



**HAL**  
open science

•  
Fabio Acerbi

► **To cite this version:**

| Fabio Acerbi. .. 2012. hal-00727063

**HAL Id: hal-00727063**

**<https://hal.science/hal-00727063>**

Preprint submitted on 4 Sep 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## 2. LA SINTASSI LOGICA



## 2.1. QUANTIFICAZIONE; GENERALITÀ IMPLICITA ED ESPLICITA

UN passo di Galeno, *Inst. log.* XII.5-8, è l'unico luogo<sup>1</sup> in cui un autore antico proponga una descrizione della pratica matematica in fatto di espressione della generalità (ma la sua osservazione finale in XII.8 non è pertinente):

5 ἐπεὶ δ' ἐν τῷ μᾶλλον τε καὶ ἥττον εἶναι ἢ καλῶς δύνανται, τὸ <δὲ> πρὸς τὰς γενικωτάτας αὐτῶν ἐπὶ μέρους δοκεῖ λέγεσθαι, διὰ τοῦτο κατὰ συμβεβηκὸς τότε φαίνονται τινες ἀποφάνσεις τε καὶ δεῖξεις εἶναι κατὰ μέρος· ὡς γὰρ <πρὸς> τὴν περὶ παντὸς τριγώνου δεῖξιν τε καὶ ἀ(πό)φα(νσιν) ὅτι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς τρεῖς γωνίας, ἐπὶ μέρους δόξειεν ἂν εἶναι πρότασις λέγουσα μὴ πᾶν τρίγωνον, ἀλλ' ἔνια τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχειν. 6 οὕτως μὲν οὖν ῥηθὲν οὕτω διωρισμένην οὐδ' ἐπιστημονικὴν ἔχει τὴν ἀπόφασίν τε καὶ γνῶσιν, ἐκείνως δὲ ἐπιστημονικὴν τε καὶ καθόλου "πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχει". 7 συνήθης δὲ τοῖς Ἕλλησι λέξις ἐστὶ καὶ ἡ <διὰ> τῆς τῶν ἀριθμῶν προτάξεως ἐνδεικνυμένη (τὸ καθόλου (καὶ ἡ) ἄν(ευ τούτων· ὡσαύτως γὰρ ἔστιν εἰπ)εῖν "π(ᾶν) ἰσοσκελὲς τρίγωνον <τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας> ἴσας ἀλλήλαις ἔχει" ὡς "τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχει". 8 καὶ μέντοι καὶ <κατὰ> τὸν ἐνικὸν ἀριθμὸν ἔθος ἐστὶ τοῖς Ἕλλησιν ἐρμηνεύειν τὰ οὕτω λεγόμενα, καὶ διαφέρει γε οὐδέν, εἰ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα λέγουσιν ἅπαντα τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχειν ἢ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον· <εἰς γὰρ τὸ> εἶδος ἀποβλέποντες <τὸ> ἅπασι τοῖς κατὰ μέρος ὑπάρχον ὡς περὶ ἐνὸς εἰκότως ποιοῦνται τὴν ἀπόφασιν· καὶ γὰρ ἔστιν ὡς εἶδος ἔν.

5 Poiché «la generalità» è in potenza sia nel più che nel meno, e per quelle più generiche tra queste sembra invece che ci si esprima riguardo al particolare, per questo certi enunciati dimostrativi appaiono talvolta, a causa di caratteri accidentali, essere particolari: