, e Α, Γ di Β, e ancora Β, Γ di Α: si deve pertanto costruire un triangolo dalle ‹rette› uguali a Α, Β, Γ.

In ognuno dei problemi con determinazione degli *Elementi*, la condizione è stabilita in un teorema precedente, nei nostri casi rispettivamente I.20, VI.27 e XI.20-21. In effetti, XI.23 è una costruzione con doppia determinazione (*EE* IV, 33.7-10):

ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Costruire un angolo solido da tre angoli piani, due dei quali sostituiti in ogni modo sono maggiori del restante: occorre pertanto che i tre ‹angoli› siano minori di quattro retti.

La formulazione rende però esplicita come determinazione solo la condizione stabilita in XI.21 «Ogni angolo solido è compreso da angoli piani minori [che] quattro retti», inglobando nell'enunciato quella di XI.20 «Qualora un angolo solido sia compreso da tre angoli piani, due quali si voglia sostituiti in ogni modo sono maggiori del restante». Il motivo di questa scelta si comprende se leggiamo l'enunciato di XI.22 (*EE* IV, 31.7-10):

ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Qualora siano tre angoli piani, due dei quali sostituiti in ogni modo sono maggiori del restante, e li comprendano rette uguali, è possibile costruire un triangolo dalle congiungenti le rette uguali.

Le prop. XI.20 e 22 sono, per quanto la seconda abbia l'enunciato *sui generis* appena letto, *quasi* una l'inversa dell'altra. Il ruolo stilistico di XI.22 sembra dunque quello di scorporare dal testo di XI.23 una dimostrazione accessoria, anticipandola. Ciò comporta la necessità di eliminare dall'enunciato di XI.23 la determinazione indotta da XI.20, in quanto non immediatamente perspicua nella dimostrazione così scorciata. A questo scopo, occorre trasformare la determinazione in un'assunzione aggiuntiva, che ovviamente deve proporsi come tale già nella parte scorporata ed anticipata a XI.22. La sfumatura modale dell'enunciato di quest'ultima, la cui enfasi sulla costruibilità è in linea di principio per niente necessaria, è a mio avviso da attribuirsi alla volontà dell'estensore della dimostrazione di non obliterarne il carattere originario di determinazione delle condizioni di possibilità di un problema.

Merita analizzare brevemente le dimostrazioni di XI.20 e 22 per comprendere le relazioni tra di esse e, più in generale, il funzionamento della determinazione. La prima, dopo aver fornito di base un triedro, «trasferisce» la disuguaglianza triangolare (I.20) dal triangolo di base ai tre angoli al vertice. La seconda può essere interpretata come mirante a mostrare che tre angoli piani tali che due qualsiasi sommati siano maggiori del restante possono essere riuniti al vertice di una piramide particolare (avente cioè i tre spigoli laterali uguali): ciò si riduce a stabilire che i tre spigoli di base soddisfano la disuguaglianza triangolare. L'idea sembra dunque quella di «appiattire» l'eventuale piramide su due delle sue facce: la base della terza faccia risulta maggiore di quella originaria, di cui saranno a più forte ragione maggiori le basi delle due facce «appiattite». La costruzione ausiliaria che realizza

l'appiattimento funziona, con la dimostrazione che troviamo nel testo[93], solo se, fra i tre angoli dati, ve ne sono almeno due la cui somma sia minore di due retti (ciò comporta che la somma dei tre sia minore di 4 retti, poiché un angolo è sempre inteso essere minore di due retti). Questa dimostrazione di XI.22 ingloba quindi tacitamente la condizione stabilita in XI.21, cioè che la somma dei tre sia minore di 4 retti. In effetti, è trasmessa anche una dimostrazione alternativa di XI.22 (*EE* IV, 187.2-188.24), che invece di appiattire la piramide la «richiude» portando una delle altre facce nel piano di quella che ha l'angolo al vertice maggiore. Il lato di base della terza faccia, anch'essa richiusa, risulterà minore di quello originario; si formerà però un triangolo, in cui le basi delle due facce richiuse saranno maggiori di quella restante, di cui saranno *a fortiori* maggiori le basi delle due facce non richiuse. Questo era il caso meno favorevole, e gli altri sussistono a maggior ragione.

La dimostrazione alternativa non fa uso della condizione di XI.21, che in effetti *non* è necessaria[94] se non nell'interpretazione (apparentemente innocua) di XI.22 come un teorema di geometria solida. Si tratta in realtà di un teorema di geometria piana, e l'introduzione surrettizia della piramide è fuorviante: solo in XI.23 si ha realmente bisogno della condizione di possibilità stabilita in XI.21. Quest'ultima può essere interpretata come un confronto tra la somma degli angoli piani di una piramide a base triangolare e quelli del reticolo triangolare formato per proiezione della piramide sulla propria base (che fornisce una somma di 6 angoli retti per i tre triangoli risultato della proiezione). Poiché i tre triedi di base verificano la condizione XI.20, e la somma degli angoli interni del complesso delle tre facce triangolari è di 6 retti, i tre angoli che formano il triedro al vertice saranno minori di quando si trovavano proiettati sulla base a formare 4 retti. La connessione con i triangolini ottenuti per proiezione è resa esplicita nella dimostrazione trasmessa dalla tradizione indiretta. Buona parte del materiale relativo al libro XI relegato da Heiberg in appendice riguarda in effetti la costruzione in XI.23. Il grosso sono due casi addizionali per la costruzione del triedro[95]. Non troviamo generalizzazione ad angoli solidi con più di tre facce. Allo stesso modo, piramidi a base poligonale saranno nel libro XII studiate solo nella prop. 6 e nel porisma a 8, dallo statuto testuale alquanto incerto.

Nel *corpus* matematico greco pervenutoci i problemi comportanti una determinazione non sono molto frequenti[96]. Normalmente, essa non viene però stabilita in un teorema precedente, ma resa esplicita come conseguenza più o meno naturale dell'analisi. La strategia adottata negli *Elementi*, e, ad esempio, in *Con*. II.53 (il teorema correlato è II.52), indotta dal formato strettamente sintetico dell'esposizione, va quindi considerata tutto sommato una forzatura, in quanto la rilevanza del teorema che stabilisce le condizioni di vincolo risulta giustificata solo *a posteriori*.

Solo due problemi negli *Elementi* sono formulati in maniera tale da rendere esplicita la ricerca delle proprie condizioni di risolubilità: sono IX.18-19. Leggiamone enunciato ed esposizione (*EE* II, 209.16-20 e 210.22-26 – sull'uso di πότε in IX.19 si veda la sez. 2.3):

δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.	Dati due numeri investigare se è possible trovare un loro terzo proporzionale.
ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον	Siano due numeri dati A, B, e si debba investigare se è possibile trovare un loro terzo

[93] Se la somma di ogni coppia è maggiore di due retti, la dimostrazione può essere facilmente adattata al caso in cui l'appiattimento non produce una figura convessa, ma allora la condizione di XI.21 entra in modo esplicito e cruciale.
[94] Banale controesempio alla richiesta che i tre angoli di XI.22 siano insieme minori di 4 retti: si prendano tre angoli uguali maggiori di 4/3 di un retto. I tre lati di base sono uguali tra loro e quindi possono sempre formare un triangolo.
[95] Quasi sicuramente inautentici, né li troviamo nella tradizione indiretta. Questa fornisce una dimostrazione di XI.23 differente a quella mantenuta da Heiberg nel testo critico principale.
[96] Abbondavano, ovviamente, nelle opere perdute comprese nel cosiddetto *corpus* analitico, come Pappo attesta nel corso di tutto il libro VII della *Collectio* e come possiamo verificare nella versione araba *De sectione rationis* apolloniano.

ἀνάλογον προσευρεῖν.	proporzionale.
τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.	Dati tre numeri investigare quando è possibile trovare un loro quarto proporzionale.
ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.	Siano tre numeri dati Α, Β, Γ, e si debba investigare quando è possibile trovare un loro quarto proporzionale.

Si tratta di problemi in àmbito numerico, come mostra anche la presenza del determinativo di necessità δέον ἔστω «si debba» nell'esposizione. Una condizione di vincolo per IX.18 è fornita da IX.16, per IX.19 da IX.17. IX.16 stabilisce che «Qualora due numeri siano primi tra loro, non sarà come il primo rispetto al secondo, così il secondo rispetto a un certo altro»: occorre quindi che i due numeri non siano primi tra loro, e questa è la prima condizione necessaria. La dimostrazione rivela però che c'è un vincolo ulteriore, cioè che ὁ Α deve misurare il quadrato su ὁ Β. Questa condizione è anche sufficiente, come la dimostrazione di IX.18 rende chiaro. Dato che un numero misura un altro se e solo se misura il suo quadrato, la seconda condizione implica la prima, che è dunque superflua. La dimostrazione va quindi ritenuta non impeccabile per ridondanza. Accettando però la redazione attestata, se volessimo scrivere una versione di IX.18 nel formato di un problema con determinazione otterremmo qualcosa del genere (potremmo anche includere una condizione nell'enunciato, come in XI.23):

δύο ἀριθμῶν δοθέντων αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν· δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, καὶ τὸν πρῶτον τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου μετρεῖν.	Dati due numeri trovare un loro terzo proporzionale; occorre pertanto che i numeri non siano primi tra loro e che il primo misuri il ‹quadrato› sul secondo.
ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες οἱ Α, Β, ἔτι δὲ μετρείτω ὁ Α τὸ ἀπὸ τοῦ Β· δεῖ δὴ αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.	Siano due numeri dati Α, Β, che sono non primi tra loro, e ancora Α misuri il ‹quadrato› su Β: si deve pertanto trovare un loro terzo proporzionale.

Includere la determinazione in IX.19 avrebbe generato un enunciato altrettanto complicato, ed è forse per questo che entrambe sono prive di determinazione. Non è detto che il formato eccentrico di IX.18-19 sia segno di una loro elaborazione "arcaica", non rivista con la redazione originale degli *Elementi*, e che a ciò vada in fin dei conti fatto risalire sia il problema di ridondanza che la mancata aderenza ad un formato più "canonico", cioè quello con determinazione. Come vedremo tra un attimo, Teone mise mano pesantemente (e giustamente) a IX.19, e ad ogni buon conto il genere problematico in teoria dei numeri ebbe il suo pieno sviluppo solo secoli dopo, con Diofanto. Queste due proposizioni possono quindi presentare redazioni "arcaizzanti" (in rapporto al formato diofanteo) pur senza appartenere alla preistoria degli *Elementi*.

La dimostrazione di IX.19 è l'unica veramente erronea degli *Elementi*. La proposizione richiede di investigare quando sia possibile trovare un quarto proporzionale di tre numeri. Heiberg ha adottato il testo di **P**, che imbastisce, per analogia con IX.18 e mirando ad un'applicazione di IX.17, una disgiunzione quadricotomica[97]. Quest'ultima è basata sulle due alternative che i tre numeri dati οἱ Α, Β, Γ siano in proporzione continua oppure no e che gli estremi di questa proporzione continua siano primi tra loro oppure no. Dovrebbe far insospettire già l'idea che tre numeri *non* siano in proporzione continua ma che si possa ugualmente parlare in qualche senso di estremi. La dimostrazione, sulla base

[97] Heiberg fa solo notare l'evidente corruzione in apparato. Il copista di **P** inserisce nel testo, pur racchiudendolo tra *obeli*, uno scolio tratto dal suo esemplare di copia e contenente una correzione al testo; si veda *EE* II, 211.11 *in app*.

di IX.17, elimina sùbito come impossibile il caso di numeri dati in proporzione continua con estremi primi tra loro. Ugualmente impossibile viene dichiarato il caso di estremi primi tra loro ma numeri non in proporzione continua, il che è ovviamente falso, dato che ad esempio 2, 4, 7 ammettono come quarto proporzionale 14. Gli altri due casi sono svolti correttamente, e forniscono come condizione sufficiente (e necessaria) che ὁ A misuri il prodotto di ὁ B per ὁ Γ. Questa condizione funziona anche nel caso trattato erroneamente, e ovviamente la condizione che i tre numeri dati siano in proporzione continua è irrilevante. I manoscritti teonini, pur con qualche pasticcio dovuto probabilmente a interferenze di collazioni, restituiscono una dimostrazione "corretta" (nel senso che presenta un problema di ridondanza conseguente alla mancata identificazione della condizione necessaria e sufficiente analogo a quello visto per IX.18) con un minimo di interventi: la disgiunzione iniziale diventa una dicotomia tra «A, B, Γ in proporzione continua con estremi primi tra loro» e la sua negazione; la dimostrazione erronea è eliminata di peso, così come l'inutile quarto caso (ma **F** ha ancora quest'ultima parte); il terzo caso subisce una cosmèsi trascurabile a coprire l'unico caso residuo. Se si escludono le parti interamente eliminate, gli adattamenti sono minimi, e i due testi identici nelle parti comuni. Non è facile capire se quello di **P** sia frutto di un malaccorto intervento su un testo che avesse già qualche guasto, e se ciò sia avvenuto prima o dopo la redazione della versione teonina. La tradizione indiretta offre una dimostrazione che differisce nella parte introduttiva. Gerardo presenta infatti la dicotomia iniziale soltanto tra «A, Γ sono primi tra loro» e la sua negazione; in Adelardo I tutto il libro IX manca. Il primo disgiunto è dichiarato erroneamente non poter produrre un quarto proporzionale. Per il secondo disgiunto viene offerta una dimostrazione che ricalca quella greca. Anche nel testo di Gerardo una dimostrazione globalmente corretta di questo secondo disgiunto può essere ottenuta eliminando alcune righe, senza necessità di variare il testo successivo. La versione di Gerardo aumenta le incertezze su quale delle dimostrazioni ricevute possa essere alla base delle altre, ammesso che non siano tutte variazioni su un nucleo originario non più accessibile.

Particolarmente interessanti sono le determinazioni (in senso proprio) presenti negli *Arithmetica* di Diofanto[98]. Dato il carattere peculiare dei problemi in questo trattato, l'enunciato non è ripetuto in forma istanziata, come accade nelle proposizioni geometriche. Diofanto ripete dunque solo occasionalmente, e nel corso della dimostrazione, ciò che è ricercato nel problema: tali asserti sono a volte introdotti da δεῖ δή «si deve pertanto» o da δεῖ δέ «e si deve»[99]. Le determinazioni sono invece sempre introdotte da δεῖ δή. Leggiamo enunciato e determinazione di *Ar*. I.27 (*DOO* I, 60.23-62.2). Quest'ultima è seguita da una breve clausola, che sembra commentare su qualche particolarità di ciò che è stato appena asserito e su cui mi sono soffermato altrove (Acerbi 2009a):

εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.	Trovare due numeri in modo che la loro somma e il prodotto facciano numeri dati.
δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν.	Occorre pertanto che, dei ‹numeri› trovati, il quadrato sulla metà di uno con l'altro, ecceda ‹il rettangolo contenuto› da essi per un quadrato. Ma ciò è fittizio.

[98] Gli *Arithmetica* furono originariamente redatti in 13 libri, come afferma Diofanto stesso nell'introduzione (*DOO* I, 16.6-7). Un'ampia raccolta di problemi organizzata in 6 libri ci è pervenuta in greco. Quattro libri di problemi sono stati trasmessi nella traduzione araba di Qusṭā ibn Lūqā, nei titoli e nelle sottoscrizioni dei manoscritti arabi viene fatto loro riferimento come libri dal IV al VII del trattato di Diofanto (si veda Rashed 1984, III, 1.2, 98.14, IV, 1.2, 34.6, 35.2, 80.5, 81.2, 120.1). I due insiemi di problemi sono quasi completamente disgiunti. Non è chiaro se tali partizioni in «libri» riflettano esattamente la divisione diofantea originale, oppure se riarrangiamenti del materiale si sono prodotti a qualche stadio della trasmissione. Leggiamo dunque sezioni degli *Arithmetica* chiamate «libri IV-VI» sia in greco che in arabo, ma sono del tutto differenti.

[99] Le prime in *DOO* I, 46.2-3, 60.17-18, 232.2, 298.1, le seconde in *DOO* I, 116.8-9, 136.4-5, 220.23-24, 238.21-22, 244.22.

I problemi nella teoria dei numeri diofantea sono a priori soggetti a due vincoli generali che restringono lo spettro delle soluzioni ammesse. Queste possono solo essere quantità positive, esprimibili in numeri: in termini moderni numeri razionali positivi. Ciò comporta che ogni problema negli *Arithmetica* è soggetto ad una specie di determinazione preventiva. Come nel caso geometrico, il vincolo agisce imponendo certe condizioni sui dati del problema. Di conseguenza, le determinazioni negli *Arithmetica* possono assumere la forma di una disuguaglianza, quando sia da assicurare la positività della soluzione, oppure di un'identificazione di specie, quando la razionalità della soluzione sia in gioco, oppure, nello stesso caso, di una condizione (negativa) di «congruenza»[100]. Con «identificazione di specie» si intende che la determinazione di razionalità identifica lo εἶδος «specie» dell'espressione dei dati in oggetto. Tale condizione è tipicamente formulata con la richiesta che una espressione ben definita dei dati numerici del problema sia un quadrato, un cubo, o una potenza singola, cioè una delle «specie» numeriche descritte da Diofanto fin dall'introduzione degli *Arithmetica*[101]. Una condizione di questo genere garantisce che l'espressione dei dati numerici del problema che appare nella condizione di vincolo produca un numero razionale quando ne sia presa la radice quadrata, cubica, …, come risulterà essere richiesto dalla procedura effettiva di soluzione. Va sottolineato che le determinazioni di razionalità non sono mai formulate esplicitamente come uguaglianze, per quanto sia immediato scriverle in quella forma, e Diofanto stesso avrebbe potuto farlo[102]. Le determinazioni di positività sono invece formulate come disuguaglianze[103]. Il prospetto seguente elenca i problemi degli *Arithmetica* che hanno una determinazione[104] (alcuni ne sono privi pur richiedendola[105]):

	greco	arabo
razionalità	I.27-28, 30, IV.34-35	IV.17-22, V.7-12, VII.6
positività	I.5-6, 8-9, 14, 16-17, 19, 21, 21 *aliter*, II.6-7	V.13
congruenza	V.9, 11	
assente	I.7, IV.1-2, 15, V.10, 20	

Un punto terminologico merita un supplemento di discussione. Diofanto sembra usare per «determinazione» il termine προσδιορισμός, forma intensiva di διορισμός, che a sua volta non appare negli *Arithmetica*. La forma attestata si registra in realtà solo in I.14 e V.10 (*DOO* I, 36.6 e 340.9-10, rispettivamente). In I.14 si ricercano due numeri tali che il rapporto del loro prodotto e della loro somma sia dato. La soluzione assume una delle due soluzioni come assegnata, dotandola di un valore numerico ben preciso: si tratta dunque di un dato addizionale[106]. La determinazione è

[100] Ciò accade solo in V.9, 11. La determinazione di V.11 stabilisce che il numero dato non può essere della forma $8n + 2$. Il testo della determinazione di V.9 è corrotto ma la condizione richiesta può essere ricostruita; si veda Heath 1910, 107-8.
[101] In particolare nella descrizione del metodo risolutivo a *DOO* I, 14.1-20.
[102] Per chiarire il punto, si consideri che il verbo «fare» che abbiamo letto sopra in I.27 ricorre di norma negli enunciati. Nel corso della dimostrazione, tuttavia, Diofanto lavora su esempi numerici concreti e specie dell'incognita, e il verbo è molto spesso rimpiazzato, in asserzioni corrispondenti all'enunciato, da «essere uguale a» o semplicemente da «essere». L'equivalenza delle tre formulazioni appare evidente da passaggi come ad esempio l'ultima inferenza di I.29, dove in un argomento per transitività appaiono in successione «fare», «essere» e «essere uguale a» (*DOO* I, 64.22-24).
[103] Analoga assenza di uguaglianze come controparte di disuguaglianze si riscontra ad esempio nella terminologia delle proporzioni: i rapporti possono essere termini di una disuguaglianza, ma non sono mai detti uguali, bensì identici.
[104] Tannery riteneva che II.6-7 fossero interpolazioni.
[105] I problemi IV.1-2 greci sono anche attestati come V.7-8 arabi, ma con differenze che rendono i primi quasi sicuramente spuri. I.7 dovrebbe avere una determinazione di positività (identica a quella di I.8), IV.15 una determinazione di razionalità piuttosto complicata. V.20 è ricondotto ad un altro problema (non attestato in ciò che resta degli *Arithmetica*) che ha regolarmente una determinazione. In tutti i casi di determinazione assente, i numeri che istanziano il problema sono ovviamente scelti *ad hoc*. V.10 è discusso sùbito dopo il prospetto.
[106] Questo fatto è già riconosciuto nella formulazione della determinazione (*DOO* I, 34.28), dove la soluzione assegnata è designata «la molteplicità *supposta* [ὑποτιθέμενον] di unità di uno dei numeri».

coerentemente espressa in termini di quella soluzione (cioè di un nuovo dato) e del rapporto dato, e richiede la prima sia maggiore del secondo[107]. Tale condizione è giustamente denominata προσδιορισμός «determinazione aggiuntiva», dal momento che l'insieme originale dei dati del problema risulta modificato nel corso della soluzione.

Il caso di V.10 è più complesso. Il problema è stato sospettato di autenticità in quanto, unico negli *Arithmetica*, mette in campo oggetti geometrici denotati da lettere[108]. È inoltre strutturato in parte come un'analisi canonica, una breve inferenza essendo formulata come catena di «dati» (Acerbi 2011a). Infine, è privo di determinazione[109]. La condizione che nel testo è denominata προσδιορισμός è in realtà una conseguenza di quella imposta sui numeri ricercati dall'enunciato stesso del problema[110]. Si tratta dunque del passaggio finale di una procedura di riduzione del problema originale ad un altro[111]. La condizione è quindi di natura molto differente da quella di I.14, con la differenza cruciale che la condizione in V.10 impone vincoli sulla soluzione, non sui dati, e quindi non è una vera determinazione. È difficile trarre conclusioni recise da un campione così limitato. Forse il termine προσδιορισμός non è originale diofanteo, o forse lo è, e Diofanto lo usa per denominare «determinazioni aggiuntive» che si generano all'interno si sottoproblemi, mentre avrebbe regolarmente chiamato la determinazione "principale" διορισμός[112]. Le occorrenze negli *Arithmetica* sono le prime in tutto il *corpus* matematico antico, per quanto ciò potrebbe ben essere irrilevante. Altrove nello stesso *corpus*, la forma intensiva si trova in Eutocio, *in Sph. cyl.* II.4[113], e in Proclo[114], in entrambi gli autori nel senso di «determinazione aggiuntiva». L'uso che fanno del termine non suggerisce che facesse parte del lessico metamatematico corrente, anche se l'evidenza è troppo magra per escludere questa possibilità.

[107] La formulazione effettiva è più complicata, ma il fatto è qui irrilevante (si veda ivi, 34.28-36.2).

[108] Ma potrebbe ben darsi che tutta la parte ivi, 336.17-338.10 (per essere precisi, solo la prima metà del'ultima riga) sia spuria, ed in aggiunta alcuni passaggi sparsi nella riduzione che segue. Il diagramma annesso alla proposizione (l'unico in tutto il trattato) fu aggiunto dall'editore diofanteo del diciassettesimo secolo Bachet de Méziriac: egli avverte il lettore che «in codice manu exarato deesse diagramma descriptionis Diophantaeae quod nos restituimus, cùm absque illo non possint intelligi Graeca authoris verba» (*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex*, 307); si veda anche *DOO* I, 336.11 *in app.*

[109] Dovrebbe essere una determinazione di razionalità: la somma dei due numeri dati più un'unità deve essere la somma di due quadrati.

[110] Il problema richiede di dividere un'unità in due parti in modo tale che, se numeri dati differenti sono sommati a ciascuna parte, i risultati siano quadrati. Come numeri dati sono presi 2 e 6; uno dei due quadrati deve quindi essere compreso tra 2 e 3 (= il numero dato minore 2 più l'unità assunta in esposizione). Vengono pertanto scelti due quadrati compresi tra 2 e 3, cioè 289/144 e 361/144. Ciò comporta che uno dei numeri cercati debba essere compreso tra 17/12 e 19/12. Dopo un passaggio che corrisponde a ciò che chiameremmo «cambio di variabile», questa condizione si trasforma nella richiesta che una certa espressione che coinvolge uno dei numeri cercati debba essere compreso tra gli stessi 17/12 e 19/12. Questa è la condizione chiamata προσδιορισμός nel testo.

[111] Che si tratti di una «riduzione» vera è propria è chiaro anche all'estensore di questa parte della dimostrazione, dato che usa il verbo ἀπάγειν per denotare le procedura (*DOO* I, 338.3).

[112] Il verbo διορίζεσθαι è in effetti attestato nel Diofanto greco (in VI.14-15, a *DOO* I, 424.14 e 428.21); il significato è quello canonico di «porre una determinazione». Il verbo προσδιορίζεσθαι non compare.

[113] In *AOO* III, 150.15. Eutocio fa riferimento alla determinazione del celebre problema cui si riconduce *Sph. cyl.* II.4. Archimede formula due volte il problema; nella seconda formulazione la determinazione è inclusa tra le ipotesi (come nel caso di *El.* XI.23 vista sopra), in modo da produrre un problema sempre risolubile. La menzione eutociana della «determinazione aggiuntiva» sottolinea questa mossa.

[114] A *iE*, 240.27 e 349.21. In Proclo si rintracciano occorrenze anche a *in Rmp.*, I, 29.1, e a *in Cr.*, 53.28, in contesti non matematici.

1.3. Il ruolo delle costruzioni

Nella costruzione la configurazione iniziale presentata nell'esposizione viene completata con tutti gli enti geometrici necessari al dispiegamento della dimostrazione. Sul perché siano costruiti certi oggetti e non altri, e sul perché la dimostrazione li metta in relazione tra loro in un certo modo, non viene fatta parola. Le costruzioni sono di norma costituite di passi elementari che coincidono con uno dei primi tre postulati o con qualcuna delle costruzioni proposte all'inizio del libro I. Sono formulate invariabilmente all'imperativo del perfetto medio-passivo: ad esempio ἐπεζεύχθω ἡ AB «sia congiunta ‹una retta› AB». L'oggetto introdotto ha sempre un designatore (sottinteso) indefinito, come abbiamo visto nella sez. 1.0.4. L'uso del perfetto rimanda alla pratica stilistica canonica adottata nelle conclusioni dei problemi e sottolinea il valore aspettuale di «presente compiuto», svincolato da connotazioni temporali o di durata, quello dell'imperativo pone le costruzioni nel modo «suppositivo» della logica stoica (Bobzien 1997): esse sono dunque assunzioni prive di valore di verità, «scaricate» nel corso della dimostrazione; se vogliamo, è come se le impalcature di enti matematici ausiliari fossero "smontate" a fine proposizione.

Ciascuna costruzione è espressa con una formula invariante (cfr. sez. 1.0.5); vediamo quelle corrispondenti ai primi tre postulati, introdotti da un verbo dalla forte connotazione iussiva (*EE* I, 4.14-5.2):

ᾐτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	Sia richiesto di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto.
καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.	E di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in ‹linea› retta.
καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.	E di tracciare un cerchio con ogni centro e intervallo.

Si noti l'infinito aoristo nei primi due, privo di connotazione aspettuale come gli aoristi negli enunciati, e la forma verbale media nel terzo (è il matematico che "fa per sé"). Le costruzioni sono all'opera insieme in I.2 (*EE* I, 8.16-20) – tutte le forme verbali sono volte al perfetto:

<u>ἐπεζεύχθω</u> γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ AB, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔAB, καὶ <u>ἐκβεβλήσθωσαν</u> ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔA, ΔB εὐθεῖαι αἱ AE, BZ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ BΓ κύκλος <u>γεγράφθω</u> ὁ ΓΗΘ, […]	In effetti, <u>sia congiunta</u> dal punto A fino al punto B una retta AB, e sia costruito su di essa un triangolo equilatero ΔAB, e <u>siano prolungate</u> in ‹linea› retta con ΔA, ΔB rette AE, BZ, e con centro B e intervallo BΓ <u>sia tracciato</u> un cerchio ΓΗΘ, […]

L'unica differenza di rilievo è l'impiego del verbo ἐπιζευγνύναι «congiungere» invece di ἄγειν «condurre» nelle applicazioni del primo postulato[115]; altrimenti la formulazione ricalca un'espressione matriciale canonica (sez. 1.0.5).

La differenziazione d'uso tra i due verbi è mantenuta rigidamente in tutto il *corpus* antico[116]: ἐπιζευγνύναι si applica a rette ottenute per congiunzione di due punti (cioè come applicazione del I

[115] Il termine διάστημα «intervallo» è usato nel terzo postulato per motivi grammaticali: un'espressione preposizionale come ἐκ τοῦ κέντρου «raggio», priva di articolo come richiesto dalla formula delle applicazioni del terzo postulato, non è declinabile in casi, mentre è richiesto un dativo; si veda Federspiel 2005.

[116] Si veda Federspiel 2002, 137-147, per uno studio dettagliato. Fanno eccezione appunto il I postulato, 3 occorrenze piuttosto dubbie in Archimede (negli enunciati di *Sph. cyl.* I.9-10 e nella costruzione di *Aequil.* II.8), e un buon numero nelle

postulato); ἄγειν a rette di cui sia specificata la funzione, di norma tramite prescrizioni sulla direzione o sulla relazione con altri enti geometrici (parallelismo, perpendicolarità, tangenza, sezione, …). Una retta «condotta» passa spesso διά «per» uno o più punti. Occasionalmente la preposizione è incorporata nel verbo: otteniamo διάγειν «condurre oltre», che però non è una semplice variante stilistica per ἄγειν διά.

Il verbo διάγειν merita una breve digressione (si veda anche la sez. 2.1.3). Impiegato maggioritariamente al perfetto imperativo nel *corpus* euclideo, è spesso sinonimo di ἐκβάλλειν «prolungare» in applicazioni del II postulato in cui sia menzionato l'estremo di arrivo della retta prolungata, come in I.16 che leggeremo tra un attimo[117]. Dato che l'estremo di arrivo è arbitrario, la costruzione resta in qualche modo indeterminata (si noti che neanche il II postulato menziona un estremo di arrivo). Connotazione ancora più marcata in questo senso si ha quando «condotta oltre» sia una retta che passa per un punto ma il cui altro punto di transito non è univocamente specificato[118]. Si tratta dunque di una costruzione con gradi di libertà residui, come vediamo riesumando ancora III.2 (*EE* I, 96.5-7):

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.	No infatti, ma se possibile cada all'esterno come ΑΕΒ, e sia preso il centro del cerchio ΑΒΓ, e sia Δ, e siano congiunte ΔΑ, ΔΒ, e sia condotta oltre ΔΖΕ.

Il designatore Z non è nominato prima. Il designatore E fa solo parte del nome della retta ἡ ΑΕΒ, ma non è il nome di un punto: lo diventa solo quando sia identificato come intersezione delle due rette ἡ ΑΕΒ e ἡ ΔΖΕ; appunto per questo il redattore usa διάγειν. Altrimenti avrebbe scritto

καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΕ, καὶ ἡ ΔΕ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον κατὰ τὸ Ζ.	e siano congiunte ΔΑ, ΔΒ, e ΔΕ sechi il cerchio ΑΒΓ secondo Z.

Unica eccezione alla connotazione di parziale indeterminazione del verbo è il suo impiego esclusivo per piani «condotti oltre» per una o più rette, come in XI.13 (*EE* IV, 19.4-7)[119]:

εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον.	Se infatti possibile, dallo stesso punto A si erigano dalla stessa parte due rette ΑΒ, ΑΓ ad ‹angoli› retti con il piano soggiacente, e sia condotto oltre il piano per ΒΑ, ΑΓ.

Possiamo dividere le costruzioni in tre categorie:

Coniche di Apollonio, in particolare in espressioni participiali contenute negli enunciati di 15 proposizioni (I.1, II.1, 29, 34, III.44-45, 47, IV.1, 4-6, 9, 13, 15, 18).

[117] 30 occorrenze di questo tipo nel testo principale degli *Elementi*, in XII.17 (participio presente), VI.3 (participio aoristo passivo), I.16, 20-21, 44, II.3, 11, III.1, 9-10, 15, 20, 25, 31, IV.15, VI.9, 26, XII.16-17, XIII.1, 9-12, 14 (perfetto imperativo).

[118] 18 occorrenze nel testo principale degli *Elementi*, in III.8, 32 (congiuntivo aoristo passivo), XI.20 (participio aoristo passivo), III.1, 2, 5, 6, 8, 23, 32, IV.3, XI.2, 4, 11, 31, XIII.2 (perfetto imperativo). Il carattere indeterminato della costruzione è sottolineato dalla presenza sistematica di determinativi di indefinitezza o di arbitrarietà (cfr. sez. 2.1.2-3); uniche eccezioni in III.2, 23, XI.2, 20, 31, XIII.2.

[119] Le altre due occorrenze si trovano in XI.5 e 7. L'eccezione è parziale perché in XI.7 il piano è condotto per una sola retta, il che non è sufficiente a determinarlo.

1) Vere costruzioni ausiliarie: gli enti geometrici aggiunti sono necessari alla dimostrazione o alla risoluzione del problema ma non sono menzionati nell'esposizione. Prendiamo ad esempio il teorema I.16, in cui è assegnato solo un triangolo τὸ ΑΒΓ con un lato ἡ ΒΓ prolungato fino a τὸ Δ (*EE* I, 25.6-10):

τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Sia secata ΑΓ a metà secondo Ε, e congiunta ΒΕ sia prolungata in ‹linea› retta fino a Ζ, e uguale a ΒΕ sia posta ΕΖ, e sia congiunta ΖΓ, e sia condotta oltre ΑΓ fino a Η.

Le costruzioni ausiliarie sono "scaricate" nel corso della dimostrazione. Sono le parti di una dimostrazione che è impossibile ridurre a una procedura meccanica: la loro presenza nella configurazione finale resta un mistero irriducibile a puri fatti logici, e costituisce tutto sommato il cuore duro dell'intera dimostrazione.

2) Costruzioni che rendono esplicita la configurazione geometrica implicitamente assunta nell'enunciato: esempi in vario grado ibridati con il caso precedente sono i lemmi lineari in II.1-8 (II.9-10 appartengono interamente alla categoria precedente); in particolare, II.1 (*EE* I, 68.3-7), dove è data una retta ἡ ΒΓ secata nei punti τὰ Δ, Ε e la relazione da dimostrare verte sui rettangoli costruiti sui segmenti risultanti, ne è un caso puro:

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

In effetti, sia condotta da Β ad ‹angoli› retti con ΒΓ ‹una retta› ΒΖ, e uguale a Α sia posta ΒΗ, e per Η parallela a ΒΓ sia condotta ‹una retta› ΗΘ, per Δ, Ε, Γ parallele a ΒΗ siano condotte ‹rette› ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

3) Costruzioni richieste dall'enunciato (quindi nel caso di problemi), ma in cui non entri nessun ente ausiliario: un esempio è I.46 (*EE* I, 62.5-9), dove è imposto di costruire un quadrato sulla retta ἡ ΑΒ:

ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Sia condotta ad ‹angoli› retti con la retta ΑΒ dal punto Α su di essa ‹una retta› ΑΓ, e uguale a ΑΒ sia posta ΑΔ, e per il punto Δ parallela a ΑΒ sia condotta ‹una retta› ΔΕ, per il punto Β parallela a ΑΔ sia condotta ‹una retta› ΒΕ.

Tra le costruzioni vanno incluse anche certe supposizioni del libro V, che di norma consistono nel prendere equimultipli come in V.22 (*EE* II, 33.1-4):

εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

In effetti, siano presi di Α, Δ equimultipli Η, Θ, e di Β, Ε altri, quali càpita, equimultipli Κ, Λ, e ancora di Γ, Ζ altri, quali càpita, equimultipli Μ, Ν.

e quelle, piuttosto rare, che troviamo nei libri aritmetici, come in VIII.9 (*EE* II, 163.1-5) – la costruzione iterativa è resa possibile da VIII.2:

εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ

In effetti, siano presi due numeri minimi Ζ, Η che

τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο.

siano nello stesso rapporto di Α, Β, Γ, Δ, tre Θ, Κ, Λ, e in successione di séguito uno in più, finché la loro molteplicità risulti uguale alla molteplicità di Α, Γ, Δ, Β. Siano presi, e siano Μ, Ν, Ξ, Ο.

o quelle estremamente semplici in VII.37, VIII.4 e 15 (*EE* II, 146.18-19, 154.13-14, 173.1-5) – la seconda autorizzata da VII.34:

ὁσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ.

εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η.

ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ [ποιείτω], ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

In effetti, quante volte Β misura Α, tante unità siano in Γ.

In effetti, sia preso il numero minimo Η misurato da Β, Γ.

In effetti, Γ moltiplicando se stesso faccia Ε, e Δ moltiplicando se stesso faccia Η, e ancora Γ moltiplicando Δ [faccia] Ζ, e uno e l'altro dei Γ, Δ moltiplicando Ζ faccia uno e l'altro dei Θ, Κ.

Non sempre le costruzioni seguono immediatamente l'esposizione o la determinazione (che sia quella iniziale o una parziale ad essa successiva) o comunque la ripresa di un nuovo argomento, necessaria se è stata adottata una divisione in casi o proposto un argomento parziale per assurdo; se ne trovano anche posticipate nel mezzo della dimostrazione, come in I.44 (*EE* I, 58.19-59.11):

<u>συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ</u>. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. <u>ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα.</u>

<u>Sia costruito in un angolo ΕΒΗ, che è uguale a Δ, un parallelogrammo ΒΕΖΗ uguale al triangolo Γ: e sia posto così da essere ΒΕ in ‹linea› retta con ΑΒ, e sia condotta oltre ΖΗ fino a Θ, e per Α parallela a una o all'altra delle ΒΗ, ΕΖ sia condotta ‹una retta› ΑΘ, e sia congiunta ΘΒ</u>. E poiché una retta ΘΖ incise su parallele ΑΘ, ΕΖ, gli angoli ΑΘΖ, ΘΖΕ sono quindi uguali a due retti. ΒΘΗ, ΗΖΕ sono quindi minori di due retti: e le ‹rette› prolungate illimitatamente da meno di due retti si incontrano: quindi ΘΒ, ΖΕ prolungate si incontreranno. <u>Siano prolungate e si incontrino secondo Κ, e per il punto Κ parallela a una o all'altra delle ΕΑ, ΖΘ sia condotta ‹una retta› ΚΛ, e siano prolungate ΘΑ, ΗΒ fino ai punti Λ, Μ.</u>

Né le costruzioni sono sempre rigidamente separate dai passaggi dimostrativi, come nel caso "misto" di IV.11 (*EE* I, 167.13-168.2); non siamo nel caso precedente in quanto le due costruzioni non sono inframezzate da un'anafora:

ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ

Sia fissato un triangolo isoscele ΖΗΘ che ha uno e l'altro degli angoli su Η, Θ doppio di quello su Ζ, e sia inscritto nel cerchio ΑΒΓΔΕ un triangolo ΑΓΔ

ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, [ΓΔ], ΔΕ, ΕΑ.

equiangolo a ΖΗΘ, così da essere all'angolo su Ζ uguale ΓΑΔ, e quelli su Η, Θ rispettivamente uguali a ΑΓΔ, ΓΔΑ: anche uno e l'altro degli ΑΓΔ, ΓΔΑ è quindi doppio di ΓΑΔ. Siano pertanto secati a metà ΑΓΔ, ΓΔΑ rispettivamente dalle rette ΓΕ, ΔΒ, e siano congiunte ΑΒ, ΒΓ, [ΓΔ,] ΔΕ, ΕΑ.

o nella dilagante dialettica tra costruzioni e parte dimostrativa in certe proposizioni del libro X (si veda X.94 per un esempio estremo) e del libro XIII (come 16 e 17, scandite da una fitta serie di esposizioni parziali).

Una caratteristica peculiare del primo libro degli *Elementi* è costituita dalla stringa iniziale di costruzioni (si noti che I.7 stabilisce l'impossibilità di una costruzione, e procede ovviamente per assurdo). In particolare, le prime tre trovano una ragione di essere solo nella prospettiva di uno sforzo fondazionale indirizzato da richieste di economia deduttiva, condizionata da un'interpretazione molto restrittiva del III postulato (il compasso "si chiude" se lo solleviamo dal piano). È significativo in questo senso il ricorso ad una costruzione di base come quella del triangolo equilatero quando in realtà è sufficiente costruirne uno isoscele per fondare tutte le costruzioni che seguono[120]. È però vero che, se non vogliamo introdurre enti geometrici ausiliari oltre alla retta data, possono essere costruiti solo particolari triangoli isosceli (ad esempio quello avente il lato obliquo doppio della base), e ciò richiede costruzioni notevolmente meno immediate di quella di I.1. La scelta del triangolo equilatero è quindi dettata sia da ragioni di economia dimostrativa che da motivi più profondi, legati alla concezione stessa di una costruzione come operazione basata, per quanto possibile, solo sugli oggetti dati.

È importante apprezzare come sono formulati gli enunciati dei problemi di costruzione. Si tratta di richieste espresse all'imperativo (si noti il δεῖ δή «si deve» nella determinazione): l'accento è sull'esecuzione effettiva della costruzione, non sulla possibilità che sia eseguita. Non traspare dunque nessun interesse per problemi di costruibilità, che potrebbe facilmente essere espressa con locuzioni del tipo «è possibile», e di conseguenza neanche per l'esistenza degli oggetti in gioco[121]. L'unico problema negli *Elementi* il cui enunciato asserisca costruibilità è XI.22, discussa nella sez. 1.2.1. Si tratta però di un caso apparente, in quanto la formulazione condizionale è rigidamente ancorata ai teoremi e la modalità è strettamente funzionale all'applicazione di questo risultato nel problema che segue[122]. Enfasi esplicita sulla costruibilità hanno invece i cosiddetti problemi παράδοξα «sorprendenti» di un certo Erykinos descritti a lungo da Pappo[123]. Ne leggiamo due enunciati (*Coll.* III.60 e 72):

ἐν παντὶ τριγώνῳ, πλὴν τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ

In ogni triangolo, eccetto quello equilatero e quello

[120] Come osserva Erone *apud Anaritius*, 39.4-41.19 Tummers; Proclo (*iE*, 218.12-219.17) compila questa parte in modo scorretto.

[121] Zeuthen (1896) propose di considerare certe costruzioni come dimostrazioni di esistenza. Si vedano le critiche in Knorr 1983, che però interpreta piuttosto tendenziosamente la proposta di Zeuthen (quest'articolo servì a Knorr principalmente a pubblicizzare l'imminente uscita del suo *The Ancient Tradition*).

[122] Sfumature modali con altri scopi si rintracciano anche nei «problemi» di teoria dei numeri IX.18-19, discussi anch'essi nella sez. 1.2.1.

[123] L'autore è menzionato in *Coll.* III.59; l'estratto dal trattato di Erykinos si trova in *Coll.* III.60-73, meno verosimilmente III.58-74, come di solito si assume. Il teorema in *Coll.* III.58 è ripetuto quasi alla lettera da Proclo (*iE*, 327.8-24) e, in forma leggermente modificata, da Eutocio nel suo commento ad uno dei postulati di *Sph. cyl.* I di Archimede (*AOO* III, 12.18-14.4). Eutocio sembra trarre altro materiale dallo stesso *corpus*; si veda l'intera parte dedicata ai postulati, ivi, 6.4-14.30. I problemi di Erykinos variano sul tema introdotto in *El.* I.21, dove si dimostra che «Qualora due rette siano costruite all'interno di un triangolo su uno solo dei lati ‹e› a partire dai ‹suoi› limiti, le ‹rette› costruite saranno minori dei restanti due lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore» (*EE* I, 29.9-12).

ἰσοσκελοῦς τοῦ τὴν βάσιν ἐλάσσονα τῆς πλευρᾶς ἔχοντος, δυνατόν ἐστι συσταθῆναί τινας ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς δύο εὐθείας ἴσας ταῖς ἐκτὸς ὁμοῦ λαμβανομέναις.

isoscele che abbia la base minore del lato, è possibile costruire sulla base ‹e› all'interno due certe[124] rette uguali a quelle all'esterno prese insieme.

δοθέντος παραλληλογράμμου χωρίου δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν ἕτερον παραλληλόγραμμον, ὥστε αὐτὸ μὲν τὸ ἐπιταχθὲν μέρος εἶναι τοῦ δοθέντος, ἑκάστην δὲ πλευρὰν ἑκάστης πολλαπλασίαν κατὰ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Dato un dominio parallelogrammico è possibile trovare un altro parallelogrammo così da essere questo una parte prescritta di quello dato, e ciascun lato multiplo di ciascuno secondo un numero dato.

Anche se il primo di essi mantiene una forte connotazione diorismatica[125], la formulazione modale dei παράδοξα è quasi sicuramente legata al fatto che tali problemi ammettono infinite soluzioni. Pappo insiste a più riprese su tale fatto e sembra introdurre la trattazione di Erykinos proprio come esempio di investigazione sistematica di un gruppo di problemi con questa caratteristica.

Com'è da attendersi, nelle opere di Archimede troviamo la formulazione modale per le costruzioni impiegata molto più spesso che in altri autori (*Sph. cyl.* I.2-4, 6, *Con. sph.* 7-9, 19-20, *Spir.* 3-9, 21-23, *Aequil.* I.6-7. *Quadr.* 20por). Si osservi però che l'enunciato di *Sph. cyl.* I.5, identico a quello di I.6 (forse spuria), è formulato con un semplice infinito, e che in *Con. sph.* 7-9 non sono eseguite costruzioni; nei casi restanti, si tratta ancora di problemi che ammettono infinite soluzioni. Vanno anche notate le assunzioni con verbo «essere» esplicitamente esistenziale negli assiomi 1 e 3 di *Sph. cyl.* I. L'affermazione apertamente esistenziale che apre *El.* X.def.3 è in realtà una distorsione dell'enunciato di *El.* X.10 ed è quasi sicuramente un'aggiunta posteriore (si veda anche *Coll.* V.10-11).

Quanto all'unicità di un oggetto matematico, essa non era tematizzata in quanto tale nella matematica greca, e le difficoltà che derivano da questa pratica omissiva erano affrontate volta per volta con una varietà di soluzioni stilistiche che risultano ai nostri occhi sicuramente disomogenee e non sempre le più efficaci. Il problema *El.* I.7 (*EE* I, 14.20-23) nega il sussistere (e non la possibilità del sussistere) di due costruzioni a partire dagli stessi dati – noi parleremmo semplicemente di unicità di un triangolo dati i lati:

ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Su una stessa retta altre due rette rispettivamente uguali a due medesime rette ‹e› che hanno gli stessi limiti delle rette in origine non saranno costruite verso punti differenti dalla stessa parte.

La stessa formulazione troviamo in XI.13 (*EE* IV, 19.2-3) – unicità della perpendicolare ad un piano; si noti ancora il verbo della principale al futuro:

ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Da uno stesso punto non si erigeranno dalla stessa parte due rette ad ‹angoli› retti con lo stesso piano.

o in III.16 (*EE* I, 117.2-5) – unicità della tangente ad una circonferenza per un punto su di essa:

[124] Si noti il determinativo di indefinitezza (cfr. sez. 2.1.3), segno che la soluzione non è univocamente determinata.
[125] Pappo spiegherà sùbito dopo (*Coll.* III.62) il motivo per cui la costruzione sia impossibile per i triangoli esclusi.

ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Una retta condotta ad ‹angoli› retti con il diametro del cerchio da un ‹suo› estremo cadrà all'esterno del cerchio, e nel luogo tra la retta e la circonferenza non si interpolerà un'altra retta.

La questione trova invece una formulazione più esplicita nel libro X, dove occorre dimostrare che i modi di generazione di certe linee irrazionali la determinano univocamente. Così in X.42-47 e X.79-84, di cui leggiamo X.42 (*EE* III, 68.17-18):

ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Una binomiale si divide nei nomi secondo un punto soltanto.

Le determinazioni di tutti questi teoremi sono però formulate esplicitamente in forma negativa, il che radicalizza, tra l'altro, uno dei casi più rilevanti in cui il complesso esposizione + determinazione è diverso dall'enunciato. Leggiamo cosa accade a X.42 (*EE* III, 68.19-22):

ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Sia una binomiale ΑΒ che risulta divisa nei nomi secondo Γ: ΑΓ, ΓΒ sono quindi esprimibili commensurabili in potenza soltanto. Dico che ΑΒ non si divide secondo un altro punto in due esprimibili commensurabili in potenza soltanto.

Sarebbe erroneo pensare che tutti i problemi degli *Elementi* richiedano di costruire un oggetto geometrico. Ve ne sono in cui si impone di εὑρεῖν o προσευρεῖν «trovare» l'oggetto. Enunciati di questo genere si trovano in teoria dei numeri e delle linee irrazionali (VII.2-3, 33-34, 36, 39; VIII.2, 4; IX.18-19; X.3-4, 10, 27-35, 48-53, 85-90), quando cioè la richiesta verta su di un ente che ha caratteristiche di particolarità e unicità che lo rendono «meno generico» di quelli trattati in àmbito strettamente geometrico. Lo stesso può essere detto per le poche costruzioni in «trovare» presenti nei libri geometrici (III.1 e VI.11-13). Le proposizioni del libro X sono ulteriormente caratterizzate dall'assenza di specificazione di oggetti «dati» sulla cui base eseguire la costruzione, ad esempio «Trovare un'apotome seconda» (X.86), mentre in tutti gli altri casi ciò avviene regolarmente.

Alcune delle costruzioni proposte all'inizio del I libro degli *Elementi*, in particolare I.2-3, ammettono una pluralità di configurazioni geometriche possibili, in dipendenza della posizione reciproca degli oggetti coinvolti. Qui come altrove negli *Elementi*, troviamo di norma trattata una sola delle configurazioni, anche perché la dimostrazione relativa ad alcune di quelle alternative è identica in ogni rispetto, comprese le assegnazioni di lettere denotative. È quindi spesso la figura effettivamente tracciata che induce un elemento apparentemente particolarizzante, qual è la necessità di operare una divisione in casi. Quelli "mancanti" fecero ovviamente la delizia di molti commentatori antichi, diventando un'ossessione enumerativa nelle note di Eutocio alle *Coniche* di Apollonio; si veda ad esempio la quantità di configurazioni che Proclo compila, "a mo' di esercizio", appunto per *El*. I.2-3 (*iE,* 224.5-232.9). Alcune di esse sono totalmente fittizie e rivelano una profonda incomprensione di come funziona la dimostrazione di I.3. Proclo stesso osserva in effetti che la formulazione euclidea si adatta a tutti questi casi, ma non ne trae certo l'ammaestramento di soprassedere alla loro compilazione. Un poco differente è il caso omesso di I.7, quello cioè in cui i due triangoli siano uno dentro l'altro. Proclo offre una semplice dimostrazione che applica la seconda parte dell'enunciato di

I.5 (*iE*, 262.7-263.4), che stabilisce che anche gli angoli sotto la base di un triangolo isoscele sono uguali.

1.4. Anafora

La dimostrazione inizia di norma con un riferimento ad una conseguenza di uno o più dati di fatto geometrici stabiliti nell'esposizione o nella costruzione, solitamente tramite la mediazione implicita di un teorema precedente. Questa parte di una proposizione, ben definita ma da non riconoscersi come prte specifica indipendente, è stata recentemente battezzata «anafora» da M. Federspiel (1995 e 1999 – egli riconosce però l'appellativo solo per subordinate col verbo al perfetto), dato che essa "rimanda" a quanto disposto in esposizione o costruzione. Dal punto di vista grammaticale si tratta di una subordinata causale, introdotta da ἐπεί «poiché» e con verbo all'indicativo presente o perfetto (il secondo quando sia fatto riferimento *diretto* alla costruzione), seguita da una principale con verbo all'indicativo o all'imperativo ed eventualmente introdotta da ἄρα «quindi». Di norma ἐπεί «poiché» è completato con οὖν «dunque» oppure γάρ «in effetti» strutturante, se ci troviamo in inizio di dimostrazione, ma molto frequenti sono gli *incipit* in καὶ ἐπεί «e poiché» (cfr. sez. 2.4). Leggiamo le anafore incipitarie di VII.26 (*EE* II, 133.6-8) – riferimento all'esposizione, teorema mediatore VII.24:

ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται.	In effetti, poiché uno e l'altro degli Α, Β è primo rispetto a Γ, anche quello che risulta da Α, Β sarà quindi primo rispetto a Γ.

di IV.4 (*EE* I, 156.3-10) – nella subordinata doppio riferimento a conseguenze immediate della costruzione, coordinate con un δέ coassuntivo, principale introdotta da δή «pertanto» in quanto semplice constatazione (cfr. sez. 2.4) e quindi nessun teorema mediatore:

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ.	E poiché un angolo ΑΒΔ è uguale a ΓΒΔ, ed è anche ΒΕΔ retto uguale a ΒΖΔ retto, sono pertanto due triangoli, ΕΒΔ, ΖΒΔ, che hanno due angoli uguali a due angoli e un solo lato, quello che si tende sotto uno solo degli angoli uguali, uguale a un solo lato, ΒΔ comune a essi.

e di V.7 (*EE* II, 12.3-4) – nell'ordine riferimento a costruzione e esposizione, ancora coordinati con un δέ coassuntivo, nessun teorema mediatore:

ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε.	Poiché dunque è equimultiplo Δ di Α e Ε di Β, e Α è uguale a Β, anche Δ è quindi uguale a Ε.

Se il verbo nella subordinata è al perfetto il carattere formulare del riferimento istanziato al teorema mediatore è ancora più marcato, come vediamo sugli esempi di VI.11 (*EE* II, 59.14-17) – mediatore VI.2:

ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν	Poiché dunque parallela a uno solo dei lati ΔΕ di un triangolo ΑΔΕ risulta condotta ‹una retta› ΒΓ, in proporzione è come ΑΒ rispetto a ΒΔ, così ΑΓ rispetto a

ΓΕ. ΓΕ.

e di II.11 (*EE* I, 87.14-17) – riferimenti alla costruzione coordinati con un δέ coassuntivo, mediatore II.4:

ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΖΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ.	In effetti, poiché una retta ΑΓ risulta secata a metà secondo Ε, e ad essa risulta sommata ΖΑ, il rettangolo compreso da ΓΖ, ΖΑ più il quadrato su ΑΕ è quindi uguale al quadrato su ΕΖ.

Si noti il presente *pro perfecto* come d'abitudine con le forme di κεῖσθαι. In casi particolari, nella principale si trova l'imperativo, come ad esempio all'inizio della dimostrazione di III.8, dove si effettua una costruzione (*EE* I, 105.4-5) – riferimento a una conseguenza immediata della costruzione:

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ .	E poiché ΑΜ è uguale a ΕΜ, sia sommata ΜΔ comune.

Una clausola di questo genere costituisce il caso più comune di imperativo nella principale, ma si trovano anche esempi di anafora incipitaria della costruzione con riferimento all'esposizione, come in I.18 (*EE* I, 27.1-9), seguita da due anafore annidate incipitarie della dimostrazione, la seconda a giustificare la coassunzione introdotta da δέ, in cui vengono utilizzate la costruzione stessa ed una sua conseguenza – teoremi mediatori I.16 e I.5; si noti anche il caso piuttosto raro di subordinata causale posposta, introdotta da ἐπεὶ καί «poiché anche»:

ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.	In effetti, poiché ΑΓ è maggiore di ΑΒ, uguale a ΑΒ sia posta ΑΔ, e sia congiunta ΒΔ.
καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση, μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.	E poiché è un angolo ΑΔΒ all'esterno di un triangolo ΒΓΔ, è maggiore di un interno e opposto ΔΓΒ, e ΑΔΒ è uguale a ΑΒΔ, poiché anche un lato ΑΒ è uguale a ΑΔ, anche ΑΒΔ è quindi maggiore di ΑΓΒ.

La posizione dell'anafora non è sempre incipitaria alla dimostrazione, e può venir fatto riferimento a risultati stabiliti in corso di dimostrazione o in teoremi precedenti. Tipico, ma non caratterizzante, delle anafore non incipitarie è il sintagma introduttivo πάλιν ἐπεί «di nuovo, poiché»: di norma lo si trova in repliche di anafore analoghe formulate precedentemente. Vediamo esempi di anafore non incipitarie presi dal cuore delle dimostrazioni di II.9 e II.4. In II.9 le due anafore introdotte da πάλιν ἐπεί danno il via a seguenze deduttive strettamente parallele a quelle che le precedono immediatamente, e che sono introdotte da καὶ ἐπεί. Leggiamo per primo un lungo estratto da II.9 (*EE* I, 82.3-83.1) – nessun teorema mediatore; si notino le spiegazioni posposte omologhe delle coassunzioni delle prime due anafore:

καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε	E poiché ΗΕΖ è metà di un retto, e ΕΗΖ è retto – è infatti uguale all'interno e opposto ΕΓΒ –, ΕΖΗ restante è quindi metà di un retto: l'angolo ΗΕΖ [è] quindi uguale a ΕΖΗ: così che anche un lato

καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ.

ΕΗ è uguale a ΗΖ. Di nuovo, poiché l'angolo su Β è metà di un retto, e ΖΔΒ è retto – è infatti di nuovo uguale all'interno e opposto ΕΓΒ –, ΒΖΔ restante è quindi metà di un retto: l'angolo su Β è quindi uguale a ΔΖΒ: così che anche un lato ΖΔ è uguale a un lato ΔΒ. E poiché ΑΓ è uguale a ΓΕ, anche il ‹quadrato› su ΑΓ è uguale a quello su ΓΕ: i quadrati su ΑΓ, ΓΕ sono quindi doppi di quello su ΑΓ. E uguale a quelli su ΑΓ, ΓΕ è il quadrato su ΕΑ – l'angolo ΑΓΕ è infatti retto –: quello su ΕΑ è quindi doppio di quello su ΑΓ. Di nuovo, poiché ΕΗ è uguale a ΗΖ, anche quello su ΕΗ è uguale a quello su ΗΖ: i quadrati su ΕΗ, ΗΖ sono quindi doppi del quadrato su ΗΖ. E uguale ai quadrati su ΕΗ, ΗΖ è il quadrato su ΕΖ: il quadrato su ΕΖ è quindi doppio di quello su ΗΖ.

Le prime due anafore applicano un risultato raggiunto appena prima nel corso della dimostrazione ed uno stabilito nel teorema I.29, giustificato dalla spiegazione posposta in forma di citazione parziale istanziata; le seconde due impiegano rispettivamente un'uguaglianza posta per costruzione e quella raggiunta al termine della catena deduttiva innescata dalla prima delle quattro anafore. In II.4 (*EE* I, 72.12-14)

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ.

E poiché ΑΗ è uguale a ΗΕ, e ΑΗ è ‹il rettangolo compreso› da ΑΓ, ΓΒ – ΗΓ è infatti uguale a ΓΒ –, anche ΗΕ è quindi uguale a quello da ΑΓ, ΓΒ.

la prima condizione è un rimando al risultato di I.43 non mediato da un riferimento a fatti posti in costruzione, la seconda, coordinata con un καί, una conseguenza immediata (sottolineata come tale dalla spiegazione posposta) di un'uguaglianza stabilita nella prima parte della dimostrazione.

1.5. Dimostrazione

La dimostrazione è una rete di inferenze tenuta insieme da rimandi di tipo anaforico a risultati precedentemente assunti (nell'esposizione o nella costruzione) o stabiliti, vuoi come princìpi vuoi come proposizioni. Della configurazione geometrica risultante dalla costruzione sono identificate alcune proprietà rilevanti all'ottenimento del risultato finale. I passaggi necessari al raggiungimento di questo scopo costituiscono la logica al lavoro nel corso della dimostrazione vera e propria. Posizione preminente in questa rete di inferenze hanno la logica delle relazioni e quella dei predicati, in quanto fanno procedere la macchina deduttiva messa in moto dalla costruzione.

1.5.1. *Logica delle relazioni*

La discussione della logica delle relazioni in questa lunga sezione sarà divisa in cinque sottosezioni:

1) Relazioni e sillogismi relazionali nelle dottrine logiche antiche, in particolare presso Aristotele e Galeno.
2) Considerazioni generali sull'abbondanza relativa di relazioni e predicati nel *corpus* antico e loro rilevanza dal punto di vista deduttivo.
3) Il criterio fondamentale di identificazione di una relazione: la posizione dell'operatore relazionale.
4) Interazioni tra relazioni e struttura inferenziale: transitività, simmetria, composizione, stabilità.
5) Analisi di alcuni problemi testuali.

1.5.1.1. Aristotele e Galeno sulle relazioni

Le relazioni come ente logico e le loro proprietà non rientrarono, se non tangenzialmente ed *in extremis*, nel raggio d'azione delle dottrine dialettiche antiche. Le discussioni dei relativi offerte nel *corpus* aristotelico, in *Cat*. 7, *Top*. Δ 4 e *Metaph*. Δ 15, si limitano a sottolineare le peculiarità relazionali di certi predicati, anche se è possibile intravedere un'evoluzione significativa dall'esposizione in *Cat*. 7 a quella nel piccolo lessico filosofico di *Metaph*. Δ 15. Nella prima, sotto la categoria dei relativi sono semplicemente elencati singoli *relata* (cioè degli enti visti nel rispetto del loro soddisfare un certo predicato) come τὸ διπλάσιον «ciò che è doppio», mentre sono offerte ampie discussioni della questione della convertibilità e della cosussistenza dei relativi. La seconda si riferisce anche a due *relata* nel loro rapporto reciproco, tramite espressioni del tipo

1) διπλάσιον πρὸς ἥμισυ «doppio rispetto a metà», o in generale πολλαπλάσιον πρὸς πολλοστημόριον «multiplo rispetto a sottomultiplo» (relativi κατ' ἀριθμόν «numerici»),
2) oppure τὸ τμητικὸν πρὸς τὸ τμητόν «ciò che è secatore rispetto a ciò che è secabile» (relativi κατὰ δύναμιν ποιητικὴν καὶ παθητικήν «secondo capacità attiva o passiva»),
3) oppure τὸ μετρητὸν πρὸς τὸ μέτρον «ciò che è misurabile rispetto alla misura» (il primo è detto relativo τῷ ἄλλο πρὸς αὐτὸ λέγεσθαι «per il fatto che un altro è messo in relazione con esso»),
4) o infine in quanto specie di un genere che è noto essere un relativo,

In *Metaph*. Δ 15 è incluso un accenno a *relata* maggiormente generici come τὸ ἴσον καὶ ὅμοιον καὶ ταὐτό «ciò che è uguale, simile ed identico»[126], questi ultimi ricondotti alla specie dei relativi numerici. Troviamo anche riferimenti a singoli predicati quali τὸ ἀδύνατον «ciò che è impossibile», alla maniera dell'esposizione nelle *Categorie*. Insomma, niente a che vedere con uno studio delle relazioni come ente logico, analogo ad esempio a quello offerto per i predicati dallo stesso Aristotele nella sua sillogistica. Lo stesso si dica delle dottrine stoiche in proposito (Mignucci 1988, Menn 1999), la testimonianza principale per le quali è un passo di Simplicio (*in Cat*., 165.32-166.29).

È invece nei capitoli XVI-XIX dell'*Institutio logica* di Galeno che troviamo un abbozzo di sistematizzazione della logica delle relazioni. Egli si riferisce alle deduzioni contenenti relazioni come a un τρίτον εἶδος συλλογισμῶν «terza specie di sillogismo» e li chiama κατὰ τὸ πρός τι συλλογισμοί «sillogismi relazionali». Asserisce inoltre più volte che essi ricalcano nella loro formulazione certi assiomi καθολικά «generali» o γενικά «generici» e sono da questi convalidati come inferenze dimostrative (*Inst. log*. XVI.5, 10, 12, XVII.1, XVIII.1, 6, 8). Abbiamo già discusso nella sez. 1.0.5 del significato, fondamentale per una comprensione corretta di tutta la pratica

[126] Si vedano *Metaph*. Δ 15, 1021a8-14 e b6-8, dove la relazionalità dei nomi astratti ἰσότης «uguaglianza» ed ὁμοιότης «similitudine» è fatta derivare da quella degli enti corrispondenti.

dimostrativa greca, di quest'asserzione di Galeno e dell'osservazione di Aristotele in *APr*. A 24 (un possibile contributo di Posidonio è menzionato in *Inst. log*. XVIII.8).

Veniamo ora agli altri aspetti salienti, nella nostra prospettiva attuale, della breve esposizione di Galeno. Egli asserisce che i sillogismi relazionali sono di utilità particolare in aritmetica e logistica (XVI.1, 6 e XVIII.5; il testo trasmesso non fa menzione della geometria), e propone immediatamente un certo numero di esempi. Tra questi spiccano inferenze di ovvia origine matematica[127], che ripartisco in tre categorie:

1) Deduzioni per transitività dell'uguaglianza (I.2-3 e XVI.6). Sono rese valide dall'assioma generale enunciato come *El*. I.nc.1, citato da Galeno con menzione dell'applicazione che ne fa «Euclide nel primo teorema» (XVI.6).

2) Deduzioni per composizione (XVI.1-3 e 9), del tipo "$a = 2b$; $b = 2c$: quindi $a = 4c$". Sono rese valide da un assioma che le estende ad ogni multiplo o sottomultiplo ma che Galeno fornisce solo in versioni particolari quanto al (sotto)multiplo, quale ad esempio (XVI.3)

εἰ ὅδε τις ὁ ἀριθμὸς τοῦδέ τινος εἴη τριπλάσιος, ‹τοῦ δὲ τριπλασίου› πάλιν ἕτερος εἴη τριπλάσιος, ἐννεαπλάσιος ‹ἂν› εἴη ὁ μείζων ἀριθμὸς τοῦ ἐλάττονος, καὶ ἀναστρέψαντί σοι πάλιν ὁ ἐλάττων τοῦ μείζονος ἔνατον ἔσται μέρος.	Se un certo numero ben definito fosse triplo di un certo numero ben definito, e di nuovo un altro fosse triplo ‹del triplo›, il numero maggiore sarebbe ennuplo del minore, e di nuovo se converti[128] il minore sarà nona parte del maggiore.

A questa categoria sono apparentate le inferenze per somma e sottrazione di uguali da uguali (XVI.4 e 7-8). Esse sono rese valide dagli assiomi generali enunciati in *El*. I.nc.2-3 (ma Euclide non viene menzionato).

3) Deduzioni per particolarizzazione (XVIII.5-7), chiamate ἀνὰ λόγον «proporzionali» e del tipo "$a : b :: c : d$; $a : b :: 2 : 1$: quindi $c : d :: 2 : 1$", che Galeno correttamente non riconosce come caso particolare di 1) – si ricordi che due rapporti in una proporzione non sono uguali ma identici: si tratta quindi di un'applicazione della transitività dell'identità, non dell'uguaglianza. Queste sono rese valide dall'assioma generale ὧν ὁ αὐτὸς ὁ λόγος καθόλου, τούτων καὶ οἱ κατὰ μέρος λόγοι πάντες οἱ αὐτοί «di ciò che in generale è lo stesso rapporto, di questi saranno gli stessi anche tutti i rapporti particolari».

Come è chiaro dagli esempi, il grado di generalità dell'«assioma generale» è variabile: Galeno non ritiene opportuno fornire una versione valida per tutti i multipli dell'assioma relativo alla prima fattispecie in 2); quello in 3) non è l'analogo di I.nc.1 applicata all'identità, ma un assioma fabbricato come retrocalco dell'inferenza particolare in oggetto. Viene da chiedersi se Galeno non intendesse impiegarli come testa di ponte per un ripensamento radicale delle condizioni di validazione di un'inferenza. Egli stesso corrobora quest'ipotesi, traendo addirittura la conclusione che (quasi)[129] *tutti* i sillogismi διὰ τὴν τῶν ἐπιτεταγμένων αὐτοῖς καθολικῶν ἀξιωμάτων πίστιν ἔχουσι τὴν σύστασιν «mutuano la loro formulazione dalla forza persuasiva degli assiomi generali che sono loro

[127] Ma non sono l'unico genere, come non lo saranno in Alessandro. Galeno propone infatti esempi di inferenze che coinvolgono τὸ μᾶλλον «il più» (XVI.12) oppure basate su relazioni tra loro converse (XVI.10), come «essere padre / figlio di», anche se siamo piuttosto lontani dal vedere impostata una discussione sulle relazioni inverse.

[128] Usato nel senso della conversione della relazione, non del rapporto.

[129] Ma lo σχεδόν «quasi» di Galeno a *Inst. log*. XVII.1 è sicuramente niente di più che una modulazione cautelativa.

sopraordinati» (si veda il termine tecnico inverso ὑποτάττειν nella sez. 2.1.6)[130]. Ciò fa capire quanto l'idea avesse preso la mano a Galeno e quanto la sua portata si discostasse da un'analisi pura e semplice della logica delle relazioni, di cui troviamo dunque, nell'*Institutio logica*, solo tracce che non formano una pista: il nome «relazionali» per la «terza specie» deriva da una proprietà accidentale di questi sillogismi (e se vogliamo costituisce una geniale trovata pubblicitaria di Galeno, cui hanno dato séguito gli interpreti moderni), che invece sono tipizzati semplicemente dalla loro riottosità a inserirsi in schemi inferenziali considerati canonici dalle due scuole dominanti – del tutto disconnessa da una logica relazionale è ad esmpio l'inferenza (riportato anche da Alessandro come esempio di argomento immetodicamente concludente) del tipo «dici "è giorno"; ma dici il vero: quindi è giorno», la cui discussione occupa l'intera sezione XVII dell'*Institutio logica*.

La proposta di Galeno è pertanto solo il sottoprodotto di una logica unicamente argomentale focalizzata sul possibile carattere sillogistico di certe inferenze una volta che siano sostenute da un assioma. Queste inferenze sono legate alle relazioni ed alla loro logica solo per accidente, e la discussione di Galeno non si estende ad un'analisi delle relazioni in quanto oggetti logici. Può darsi che egli abbia affrontato lo stesso soggetto da un'angolazione differente in opere perdute, ma non abbiamo altri indizi che suoi accenni fatti di passaggio (cfr. ad esempio *Inst. log.* XVII.1). La breve esposizione di Galeno, per quanto contenente spunti potenzialmente eversivi in rapporto alle due dottrine logiche dominanti, è stata dunque sopravvalutata dagli interpreti recenti, per motivi strategici legati al generale, e lodevole e pienamente condivisibile, atteggiamento rivalutativo nei confronti della logica antica.

Galeno non fu l'unico a occuparsi della questione delle inferenze relazionali. Alessandro di Afrodisia, seguito come d'abitudine da tutta una scuola di commentatori[131], esclude dalla classe dei sillogismi in forma propria tutti gli argomenti particolari che necessitano di una premessa addizionale generica, e mostra come trasformare la loro formulazione, incorporando la premessa addizionale ed «amalgamando» le due particolari originariamente presenti in un'unica coassunzione, in modo che recuperino la forma sillogistica corretta. Gli argomenti non ben formati in questione sono gli ἀμεθόδως περαίνοντες «che concludono immetodicamente»[132] attribuiti ai νεώτεροι «moderni» ovverosia agli Stoici[133], tra i quali l'inferenza per transitività dell'uguaglianza è addotta come esempio principe. Ne riparleremo tra breve.

1.5.1.2. Relazioni e predicati

Nella matematica greca le relazioni trovano un impiego ben più estensivo che non i predicati. Due sono i motivi principali di questa differenza. In primo luogo, una configurazione geometrica mette naturalmente in campo un certo numero di relazioni tra gli enti matematici in gioco, e di norma un teorema non stabilisce che un certo predicato si applichi all'ente che è il soggetto logico della proposizione, ma appunto che sussiste una certa relazione tra alcune componenti di questo soggetto logico. Il secondo motivo è che molte relazioni introdotte posseggono proprietà (come ad esempio la transitività) che le rendono particolarmente adatte a interagire con le inferenze deduttive. Vi è un solo luogo nella matematica greca dove i predicati predominano: sono i *Data*, che costituiscono anche

[130] Galeno si premura di precisare (XVII.7 e ancor prima I.5) che il significato di ἀξίωμα da lui assunto è quello di ἐξ αὐ(τοῦ) πιστὸν λόγον «enunciato autoevidente» – e non quello di «asserto» sancito dalla logica stoica.

[131] Testimonianze in Alessandro, *in APr.*, 21.28-22.23, 68.21-69.4, 344.9-346.6, *in Top.*, 14.18-15.14; [Ammonio], *in APr.*, 70.1-71.6; Filopono, *in APr.*, 36.10-11 e 321.7-322.18 e [Temistio], *in APr.*, 121.20-123.8.

[132] Menzionati solo alla fine (XIX.6) da Galeno, che non stabilisce alcuna connessione con i suoi sillogismi relazionali, ed anzi dichiara «superflui» quelli che concludono immetodicamente.

[133] Non è chiaro se i «moderni» possano essere identificati con gli Stoici, né se tutte le forme proposte possano essere attribuite a questi ultimi; si veda Barnes 1990, 68-75.

l'unico caso, eccezionalmente ampio e raffinato, di esplorazione esplicita della logica di un singolo predicato (si veda Acerbi 2011a).

Un problema preliminare sta nell'identificare quali espressioni linguistiche rappresentino relazioni tra oggetti e quali no. La questione non è immediatamente risolubile proiettando all'indietro un elenco di oggetti logici che in prospettiva moderna sono *ovviamente* relazioni. Non essendo queste ultime enti logici di cui sia stata offerta una tematizzazione adeguata dalle scuole dialettiche antiche, non abbiamo a disposizione strumenti concettuali coevi per trattarle. Né possiamo prendere automaticamente per buona una parziale identificazione con la categoria dei relativi, per i quali non fu elaborata, come abbiamo visto nella sezione precedente, nessuna sistematizzazione su basi logiche. Sarebbe un errore restringere le proprietà da indagare a quelle che modernamente caratterizzano certi tipi di relazioni, ad esempio transitività e simmetria, per quanto queste risultino di importanza decisiva. Vedremo che entrano in gioco in modo cruciale anche altri aspetti, che la scrittura simbolica moderna tende a far passare per irrilevanti: disposizione ed ordinamento reciproci dei termini e dell'operatore relazionale (specialmente nel caso di relazioni simmetriche), differenze di formulazione decisive per il sussistere o meno di certe proprietà come transitività o simmetria, correlazione tra la formulazione e la collocazione all'interno della proposizione, dipendenza dal tipo di trasformazioni cui una putativa relazione è sottoposta. Criteri necessari per l'identificazione dell'espressione linguistica di una relazione saranno il possedere 1) "posti vuoti" dove inserire i termini, eventualmente sotto forma di nomi di oggetti (lettere denotative), 2) un predicato che funga da operatore relazionale, 3) una forma entro certi limiti invariabile o che ammetta varianti stilistiche all'interno di un dominio strettamente limitato. Queste condizioni non sono ovviamente sufficienti: vedremo nella prossima sezione che il criterio fondamentale che identifica una relazione verterà su di un aspetto sorprendente in prospettiva moderna.

Le relazioni sono enti logici, ed un ente logico si contraddistingue per il fatto di interagire con le deduzioni. Chiamerò "logica delle relazioni" questa interazione, le cui modalità sono del tutto implicite. La ricerca di criteri identificativi ed eventuali princìpi regolatori può quindi solo procedere su base statistica. Dato che l'unità linguistica di riferimento del sistema formulare del linguaggio matematico greco è l'asserto, e che questo linguaggio è eminentemente generativo, si può cadere nell'errore di vedere più relazioni di quante ve ne siano in realtà. Troviamo in effetti molte espressioni formulari a *n* entrate, come la prima applicazione della costruzione di I.23 in I.24 (*EE* I, 34.1-2):

πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ συνεστάτω.	Sia costruito, su di una retta ΔΕ e su un punto su di essa Δ, un ‹angolo› ΕΔΗ uguale all'angolo ΒΑΓ.

Queste espressioni si riferiscono però a costruzioni: esse hanno pertanto uno statuto logico enormemente differente dalle relazioni, ed è erroneo non tenerle distinte. Errore ancora più grave è considerare come espressioni formulari anche veri e propri argomenti, mentre la categoria del formulare matematico, e *a fortiori* quella delle relazioni, va sicuramente ristretta solo a espressioni subinferenziali. Nelle tabelle qui sotto sono elencati i predicati e le relazioni più rilevanti che appaiono negli *Elementi* e nei *Data*. Il verbo è quasi sempre sottinteso, e si tenga presente che alcune relazioni ammettono una doppia formulazione, come ad esempio «*A* è simile a *B*» o «*A* e *B* sono simili tra loro», di cui discuteremo tra breve.

Predicati		
geometrici	numerici	teoria delle linee irrazionali
A dato (in grandezza ecc.)	*A* primo, composto, perfetto	*A* esprimibile (lunghezze e domìni)

A equiangolo, equilatero, parilatero	*A* quadrato, cubo, piano, solido *A* dispari, pari, pari volte pari	*A* irrazionale (*idem*)

Relazioni binarie		
generali	geometriche	astratte o numeriche
	A simile a *B*	
A è *B*	*A* in linea retta con *B*	
A uguale a *B*	*A* parallela a *B*	*A* multiplo di *B*
A maggiore (minore) di *B*	*A* equiangolo a *B*	rapporto di *A* rispetto a *B*
A maggiore (minore) di *B* per una grandezza data	*A* omologo a *B*	*A* e *B* hanno rapporto dato
	A intorno allo stesso diametro di *B*	*A* parte/parti di *B*
A maggiore (minore) che in rapporto di *B* per una grandezza data	*A* uguale e simile a *B*[134]	*A* misura *B*
	A si sovrappone a *B*	*A* e *B* primi tra loro
A commensurabile con *B* (in lunghezza, in potenza ecc.)	*A* può più di *B* per il quadrato su una retta (in)commensurabile con se stessa	*A* e *B* piani o solidi simili

Relazioni quaternarie
A rispetto a *B* come *C* rispetto a *D*
A rispetto a *B* ha rapporto raddoppiato/triplicato che *C* rispetto a *D*
A e *B* equimultipli di *C* e *D* rispettivamente (due forme)
A di *B* stessa parte/stesse parti che *C* di *D*
A misura *B* e *C* misura *D* un ugual ‹numero› di volte

Ho inserito la nozione di esprimibilità tra i predicati, ma si tratta in realtà della relazione di commensurabilità in cui uno dei termini, la retta di riferimento, è fissato. Le relazioni di ordine superiore possono di norma essere ridotte ad altre più elementari, e ad esse il criterio di identificazione che esporrò nella prossima sezione si applica solo in maniera derivata. Ad esempio, la proporzionalità tra grandezze è un'identità di rapporti, cioè la composizione di due relazioni binarie. La proporzionalità tra numeri è invece definita in termini della relazione quaternaria «essere la stessa parte o parti», e questa è a sua volta la composizione della relazione d'identità con la relazione che opera su coppie ordinate «essere parte di». Al livello linguistico, siffatte strutture sono segnalate dalla presenza di avverbi quali ἰσάκις «equi-», nel caso la relazione più esterna sia quella di uguaglianza, o da determinazioni di identità. Tutte le relazioni quaternarie elencate sono di questo genere (l'essere in rapporto duplicato / triplicato risulta dalla composizione di più relazioni di proporzionalità). Si noti che ciò che lega le relazioni binarie in una quaternaria sono determinazioni di identità[135] o di uguaglianza: nessun oggetto è determinato da una relazione binaria, e questa è una delle ragioni per cui le differenze di formulazione sono altamente significative.

Non si rintracciano relazioni ternarie, candidati per le quali potrebbero essere «*A* misura comune di *B* e *C*», «*A* multiplo di *B* secondo *C*», «*A* misura *B* secondo *C*». In esse uno dei termini è in effetti univocamente determinato dagli altri due, quando la relazione sia rappresentata da un oggetto matematico della stessa specie degli altri messi in relazione: nel caso appena visto i tre termini sono numeri. Quindi «*A* misura *B* secondo *C*» non è una relazione, e infatti non è presa come tale: si tratta

[134] La potenziale relazione «*A* simile e posto similmente a *B*» compare solo all'interno di costruzioni.
[135] Sul riconoscimento dell'identità come appartenente alla categoria dei relativi si veda *Metaph*. Δ 15, 1021a8-14.

della relazione binaria «*A* è parte di *B*» saturata inserendo nell'espressione il nome del risultato dell'operazione.

1.5.1.3. Il criterio fondamentale: la posizione dell'operatore relazionale

Nella costruzione della tabella data sopra, ho applicato un criterio lessicografico fondamentale per identificare un'espressione linguistica *a due entrate* come relazione binaria: *in tutte o nella grande maggioranza delle occorrenze (si veda dopo per questo distinguo), l'operatore relazionale (verbo + predicato) si trova all'esterno della coppia ordinata di termini in relazione*[136]. I termini sono di norma contigui, a meno che non intervengano motivi grammaticali superiori, quali l'inserimento di particelle dalla forte connotazione argomentale quali ἄρα, δέ, la cui posizione all'interno della frase è governata da regole piuttosto rigide. Mai si trovano inserite disgiunzioni o congiunzioni. Valga per tutti il bell'esempio della relazione nel linguaggio dei «dati»

τὸ Α τοῦ Β δοθέντι μεῖζόν ἐστι ἢ ἐν λόγῳ A è maggiore di B che in rapporto per una ‹grandezza› data

dove l'operatore relazionale è l'intero sintagma δοθέντι μεῖζον εἶναι ἢ ἐν λόγῳ «essere maggiore che in rapporto per una ‹grandezza› data». Nel caso il verbo sia non sia contiguo al predicato, è la posizione di quest'ultimo ad essere determinante. Non deve sorprendere la scelta di questo criterio di identificazione, che ad ogni buon conto non esclude nessuna delle relazioni che considereremmo tali in un approccio moderno: mi è sembrato più metodico trasformare una caratteristica peculiare delle relazioni in gioco nella matematica greca nella loro connotazione caratterizzante, piuttosto che rischiare anacronismi. In fin dei conti, in assenza di teorizzazioni esplicite l'unica base che abbiamo per questa ricerca sono i dati testuali.

A priori, avremmo potuto aspettarci di vedere incluse, al pari di parallelismo e collinearità, altre configurazioni strettamente geometriche tra le relazioni, quali la terna «*A* perpendicolare a *B*», «*A* ad angoli retti con *B*», «*A* ortogonale a *B*»[137], oppure «*A* su *B*», «*A* centro di *B*», «*A* tangente a *B*». L'esclusione deriva semplicemente dal fatto che quelle citate non soddisfano il criterio fondamentale, ed in effetti, a parte ancora il parallelismo, risultano sterili dal punto di vista deduttivo. Tale inattività è appunto segnalata già al livello linguistico tramite la posizione interna dell'operatore che caratterizza tali configurazioni.

Insomma, non troviamo scritto ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΔ «A è uguale a B», ma ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ «è uguale A a B». Tre sono i motivi per cui ciò non accade in *tutte* le occorrenze. Il primo, ovvio, è che la lingua matematica greca è quella naturale, e non un linguaggio simbolico in cui alcune espressioni siano ben formate ed altre no. Ma proprio per questo, una distribuzione in cui certe occorrenze siano preponderanti richiede di essere spiegata in termini di adesione ad una pratica avvertita come canonica. Il secondo motivo è legato alla posizione dell'espressione relazionale all'interno della proposizione matematica. L'operatore è sistematicamente posto in posizione esterna nel corso dell'inferenza, cioè all'interno della dimostrazione, ma ciò può non accadere in enunciato o in esposizione. Si può quindi osservare una soluzione di continuità, un passaggio in cui l'operatore viene riportato in posizione interna. Ciò avviene quando si avvicini la conclusione della dimostrazione, e più precisamente quando si formi per la prima volta l'espressione linguistica che poi costituirà la conclusione. L'attrazione del polo formulare della conclusione (cioè dell'enunciato) è più

[136] Come in altri casi, si tratta di una struttura corrente in prosa greca ordinaria; la sua significatività nello stile matematico deriva dalla frequenza statistica predominante.
[137] La prima specializzata a relazioni di ortogonalità nel piano, la terza nello spazio.

forte dell'attrazione del polo formulare della relazione. In questo dualismo gioca il fatto che i termini delle relazioni negli enunciati non ricevono lettere denotative, ed un'espressione con l'operatore esterno può rendere lo stato di cose matematico difficile da ricostruire: l'operatore interno serve anche a separare i differenti termini della relazione. La distribuzione delle occorrenze è messa bene in evidenza in II.8 (*EE* I, 78.15-81.2; in grassetto i numeri dei passaggi con operatore interno, in corsivo quelli con operatore esterno), che ci permetterà di spiegare un terzo motivo più oltre:

1	ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου <u>ἴσον ἐστὶ</u> τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.	*aRb*
2	εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου <u>ἴσον ἐστὶ</u> τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.	*aRb*
3	ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας [τῇ ΑΒ εὐθεῖα] ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ <u>ἴση</u> ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.	*aRb*
4	Ἐπεὶ οὖν <u>ἴση ἐστὶν</u> ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ,	*Rab*
5	ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ <u>ἐστιν ἴση</u>,	*abR*
6	ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ,	*abR*
7	καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ <u>ἐστιν ἴση</u>.	*abR*
8	διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ <u>ἐστιν ἴση</u>.	*abR*
9	καὶ ἐπεὶ <u>ἴση ἐστὶν</u> ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ,	*Rab*
10	ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ,	*Rab*
11	<u>ἴσον</u> ἄρα <u>ἐστὶ</u> καὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΚΔ,	*Rab*
12	τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ.	*Rab*
13	ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ <u>ἐστιν ἴσον</u>· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου·	*abR*
14	καὶ τὸ ΚΔ ἄρα τῷ ΗΡ <u>ἴσον ἐστίν</u>·	*abR*
15	τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ <u>ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν</u>.	*abR*
16	τὰ τέσσαρα ἄρα <u>τετραπλάσιά ἐστι</u> τοῦ ΓΚ.	*aRb*
17	πάλιν, ἐπεὶ <u>ἴση ἐστὶν</u> ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ,	*Rab*
18	ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ <u>ἴση</u>,	*abR*
19	ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ, <u>ἐστιν ἴση</u>,	*abR*
20	καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ <u>ἴση ἐστίν</u>.	*abR*
21	καὶ ἐπεὶ <u>ἴση ἐστὶν</u> ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ,	*Rab*
22	ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ,	*Rab*
23	<u>ἴσον ἐστὶ</u> καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ,	*Rab*
24	τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ.	*Rab*
25	ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ <u>ἐστιν ἴσον</u>· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου·	*abR*
26	καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ <u>ἴσον ἐστίν</u>·	*abR*
27	τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ <u>ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν</u>·	*abR*
28	τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ <u>ἐστι τετραπλάσια</u>.	*abR*
29	ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ <u>τετραπλάσια</u>·	*abR*
30	τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα, <u>τετραπλάσιά ἐστι</u> τοῦ ΑΚ.	*aRb*
31	καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ <u>ἐστιν</u>·	*abR*
32	<u>ἴση</u> γὰρ ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ·	*Rab*
33	τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ <u>τετραπλάσιόν ἐστι</u> τοῦ ΑΚ.	*aRb*

34	ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων·	*aRb*
35	τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι.	*aRb*
36	κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ·	*aRb*
37	τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ.	*aRb*
38	ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ·	*aRb*
39	τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ·	*aRb*
40	ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ.	*Rab*
41	τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.	*aRb*
42	ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	*aRb*

Alcune osservazioni su questo testo. Primo, passaggi come 6 non hanno l'operatore relazionale, ma sono correlati in modo stretto ad altri che lo hanno: occorre suppore che l'operatore sia costruito ἀπὸ κοινοῦ e si trovi quindi nella stessa posizione che occupa nelle frasi circostanti. Lo stesso ragionamento vale per i passaggi 10, 12, 22, 24. Secondo, il passaggio 16 fa eccezione (il che non costituirebbe un problema in linguaggi non formalizzati, come abbiamo visto sopra). Esso è però ripreso, dopo lo iato in 17-28, "in buona forma" in 29, dove è una coassunzione, mentre in 16 è la conclusione di un argomento parziale, che già *in nuce* prefigura la struttura del risultato da ottenere. In effetti da 30 inizia la sequenza di espressioni con operatore interno, fatte salve quelle in 31-32 e 40, in cui l'operatore esterno è spiegato dal loro carattere di coassunzioni.

Di portata maggiore sono le considerazioni da fare a proposito del passaggio 3. L'operatore ἴση è interno, ma il motivo è che si tratta di una citazione istanziata della costruzione in I.2 e non dell'espressione di una relazione. L'ordinamento dei termini è quindi forzatamente identico a quello nell'enunciato di I.2, anche se la forma verbale è anteposta, come è la norma nelle costruzioni. La necessità di adeguarsi ad una formulazione canonica per la costruzione interferisce con la regola, che in questo caso le è subordinata, di collocazione dell'operatore relazionale all'esterno della coppia di termini. Per chiarire meglio il fenomeno, vediamo in parallelo l'enunciato di I.2 e la forma normale della sua applicazione (*EE* I, 8.11-12; si ricordi che κεῖσθαι funge da passivo di τίθημι):

πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.	κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΓ.

Il riferimento al punto (sottolineato) è sistematicamente omesso, in quanto risulta evidente dall'assegnazione delle lettere (l'estremo dove applicare il segmento uguale è quello in comune alle due rette). All'attrazione dell'espressione κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΓ, derivata dalla formulazione costruttiva primaria, va attribuita anche la posizione interna dell'operatore relazionale nel caso delle "inversioni" tra dativo e nominativo in asserti non costruttivi del tipo τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ, alcuni esempi dei quali leggiamo in II.10 (*EE* II, 85.10-86.7):

τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον	I quadrati su ΕΓ, ΓΑ sono quindi doppi del quadrato su ΓΑ. E uguale a quelli su ΕΓ, ΓΑ è quello su ΕΑ: il quadrato su ΕΑ è quindi doppio

διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ.

del quadrato su ΑΓ. Di nuovo, poiché ΖΗ è uguale a ΕΖ, anche quello su ΖΗ è uguale a quello su ΖΕ: quelli su ΗΖ, ΖΕ sono quindi doppi di quello su ΕΖ. E uguale a quelli su ΗΖ, ΖΕ è quello su ΕΗ: quello su ΕΗ è quindi doppio di quello su ΕΖ. E ΕΖ è uguale a ΓΔ: il quadrato su ΕΗ è quindi doppio di quello su ΓΔ. E fu anche dimostrato quello su ΕΑ doppio di quello su ΑΓ: i quadrati su ΑΕ, ΕΗ sono quindi doppi dei quadrati su ΑΓ, ΓΔ. E uguale ai quadrati su ΑΕ, ΕΗ è il quadrato su ΑΗ: quello su ΑΗ è quindi doppio di quelli su ΑΓ, ΓΔ.

Il fenomeno stesso delle inversioni è spiegato dalla necessità di aderire alla disposizione dei termini richiesta dalla pratica delle inferenze per transitività, di cui ci occuperemo più oltre. Si noti che, come accadeva in II.8 all'operatore τετραπλάσιος «quadruplo», in II.10 διπλάσιος «doppio» è posto tra i termini in quanto l'espressione di cui fa parte è già una versione ridotta dell'enunciato.

Per converso, dobbiamo attenderci che una relazione sia formulata in maniera invariante quando derivi dall'enunciato di una definizione o di una proposizione, o meglio, dalla forma istanziata canonica che tale enunciato assume. La formazione di una siffatta espressione canonica ammette due tipologie differenti.

1) La prima si riscontra, come nell'esempio appena visto, quando l'espressione canonica derivi da un problema di costruzione. In questo caso possono occorrere variazioni quanto alla formulazione primaria (ovviamente passaggio da imperativo a indicativo nel verbo, ma anche soppressione o aggiunta di parti dell'enunciato, spostamenti di termini o dell'operatore); quello che ne risulta è però una forma fissa. Esempio rappresentativo è l'evoluzione che porta alla relazione «… essere in ‹linea› retta con… ». Seguiamone la traiettoria dalla formulazione generale in I.post.2 alla prima appplicazione in una costruzione in I.2, alla prima formulazione come asserto istanziato nella determinazione di I.14 (*EE* I, 4.16-17, 8.18-19, 22.15-16):

καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν	E di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in ‹linea› retta
ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ	Siano prolungate in ‹linea› retta con ΔΑ, ΔΒ rette ΑΕ, ΒΖ
λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.	Dico che ΒΔ è in ‹linea› retta con ΓΒ

Nel postulato non compare il nome del prolungamento, mentre nelle applicazioni sono eliminati in quanto inutili le determinazioni sul carattere limitato della retta e sulla contiguità del segmento da prolungare con il suo prolungamento, sostituite dall'evidenza derivante dall'assegnazione delle lettere: le due lettere denotanti indicano che la retta da prolungare è limitata, la lettera in comune con il prolungamento indica la contiguità. L'oggetto della dichiarativa nel postulato è trasformato in complemento del determinativo «in ‹linea› retta» del verbo ἐκβάλλειν «prolungare», volto al passivo. Occorre un soggetto, e viene introdotto con questo ruolo il prolungamento. Le modifiche lasciano

libertà di disporre i termini nel modo che leggiamo; la forma della costruzione istanziata primaria in I.2 induce naturalmente quella dell'asserto che formula la relazione in I.14.

Le due occorrenze di operatore interno nell'esposizione locale della *reductio* della stessa I.14 (una delle quali una supposizione) sono spiegabili con la necessità contingente di enfatizzare la retta da prolungare, su cui verte la *reductio*, ponendola in vicinanza della forma verbale (*EE* I, 22.17-18).

εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.	Se infatti ΒΔ non è in ‹linea› retta con ΒΓ, sia ΒΕ in ‹linea› retta con ΓΒ.

Occorre però insistere ancora sul fatto che le regolarità nella pratica sono identificate su base statistica, e che pertanto non è necessario *giustificare tutte* le divergenze dalla convenzione maggioritaria. Altro esempio interessante nella stessa prospettiva è quello della traiettoria della relazione «… essere parallela a… », dove assistiamo alla differenziazione tra l'espressione della costruzione in I.32, rigidamente formulare in quanto aderisce all'enunciato di I.31, e quella della relazione nella determinazione di I.27, derivata tramite una trasformazione canonica dalla forma primaria reciproca (cioè con il pronome ἄλληλος) nell'enunciato della stessa proposizione. Leggiamo nell'ordine i quattro passaggi rilevanti in I.31, 32, 27 determinazione ed enunciato (*EE* I, 43.11-12, 44.17-18, 39.3, 38.21-23):

διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	Condurre per un punto dato parallela ad una retta data una linea retta.
ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.	In effetti, sia condotta per il punto Γ parallela alla retta ΑΒ ‹una retta› ΓΕ.
ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, <u>παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι</u>.	Qualora una retta che incide su due rette faccia gli angoli alterni uguali tra loro, <u>le rette saranno parallele tra loro</u>.
λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.	Dico che ΑΒ è parallela a ΓΔ.

2) Nella seconda tipologia il passaggio alla forma canonica della relazione deriva in maniera diretta da un principio, come ad esempio le definizioni di parti e di multiplo in VII.def.3 e 5 (*EE* II, 103.5-6 e 8-9):

μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.	Parte di un numero è un numero, il minore del maggiore, quando misuri completamente il maggiore.
πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.	E multiplo, il maggiore del minore, quando sia misurato completamente dal minore.

Il termine da definire assume posizione incipitaria ed è privo di articolo, come è la norma: di conseguenza, l'operatore relazionale «parte» o «multiplo» è posto all'esterno della coppia di termini in relazione (notare le due coppie parallele e rigidamente separate ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος). La forma così stabilita diventa, per il solito meccanismo di adesione stretta al formato dell'occorrenza primaria, direttamente quella *standard*; non sono necessarie le trasformazioni intermedie che occorrono nella tiplogia precedente.

Solo per espressioni derivate da costruzioni o enunciati dichiarativi si può dunque postulare l'esistenza di un'*unica* formulazione canonica, su cui eventualmente si innestino le fluttuazioni nella

posizione dell'operatore relazionale. Quando ciò non accada[138], e questo è ovviamente il caso dell'uguaglianza, sono ammesse formulazioni differenti (è il terzo motivo accennato prima della lettura di II.8), quale quella che troviamo nei passaggi paralleli 15 e 27 in II.8: A, B ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν «A e B sono uguali tra loro». Si tratta di un fenomeno di attrazione da parte della formulazione primaria, introdotta in I.nc.1, della transitività dell'uguaglianza: i due passaggi sono in effetti conclusioni di inferenze di questo genere. Ciò giustifica la presenza del pronome reciproco: la formulazione A, B ἴσα ἐστίν sarebbe però stata sufficiente in una presunta definizione di «uguaglianza», sulla falsariga, ad esempio, delle definizioni di parallelismo e commensurabilità, dove il pronome reciproco è assente. All'esterno di questa fattispecie, si tratta di una formulazione nettamente minoritaria, spesso impiegata negli enunciati e nei princìpi (e quindi nelle loro citazioni), dove raramente gli oggetti sono nominati singolarmente, oppure, come anche in II.8, in quanto l'uguaglianza è stabilita tra 4 termini, mentre «… è uguale a…» è un predicato a 2 posti.

Si noti infine, e questo verrà utile tra breve quando parleremo delle due forme che assume la relazione di equimultiplicità, che la formulazione con il pronome reciproco rende esplicita la simmetria della relazione di uguaglianza, ma non la sua immediata adattabilità come premessa di una inferenza per transitività (sebbene in II.8 ne sia la conclusione canonica!); ed infatti i due passaggi 15 e 27 originano inferenze piuttosto banali *ad una sola* premessa. Formulazioni equivalenti più "innocenti" dal punto di vista logico trovano applicazione quando la "stessa" relazione sia impiegata in contesti differenti, che di norma spostano l'enfasi su aspetti complementari della connessione intercorrente tra i termini. Tipizzano questo fenomeno le relazioni binarie equivalenti ὁ A τὸν B μετρεῖ «A misura B» e ὁ A τοῦ B μέρος ἐστίν «A è parte di B» (l'equivalenza è già stabilita in VII.def.3 letta sopra) e quelle quaternarie, analoghe, ἰσάκις ὁ A τὸν B μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Δ «A misura B e Γ ‹misura› Δ un ugual ‹numero› di volte» e ὁ A τοῦ B τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ Γ τοῦ Δ «A di B è la stessa parte che Γ di Δ».

Alcune delle relazioni incluse nella tabella all'inizio di questa sezione sono una inversa dell'altra, ad esempio quelle (sia binarie che quaternarie) legate alle nozioni di parte e multiplo. Come abbiamo appena visto, in VII.def.3 e 5 ciò è messo in evidenza già al livello di definizione dalle dialettiche «maggiore» / «minore» nella denominazione dei termini e attivo / passivo nella diatesi del verbo. Si noti però che alle due forme della relazione quaternaria di equimultiplicità non corrispondono due forme omologhe per l'equipartizione, che pure è la sua "inversa" naturale. Per quanto anche quest'ultima ammetta due formulazioni, esse sono linguisticamente disomogenee, come ricaviamo dalla tabella qui sotto. Solo le due nella prima riga sono linguisticamente omologhe, non le altre due: il motivo è che non è disponibile come termine tecnico derivato il plurale di «parte», in quanto tale plurale ha un significato indipendente, come vedremo nella sez. 2.6:

equimultiplicità	equipartizione
ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ A τοῦ B καὶ τὸ Γ τοῦ Δ	ἰσάκις ὁ A τὸν B μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Δ
ἐστι τὰ A, Γ τῶν B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια	ὁ A τοῦ B τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ Γ τοῦ Δ

L'operatore relazionale della seconda forma per l'equipartizione separa la quaterna di termini (quanto alla prima forma, l'operatore relazionale è costituito dall'avverbio ἰσάκις: va quindi considerato esterno alla quaterna). Più in generale, in certe relazioni quaternarie l'operatore ammette una posizione interna ai termini anche in formulazioni rigidamente canoniche; per questo ho insistito sul fatto che il

[138] In caso di varianti il criterio fondamentale di identificazione si applica all'esistenza di almeno una forma per cui esso valga, ma di solito ciò accade per tutte le forme.

criterio fondamentale di identificazione di una relazione vada ristretto a quella binarie. Il campione di relazioni quaternarie "eccentriche" non è però molto elevato, e una discussione puntuale permette di chiarire il fenomeno. La formulazione con operatore interno della relazione «*A* rispetto a *B* ha rapporto raddoppiato / triplicato che *C* rispetto a *D*» è forzata da quella primaria in V.def.9-10, di cui leggiamo la prima (*EE* II, 2.10-12):

ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.	E quando siano tre grandezze in proporzione, la prima rispetto alla terza è detta avere rapporto raddoppiato che rispetto alla seconda.

Il fatto è che per rapporti raddoppiati non esiste una formulazione compatta, composta di puri termini, come quella canonica della proporzionalità "semplice" «come *A* rispetto a *B*, così *C* rispetto a *D*». La definizione appena letta, confrontata con la forma "eccentrica" per l'equipartizione, ci mette sulla buona strada per tentare una spiegazione. Entrambe le formulazioni "nominano" esplicitamente la relazione binaria di base, che sia «rapporto» oppure «essere parte di» – lo stesso vale per le espressioni contenenti «avere lo stesso rapporto che», «avere rapporto maggiore che», in cui l'operatore è regolarmente posto a dividere una coppia di termini dall'altra: in questa maniera procedono a "smontare" nelle sue componenti binarie la struttura quaternaria della relazione, che quindi evapora in quanto tale. Il fenomeno è ancora più accentuato se ci rivolgiamo ad una formulazione correlativa con subordinata relativa, prefigurata nella seconda forma per l'equipartizione e che trova impiego nel corso delle dimostrazioni. Essa fa esplodere la relazione quaternaria mettendone in evidenza la struttura composta in binarie. Una correlativa analoga esiste per gli equimultipli; le vediamo insieme al lavoro in VII.5 (*EE* II, 112.3-7):

ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ, ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ.	Quante volte multiplo è quindi ΒΓ di Α, tante volte multiplo è anche ΒΓ, ΕΖ, l'uno con l'altro, di Α, Δ, l'uno con l'altro. Che parte è quindi Α di ΒΓ, la stessa parte è anche Α, Δ, l'uno con l'altro, di ΒΓ, ΕΖ, l'uno con l'altro.

Nessuna delle due è una relazione quaternaria: si tratta piuttosto di una constatazione esplicita di identità delle binarie componenti (ognuna delle quali presenta regolarmente l'operatore esterno, beninteso). Allo stesso modo, non sono relazioni le costruzioni di equimultipli in εἰλήφθω così frequenti nel libro V, ed infatti l'operatore è posto all'interno della quaterna di termini, come vediamo sull'esempio di uno stralcio da V.3 (*EE* II, 6.13-20), che comprende anche due relazioni in buona forma:

[…] καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.	[…] e siano presi di Α, Γ equimultipli ΕΖ, ΗΘ: dico che è equimultiplo ΕΖ di Β e ΗΘ di Δ.
ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, […]	In effetti, poiché è equimultiplo ΕΖ di Α e ΗΘ di Γ, […]

1.5.1.4. Interazioni tra relazioni e macchina deduttiva: transitività, simmetria, stabilità

Il ruolo cruciale degli aspetti lessicografici non si ferma a quanto descritto nella sezione precedente. Essi intervengono anche al livello delle trasformazioni cui sono sottoposte le relazioni. Ve ne sono quattro tipologie principali:

1) Inferenze per transitività, di gran lunga le più comuni; caso particolare sono le sostituzioni di termini con altri più o meno complessi, a volte introdotte da τουτέστι «cioè».
2) Inferenze per simmetria, molto ridotte in numero e concentrate nel libro V.
3) Operazioni di composizione tra relazioni.
4) Operazioni che modificano i termini pur lasciando sussistere la relazione tra i risultati: esempio ne sono le trasformazioni di rapporti in teoria delle proporzioni (V.def.12-18): alternando, invertendo, componendo, dividendo, convertendo, «tramite uguale» e «tramite uguale in proporzione perturbata».

Tipologie 1) e 2)

Alcune della relazioni elencate nel prospetto iniziale sono assunte o dimostrate transitive negli *Elementi*: uguaglianza in I.nc.1, parallelismo in prop. I.30 (rette nello stesso piano) e XI.9 (rette non nello stesso piano), equimultiplicità in V.3 (solo una delle possibili forme di transitività; si tratta più propriamente di una regola di composizione), identità di rapporto (cioè proporzionalità) in V.11, similitudine di figure rettilinee in VI.21 (ma l'autenticità della proposizione è dubbia), commensurabilità in X.12. Nei *Data* è dimostrata la transitività delle relazioni «avere rapporto dato» (8) e «essere maggiore che in rapporto per una ‹grandezza› data» (19). Eccettuata l'ultima, che è una relazione asimmetrica, gli enunciati di transitività hanno tutti esattamente la stessa forma; prendiamo come esempio il parallelismo in I.30 (*EE* I, 42.17-18):

αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.	Le parallele alla stessa retta sono anche parallele tra loro.

Le esposizioni corrispondenti sono formulate come segue (*EE* I, 42.19-20):

ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.	Sia una e l'altra delle ΑΒ, ΓΔ parallela a ΕΖ: dico che anche ΑΒ è parallela a ΓΔ.

I soli esempio in cui tutti i passaggi in un'inferenza per transitività siano resi espliciti si trovano non a caso in I.1-2: l'inferenza istanziata è espressa in modo tale da preservare la formulazione di base non istanziata. Leggiamo I.1 (*EE* I, 8.1-4):

ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ.	ΒΓ è uguale a ΒΑ.	*Rab*
ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση·	E fu anche dimostrata ΓΑ uguale a ΑΒ:	*cbR*
ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση.	una e l'altra delle ΓΑ, ΓΒ è quindi uguale a ΑΒ.	$(c \wedge a)bR$
τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα·	E gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro:	nc 1
καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση.	anche ΓΑ è quindi uguale a ΓΒ.	*caR*

I primi due asserti sono della forma *Rab*; *cbR*; la conclusione finale ha la forma *caR*. Lo schema inferenziale risultante "*Rab*; *Rcb*: quindi *caR*" ha il termine comune nella stessa posizione e lo chiameremo "parallelo"; la disposizione non è "chiastica", cioè con il termine comune in posizioni

adiacenti come in "*aRb*; *bRc*: quindi *aRc*", in accordo con la pratica moderna. Le disposizioni possibili dei termini nelle assunzioni sono ovviamente quattro:

abR; *bcR*: quindi *acR* *baR*; *cbR*: quindi *acR*	disposizione chiastica dei termini
abR; *cbR*: quindi *acR* *baR*; *bcR*: quindi *acR*	disposizione parallela dei termini

L'analisi statistica che vado ad esporre nei punti *a*) – *d*) seguenti conferma che quello "parallelo" è lo schema canonico[139]. La pratica più corrente nelle inferenze per transitività pone il termine comune in prima posizione in entrambe le premesse: "*Rab*; *Rac*: quindi *Rcb*" (la conclusione è data nella forma *Rbc*, cioè con termini non invertiti, con frequenza minore); solo in una minoranza di casi tale schema è rimpiazzato da quello in cui il termine comune si trova in seconda posizione in entrambe le premesse. Come già visto, l'operatore relazionale *R* è sempre posto all'esterno della coppia di termini e la sua espressione verbale è esattamente la stessa sia nelle premesse che nella conclusione; è più spesso anteposto che posposto, ma la differenza non sembra essere significativa.

a) *Transitività dell'uguaglianza*. I risultati per la transitività dell'uguaglianza sono esposti nel prospetto qui sotto[140]. Nella prima riga troviamo i numeri d'ordine dei libro degli *Elementi*, nella seconda le occorrenze delle disposizioni parallela/chiastica. Ad esempio, la prima colonna significa che nel libro I la transitività dell'uguaglianza è formulata 8 volte secondo lo schema parallelo, 5 secondo quello chiastico. Nell'ultima colonna si trovano le occorrenze per le dimostrazioni alternative. Il totale per gli *Elementi* è 76/35. Va notato che tra le disposizioni chiastiche troviamo anche (pochissimi) esempi dello schema "$b = a$; $c = b$: quindi $a = c$", altrettanto eccentrico nel rappresentare un'inferenza per transitività in rapporto alla formulazione attuale.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	*alt.*	*tot.*
8/5	5/2	12/1	6/4	0/1	3/7	6/0	0/0	8/3	4/2	1/2	2/2	13/3	8/3	76/35

b) *Transitività del parallelismo*. La transitività del parallelismo è applicata una manciata di volte. Disposizioni parallele si trovano in XI.10, 13 e in XII.17, così come in *Data* 28. La sola disposizione chiastica è in IV.7.

c) *Transitività dell'equimultiplicità*. È da aspettarsi che le nozioni legate alla teoria delle proporzioni, dato il loro carattere particolarmente astratto, rivelino un grado di rigidità formulare maggiore che non le nozioni tipiche di altri libri degli *Elementi*. Consideriamo in primo luogo la relazione di equimultiplicità[141]. Come per tutte le relazioni a quattro posti, si tratta di due relazioni a due posti annidate: la relazione «*A* è multiplo di *B*» tra *A* e *B* e quella di uguaglianza tra i multipli. Due grandezze *A*, *C* sono equimultipli di altre due *B*, *D* se e solo se $A = nB$ e $C = nD$ per lo stesso intero n, dove occorre intendere nB come l'addizione ripetuta di *B* a se stesso secondo le unità in n, con $n > 1$:

[139] I campioni per similitudine e commensurabilità sono troppo ristretti per produrre dati significativi. Limitarsi alle altre relazioni è più che sufficiente. Ho applicato altrove questi risultati a mostrare che la transitività non può "spiegare" i sillogismi perfetti aristotelici (Acerbi 2009b).

[140] Ho escluso ovunque inferenze per transitività a più livelli, in cui l'annidamento delle relazioni, e la conseguente omissione di termini, impedisce di determinare lo schema usato.

[141] La logica molto peculiare della relazione complementare «*A* di *B* è la stessa parte che *C* di *D*» sarà analizzata nella sez. 2.6.

scriverò, in forma simbolica, $(A, C) = n(B, D)$. La nozione non è definita, probabilmente perché lo è quella di πολλαπλάσιον «multiplo», e d'altra parte l'avverbio ἰσάκις nella locuzione ἰσάκις πολλαπλάσιον «equimultiplo» va preso in un significato coincidente con quello corrente. L'equimultiplicità ad n fissato è transitiva, ma di questo fatto non viene mai offerta dimostrazione[142], il che è ragionevole, dato che si tratta di una conseguenza immediata della transitività dell'uguaglianza. La nozione è invero studiata nel libro V: la serie di risultati proposta in V.1-6 è una piccola teoria indipendente della nozione di «equimultiplo»: mentre le proposizioni V.1, 2, 4 sono usate in maniera cruciale nella teoria delle proporzioni, V.3 è applicata solo nella dimostrazione di V.4, e V.5, 6 non trovano impiego nel libro V e quindi neanche negli *Elementi*. È però immediato indicare proposizioni di teoria delle proporzioni che, in un senso ben preciso oltre che per specifiche identità di formulazione (con asterisco nel prospetto), corrispondono a quelle del gruppo V.1-6:

teoria degli equimultipli	1	2	3	4*	5*	6
teoria delle proporzioni	12	18	22	15*	19*	17

Contrariamente a quanto accade nel libro VII, nessuna delle proposizioni della prima riga è usata per dimostrare, neanche parzialmente, le proposizioni corrispondenti. È possibile però mostrare che esiste una dualità in senso forte tra le due relazioni a 4 posti alla base del libro V, cioè quella di equimultiplicità e quella di proporzionalità, e che questo può fornire un motivo, strutturale anche se storicamente non corroborabile, per la presenza di proposizioni come V.5-6. L'idea è la seguente. L'equimultiplicità consiste in due relazioni a due posti annidate, «A è multiplo di B» e la relazione di uguaglianza tra i multipli; la proporzionalità consiste anch'essa in due relazioni a due posti annidate, «rapporto di A rispetto a B» e la relazione di identità tra i rapporti. La prima oggettualizza la seconda e ne è caso particolare per rapporti numerici di tipo multiplo: A è multiplo di B secondo m se e solo se il rapporto di A rispetto a B è m[143].

Un parallelismo analogo, che può erroneamente indurre a credere che la teoria generale si sia determinata storicamente come sviluppo di quella numerica (una fallacia interpretativa che ha radici già nella concezione pitagorica e poi neoplatonica della primarietà dell'aritmetica rispetto alla geometria), si evidenzia nelle serie di teoremi corrispondenti all'interno del libro V: le operazioni che nella prima serie agiscono sulla coppia di multipli, nella seconda si trasferiscono ai termini omologhi in una proporzione, quelle che nella prima operano sulla coppia multiplo-sottomultiplo, nella seconda lo fanno sui termini di un singolo rapporto. Nella def. 5, invece, le due relazioni sono per così dire intrecciate come trama e ordito: i rapporti sono stabiliti tra antecedenti e conseguenti, gli equimultipli viaggiano separatamente sui termini omologhi, antecedente con antecedente e conseguente con conseguente.

La condizione di equimultiplicità è formulata tramite due espressioni: diciamo che «è equimultiplo A di B e C di D» è in forma I, mentre «sono equimultipli A, C di B, D» è in forma II. In forma I la

[142] Cioè, in simboli, se $(A, C) = n(B, D)$ e $(A, E) = n(B, F)$, allora $(E, C) = n(F, D)$. In V.3 si dimostra come comporre relazioni di equimultiplicità a termini fissati e multipli differenti. Si tratta di una forma di transitività differente da quella qui considerata (e ce ne occuperemo tra breve), ma il mero fatto che una forma di transitività sia in gioco impone che il suo enunciato sia in forma I.

[143] Per questo motivo la definizione di proporzionalità numerica in *El*. VII.def.21 finisce sostanzialmente per identificarle: «numeri in proporzione sono quando il primo del secondo e il terzo del quarto siano equimultipli o la stessa parte o siano le stesse parti», anche se occorre stare attenti che l'identificazione ha luogo tramite la relazione «essere la stessa parte», inversa di quella di equimultiplicità. Una volta adottata questa definizione, la teoria delle proporzioni numerica risulta particolarmente semplice.

struttura della formulazione è quindi $R\langle mB,B\rangle\langle mD,D\rangle$. Nella forma II, invece, la struttura è $S\langle mB,mD\rangle\langle B,D\rangle$, dove R e S simbolizzano le espressioni verbali delle relazioni in questione[144].

forma I	ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ	è equimultiplo[145] *A* di *B* e *C* di *D*	$R\langle mB,B\rangle\langle mD,D\rangle$
forma II	ἐστι τὰ Α, Γ τῶν Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια	sono equimultipli *A*, *C* di *B*, *D*	$\langle mB,mD\rangle\langle B,D\rangle S$

La forma II non può essere la conclusione canonica di un'inferenza per transitività dell'equimultiplicità ad *m* fissato, dal momento che le quattro grandezze non sono in ordine opportuno per permettere sostituzioni di blocchi linguistici; ciò accade invece nella forma I. D'altro canto la simmetria dell'equimultiplicità è manifesta nelle espressioni in forma II a causa del passaggio al plurale; questa è probabilmente la ragione per cui entrambe le forme trovano impiego. Solo la forma I può quindi figurare in uno schema di transitività per membri paralleli: e in effetti, dove viene impiegata la transitività dell'equimultiplicità – cioè in V.5 (*bis*), 6, 8, 17 (*bis*), cui vanno aggiunte VII.5 e 7 (*bis*) – si trova applicata solo la forma I, e in tutte le occorrenze la disposizione dei termini è parallela.

La forma II è invece esclusiva di tre contesti: (*i*) le «costruzioni» che precedono una dimostrazione; (*ii*) all'interno di una dimostrazione, ogni volta che viene applicata la condizione di proporzionalità della def. 5; (*iii*) alla fine di una dimostrazione, quando un'asserzione di equimultiplicità assunta come valida oppure dimostrata viene ripresa. In nessuno di questi tre contesti, che sono legati alla def. 5 e danno origine a quasi tutte le occorrenze, troviamo catene deduttive per transitività dell'equimultiplicità: si vedano le proposizioni V.4-5, 8 e 17; la proposizione V.6 ha la forma I nella dimostrazione, la forma II altrove. Riassumendo, in tutto il libro V otteniamo: le proposizioni 11-13, 22-23 hanno solo la forma II; le proposizioni 2, 5 e 15 solo la forma I; le proposizioni 3, 4, 6-8, 16-17 entrambe. Gli altri teoremi non usano gli equimultipli. Nella proposizione V.16 la sola occorrenza in forma I si trova all'interno di una citazione di V.15, nella cui esposizione troviamo la forma I. Gli altri riferimenti a V.15 (nelle proposizioni V.16 e 23) hanno la forma II, in accordo con l'uso «locale» delle proposizioni ospiti.

d) *Transitività della proporzionalità*. La transitività della proporzionalità è applicata ripetutamente, sia nel libro V che altrove; la ripartizione delle occorrenze tra schema parallelo e chiastico è 36/10. Un teorema analogo a V.11 non viene dimostrato in teoria dei numeri, ma la transitività della proporzionalità è applicata ripetutamente nei libri aritmetici. L'aderenza allo schema parallelo è in questo caso quasi completa; la ripartizione delle occorrenze è 28/2. Il seguente prospetto riassume la situazione:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	*tot.*
0/0	0/0	0/0	0/0	5/0	14/2	5/0	23/2	0/0	4/3	1/1	12/4	0/0	64/12

Anche la *condizione* di proporzionalità formulata nel *definiens* della def. 5 era concepita come una relazione per cui vale la transitività[146]. Consideriamo prima le applicazioni della condizione: la

[144] Nel caso della forma I, il simbolo ‹ , › denota a sua volta una relazione, cioè «essere multiplo di»; nel caso della forma II, lo stesso simbolo denota semplicemente una coppia ordinata. Ho anche rimpiazzato *A* con *mB* and *C* con *mD*, nella speranza di rendere la cosa più chiara.

[145] La costruzione paratattica con il predicato al singolare è tipica della lingua greca.

[146] Nella sua formulazione "nuda", cioè facendo astrazione dal fatto che identifica una relazione denominabile con il singolo termine «proporzione» e scrivibile in forma compatta «come *A* rispetto a *B*, così *C* rispetto a *D*» ma opaca quanto alla

transitività è impiegata dove ci si deve aspettare, cioè nella dimostrazione di V.11 (anche se questo passaggio non era reso esplicito nelle prime versioni, come vedremo sotto). La simmetria della condizione di proporzionalità è usata nella dimostrazione di V.13, dove la disuguaglianza data nella condizione è verificata in ordine invertito[147], ed è comunque garantita dalla forma della def. 5. Insomma, sia l'equimultiplicità che la condizione di proporzionalità venivano concepite come ciò che oggi chiamiamo relazioni di equivalenza, dal momento che sia simmetria che transitività di entrambe venivano date per acquisite e in effetti usate[148]. Resta da vedere se il *definiens* stesso della def. 5 fosse concepito oppure no come una relazione di equivalenza. Per questo è necessario analizzare in dettaglio la sua formulazione, in particolare i connettori logici impiegati. Differisco il problema alla sez. 2.8.

Dal momento che siamo interessati solo alla disposizione dei termini e poiché tutti gli enunciati non istanziati delle regole di transitività hanno la medesima formulazione, siamo autorizzati a sommare i dati dei punti *a*) – *d*): il totale aggregato è 152/48.

Il dato statistico più rilevante è dunque che la disposizione chiastica è adottata in una stretta minoranza di casi. Chiaramente, siamo ben lontani dal trovare zero occorrenze per essa, e da libro a libro degli *Elementi* si registrano fluttuazioni, ma tutto ciò è comprensibile una volta che si ricordi che i testi matematici greci non facevano ricorso ad alcun simbolismo. Tuttavia, i dati indicano chiaramente che lo schema parallelo è quello canonico: la ripartizione delle occorrenze tra i due schemi, proprio perché è straordinariamente improbabile come fluttuazione statistica[149], è significativa, e richiede un'interpretazione in termini di una pratica indirizzata da un criterio applicato intenzionalmente. Il criterio non può che essere quello di adottare una disposizione dei termini avvertita come più in linea con le formulazioni non istanziate (si riveda in quest'ottica il testo di I.1 letto sopra).

Tutte le relazioni matematiche considerate finora sono anche simmetriche, cioè aRb se e solo se bRa. L'osservazione merita una digressione. Quando la relazione non è simmetrica, la disposizione chiastica è necessaria in uno schema di transitività, se si vuole mantenere la stessa relazione in entrambe le premesse. Ad esempio, scriviamo sempre "$a > b$; $b > c$: quindi $a > c$" (disposizione chiastica dei termini e la stessa relazione sia nelle premesse che nella conclusione), e non "$a > b$; $c < b$: quindi $a > c$" (disposizione parallela dei termini ma relazioni differenti nelle premesse), che è corretto ma apparirebbe per lo meno eccentrico. Ma collocare simmetria e transitività di una relazione sullo stesso piano è un punto di vista tipicamente moderno, dato che entrambe le proprietà entrano nella definizione di relazione di equivalenza, una nozione centrale nella logica delle relazioni. Non è detto che gli antichi avessero una concezione così connessa delle varie proprietà di cui può godere una relazione, e non c'è alcuna cogenza a formulare la transitività con una disposizione chiastica fino a che i problemi creati dalle relazioni asimmetriche non siano chiari. Anzi, proprio il contrario sembra aver luogo. In effetti, negli *Elementi* troviamo un certo numero (basso) di inferenze per transitività della relazione «maggiore di». Bene, lo schema chiastico "$a > b$; $b > c$: quindi $a > c$" è attestato in X.44, XI.21 (e nella dimostrazione alternativa di quest'ultima; non si tratta di un'occorrenza indipendente in quanto la parte rilevante della dimostrazione è ripetuta identica). Lo schema per membri paralleli "$a > b$; $a < c$: quindi $c > b$" si trova invece in I.21 (*bis*), XI.23 (la conclusione è $b < c$) e nelle dimostrazioni

corrispondenza dell'espressione con la parte operativa della definizione (si confronti con la definizione di «tri-angolo equi-latero»).

[147] *EE* II, 21.23-26. Questa peculiarità è stata considerata una fallacia logica (Mueller 1981, 149, nota 13). Il fenomeno non si mostra in **G**, proprio in quanto Gerardo impiega sempre nelle applicazioni la stessa formulazione della definizione.

[148] La riflessività è una conseguenza di considerazioni metamatematiche e ben difficilmente possiamo pretendre di trovarne tracce nei testi matematici antichi.

[149] La probabilità che la partizione effettiva sia il risultato di una distribuzione casuale del termine comune è minore di 1 su 10^7.

alternative di X.1 e XII.17[150]. Una caratteristica di quest'ultimo schema lo rende ancora più interessante. In entrambe le occorrenze in I.21, l'assunzione che ho indicato con $a < c$ non contiene nel testo il segno "minore", ma il "maggiore" accompagnato da un'inversione dei termini! Si noti, come osservato sopra, che l'inversione nella coassunzione comporta lo spostamento dell'operatore relazionale in posizione interna (*EE* I, 30.5-10, e cfr. l'inferenza successiva alle righe 14-17):

αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ <u>μείζονές</u> εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ <u>μείζονες</u> ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ <u>μείζονές</u> εἰσιν.	ΓΕ, ΕΒ sono quindi <u>maggiori</u> di ΓΔ, ΔΒ. Ma <u>maggiori</u> di ΒΕ, ΕΓ furono dimostrati ΒΑ, ΑΓ: ΒΑ, ΑΓ sono quindi di molto <u>maggiori</u> di ΒΔ, ΔΓ.

In XI.23 l'inferenza mira ad ottenere una minorazione, come è evidente dal contesto, e l'assunzione "invertita" è quindi quella principale, fatto che si attaglia perfettamente alla catena di inferenze per maggiorazione da cui è ottenuta. Se ne deve decisamente concludere che neanche per una relazione non simmetrica l'adesione ad una disposizione chiastica fosse percepita come una caratteristica rilevante di un'inferenza per transitività. Al contrario, la conformità all'ordine lessicografico canonico dei termini (cioè quello impiegato per relazioni simmetriche) va considerato un criterio regolativo più forte del mantenimento della stessa relazione nel corso dell'inferenza.

I commentatori aristotelici non furono disposti a vedere connessioni fra transitività e forma sillogistica, anche se l'ovvietà di certe inferenze per transitività e la loro applicazione corrente e sistematica in argomenti matematici rendeva necessario discuterle, se non altro perché erano rappresentanti emblematici della classe degli argomenti «che concludono immetodicamente». Gli stessi commentatori non sembrano aver posto particolare attenzione all'ordinamento dei termini. Alessandro scrive la sua inferenze per transitività dell'uguaglianza nello schema "$c = b$; $a = c$: quindi $a = b$" (*in APr.*, 344.14-15)[151]. Lo stesso esempio si trova in Galeno, *Inst. Log.* XVI.6[152]: dopo una citazione dell'enunciato generale di transitività dell'uguaglianza nella forma che troviamo in *El.* I.nc.1 (ma attenzione che il testo necessita di un'integrazione!), egli fa riferimento all'inferenza di base in *El.* I.1, formulata introducendo ordinali alla maniera stoica (si veda la sez. 2.9):

τὸ πρῶτόν τε καὶ τὸ δεύτερον ‹τῷ τρίτῳ ἴσον›, ἑκατέρῳ αὐτῶν ἴσον ἂν εἴη οὕτω τὸ πρῶτον.	Sia il primo che il secondo ‹è uguale al terzo›, così il primo sarebbe uguale a uno e all'altro di essi.

Un argomento che conclude immetodicamente addotto meno di frequente ha «avere gli stessi genitori» come relazione transitiva. Nello stesso campione di autori considerati per la transitività

[150] Si aggiunga a queste occorrenze uno schema del tipo "$a > b$; $a = c$: quindi $c > b$" in XIII.8.

[151] Per un elenco delle occorrenze delle inferenze per transitività dell'uguaglianza nella letteratura esegetica antica si veda Barnes 1990, 68-71. Gli schemi seguiti da alcuni commentatori aristotelici sono i seguenti: Alessandro, *in Top.*, 14.21-22: $a = b$; $b = c$: $a = c$ (la seconda clausola è nella forma $c = b$ nel ms. *Par. gr.* 1874 e nell'Aldina); [Ammonio], *in APr.*, 70.11-12: $a = b$; $b = c$: $a = c$; Filopono, *in APr.*, 36.10-11 e 321.10-11, e [Temistio], *in APr.*, 121.23-24: $a = b$; $c = b$: $a = c$. Le fonti non rendono del tutto chiaro se le inferenze per transitività dell'uguaglianza fossero classificate tra gli argomenti che concludono immetodicamente. Un'occhiata a queste testimonianze rende immediatamente chiaro (cosa che d'altronde era da attendersi) che le esposizioni degli argomenti che concludono immetodicamente non sono indipendenti l'una dall'altra, sia nella scelta degli esempi che nella maniera di affrontare i problemi sollevati da questo genere di inferenze. Darei quasi per certo che (come spesso accade) Alessandro sia stata la fonte ultimativa di tutti quelli che lo seguono: Filopono lo cita esplicitamente come tale a *in APr.*, 321.8. Resta tuttavia il fatto che una particolarità come l'ordinamento dei termini negli esempi fosse lasciato all'estro del singolo commentatore.

[152] A *Inst. log.* I, Galeno offre due volte un argomento per transitività dell'uguaglianza applicato a tre uomini chiamati Teone, Dione e Filone. Il passaggio è corrotto, ma gli schemi saranno stati con ogni probabilità "$a = b$; $c = b$: $a = c$" nella prima occorrenza e "$b = a$; $b = c$: $a = c$" nella seconda. Anche qui si trova citato l'enunciato generale di transitività dell'uguaglianza.

dell'uguaglianza, troviamo l'argomento formulato tre volte nello schema "*aRb*; *bRc*: quindi *aRc*" e una volta nello schema "*aRb*; *cRb*: quindi *aRc*"[153].

Argomenti di simmetria sono impiegati in esposizioni peripatatiche della teoria aristotelica del sillogismo. Un interessante argomento mostra che le premesse universali negative convertono *simpliciter* sulla base della simmetria manifesta della relazione espressa dal verbo ἀποζεύγνυμαι «sono disgiunto». La dimostrazione è attribuita ad Eudemo e Teofrasto da Alessandro (*in APr.,* 31.4-9 e 34.13-15) e, prendendo da Alessandro e in maniera meno perspicua come al solito, da Filopono (*in APr*., 48.11-18). Leggiamo la versione di Alessandro (si noti l'uso del perfetto):

τὴν δὲ δεῖξιν οὕτως ποιοῦνται· κείσθω τὸ Α κατὰ μηδενὸς τοῦ Β· εἰ κατὰ μηδενός, ἀπέζευκται τοῦ Β τὸ Α καὶ κεχώρισται· τὸ δὲ ἀπεζευγμένον ἀπεζευγμένου ἀπέζευκται· καὶ τὸ Β ἄρα παντὸς ἀπέζευκται τοῦ Α· εἰ δὲ τοῦτο, κατὰ μηδενὸς αὐτοῦ.

Fanno la dimostrazione così: sia posto che A ‹si predichi› di nessun B; se di nessuno, A da B è disgiunto e separato; ma ciò che è disgiunto è disgiunto da ciò da cui è disgiunto: anche B è quindi disgiunto da ogni A; e se questo, ‹si predica› di nessuno di esso.

Merita menzionare altri due accenni antichi alla simmetria di relazioni in contesti tecnici. Il primo è in Proclo, *iE*, 373.5-23 (commento a I.30 – transitività del parallelismo), dove egli osserva che «il geometra era solito dimostrare, negli argomenti riguardanti le relazioni (ἐν τοῖς περὶ τῶν σχέσεων λόγοις), l'identità che pervade tutti gli enti che hanno la stessa relazione rispetto allo stesso» ed afferma che non tutte le relazioni sono transitive, ma basta che siano simmetriche per risultarlo (!). Proclo usa per «essere simmetriche» ἀντιστρέφουσι συνωνύμως «convertano sinonimicamente» e adduce come esempi uguaglianza, similitudine e identità ed infine la παράλληλος θέσις «posizione parallela» – gli stessi esempi di *Metaph*. Δ 15 nello stesso ordine – argomentando infine che «il parallelismo è infatti una similitudine di posizione, se così si può dire». Il secondo è in Cleomede, *Cael*. I.1.24 (I.1.228-232 Todd), dove sull'esempio degli abitanti degli antipodi è fatto cenno alla distinzione tra le σχέσεις «relazioni» che ἀντιστρέφουσι «convertono» e quelle che non lo fanno.

Tipologie 3) e 4).

Un'attenzione particolari meritano le inferenze appartenenti alla tipologia 4), cioè le operazioni di composizione di relazioni. Esempi particolarmente interessanti provengono dal V libro degli *Elementi*. Iniziamo da V.3, dove si dimostra come comporre relazioni di equimultiplicità con multipli differenti. Si tratta di una specie di transitività, come è suggerito dal fatto che l'enunciato sia in forma I; si noti la locuzione «tramite uguale» (*EE* II, 6.7-11)[154]:

ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ <u>δι' ἴσου</u> τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Qualora primo di secondo sia equimultiplo e terzo di quarto, e siano presi equimultipli sia del primo che del terzo, <u>tramite uguale</u> anche ‹dei multipli› presi rispettivamente sarà equimultiplo questo del secondo e quello del quarto.

[153] I primi tre in Alessandro, *in APr*., 344.32-34 e 345.6-7, e [Temistio], *in APr*., 122.3-4, il quarto in Filopono, *in APr*., 321.22-24 (la seconda e la quarta occorrenza sono schemi del sillogismo non valido in cui «essere fratelli» sostituisce «avere gli stessi genitori»).

[154] Per l'uso degli ordinali si veda la sez. 2.8. Nel primo asserto l'operatore relazionale è posto all'interno e lo è anche nell'esposizione (lo stesso vale anche per V.2), ma nel corso della dimostrazione è posto regolarmente all'esterno, salvo nella citazione istanziata di V.2.

In simboli e con le convenzioni adottate sopra: se $(A, C) = n(B, D)$ e $(E, F) = m(A, C)$, allora $(E, F) = k(B, D)$ – si noti che il teorema non asserisce che $k = nm$. La transitività opera dunque sulla seconda delle due relazioni annidate (uguaglianza dei multipli): il suo sussistere non è ovvio e merita pertanto una dimostrazione.

La proposizione corrispondente in teoria delle proporzioni è V.22, che stabilisce la validità della trasformazione «tramite uguale»; traduco l'esposizione perché più trasparente (*EE* II, 32.17-21):

ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Siano quante si voglia grandezze A, B, Γ e altre uguali ad esse in molteplicità Δ, E, Z, nello stesso rapporto prese due a due, come A rispetto a B, così Δ rispetto a E, e come B rispetto a Γ, così E rispetto a Z: dico che anche tramite uguale saranno nello stesso rapporto.

In simboli: se $A{:}B{::}C{:}D$ e $B{:}E{::}D{:}F$, allora $A{:}E{::}C{:}F$; a questo teorema si riconduce l'esempio di Galeno in *Inst. log.* XVI.1-3 e 9. Si tratta dunque dell'operazione di composizione di rapporti. Una menzione speciale merita l'impiego della locuzione δι' ἴσου «tramite uguale» qui e specialmente in V.3 e nella coppia di proposizioni V.20-21. Leggiamo l'enunciato di V.20 (*EE* II, 30.2-5):

ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Qualora siano tre grandezze e altre uguali ad esse in molteplicità, ‹e› anche nello stesso rapporto prese due a due, e tramite uguale la prima sia maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta, e qualora sia uguale, sarà uguale, e qualora minore, minore.

e confrontiamolo con V.def.17 (*EE* II, 3.12-17):

δι' ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Rapporto tramite uguale è, essendo più grandezze e altre uguali ad esse in molteplicità, e nello stesso rapporto prese due a due, quando sia, come nelle prime grandezze la prima rispetto all'ultima, così nelle seconde grandezze la prima rispetto all'ultima; o in altro modo: il prendere gli estremi previa rimozione dei medi.

La definizione è stata maltrattata dalla tradizione manoscritta: ce ne sono due e la prima contiene sostanzialmente l'enunciato del teorema V.22 (così come V.def.18 contiene quello di V.23)[155]. Un confronto con la tradizione arabo-latina rappresentata da Gerardo da Cremona (Busard 1984, c. 118.38-43; si veda anche *Anaritius*, 168.3-7 Curtze)

proportio que equalitas nominatur est proportio quarundam extremitatum ad alias cum fuerint quantitates plures duabus, et fuerint cum eis alie quantitates secundum earum numerationem in proportione una, et remote fuerint equaliter que sunt in medio.

[155] Sui problemi di queste definizioni si vedano Aujac 1986, Federspiel 2006a e 2006b.

unita alla preziosa testimonianza, immediatamente seguente questo testo, in cui Gerardo attribuisce a Thābit ibn Qurra l'affermazione di aver rinvenuto «in alia scriptura» una definizione sostanzialmente identica alla prima in V.def.17[156], permette di restituire una definizione di rapporto «tramite uguale» presumibilmente vicina a quella originale e sicuramente non fallace:

δι' ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.	Rapporto tramite uguale è, essendo più grandezze e altre uguali ad esse in molteplicità, e nello stesso rapporto prese due a due, il prendere gli estremi previa rimozione dei medi.

L'operazione «tramite uguale» sui rapporti consiste quindi semplicemente nella rimozione di uno o più medi. Se proprio vogliamo espandere la locuzione brachilogica δι' ἴσου «tramite uguale», proporrei dunque δι' ἴσου ὅρου «grazie a un termine uguale» (il medio comune "rimosso" della definizione) invece di δι' ἴσου διαστήματος «a intervalli uguali», che introduce una fastidiosa ambiguità con il significato ampiamente attestato di διάστημα come «rapporto»[157]. Per quanto gli interpreti abbiano sollevato perplessità, l'espressione è matematicamente congrua con V.3 e V.20-21, dove semplicemente segnala il fatto che i medi in comune siano omessi; ciò rende meno problematica la posizione della locuzione nell'antecedente dell'enunciato di V.20-21, quando conformità con gli altri enunciati in cui essa compare suggerirebbe una posizione nel conseguente come più appropriata. Sia come sia, l'aver fornito questa operazione di una denominazione specifica conferma che la disposizione chiastica (cioè con il medio in comune: nel caso dei rapporti non esistono alternative possibili a questa posizione) non fosse quella canonica nel caso di inferenze percepite come analoghe a quella per transitività.

La tipologia 3) è però importante in quanto permette di introdurre la principale forma di interazione tra una relazione e la struttura deduttiva: la stabilità della prima sotto opportune manipolazioni, cioè schemi inferenziali non astratti ancorati agli oggetti in gioco. La composizione in V.22 può anche essere vista come una caso particolare della ricerca di operazioni che garantiscano una forma di stabilità dell'identità di rapporto; a questa categoria generale appartengono anche le altre operazioni sui rapporti rubricate sotto la tipologia 4)[158]. Lo stesso vale per la composizione di relazioni di equimultiplicità. Di questo si occupa la piccola teoria sviluppata in V.1-6. Ecco nell'ordine il "contenuto matematico" di queste proposizioni espresso in forma simbolica[159]:

1) se $(A, C, \ldots) = n(B, D, \ldots)\ldots$ allora $(A, A + C + \ldots) = n(B, B + D + \ldots)$;
2) se $(A, C) = n(B, D)$ e $(E, F) = m(B, D)$, allora $(A + E, C + F) = k(B, D)$;
3) se $(A, C) = n(B, D)$ e $(E, F) = m(A, C)$, allora $(E, F) = k(B, D)$;
4) se $A{:}B{::}C{:}D$ allora, per ogni coppia di multipli n ed m, $nA{:}mB{::}nC{:}mD$[160];
5) se $(A, C) = n(B, D)$ con C, D minori di A, B, allora $(A–C, A) = n(B–D, B)$;

[156] È un esempio del fenomeno di dimostrazioni e definizioni alternative del testo greco degli *Elementi* dovute collazione di varianti isolate.
[157] Si veda ad esempio l'intera *Sectio canonis* euclidea e Porfirio, *in Harm.*, 91.4-95.23.
[158] La stabilità sotto convertendo e invertendo è stabilita come ovvia nei porismi, quasi sicuramente inautentici, a V.19 e a V.7.
[159] Una volta che l'interesse verta sulla stabilità della relazione in oggetto, è del tutto superfluo specificare, ad esempio, che $k = n + m$ in V.2 o che $k = nm$ in V.3 o che $k = n – m$ in V.6 (si ricordi che un'unità non è un numero e quindi il caso $n – m = 1$ va trattato a parte). Si noti che le prime e le ultime due si corrispondono nello scambio di somma e sottrazione.
[160] Qui entra per la prima volta la def. 5. È pratica ormai corrente scrivere $A{:}B{::}C{:}D$ e non $A{:}B = C{:}D$ in quanto un rapporto è invariabilmente detto «lo stesso» di un altro, e non «uguale» a questo.

6) se $(A, C) = n(B, D)$ e $(E, F) = m(B, D)$ con E, F minori di A, C, allora $A–E = B$ e $C–F = D$ oppure $(A–E, C–F) = k(B, D)$;

e le proposizioni corrispondenti di teoria delle proporzioni, in cui è questione della stabilità dell'identità di rapporto sotto (le denominazioni potranno utilmente essere applicate anche alle operazioni corrispondenti per gli equimultipli):

i) somma di antecedenti e conseguenti: se $A:B::C:D::E:F\ldots$, allora $(A + C + E\ldots):(B + D + F\ldots)::A:B$ (V.12);
ii) componendo: se $A:B::C:D$, allora $(A + B):B::(C + D):D$ (V.18);
iii) tramite uguale: se $A:B::C:D$ e $B:E::D:F$, allora $A:E::C:F$ (V.22);
iv) passaggio ad equimultipli: $A:B::nA:nB$, con n multipli qualsiasi (V.15);
v) sottrazione di antecedenti da antecedenti e di conseguenti da conseguenti: se $A:B::C:D$, allora $(A–C):(B–D)::A:B$ (V.19);
vi) dividendo: se $A:B::C:D$, allora $(A–B):B::(C–D):D$ (V.17);

a cui vanno aggiunti i risultati di stabilità dell'identità di rapporti sotto

vii) transitività: se $A:B::C:D$ e $C:D::E:F$, allora $A:B::E:F$ (V.11);
viii) transitività "mista": se $A:B::C:D$ e $C:D > E:F$, allora $A:B > E:F$ (V.13);
ix) alternando: se $A:B::C:D$, allora $A:C::B:D$ (V.16);
x) convertendo e invertendo: stabilite come ovvie nei porismi, quasi sicuramente inautentici, a V.19 e a V.7;
xi) tramite uguale in proporzione perturbata: se $A:B::D:F$ e $B:E::C:D$, allora $A:E::C:F$ (V.23)[161];
xii) somma degli antecedenti in proporzioni differenti con conseguenti uguali: se $A:B::C:D$ e $E:B::F:D$, allora $(A + E):B::(C + F):D$ (V.24);

e le "interazioni" fra (dis)uguaglianze tra termini e identità di rapporto:

xiii) $A:B::C:B$ e $B:A::B:C$ se e solo se $A = C$ (V.7, 9);
xiv) $A:B > C:B$ e $B:A < B:C$ se e solo se $A > C$ (V.8, 10);
xv) se $A:B::C:D$ e $A > C$, allora $B > D$, e lo stesso per = e < (V.14);
xvi) tramite uguale: se $A:B::C:D$ e $B:E::D:F$ e $A > E$, allora $C > F$, e lo stesso per = e < (V.20);
xvii) tramite uguale in proporzione perturbata: se $A:B::D:F$ e $B:E::C:D$, e $A > E$, allora $C > F$, e lo stesso per = e < (V.21).

La teoria del libro V consiste dunque quasi integralmente (ho elencato 24 proposizioni su 25) nella verifica della stabilità dell'identità di rapporto sotto opportune operazioni. La maniera di dimostrazione è sempre la stessa, e comporta un'applicazione di V.def.5 nei due versi[162]: una relazione di proporzionalità è sempre assunta tra le ipotesi, ed è sufficiente che le trasformazioni degli equimultipli indotte da quelle richieste per i rapporti non introducano vincoli ulteriori sulla scelta iniziale di multipli perché la loro genericità si preservi anche alla fine, quando la definizione 5 è

[161] Si noti che in V.22-23 i termini sono disposti in maniera da ottenere la stessa proporzione finale.
[162] Nei casi in cui ciò non avviene, le assunzioni specifiche di V.7 banalizzano la richiesta di genericità e rendono immediata la verifica della definizione, V.15 non usa gli equimultipli per verificare la def. 5. V.8 e V.13 fanno storia a sé, in quanto vi si trova applicata la definizione 7.

applicata di nuovo in verso opposto a quello iniziale. Che non vengano introdotti ulteriori vincoli è dimostrato appunto nelle cruciali proposizioni V.1-2 e 4, con l'unica eccezione della transitività dell'equimultiplicità, non dimostrata e per cui l'assenza di vincoli è da considerarsi evidente.

Più in generale, le quattro tipologie di trasformazioni di relazioni 1) – 4) elencate sopra sono sempre inserite in teoremi che dimostrano risultati di stabilità: questi ultimi appaiono dunque essere il centro motore dell'indagine antica sulle proprietà delle relazioni. Che si tratti di una prospettiva interpretativa adeguata riceve conferma da una panoramica del contenuto di altri princìpi e teoremi che coinvolgono relazioni[163]:

1) Risultati concernenti l'uguaglianza inclusi tra le nozioni comuni premesse al libro I: stabilità sotto somma e sottrazione di grandezze uguali (2-3), analogamente per raddoppiamento e dimezzamento delle grandezze in gioco (5-6). Queste sono precedute dalla stabilità della "relazione" di disuguaglianza sotto somma di grandezze uguali (4)[164]. Si ricordino gli esempi di Galeno in *Inst. log*. XVI.4 e 7-8 letti all'inizio di questa sezione.

2) La teoria delle proporzioni esposta nel libro VII è indipendente da quella del libro V, e non ha neanche l'ambizione di ridimostrare in àmbito numerico tutti i risultati validi per le grandezze (il che sarebbe stato compito semplice). Nella tabella seguente troviamo le proposizioni corrispondenti:

V	1	5	19	12	16	22
VII	5-6	7-8	11	12	13	14

L'elaborazione è dunque parziale, mirante a dimostrare i risultati strettamente necessari al prosieguo della trattazione. Come in V.1-6, il segmento iniziale (VII.4-10) studia la nozione di «parte»/«parti» indipendententemente dalla teoria delle proporzioni cui verrà immediatamente applicata. In VII.4 è dimostrato che tra ogni coppia opportunamente ordinata di numeri differenti vige la relazione «essere parte» oppure «essere parti». Seguono tre coppie, VII.5-6, 7-8, 9-10, che servono a stabilire per numeri che sono uno «parte» (rispettivamente «parti») di un altro la relazione da cui discenderà, in accordo con la definizione, la corrispondente proposizione di teoria delle proporzioni: nell'ordine somma di antecedenti e conseguenti, sottrazione di antecedenti da antecedenti e di conseguenti da conseguenti, alternando, che ovviamente non ha un analogo nella corrispondente "teoria degli equimultipli". Le tre proposizioni corrispondenti alle coppie non sono date nello stesso ordine di queste, che sarebbe stato 12-11-13. VII.14 dimostra la proprietà «tramite uguale». Nella 15, a rigore solo una conseguenza della teoria, è dimostrazioneta valida una forma particolare di alternando (uno dei termini è un'unità) applicata alla relazione a 4 posti «misurare le stesse volte».

3) Risultati di teoria della primalità in VII.23-30. La primalità *relativa* è stabile sotto: passaggio ad un divisore di uno dei primi (23), al prodotto tra due numeri primi relativi ad un terzo (24) e tra coppie di primi relativi (26), al quadrato di uno dei primi (25), ai quadrati o cubi di entrambi (27), alla somma (28). Inoltre, un numero primo è primo relativamente a ogni numero che non misura (29), e se un primo misura il prodotto di due numeri, allora misura almeno uno dei due fattori (30).

4) Stabilità della relazione di commensurabilità sotto identità di rapporto (X.11) e sotto somma (15); stabilità della relazione di incommensurabilità per passaggio a grandezze commensurabili (13) e sotto somma (16); stabilità della relazione «potere di più per il quadrato su una retta commensurabile con se stessa» per passaggio a grandezze nello stesso rapporto (14); stabilità delle linee mediali e dei domìni

[163] Possiamo anche aggiungere la stabilità dell'operazione di sezione in rapporto estremo e medio sotto l'addizione del segmento maggiore (XIII.5).

[164] Poco conta che le ultime tre siano quasi sicuramente spurie; ciò conferma anzi la rilevanza delle considerazioni di stabilità.

mediali sotto commensurabilità (23 e porisma); stabilità sotto commensurabilità delle 6 irrazionali ottenute per somma (66-70) e delle 6 ottenute per sottrazione (103-107). In generale, la classificazione delle linee irrazionali nel libro X può essere compresa al meglio se vista nella prospettiva di ricercare classi minimali di rette stabili sotto due operazioni: la formazione di domìni rettangolari compresi tra rette e l'applicazione parabolica di un dominio su una retta.

5) Nei *Data*. Stabilità del predicato «dato» sotto composizione o sottrazione di grandezze date (3-4). Stabilità della relazione «avere rapporto dato» sotto dividendo (5) e componendo (6). Transitività della relazione «avere rapporto dato» (8), e sua estensione al caso di molteplicità uguali di grandezze in rapporto dato (9). Se due grandezze sono sommate alla stessa, e le somme sono date, le grandezze sono uguali oppure differiscono per una grandezza data (12).

6) Ancora nei *Data*, proposizioni 10-11 e 13-21: analisi dettagliata della relazione «grandezza maggiore che in rapporto di una grandezza per una data» (= **A**); stabilità della relazione sotto le operazioni di comporre e scomporre (10-11); sue connessioni con la relazione «avere rapporto dato» (= **B**): transitività nella combinazione delle due (13). Se a grandezze in rapporto dato si sommano (14) o si sottraggono (15) grandezze date, le grandezze risultanti sono nella relazione **A** o nella **B**; se invece da una si sottrae e all'altra si somma sussiste solo la relazione **A** (16). Se due grandezze sono nella relazione **A** rispetto alla stessa grandezza, sono tra loro nella relazione **A** o nella **B** (17). Se la stessa grandezza è nella relazione **A** rispetto a due grandezze, queste sono tra loro nella relazione **A** o nella **B** (18). Transitività della relazione **A** (19). Da due grandezze date sono sottratte (20) o sommate (21) grandezze in rapporto dato: quelle risultanti sono tra loro nella relazione **A** o nella **B**.

1.5.1.5. Problemi testuali

Le considerazioni precedenti permettono di risolvere problemi testuali altrimenti inattaccabili (si veda anche Acerbi 2003). Nella proposizione V.8 si trova il passaggio seguente (*EE* II, 14.2-7):

καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια.

E poiché è equimultiplo ΖΗ di ΑΕ e ΗΘ di ΕΒ, è quindi equimultiplo ΖΗ di ΑΕ e ΖΘ di ΑΒ. Ed è equimultiplo ΖΗ di ΑΕ e Κ di Γ: è quindi equimultiplo ΖΘ di ΑΒ e Κ di Γ. ΖΘ, Κ di ΑΒ, Γ sono quindi equimultipli.

Come abbiamo visto, le due frasi sottolineate hanno lo stesso significato: la seconda è solo una riformulazione della prima. La prima frase, mancante in **AG**, è la conclusione naturale della deduzione immediatamente precedente, che ricorre alla transitività dell'equimultiplicità. La seconda frase è presente in **AG** ed è la formula canonica all'interno di verifiche della def. 5 è soddisfatta. In questo caso, però, la verifica è rimandata ad una parte successiva della dimostrazione, dove la seconda frase è ripetuta identica (*EE* II, 14.18-19). Lo stesso fenomeno di «riformulazione + ripetizione» ha luogo in V.17 (*EE* II, 26.12-14; la ripresa è a 26.20), e anche qui **AG** saltano la prima frase ma conservano la seconda. Si tratta di un'omissione significativa: anche se **AG** non sono strettamente legati alla pratica di ripetere identiche le varie espressioni formulari, dato che traducono ogni frase come se fosse in prima occorrenza, la differenza tra le due formulazioni dell'equimultiplicità è di solito mantenuta[165]. È

[165] In **G** sono *quasi* sempre rese secondo gli schemi «*a* ita est multiplex quantitatis *c* sicut *b* est multiplex quantitatis *d*» e «*a* e *b* sunt eque multiplicia quantitatum *c* e *d*». Le variazioni nella traduzione della stessa espressione suggeriscono di dare peso solo a dati testuali quali l'assenza di una frase altrimenti presente in **PT**.

implausibile che la frase mancante sia stata omessa per errore di copia sia in V.8 che in V.17; oltretutto, le frasi permutano i termini in modo da rendere improbabile un *lapsus oculi*.

Per affrontare questo problema testuale si osservi in primo luogo che la norma negli *Elementi* è quella di ripetere alla lettera una frase, quando la sua prima asserzione come conclusione di un argomento e il suo primo utilizzo come premessa di uno successivo siano distanziati da una catena di inferenze[166]. Nel nostro caso lo iato è piuttosto lungo, e l'occorrenza come premessa ricorre nel contesto di una verifica della condizione della def. 5; come abbiamo visto nella sottosezione precedente, ciò richiede l'impiego della forma II. Ne consegue che anche l'occorrenza come conclusione, di cui quella come premessa è la ripresa, dovesse avere la forma II, come in effetti leggiamo in **AG** e nella riformulazione in **PT**. D'altra parte, solo la forma I può essere la conclusione canonica di un'inferenza per transitività. È chiaro che le due forme hanno lo stesso significato ed è una questione di intelligenza matematica di grado zero evitare ripetizioni come quella che troviamo in V.5 e 17. Vero, a meno che la valenza simbolica del linguaggio formulare non abbia fatto percepire l'assenza della conclusione canonica in forma I di un'inferenza per transitività come una lacuna nella dimostrazione. Questo fatto da solo giustifica una sua interpolazione posteriore nel ramo greco della tradizione. Questa ricostruzione mi sembra preferibile all'assunzione di due interventi editoriali semplificativi in V.8 e 17 occorsi nella tradizione arabo-latina.

La convenzione lessicografica per la transitività della relazione di proporzionalità è rispettata con coerenza notevole, come abbiamo visto. Proprio la prop. V.11, in cui la transitività della proporzionalità è dimostrata, sembra però costituire un'eccezione. L'enunciato, «I ‹rapporti che sono› gli stessi dello stesso rapporto sono gli stessi anche tra loro», è infatti istanziato dalla seguente disposizione chiastica: «A:B::Γ:Δ, ma Γ:Δ::E:Z; dico che A:B::E:Z»[167]. Ma il testo arabo della famiglia *A*, con l'eccezione di un solo manoscritto, presenta la disposizione canonica; quest'ultima è di gran lunga preferita quando V.11 sia applicata[168]. Probabilmente la disposizione in **PT** è una modifica posteriore, indotta dalla pratica di introdurre le lettere di un'instanziazione in ordine alfabetico.

Il riscontro di **AG** chiariscono i motivi di una fallacia nella dimostrazione di V.17. La proposizione dimostra che $A{:}B{::}C{:}D$ implica $(A{-}B){:}B{::}(C{-}D){:}D$ nel modo seguente. Dopo una serie di manipolazioni preliminari di equimultipli, viene affermato che da $A{:}B{::}C{:}D$ consegue $mA > nB \rightarrow mC > nD$, $mA = nB \rightarrow mC{=}nD$, $mA < nB \rightarrow mC < nD$ per ogni coppia di interi m e n, in accordo con la def. 5. In particolare, per le manipolazioni immediatamente precedenti, tutto ciò resta vero ponendo $n{+}m$ al posto di n. Ne risulta che $mA > (n + m)B \rightarrow mC > (n + m)D$, etc. Il caso $mA > (n + m)B$ viene poi preso a parte e si inferisce $m(A - B) > nB$ per sottrazione; rammentandosi di $mA > (n + m)B \rightarrow mC > (n + m)D$ se ne conclude $mC > (n + m)D$ e di qui, ancora per sottrazione, $m(C - D) > nD$. Di conseguenza, per interi arbitrari m e n, $m(A - B) > nB \rightarrow m(C - D) > nD$. Il testo continua con

[166] Una *variatio* ammessa consiste nel passaggio da presente a imperfetto nei tempi dei verbi. Nel libro V ciò accade in V.11, 17, 23 (una volta ciascuna). Solo la prima occorrenza non è registrata in **AG**, che sono privi di tutta la frase.

[167] Un'esposizione del tipo «A:B::Γ:Δ, ma E:Z::Γ:Δ; dico che A:B::E:Z» sarebbe più in linea con la formulazione dell'enunciato. Per il testo arabo si veda Engroff 1980, 213.

[168] In V.16 (*bis*), 18, 23 (*bis*); VI.3, 5, 6, 18, 19, 20 (*bis*), 22 (*bis*), 23 (*bis*), 24, 25, 26; X.27, 28, 68, 113; XI.17; XII.2, 4, 5, 9 (*bis*), 11, 12 (*ter*), 14, 18 (*bis*). In VI.7, 19; X.31, 32, 112; XI.33; XII.2, 4, 5, 11 troviamo invece disposizioni chiastiche. Queste ultime seguono spesso manipolazioni di rapporti tramite *invertendo* o *alternando*. In generale, **AG** confermano queste lezioni (c'è un irrilevante errore di copista – o un errore di stampa – in VI.7, dove troviamo la disposizione canonica), eccettuati i casi in cui gli argomenti per transitività sono troppo compressi: si vedano ad esempio entrambe le occorrenze V.16 e la seconda in V.23: solo la conclusione dell'argomento è attestata. Tengo fuori dal conto le occorrenze annidate in V.23; VI.1, 2 (*bis*), 14 (*bis*), 15 (*bis*), 20; X.25, 93, 98, 99, 100; XI.31, 33 (*bis*), 34 (*bis*), 37 (*bis*); XII.1, 4, 11, 15 (*bis*). Si osservi che nessun teorema analogo a V.11 viene dimostrato per proporzioni numeriche, anche se la transitività della proporzionalità è impiegata a più riprese nei libri aritmetici. La disposizione canonica è rispettata quasi ovunque, cioè in VII.14, 17, 19 (*bis*), 34; VIII.2 (*quater*), 4, 5 (*bis*), 8 (*bis*), 9, 10 (*quinquies*), 11, 12 (*bis*), 18 (*bis*), 19 (*ter*). Le sole eccezioni sono in VIII.20, 21.

dimostrazioni potenziali dei due casi restanti. È chiaro che la deduzione corretta richiederebbe che la prima inferenza per sottrazione andasse nell'altra direzione. Si osservi che l'implicazione associata a quest'inferenza è ovviamente invertibile, ma ciò non toglie che il testo, separando i casi, faccia appello ad un'implicazione e sia quindi errato. Ecco la traduzione di Gerardo del passaggio chiave, quello cioè corrispondente a *EE* II, 26.22-27.7 (Busard 1984, cc. 129.59-130.4 – *AB* si accordano con **G**. La traduzione di Adelardo è ancora più compressa, dal momento che non menziona neanche gli equimultipli):

> [...] ergo quantitates *hk* et *ln* aut simul addunt super quantitates *ts* et *mq*, aut simul minuunt ab eis, aut simul equantur eis. quod si abstulero *tk* et *mn*, que sunt communes, remanebunt quantitates *ht* et *lm* aut simul addentes super quantitates *ks* et *nq* aut simul equabuntur eis, aut simul minuent ab eis.

I passaggi esplicitati negli *Elementi* sono sottintesi, e l'inferenza abbraccia simultaneamente i tre casi: e in questo caso ciò che risulta corrisponde a un'equivalenza logica. Per questo motivo il testo di **G** è corretto logicamente, contrariamente a quello greco. Interpolazione nella tradizione greca o abbreviazione in quella arabo-latina?

Le divergenze tra **A** e **G** non aiutano; offro un argomento del tutto congetturale basato sulla convenzione lessicografica canonica per la transitività. Si supponga che un editore voglia rendere espliciti i passaggi impliciti in **G**: dovrà dividere la condizione di proporzionalità in tre casi. In questo modo, però, il carattere di equivalenza logica della condizione va perso. Se però ciò non viene avvertito, risulta naturale applicare la convenzione lessicografica canonica, dal momento che è esattamente in gioco la trasmissione per transitività di una certa «relazione». In questa maniera svanisce però la correlazione tra la direzione dell'implicazione e quella della disuguaglianza. Come risultato, l'editore pone «HK eccede ΘΞ» in prima posizione sia nell'inferenza che nel condizionale, come nel testo greco: «HK ecceda pertanto ΘΞ, e sottratto ΘK comune anche HΘ eccede quindi KΞ. Ma se HK eccedeva ΘΞ, anche ΛN eccedeva MΠ: anche ΛN eccede quindi MΠ, e sottratto MN comune anche ΛM eccede NΠ: così che se HΘ eccede KΞ, anche ΛM eccede NΠ» (*EE* II, 26.24-27.5). Una volta rispettata la convenzione lessicografica canonica, la macchina della transitività si mette in moto e produce la relazione (qui implicazione) tra «HΘ eccede KΞ» e «ΛM eccede NΠ».

Un fenomeno analogo si registra in V.11, dove si dimostra la transitività di «essere nello stesso rapporto». Vi troviamo un'applicazione simultanea delle proprietà di simmetria e transitività della condizione di proporzionalità, ma in una formulazione che ha suscitato qualche perplessità (Vitrac 1990-2001 II, nota 52 a 91). In effetti, come conseguenza di quanto assunto nell'enunciato, troviamo nel corso della dimostrazione due condizioni di proporzionalità distinte: primo, se $H > \Lambda$ allora $\Theta > M$, etc.; secondo, se $\Theta > M$ allora $K > N$, etc. (Le grandezze in gioco $H, \Lambda, \Theta, M, K, N$ sono multipli opportuni delle grandezze di base in proporzione.) Viene poi ripresa la prima condizione di proporzionalità – le implicazioni sono però prese in ordine inverso, se $\Theta > M$ allora $H > \Lambda$, etc. – e combinata con la seconda in modo da dare se $H > \Lambda$ allora $K > N$, etc. Contrariamente a quanto avviene in V.17, il passaggio è corretto, in quanto la condizione di proporzionalità presa come un tutto è un'equivalenza logica e quindi gode della proprietà di simmetria. Non è però questo il punto: il punto è che solo dopo l'inversione la prima condizione può essere combinata con la seconda in accordo con la convenzione lessicografica canonica per la transitività. Il passaggio contenente l'inversione è assente sia in **AG** che in *AB*. Non è improbabile che sia stato introdotto in un secondo momento, da un editore ansioso di vedere rispettata la convenzione lessicografica canonica.

1.5.2. *Marcatori metamatematici: dimostrazioni potenziali, analogiche, richiami all'evidenza ed interni, ottativo, forme verbali personali*

Una piccola galassia di espressioni linguistiche permette di accorciare certe sequenze dimostrative, quando queste siano particolarmente evidenti o riproducano passaggi già svolti per esteso. Distinguiamo tre categorie:

1) Richiami all'evidenza, introdotti normalmente da δῆλον «chiaro» e le sue varianti δηλαδή «chiaramente» e δηλονότι «è chiaro che», oppure da φανερόν «manifesto».
2) Dimostrazioni analogiche, introdotte da διὰ τὰ αὐτὰ δή (δέ) «(proprio) per gli stessi ‹motivi›».
3) Dimostrazioni potenziali, introdotte da richiami alla simiglianza della deduzione: la forma più frequente è ὁμοίως δὴ δείξομεν «del tutto similmente dimostreremo» seguita da una dichiarativa.

Ecco un'analisi dettagliata delle tre fattispecie.

1) I richiami all'evidenza, d'altronde molto infrequenti, sono *a priori* sospette interpolazioni, e un'analisi che non è il caso di fare qui mostra che si tratta in effetti di materiale spurio. Nel complesso degli *Elementi* si rintracciano le seguenti occorrenze di δήλον e suoi derivati:

δῆλον	III.25, X.9/10, 44, 111, *alt*VI.6, *alt*X.23, 38
δηλαδή	III.25 (*bis*), X.4, 10, XI.3, XII.4/5, 17, XIII.15, *alt*X.18, 23
δηλονότι	IV.8, VI.7, X.47

Giova ricordare che un autore come Archimede presenta 222 richiami all'evidenza contenenti la radice δηλ– (se ne rintracciano soltanto 7 in Apollonio), e 87 con φανερόν[169]. Negli *Elementi* i richiami all'evidenza non rimandano mai a proprietà della figura.

Il predicato utilizzato nei porismi, non dimostrati ma dichiarati evidenti sulla base di quanto appena dimostrato, è invariabilmente φανερόν «manifesto». Il porisma è di solito introdotto da ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι «da questo è pertanto manifesto che», anche se si hanno eccezioni (si noti che tra i porismi c'è del materiale sicuramente spurio): varianti stilistiche in IV.5, IX.11 (καὶ φανερόν ὅτι «ed è manifesto che»), X.9 (καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται ὅτι «e sarà manifesto da quanto dimostrato che») e X.114 (καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερὸν ὅτι «e ci risulta anche per questo essere manifesto che» – particolarmente aberrante con l'intrusione della prima persona), dimostrazione potenziale nel primo porisma a VI.20 (ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται ὅτι «allo stesso modo sarà stato dimostrato anche per i quadrilateri [simili], che») o niente del tutto nel secondo porisma a VI.20 (che però termina con ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν ὅτι «così che è anche manifesto in generale che») e in XII.17. Raccolgo in una tabella le occorrenze, libro per libro nel testo principale degli *Elementi*, di φανερόν all'esterno di porismi: il predicato funziona palesemente da marcatore stilistico per i libri aritmetici e per il libro X.

III	31, 35
VII	2
VIII	6, 9, 15, 21
IX	3, 13, 15, 32-34

[169] Ma è ancora più importante notare che buona parte dei richiami all'evidenza in Archimede serve a introdurre la conclusione di una dimostrazione o un'asserto dimostrato: sono quindi un tratto stilistico.

X	3, 4, 13 (*bis*), 16/17, 18, 28/29, 42, 44, 54, 57-59, 115
XI	20, 22, 34
XII	3, 17

Inusuale la formulazione in VIII.6 (*EE* II, 159.20-23):

ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.	Che dunque Α, Β, Γ, Δ, Ε non si misurano di séguito tra loro, è manifesto: neanche Α misura infatti Β.

che ritroviamo in IX.32-34 e, con il richiamo all'evidenza sostituito da δέδεικται «è stato dimostrato», in IX.9 (*bis*).

2) e 3) Le dimostrazioni analogiche sono introdotte da διὰ τὰ αὐτὰ δή (δέ) «(proprio) per gli stessi ‹motivi›»[170]; la forma è molto frequente (150 occorrenze nel complesso degli *Elementi*). Di norma ha portata limitata, introducendo una singola inferenza virtualmente identica a quella precedente. Portata maggiore hanno le dimostrazioni potenziali, introdotte da richiami alla simiglianza della deduzione: la forma più frequente (86 occorrenze nel complesso degli *Elementi*) è ὁμοίως δὴ δείξομεν «del tutto similmente dimostreremo» seguita da una dichiarativa. Le varianti attestate rimpiazzano la particella δή con δέ (irrilevante dal punto di vista statistico) o pongono il verbo al futuro passivo (19 occorrenze)[171], oppure si limitano al solo avverbio (8 occorrenze)[172]. La differenza nella portata dei due tipi di dimostrazioni abbreviate si coglie ad esempio confrontando la dimostrazione analogica in III.21 (*EE* I, 124.7-13)

καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓΔ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστι διπλασίων.	E poiché l'angolo ΒΖΔ è sul centro, e ΒΑΔ sulla circonferenza, e hanno base lo stesso arco ΒΓΔ, l'angolo ΒΖΔ è quindi doppio di ΒΑΔ. Proprio per gli stessi ‹motivi› ΒΖΔ è doppio anche di ΒΕΔ.

con dimostrazioni potenziali come quella in V.6 (*EE* II, 10.26-11.13); si noti che la dimostrazione dispiegata si conclude, del tutto inusualmente, con l'asserzione di un condizionale, introdotta da ὥστε:

ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον. λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν.	In effetti, sia in primo luogo ΗΒ uguale a Ε. Dico che anche ΘΔ è uguale a Ζ.
κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ	In effetti, uguale a Ζ sia posto ΓΚ. Poiché è equimultiplo ΑΗ di Ε e ΓΘ di Ζ, e ΗΒ è uguale a Ε, ΚΓ a Ζ, è quindi equimultiplo ΑΒ di Ε e ΚΘ di Ζ. Ed è stato supposto equimultiplo ΑΒ di Ε e ΓΔ di Ζ: è quindi equimultiplo ΚΘ di Ζ e ΓΔ di Ζ. Poiché dunque uno e l'altro dei ΚΘ, ΓΔ di Ζ è equimultiplo, ΚΘ è quindi uguale a ΓΔ. Sia sottratto ΓΘ comune: ΚΓ restante è quindi uguale a ΘΔ restante. Ma Ζ è uguale a ΚΓ: anche ΘΔ è

[170] Una sola occorrenza della forma del tutto eccentrica διὰ ταὐτὰ τοίνυν «per gli stessi ‹motivi› invero», in I.21 (*EE* I, 30.14). La particella τοίνυν ricorre 2 volte in Apollonio (*Con*. I.41 e 52), ma 9 volte in Autolico e 17 in Archimede (di cui 1 in *Sph. cyl*. I, 7 in *Con. sph*., 6 in *Spir*., 1 in *Aequil*. I, 1 in *Ar*., 1 in *Fluit*. I).

[171] In I.15, 27, III.37, IV.3, 12 (*bis*), 13 (*bis*), 14, 15 (*bis*), IX.19, X.1, 31, XI.18, XII.5-6, XIII.16-17.

[172] In III.25, IV.15-16, X.13/14, 21/22, 68, XII.4, XII.4*alt*.

λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ Ζ τῷ ΚΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.
ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι, κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

quindi uguale a Z. Così che se HB è uguale a E, anche ΘΔ sarà uguale a Z.
Del tutto similmente dimostreremo che, anche qualora sia multiplo HB di E, tante volte multiplo sarà anche ΘΔ di Z.

A volte la dimostrazione potenziale è indotta da peculiarità dell'enunciato, come in I.17 (*EE* I, 26.2-6 e 13-16), dove è esplicitamente richiesto di esaurire tutta la combinatoria:

παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.
ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.
αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Due angoli sostituiti in ogni modo di ogni triangolo sono minori di due retti.
Sia un triangolo ΑΒΓ: dico che due angoli sostituiti in ogni modo del triangolo ΑΒΓ sono minori di due retti.
ΑΒΓ, ΒΓΑ sono quindi minori di due retti. Del tutto similmente dimostreremo che anche ΒΑΓ, ΑΓΒ sono minori di due retti, e ancora ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Spesso, anche se non sempre, la dimostrazione non dispiegata verte su un numero infinito di casi del tutto indistinguibili da quello assunto come paradigmatico; un'ipotetica dimostrazione addizionale prevederebbe semplicemente di considerare un altro oggetto matematico dello stesso tipo di quello paradigmatico. Tali dimostrazioni possono essere viziate da fallacie. Un vero errore logico, seppure abbastanza sottile, è costituito dall'uso pleonastico di πλήν «eccetto» all'interno di un particolare argomento che segue dimostrazioni per assurdo: ne troviamo 9 occorrenze negli *Elementi*, in I.14, 39-40, III.1, 9 *aliter*, 18-19, XI.3, 19. Le due occorrenze di πλήν in IX.13, pur in contesto non dissimile, non danno luogo a problemi. Vediamo quest'argomento al lavoro alla fine della proposizione III.18 (*EE* I, 120.22-121.16); tralascio la conclusione generale, in questo caso attestata:

ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.
κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.
εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ· ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῆς ΖΗ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Qualora una certa retta sia tangente a un cerchio, e dal centro alla tangenza sia congiunta una certa retta, la ‹retta› congiunta sarà perpendicolare a quella tangente.
In effetti, una certa retta ΔΕ sia tangente a un cerchio ΑΒΓ secondo il punto Γ, e sia preso il centro Ζ del cerchio ΑΒΓ, e da Ζ fino a Γ sia congiunta ΖΓ: dico che ΖΓ è perpendicolare a ΔΕ.

Se infatti no, sia condotta da Ζ perpendicolare a ΔΕ ‹una retta› ΖΗ. Poiché dunque l'angolo ΖΗΓ è retto, ΖΓΗ è quindi acuto; e sotto l'angolo maggiore si tende il lato maggiore: ΖΓ è quindi maggiore di ΖΗ; e ΖΓ è uguale a ΖΒ: ΖΒ è quindi maggiore di ΖΗ, la minore della maggiore; il che è impossibile. Non si dà quindi il caso che ΖΗ sia perpendicolare a ΔΕ. Del tutto similmente dimostreremo che neanche una certa altra eccetto ΖΓ: ΖΓ è quindi perpendicolare a ΔΕ.

La fallacie sono due, sovrapposte. In primo luogo, ZH è differente da ZΓ, ed è una retta qualunque condotta da Z su ΔE, a parte il vincolo che Γ non coincida con H: dimostrare che ZH non è perpendicolare a ΔE esclude automaticamente ogni caso possibile eccetto ZΓ, ed è ridondante e fallace esplicitare questo fatto per mezzo di una dimostrazione potenziale. In secondo luogo, la supposizione dell'assurdo (cioè l'antecedente ellittico εἰ γὰρ μή) nega che ZΓ sia perpendicolare. Giunti ad un'impossibilità è questa supposizione che risulta negata, non il sussistere di un'altra retta perpendicolare, che ne è solo una conseguenza. Il passaggio finale dovrebbe quindi essere formulato: οὐκ ἄρα ἡ ΖΓ οὐ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· κάθετος ἄρα «non si dà quindi il caso che ZΓ non sia perpendicolare a ΔE: quindi è perpendicolare», e la dimostrazione terminare qui. L'unica deduzione corretta è quella di XI.19, dove la dimostrazione potenziale non compare, e il passaggio finale della dimostrazione per assurdo è il seguente (*EE* IV, 27.23-28.2):

οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.	Non si darà quindi il caso che dal punto Δ sia eretta ‹una retta› ad ‹angoli› retti con il piano soggiacente eccetto la sezione comune ΔB dei piani AB, BΓ.

È lecito sospettare che anche XI.3 non contenesse originariamente la dimostrazione potenziale: questa manca, così come il richiamo a I.nc.9, da tutta la tradizione indiretta. Per le altre 7 proposizioni non abbiamo appigli testuali: **AG** si conformano al testo greco, anche nel caso corretto di XI.19. Interessante è la dimostrazione alternativa a III.9, qualificata come tale e inserita dopo quella "principale" in tutta la tradizione greca e nella traduzione greco-latina. Si tratta di una variante tarda che è entrata per contaminazione nel testo greco attuale. In effetti, una parte minoritaria, tra cui **A**, della tradizione indiretta ha solo la dimostrazione principale, mentre quasi tutti i manoscritti arabi e di consguenza **G** le hanno entrambe. Thābit, come attestano alcuni manoscritti arabi e **G**, dichiara di aver trovato la dimostrazione alternativa collazionando altri manoscritti greci, ma non è chiaro se quella fosse lì l'unica dimostrazione. Sia come sia, non abbiamo ragione di supporre che la fallacia legata a «eccetto» sia dovuta a una rielaborazione maldestra. Tra gli altri geometri greci, Archimede non ne fa mai uso, presso Apollonio la troviamo in *Con*. II.7, 28-29, 35, III.47 (nelle ultime due la dimostrazione potenziale è omessa ma l'uso di «eccetto» è comunque scorretto), presso Pappo in *Coll*. VII.143; Teodosio in *Sph*. I.2 e 5 (analoghi per la sfera dei teoremi in *El*. III) e II.16, Autolico in *De sphaera mota* 2-3, 12. Evidentemente la deduzione era ritenuta impeccabile.

Possiamo cercare di razionalizzare il tutto osservando che le dimostrazioni per assurdo che danno origine alla clausola in «eccetto» vertono sull'unicità di un oggetto geometrico, per altri versi rappresentante generico di una classe di enti ben definita[173]: una retta in quanto parallela a un'altra in I.39 e 40, una retta in quanto in linea retta con un'altra in I.14, rette in quanto perpendicolari opportune in III.18 e XI.19, un punto in quanto centro di un cerchio in III.1 e 19 e III.9 *aliter*, la sezione comune di due piani in quanto linea retta in XI.3. Sono gli unici teoremi negli *Elementi* ad avere questa caratteristica, che ritroviamo anche negli altri esempi dal *corpus* antico citati sopra. Una congetura sensata è che il formato fallace in «eccetto» sia stato formato per analogia con le dimostrazioni per assurdo «canoniche» basate su una tricotomia: in esse due dei casi sono esclusi, e a volte il secondo lo è tramite una dimostrazione potenziale, una volta che essa risulterebbe identica a quella per il primo caso (si veda ad esempio V.18). In dimostrazioni come quella di III.18

[173] Analoghe dimostrazioni di unicità come quelle in III.7, 8, 16, IX.13, 36 e X.42-47 e 79-84 sono condotte, correttamente, in altro modo, in quanto pongono direttamente come risultato da dimostrare il fatto che nessun altro ente geometrico oltre quello specificato verifichi la condizione richiesta.

occorrerebbe procedere a esaminare (potenzialmente) un'infinità di casi. L'impraticabilità di esprimere la condizione immediatamente conseguente alla supposizione dell'assurdo in forma di disgiunzione infinita comporta che nel corso della dimostrazione venga analizzato un caso soltanto, rappresentativo di quelli da eliminare. L'esigenza di ricordare che la dimostrazione rientra nel formato canonico, anche se come fattispecie limite, viene segnalata rinforzando la dimostrazione potenziale, introdotta dalla stessa espressione che per i casi finiti, con la chiosa in «eccetto». Più in generale, come abbiamo visto nella sez. 1.3, l'unicità di un oggetto matematico non era tematizzata in quanto tale nella matematica greca, ed i problemi che derivano da questa pratica erano affrontati volta per volta con una varietà di tecniche che risultano ai nostri occhi sicuramente disomogenee e non sempre le più efficaci – fino a rasentare l'errore, come nel caso appena studiato.

Elenco di séguito altri marcatori metamatematici.

a) Il modo ottativo è impiegato come residuo marginalissimo (spicca la sua frequenza nella redazione **B** dell'*Ottica* euclidea), in particolare in una clausola canonica, che segnala una divisione in casi all'interno di problemi, la cui prima occorrenza negli *Elementi* è in II.14 (*EE* I, 91.11-18):

τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.	Costruire un quadrato uguale ad una ‹figura› rettilinea data.
ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.	Sia una ‹figura› rettilinea data A: si deve pertanto costruire un quadrato uguale alla ‹figura› rettilinea A.
συνεστάτω γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ.	In effetti, sia costruito un parallelogrammo rettangolo ΒΔ uguale alla ‹figura› rettilinea A; se dunque ΒΕ è uguale a ΕΔ, si troverebbe ad essere quanto prescritto. Risulta infatti costruito un quadrato ΒΔ uguale alla ‹figura› rettilinea A.

Le altre occorrenze di un periodo ipotetico siffatto si trovano in IV.1, VI.28, VII.31 (*bis*), 32, XI.11[174]. Le due proposizioni del libro VII non sono problemi, e presentano particolarità stilistiche marcate, tra le quali una formulazione estremamente peculiare per una procedura ricorsiva caratterizzata dalla presenza del termine ἐπίσκεψις «investigazione» e che ritroviamo identica, molto significativamente, in dimostrazioni per esaustione nella redazione **b** del libro XII (si veda più oltre)[175]. Leggiamo il testo di VII.31 (*EE* II, 138.12-17); l'argomento è per assurdo[176]:

καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει ‹τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει›. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων	E se Γ è primo, si troverebbe ad essere quanto prescritto. Se invece è composto, lo misurerà un certo numero. Avvenuta pertanto tale investigazione sarà preso un certo numero primo che misurerà ‹quello prima di se stesso, che misurerà anche A›. Se infatti non sarà preso, illimitati numeri, dei quali uno è minore dell'altro, misureranno il numero A; il che è impossibile in numeri.

[174] Una sola occorrenza in frase analoga in Archimede, *Sph. cyl.* I.5. Troviamo però riferimento al problema assegnato come ἐπίταγμα «prescrizione» in *Sph. cyl.* I.2 (*bis*), 3, 4 e in *Con. sph.*, proemio.

[175] In XII.9 (*bis*), 10-11, *EE* IV, 221.17-18, 222.10-11, 223.16, 227.11-12. A queste si aggiungano le occorrenze del verbo ἐπισκέπτεσθαι «investigare» in enunciato ed esposizione di IX.18-19.

[176] Inserisco nel testo l'integrazione dei mss. teonini, che è necessaria per la compiutezza dell'argomento. La bontà della variante è confermata dalla tradizione indiretta: si vedano Busard 1983, 217.509-510 e Busard 1984, c. 182.17-20. Cfr. anche le perplessità di Heiberg riguardo al testo di **P** in *EE* II, 138.15 *in app*.

ἐστίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς.

I manoscritti teonini, più sensibili alla distinzione tra problema e teorema, modificano in VII.31-32 l'apodosi del periodo ipotetico in δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον «quanto cercato sarebbe chiaro». A questa formula particolare vanno aggiunte le clausole isolate εἰ τύχοι «se càpita» in X.72, sicuramente spuria (si veda la sez. 2.1.2), e le occorrenze di εἴη in X.def.4 e XI.34, quest'ultima all'interno di una spiegazione posposta sicuramente interpolata[177].

b) Forme verbali in prima persona sono estremamente rare, anche se non sospette *a priori* di autenticità[178]. Uniche eccezioni cospicue le formule stereotipate λέγω ὅτι «dico che», che introduce la determinazione, e ὁμοίως δὴ δείξομεν «del tutto similmente dimostreremo» che introduce una dimostrazione potenziale (per la prima si veda la sez. 1.0).

Limitandomi al testo principale degli *Elementi* e dei *Data*, elenco le occorrenze di prima persona plurale, quale che sia il verbo, ripartendole per tipo di terminazione (con asterisco * le occorrenze di δείξομεν «dimostreremo» al di fuori di espressioni del tipo ὁμοίως δὴ/(δὲ) δείξομεν):

–ωμεθα	III.25
–αμεθα	*Data* def.1-2[179]
–ουμεθα	X.62
–αμεν	X.28/29II, 32/33, 44
–υμεν	XII.10 (*bis*)
–ωμεν	IV.15por, 16 (*bis*), VI.20porII, IX.34 (*bis*), X.28/29II, XI.1, 23/24, 26 (*bis*), XII.2 (*ter*), 3, 4, 10 (*sexties*), 11 (*bis*), 16, 17 (*ter*), XIII.11, 13, 15, 16 (*quater*), 17
–ομεν	IV.15por (*bis*), 16por (*bis*), V.8, VI.22/23*, IX.34 (*bis*), X.10, 41/42*, XI.23/24*, XII.2, 10 (*bis*), 11, 12*, 12, 16, XIII.18*

A prima vista, le forme in prima persona servono da marcatore stilistico per i libri stereometrici, anche perché molte delle altre si trovano in materiale aggiuntivo e vanno quindi ritenute quasi sicuramente spurie. In realtà tale fenomeno è generalizzato: contenute in porzioni di testo da ritenersi inautentiche sono anche le occorrenze in III.25, V.8 (casi addizionali molto probabilmente spuri), X.44[180], XI.1, 26 (*bis*), XII.2 (*ter*), 3, 10 (*sexties*), 11 (spiegazioni posposte introdotte da ἐπειδήπερ), XII.4 (aggiunta finale che offre una generalizzazione non richiesta nell'enunciato)[181]. A queste si aggiungano tutte le osservazioni metamatematiche interpolate nel corpo di una proposizione, come ad esempio ἐμάθομεν γάρ «‹lo› abbiamo infatti imparato» in X.10, ὁμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα «del tutto similmente a prima argomenteremo» in X.62, per quanto la libertà stilistica che a volte si concede l'estensore del libro X possa consigliare prudenza, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν «come dimostravamo in precedenza» in XII.10 (*EE* III, 18.6, 108.22, IV, 106.7 e 107.23 rispettivamente). Ad uno stesso interpolatore attribuirei le sette occorrenze nel libro XIII di ἐπιζεύξωμεν «congiungiamo», tutte nell'antecedente di condizionali: per due di esse (quella in XIII.11 e la seconda in XIII.16) la forma

[177] *EE* III, 124.10, 2.3, IV, 60.9 rispettivamente. Occorrenze di ottativo in Apollonio in *Con*. I.7, II.46 (qui stesso periodo ipotetico che in *El*. II.14) e III.4, in *AGE* I, 26.25, 266.18, 324.23. Il modo è più frequente in Archimede, ad esempio in *Sph. cyl*. I.32, *AOO* I, 118.2, I.34, 126.10, *Con. sph*. 32, 444.16, *Aequil*. II.4-5, *AOO* II, 176.11 e 180.2, *Ar*. 232.18, 234.20, 244.5-6, 256.31, *Quadr*. 5, 270.9, 6, 272.24, 14, 286.21 e 288.18, 15, 292.19, 16, 298.9, *Fluit*. II.2, 350.3.

[178] Per la loro alta frequenza in Diofanto si veda Acerbi 2011b, introduzione, sez. 7.

[179] Uniche forme in prima persona nei *Data*.

[180] Osservazione iniziale del tutto inutile, contenente in più un richiamo all'evidenza e il quasi-*hapax* καθ' ὑπόθεσιν «per supposizione» (l'altro si trova in X.47), da parte dello stesso redattore del lemma X.41/42 e dell'inizio di X.42.

[181] *EE* I, 129.2, II, 15.22 (περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν «concludiamo la dimostrazione»), III, 71.7, IV, 4.20, 44.9-10, 81.4 e 14-15, 88.1, 105.11, 106.12-14, 107.24, 108.1, 110.11, 91.17-18 rispettivamente.

verbale di secondo ordine συνάγεται «si conclude» è presente nel conseguente dello stesso condizionale[182], due sono all'interno di spiegazioni posposte introdotte da ἐπειδήπερ (XIII.13 e la prima in XIII.16), il passo costruttivo di una quinta è giustificato da una spiegazione posposta del tipo διὰ τὴν ὁμοιότητα «per la similitudine di» (la terza in XIII.16); le restanti due (XIII.15 e la quarta in XIII.16) vanno condannate ugualmente, in quanto hanno la stessa forma di quelle che contengono altri marcatori di inautenticità ed esplicitano gli stessi tipi di passaggi[183].

Restano casi dubbi ma non sicuramente inautentici, come l'occorrenza in IV.16 (*EE* I, 178.17-18), costruzione dalla redazione particolarmente libera, quelle in XII.16-17[184] e XIII.17-18 (*EE* IV, 178.7 e 184.7), e le quattro in IX.34, probabilmente la proposizione "meno istanziata" degli *Elementi*, il cui testo molto peculiare merita leggere per intero (*EE* II, 222.2-17):

ἐὰν ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός.
ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσός.
ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν δίχα καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὔ, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὥστε ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Qualora un numero non sia ottenuto per raddoppiamento a partire da una diade né abbia la metà dispari, è sia pari volte pari che pari volte dispari.
In effetti, un numero A non sia ottenuto per raddoppiamento a partire da una diade né abbia la metà dispari: dico che A è sia pari volte pari che pari volte dispari.
Che dunque A è pari volte pari, è manifesto – non ha infatti la metà dispari –. Dico ora che è anche pari volte dispari. In effetti, qualora sechiamo A a metà e la metà di questa a metà e facciamo questo in successione, perverremo a un certo numero dispari, che misurerà A secondo un numero pari. Se infatti no, perverremo a una diade, e A sarà ottenuto per raddoppiamento a partire da una diade; il che non è stato supposto. Così che A è pari volte dispari. E fu anche dimostrato pari volte pari. A è quindi sia pari volte pari che pari volte dispari: il che si doveva dimostrare.

Questo testo permette di introdurre le occorrenze più interessanti. Si tratta della formulazione canonica non istanziata del passaggio iterativo nella procedura per esaustione, contenente la forma verbale καταλείψομεν «faremo restare fuori» e caratterizzata da forme participiali personali peculiari. Leggiamo la prima occorrenza in XII.10 (*EE* IV, 106.21-27):

τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν

Secando pertanto gli archi restati indietro a metà e congiungendo rette e erigendo su ciascuno dei triangoli prismi isoipsi al cilindro e facendo questo in successione faremo restare fuori certi segmenti del

[182] La forma ricorre ancora in V.25, in una parte della dimostrazione che è sicuramente stata rielaborata, e in X.28/29II.
[183] Le sette sono nell'ordine a *EE* IV, 155.8, 171.8, 162.3, 170.23, 171.24, 167.21, 172.4.
[184] La prima occorrenza in XII.17, all'interno di una spiegazione posposta introdotta da ἐπειδήπερ e contenente lo *hapax* ἐπινοήσωμεν, è sicuramente spuria (*EE* IV, 127.8). La seconda nella stessa proposizione (forma νοήσωμεν) si trova all'interno di un passaggio riscritto, che nella redazione **b** (= XII.16) ha la forma personale ἕξομεν (*EE* IV, 130.7 e 236.10), e dove la rielaborazione ha diminuito il numero di forme personali da 3 ad 2.

τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.	cilindro, che saranno minori dell'eccesso con cui il cilindro eccede il triplo del cono.

La formula si ritrova, adattata alle esigenze della proposizione ospite, ancora in XII.2, 10-12, 16[185]. Solo l'ultima occorrenza è confermata redazione **b** del testo greco (*EE* IV, 232.34-233.2: forma verbale καταλήψομεν «prenderemo»), che per converso ha la clausola in XII.5 (*EE* IV, 217.12-15: forma verbale λήψομεν «prenderemo»), laddove la redazione principale ha una formula abbreviata volta al passivo (*EE* IV, 93.9-13: forma verbale λειφθώσι «siano restate»). A sostituire la lunga formula non istanziata, che dobbiamo ritenere risultato di un intervento normalizzatore, troviamo nella redazione **b** il semplice costrutto al genitivo assoluto τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως «risultando pertanto in successione tale investigazione» che abbiamo visto intervenire anche in VII.31 letta sopra[186].

I participi congiunti con il soggetto operante sono caratteristici della formula appena letta: 21 delle 26 occorrenze nel testo principale degli *Elementi* si rintracciano nelle 6 ricorrenze elencate sopra (i quattro participi sono gli stessi, nello stesso ordine, in XII.10 (*bis*), 11, 12). In conformità con quanto appena rilevato, la redazione **b** mantiene solo le due occorrenze in XII.16, e ne aggiunge una in XII.5. Delle altre, quelle in IV.16 e V.8 ricorrono negli argomenti menzionati sopra in cui già sono impiegate forme verbali in prima persona. A queste aggiungiamo le occorrenze spurie in IX.13 (*EE* II, 203.10; δεικνύντες πάλιν «dimostrando di nuovo» all'interno di una dimostrazione potenziale canonicamente introdotta da ὁμοίως δή δείξομεν) e in un passaggio di XII.12, dove due participi separano δείξομεν dal canonicamente congiunto ὁμοίως δή (*EE* IV, 117.19-22, e si confronti con **b** XII.10, ivi, 225.13). Com'è da attendersi, nessun participio congiunto con il soggetto operante è presente nei *Data*.

1.5.3. *Argomenti posposti*

Le spiegazioni posposte, di lunghezza variabile dal sintagma breve alla proposizione completa, si caratterizzano per quattro particolarità:

1) Interrompono l'ordine deduttivo "naturale", che dobbiamo presumere essere sempre quello "in avanti".

2) Sono segnalate dalla presenza di particelle causali spesso dotate di rafforzativi (molto rara è in effetti la forma semplice ἐπεί «poiché», per cui si veda la sez. 2.4): ἐπείπερ «poiché… proprio», ἐπειδή «poiché appunto», ἐπειδήπερ «poiché appunto… proprio», da clausole formulari come διὰ τό «per il fatto di» con infinito, oppure, nella forma più comune (poco più di 200 volte), da un semplice γάρ «infatti» esplicativo.

3) Sono spesso costituite da citazioni non istanziate di enunciati di teoremi, e quindi introducono un surplus di generalità, dovuto alla mancata istanziazione, che è fuori luogo all'interno di una dimostrazione.

4) Le spiegazioni offerte sono *molto* spesso banali e utili a soccorrere solo un lettore particolarmente distratto o poco dotato.

[185] *EE* IV, 81.21-82.1, 108.22-109.1, 111.1-5, 115.6-12, 126.4-6 rispettivamente.

[186] In **b** XII.2, 9 (*bis*), 10, 11, in *EE* IV, 213.1, 221.17-18, 222.10-11, 223.16, 227.11-12. Nella prima il sostantivo è διαίρεσις «divisione» e manca l'avverbio.

Tutte queste potenzialità banalizzatrici sono attualizzate nell'esempio seguente di doppia spiegazione posposta, tratto da IV.15 (*EE* I, 175.17-21). Ci viene spiegato perché gli angoli di un triangolo equilatero sono uguali (un teorema in effetti assente dagli *Elementi*):

ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.	Il triangolo ΕΗΔ è quindi equilatero: anche i suoi tre angoli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sono quindi uguali tra loro – poiché appunto gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono proprio uguali tra loro; e i tre angoli del triangolo sono uguali a due retti.

A volte all'interno di una spiegazione posposta se ne trova un'altra, di specie differente, come in XII.8 (*EE* IV, 100.26-101.5),

ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, <u>ἐπειδήπερ</u> ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ <u>διὰ τὸ</u> καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον <u>εἶναι</u> τῆς πυραμίδος.	E come il solido ΒΗΜΛ rispetto al solido ΕΘΠΟ, così la piramide ΑΒΓΗ rispetto alla piramide ΔΕΖΘ – <u>poiché appunto</u> la piramide è <u>proprio</u> sesta parte del solido <u>per il fatto di essere</u> anche il prisma, che è metà del solido parallelepipedo, triplo della piramide.

oppure un'intera deduzione dal condizionale annidato, con un fastidioso effetto di accumulo dei connettori, una sintassi alquanto aberrante e la ripetizione finale del passaggio da spiegare, come in XII.2 (*EE* IV, 81.1-8):

τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, <u>ἐπειδήπερ</u> <u>ἐὰν</u> διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· <u>ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου</u>.	Il quadrato che risulta inscritto è pertanto maggiore che la metà del cerchio ΕΖΗΘ, – <u>poiché appunto</u>, <u>qualora</u> per i punti Ε, Ζ, Η, Θ conduciamo [rette] tangenti al cerchio, <u>proprio</u> metà del quadrato circoscritto intorno al cerchio è il quadrato ΕΖΗΘ, e minore del quadrato circoscritto è il cerchio: <u>così che il quadrato che risulta inscritto ΕΖΗΘ è maggiore della metà del cerchio ΕΖΗΘ</u>.

Queste caratteristiche fanno sospettare che un *corpus* originale probabilmente alquanto ristretto di argomenti posposti si sia arricchito con l'instancabile lavoro di chiosa che accompagnò l'uso dei testi matematici. È anzi probabile che molte spiegazioni posposte che troviamo nel testo principale vi siano finite, per un fenomeno ben noto, semplicemente per un mal riposto scrupolo compilativo di un qualche copista, che riteneva opportuno integrare nel testo gli scoli che leggeva nel margine. Un confronto con la tradizione indiretta conferma il sospetto, e suggerisce ad esempio che tutte le esplicative introdotte da forme intensive di «poiché» siano delle interpolazioni: delle 38 occorrenze di ἐπειδήπερ «poiché appunto… proprio» nel testo principale degli *Elementi* non ce n'è una che sia attestata nelle traduzioni arabe: ne troviamo in III.16por, IV.3, 15, V.8 (*bis*), 12, VI.28, X.9por, 23por, 28/29I, 73, XI.1, 8, 26, 33, XII.2 (*bis*), 3, 7por, 8, 10 (*ter*), 11-12, 17 (*quater*), 18, XIII.8, 13 (*ter*), 16, 17 (*bis*), 18, due occorrenze ulteriori si rintracciano nelle dimostrazioni alternative, ed altre furono

relegate da Heiberg in apparato; se ne aggiunga una in *Data* 49, e le due occorrenze di ἐπείπερ «poiché…proprio» in VI.19por e XI.33por.

1.5.4. *Citazioni di enunciati, istanziate e non*

Abbiamo visto nella sez. 1.0.5 che le citazioni, istanziate e non, di enunciati precedenti innervano tutta la struttura deduttiva di un trattato come gli *Elementi*. Abbiamo in particolare mostrato che tutte le costruzioni si rifanno a formulazioni prototipiche che ricalcano l'enunciato dei problemi o dei postulati in cui la costruzione in oggetto è proposta per la prima volta. Riporto in questa sezione alcuni esempi di citazioni di enunciati di teoremi, ordinati secondo il grado di aderenza del richiamo al testo originario e la quantità di lettere introdotte. Inizio da una citazione letterale non istanziata palesemente spuria, il cui intento didattico è reso chiaro dal rimando libresco incipitario: la troviamo in XII.2 (*EE* IV, 82.1-6) – teorema citato X.1:

ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.	Fu infatti dimostrato nel primo teorema del decimo libro che, fissate due grandezze disuguali, qualora dalla maggiore sia sottratta ‹una grandezza› maggiore che la metà, e dal resto una maggiore che la metà, e questo avvenga in successione, sarà restata una certa grandezza che sarà minore della minore grandezza fissata.

La prima citazione dell'enunciato di I.4 in I.5 mantiene quasi tutte le unità linguistiche dell'originale, con le varianti dell'omessa menzione dei lati e della formulazione più compatta del richiamo all'angolo in comune. È in particolare interessante il primissimo asserto, un paracondizionale ibrido con conseguente introdotto da δή: la particella sottolinea il carattere inferenziale del passaggio, d'altronde una constatazione del tutto ovvia, che serve a formulare le uguaglianze a disposizione in maniera conforme alla formulazione dell'enunciato citato (cfr. sez. 2.4). Si notino anche il lungo tratto di testo privo di lettere e la doppia occorrenze della clausola ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, su cui ritorneremo nella sez. 2.10 (*EE* I, 12.19-13.2):

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ.	Poiché dunque ΑΖ è uguale a ΑΗ e ΑΒ a ΑΓ, due ‹rette› ΖΑ, ΑΓ sono pertanto rispettivamente uguali a due ΗΑ, ΑΒ; e comprendono un angolo comune ΖΑΗ: ΖΓ come base è quindi uguale a ΗΒ come base, e il triangolo ΑΖΓ sarà uguale al triangolo ΑΗΒ, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli, ΑΓΖ a ΑΒΗ, e ΑΖΓ a ΑΗΒ.

Di fattura analoga la prima citazione di I.8 in I.9. Sebbene questo richiamo possa apparire meno letterale del precedente, ciò è dovuto soltanto alle formulazioni differenti dei due enunciati primari; in realtà sono stati sottoposti alle stesse trasformazioni linguistiche – si noti la persistenza della clausola ἑκατέρα ἑκατέρᾳ (*EE* I, 17.14-19):

ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

In effetti, poiché ΑΔ è uguale a ΑΕ, e ΑΖ comune, due ‹rette› ΔΑ, ΑΖ sono pertanto rispettivamente uguali a due ΕΑ, ΑΖ. E ΔΖ come base è uguale a ΕΖ come base: un angolo ΔΑΖ è quindi uguale a un angolo ΕΑΖ.

Una delle citazioni più compatte dell'enunciato di I.4 si trova in XI.4 (*EE* IV, 7.10-15):

καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση [ἐστίν].

E poiché due ‹rette› ΑΕ, ΕΔ sono uguali a due ΓΕ, ΕΒ e comprendono angoli uguali, ΑΔ come base è quindi uguale a ΓΒ come base, e il triangolo ΑΕΔ sarà uguale al triangolo ΓΕΒ: così che anche un angolo ΔΑΕ [è] uguale a un angolo ΕΒΓ.

Una bella citazione letterale ma completamente istanziata è quella di V.2 in V.3 (*EE* II, 7.3-9):

ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Poiché dunque primo ΕΚ di secondo Β è equimultiplo e terzo ΗΛ di quarto Δ, ed è anche quinto ΚΖ di secondo Β equimultiplo e sesto ΛΘ di quarto Δ, anche primo e quinto composto ΕΖ di secondo Β è quindi equimultiplo e terzo e sesto ΗΘ di quarto Δ.

Data la brevità degli enunciati originari, tutte le operazioni di manipolazioni di rapporti vanno considerate citazioni. Il grado di letteralità può variare da quello pienamente dispiegato che leggiamo nella prima citazione di V.17 in V.18 (*EE* II, 28.3-6):

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

E poiché è come ΑΒ rispetto a ΒΕ, così ΓΔ rispetto a ΔΗ, sono grandezze composte in proporzione: così che anche divise saranno in proporzione.

al formato canonico per questo genere di richiami, che mantiene soltanto il *dativum judicantis* διελόντι «dividendo» a segnalare il tipo di operazione effettuata, come in X.14 (*EE* III, 23.16-20):

ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

È quindi come quelli su Ε, Β, rispetto a quello su Β, così quelli su Δ, Ζ rispetto a quello su Δ: dividendo quindi è come quello su Ε rispetto a quello su Β, così quello su Ζ rispetto a quello su Δ.

Propongo infine il caso interessante di un enunciato in cui l'aoristo passivo nell'antecedente del condizionale originario è volto al perfetto nel paracondizionale del richiamo. Leggiamo II.5 citata in III.35:

ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ,

Poiché dunque una retta ΑΓ risulta secata in ‹segmenti› uguali secondo Η, in disuguali secondo Ε,

ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ.	il rettangolo compreso da ΑΕ, ΕΓ più il quadrato su ΕΗ è quindi uguale a quello su ΗΓ.

Poche righe dopo, troviamo uno degli innumerevoli richiami a I.47, dalla forma ipercompressa (*EE* I, 145.21-25 e 146.2-3):

ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ.	Ma uguale a quelli su ΕΗ, ΗΖ è quello su ΖΕ.

1.5.5. *Assunzioni e coassunzioni*

Un argomento dimostrativo completo inizia di norma con un paracondizionale e termina con una conclusione, segnalata dalla presenza di ἄρα «quindi». Si tratta di una serie più o meno lunga di assunzioni, coassunzioni e conclusioni incatenate, di modo che una conclusione costituisce la premessa principale dell'inferenza successiva. Se escludiamo l'antecedente del paracondizionale iniziale, nuova materia deduttiva è quindi convogliata unicamente dalle coassunzioni. In matematica non ci sono in effetti argomenti che potremmo considerare «ad una premessa»: la conclusione è sempre tratta in virtù di un'assunzione primaria e di un risultato precedente che la affianca (si veda le sez. 1.5.1.1). Può accadere (e succede spesso) che il richiamo al risultato precedente sia omesso. Dove manchino riferimenti espliciti, istanziati o no, occorre dunque sempre sottintendere il riferimento al teorema utilizzato perché il passo deduttivo sia da considerarsi autorizzato. La conclusione di una inferenza entimematica di questo genere è introdotta di preferenza da ὥστε «così che», anche se non sono scarsi gli esempi di due ἄρα consecutivi (si veda la sez. 2.11).

La grande maggioranza delle coassunzioni è introdotta da un δέ coordinativo, ma non è la sola particella usata. Questo è uno dei ruoli specifici della congiunzione ἀλλά «ma»; che però viene impiegata in una stretta minoranza di casi. Forme peculiari di coassunzione sono anche le dimostrazioni analogiche o potenziali, oppure certe costruzioni minimali come quelle introdotte da ἀφῃρήσθω «sia sottratto» o da προσκείσθω «sia sommato», e accade non di rado che il richiamo interno ad un risultato già stabilito sia segnalato dalla presenza di ὑπόκειται «è stato supposto», ἐδείχθη «fu dimostrato» o altre forme analoghe. Per vedere una parte di queste tipologie all'opera ci rivolgiamo ancora a III.35 (*EE* I, 145.25-146.14) – le coassunzioni sono sottolineate:

τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ	Quello da ΑΕ, ΕΓ più quelli su ΕΗ, ΗΖ sono quindi uguali a quelli su ΓΗ, ΗΖ. Ma uguale a quelli su ΕΗ, ΗΖ è quello su ΖΕ, uguale a quelli su ΓΗ, ΗΖ è quello su ΖΓ: quello da ΑΕ, ΕΓ più quello su ΖΕ è quindi uguale a quello su ΖΓ. E ΖΓ è uguale a ΖΒ: quello da ΑΕ, ΕΓ più quello su ΕΖ è quindi uguale a quello su ΖΒ. Proprio per gli stessi ‹motivi› anche quello da ΔΕ, ΕΒ più quello su ΖΕ è uguale a quello su ΖΒ. E fu anche dimostrato quello da ΑΕ, ΕΓ più quello su ΖΕ uguale a quello su ΖΒ: quello da ΑΕ, ΕΓ più quello su ΖΕ è quindi uguale a quello da ΔΕ, ΕΒ più quello su ΖΕ. Sia sottratto quello su ΖΕ comune: il rettangolo compreso da ΑΕ, ΕΓ restante è quindi

τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. uguale al rettangolo compreso da ΔΕ, ΕΒ.

Si noti che il richiamo interno introdotto da ἐδείχθη si riferisce ad una conclusione raggiunta giusto due righe prima. Vediamo in maggiore dettaglio quale sia l'impiego di ἀλλά. Nel testo principale degli *Elementi* se ne contano 400 occorrenze, con la distribuzione seguente:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	*tot.*
# proposiz.	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
% # segni	7,6	3,3	6,9	3,4	4,9	7,6	5,7	5	5,1	26,1	9	8,3	6,9	100
ἀλλά	28	20	29	10	11	47	8	19	32	102	37	39	18	400

Dato che la particella non occorre in un solo contesto, si deve fare attenzione a considerare la sua presenza un marcatore stilistico, per quanto lo sia sicuramente in negativo per il libro VII e per quanto in buona parte dei libri la sua frequenza sia approssimativamente proporzionale al numero di segni e quindi alla densità deduttiva.

Il contesto di gran lunga predominante in cui ricorre ἀλλὰ è appunto quello dell'introduzione di coassunzioni; in una piccola parte dei casi la particella è rinforzata da μήν «a dire il vero» (35 occorrenze nel complesso degli *Elementi*, in I.4, VI.8, 20, VII.19 (*bis*), 24, 30, VIII.5, 19 (*bis*), IX.3, 12 (*quater*), 13 (*ter*), 15, 18 (*bis*), 19, 36, X.6, 41/42, XI.4, XII.6**, b**2 (*bis*), 10-11, XIII.4, 10, 17, XII.4*alt*, 2 nei *Data*), assumendo così la forma che sembra preferita nella tradizione dialettica stoica. Coassunzioni negative possono essere introdotte da οὐδὲ μήν «né a dire il vero» (in I.19, 25, III.16, V.10 (*bis*), XIII.18). Unica occorrenza di μήν non a rinforzare un'altra particella in X.51. In funzione del contesto, ἀλλὰ può essere accompagnato da καί con valore avverbiale (49 occorrenze nel complesso degli *Elementi*, 18 nei *Data*). Nella grande maggioranza dei casi, però, lo si trova direttamente seguito da un opportuno articolo, oppure nell'espressione ἀλλ' ὡς (71 occorrenze nel testo principale), quando introduca relazioni di proporzionalità. L'unica eccezione corposa a queste due ultime tipologie è costituita dall'espressione ἀλλ' εἰ δυνατόν «ma se possibile» (si veda la sez. 2.2.1 per dettagli); le altre eccezioni sono coassunzioni in cui la particella coordinativa è seguita da un verbo («essere» in XI.34 (*bis*), XII.15, XIII.7, παραλλάσσειν «discostarsi» in I.8, τέμνειν «secare» in IV.13, δύνασθαι «potere» nello spurio X.9por dove troviamo poco prima ἀλλ' ἁπλῶς «ma in assoluto») oppure da sintagmi sparsi quali συναμφότερ– in V.8, X.17-18, μείζονα καθ' ὑπόθεσιν «maggiore per supposizione» in X.44, 47. Unico sostantivo πυραμίς «piramide» in XII.3. Interessanti, infine, le due coassunzioni strettamente parallele in V.11 e 17, formulate ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε «ma se eccedeva» e contenenti quindi alcune tra le rare occorrenze di imperfetto (ad esempio, forme di imperfetto del verbo «essere» occorrono solo in I. 19 (*bis*), 25 (*bis*), III.37, V.17, VIII.2, XII.2 (*bis*), tutte ovviamente all'interno di coassunzioni, le ultime due introdotte da ἀλλά).

Anche il secondo ruolo di ἀλλά è in realtà coassuntivo in senso ampio: si tratta dell'espressione ἀλλὰ δή «ma ora», da cui sono introdotti i casi ulteriori in una dimostrazione dalla struttura complessa, vuoi che la necessità di più dimostrazioni sia indotta da un'enunciato composito, come in I.26, vuoi che una divisione in casi si sia resa necessaria dopo l'esposizione, allo scopo di tener conto di configurazioni geometriche differenti. Nel testo principale degli *Elementi* si registrano 42 occorrenze di ἀλλὰ δή (3 nei *Data*, in 10-11, 44), ripartite nel modo seguente tra le due tipologie appena menzionate (trascuro l'occorrenza in X.18/19; con asterisco le forme ἀλλὰ δὴ πάλιν):

enunciato complesso	I.26*, III.3, 14, VI.2-3, 7*, 14-17, 22, VIII.15, 17, IX.9-10, X.9 (*bis*), 11, 15-17, XI.37, XII.9, 15, XIII.7

configurazioni differenti	III.33 (*bis*), 36, IV.5 (*bis*), V.8, IX.18 (*bis*), 19* (*ter*), 20, X.71 (*ter*), 72, XII.15

Veniamo ora ad analizzare le coassunzioni in forma di rimandi interni. Per quanto riguarda quelle che contengono forme di ὑποκεῖσθαι «essere supposto», ripropongo qui il prospetto già visto nella sez. 1.2. Vi sono elencate le parti di una proposizione cui sono effettuati richiami di questo tipo, affermativi o negativi, all'interno di dimostrazioni dirette e indirette. Se una proposizione è divisa in casi o ha un enunciato multiplo, tutti i richiami alle esposizioni parziali sono rubricati nella voce «esposizione principale». L'esposizione locale è quella che recede una dimostrazione indiretta, ed introduce nuovi enti rispetto all'esposizione principale. Con asterisco sono segnalate le occorrenze all'interno di dimostrazioni dirette; la doppia barra // precede materiale aggiuntivo.

esposizione principale	I.26, 29, 48*, V.5*, 6*, 18, 19*, VI.3*, 5*, 6 (*bis*)*, 7 (*ter*), 22*, VII.2, 7*, 20, 33, IX.10 (*bis*), 14, 30, 34, X.9por, 9/10, 21*, 37*, 38*, 41/42, 47, XI.5, 16, 23 (*bis*), 34 (*bis*), 35*, XII.4/5*, XIII.2/3, 7*(*bis*) // X.13, 39
esposizione locale	IX.12, 13, 18, 20, 36, X.16 (*bis*)
costruzione	IV.10*, IX.20, X.33*, XI.23, 23* (*bis*), 26*, X.54*, 55*
supposizioni dell'assurdo (spurie)	X.42, XII.12 // X.28/29II (*bis*)

Nella pratica canonica il verbo ὑποκεῖσθαι «supporre» rimanda dunque senza eccezioni ad una assunzione fatta in esposizione o nel corso di una costruzione.

Gli asserti introdotti da forme di δεικνύναι «dimostrare» rinviano a risultati già stabiliti nel corso della stessa dimostrazione o, meno frequentemente, in proposizioni precedenti. La forma di gran lunga preferita è ἐδείχθη «fu dimostrato». Vediamo nei prospetti seguenti la distribuzione delle occorrenze, ripartite per forma verbale, particella o termine che accompagna la coassunzione, "raggio d'azione" del riferimento (interno se niente segue tra parentesi, altrimenti vi è indicata la proposizione cui è fatta allusione). Prima le forme meno frequenti:

	δέ (καί)	ἀλλά	πάλιν	altre clausole
δεικνύντες			IX.13	
ἐδείκνυμεν				XII.10 (XII.2)
ἐδείξαμεν				X.44 (X.41/42)
ἐδείχθησαν	I.13, 15, X.55, 67	I.21		

	ὅτι	impossibile	altre clausole
δέδεικται	VI.1, 33, IX.9 (8, *bis*, verbo posposto), 18 (16), 19 (17), X.9/10 (VIII.26), 18/19 (9por), XI.25, XII.13, **b** XII.3 (XI.39), 12	**b**XII.2, 5, 10-11	X.111, XIII.17 (XI.38), *Data* 5

Alcune clausole sono interpolazioni ovvie, quali ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν «come dimostravamo in precedenza» in XII.10 e ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν «come dimostrammo sopra» in X.44, oppure l'espressione participiale δεικνύντες πάλιν «dimostrando di nuovo» in IX.13. Nel secondo prospetto, notiamo la forma δέδεικται + participio in X.111, ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται «il che è stato dimostrato impossibile» in **b** XII.2, 5, 10-11, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου «questo è infatti stato dimostrato nel penultimo teorema dell'undicesimo libro» in XIII.17, ὡς δέδεικται «come è stato dimostrato» in *Data* 5.

Vediamo ora il prospetto relativo alla forma più frequente, cioè ἐδείχθη; con asterisco occorrenze di ἐδείχθη δὲ ὅτι «e fu dimostrato che»; la riga intitolata «assurdo» contiene espressioni del tipo di quelle appena rubricate come «impossibile»; «parac.» riporta occorrenze in paracondizionali:

δέ (καί)	I.1, 2, 5 (*bis*), 7, 19*, 25*, 30, 32-34, 46, II.4, 8 (*bis*), 10, III.4-6, 10, 12, 13* (*bis*), 35, IV.6-7, 11-12, 15, V.10* (*bis*), 19, 23, VI.3, 10, 18, 20por (*bis*), 32, VII.8, VIII.5, 9-10, 18, IX.8, 34, X.5-6, 28/29II*, 33, 53, XI.15, 17, 20, 23*-24, XII.2*, 5*, 10*-11*, 12* (*bis*), 17-18*, XIII.1, 2 (*bis*), 6, 7 (*bis*), 9-10, 14 (*bis*), 15-17, **b**XII.2*, 5*, 9*, 10 (*bis*), 10*, 11*, 17*, *Data* 42
ὅτι	III.16 (verbo posposto), X.28/29I
ἀλλά	I.21, III.15, 25, IV.15, VI.8, 24, 28, VII.10, VIII.19, XI.31, XII.3, XIII.3-4, 8-9, 13
altro	III.32, VI.7,19, VIII.19, IX.36, X.44, 91-92, 107, XI.4 (*bis*), 18, 20, 35, XII.2, 5, 7, 18, XIII.11
parac.	I.5, IV.12, V.19, VI.1, 4, 23-24, X.9por, 93 (*ter*), 94-95, 96 (*ter*), XI.4 (*bis*), XII.12, XIII.16, 18
assurdo	III.8, IV.4, 8, 13, X.84, XI.2, XII.2, 5, 11-12, 18

Ovviamente, le ultime due righe non registrano coassunzioni. La dizione «altro» corrisponde alle clausole seguenti: proposizione relativa in III.32, X.44, XI.20, introdotta da un semplice καί con verbo posposto in VI.7 (ἐδείχθη + participio), IX.36, XI.4 (*bis*), 18, 35, da un semplice δέ con verbo posposto in X.92, XII.7 (*bis*), XIII.11. Sono spurie le occorrenze in frasi di schietto taglio metamatematico in VI.19 (ἐπείπερ ἐδείχθη ὡς «poiché fu proprio dimostrato che»), VIII.19 (ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη «come fu dimostrato nel teorema prima di questo»), X.91 (ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη «come fu dimostrato in quelli in precedenza»), 107 (ὡς ἐδείχθη «come fu dimostrato»), XII.2 (ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου «fu infatti dimostrato nel primo teorema del decimo libro»), XII.5, 18 (ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη «come fu dimostrato in precedenza»). Non solo queste andranno sospettate, peraltro: data la pratica corrente di sottintendere il verbo «essere», un ἐδείχθη può sempre essere inserito senza mutare in niente la sintassi della frase, fatto che lo rende adatto ad interpolazioni puntuali. Forme del participio προδεδειγμένος «‹quanto› dimostrato prima» fungono da ovvio marcatore stilistico per il libro X (in X.55, 56, 59, 62, 63, 65; forma semplice δεδειγμένος in X.9, 58, προδέδεικται in XIII.17); altrettanto concentrate sono le occorrenze delle forme del participio προειρημένος «predetto», che si rintracciano in II.3 (*bis*), X.19, 20, 77, 82-83, 84 (*bis*), XI.36 (*ter*), XIII.16, 17 (*bis*), 18; in II.3 e XI.36 il participio è presente nell'enunciato e questo spiega anche le altre occorrenze. Il participio προκείμενος «proposto» è confinato ancora al libro X (39, 40, 41 (*bis*), 47, 76-78, 83 (*bis*), 110, più 3 occorrenze nelle dimostrazioni alternative), con l'esclusiva funzione metamatematica di scorciare le esposizioni, come vediamo sull'esempio di X.39 (*EE* III, 64.13-19):

ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων.	Qualora due rette incommensurabili in potenza che fanno il ‹dominio› composto dai quadrati su di esse esprimibile, quello ‹compreso› da esse mediale siano composte, la retta totale è irrazionale, e sia chiamata maggiore.
συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ <u>ποιοῦσαι τὰ προκείμενα</u>· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.	In effetti, siano composte due rette incommensurabili in potenza ΑΒ, ΒΓ <u>che fanno quanto proposto</u>: dico che ΑΓ è irrazionale.

Altre frasi metamatematiche contenenti verbi con prefisso προ– sono in X.4por (τὸ πόρισμα προχωρήσει «il porisma ha luogo») X.41/42 (δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον

«dimostreremo esponendo prima tale lemmino»), e le forme aberranti di chiusa della dimostrazione in X.53/54 (ἃ προέκειτο δεῖξαι «le quali cose era stato proposto dimostrare») e XI.23por (ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι «il che era stato proposto fare»). Interne al linguaggio oggetto sono invece le scarse occorrenze di forme del participio προτεθείς «prefissato», legate alla formulazione peculiare del teorema di illimitatezza della classe dei numeri primi IX.20 (*ter*) e, naturalmente, a contesti di teoria delle linee irrazionali in cui venga «prefissata» un'esprimibile, come in X.def.3 (*bis*), def.4, X.10 (*ter*).

Profezie su dimostrazioni da compiere fanno le altre forme di δεικνύναι, escludendo quelle che occorrono nelle clausole introduttive canoniche di dimostrazioni potenziali:

δείκνυται	X.def.3
δείξομεν	VI.22/23, 41/42, XI.23/24, XII.12, XIII.18
δειχθήσεται	I.16, 47, IV.12, 14, VI.20porI, X.32, 64, XIII.13
δειχθήσονται	X.44

Le frasi contenenti δειχθήσεται «sarà stato dimostrato» sono in buona parte clausole canoniche con un sintagma inserito immediatamente dopo ὁμοίως (δή) incipitario: genitivo assoluto in I.16 e 47, τῷ πρὸ τούτου «a quello prima di questo» in IV.14, πάλιν «di nuovo» in X.32, γάρ «infatti» in X.64. Restano le occorrenze aberranti in IV.12 (διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται: dimostrazione analogica, non potenziale!), VI.20porI (ὡσαύτως δὲ καὶ […]; l'avverbio ὡσαύτως «allo stesso modo» ricorre in dimostrazioni potenziali alquanto dubbie anche in V.8, 20porI, X.23por, XII.15; in V.15 (*bis*), 16, 23, VI.1 la sua presenza è invece indotta dall'enunciato di V.15, dove ha un significato matematico ben preciso), XIII.13 (ὡς ἑξῆς δειχθήσεται). In X.44 incontriamo l'unica occorrenza di dimostrazione analogica introdotta da κατὰ τὰ αὐτὰ δή «secondo gli stessi ‹motivi›».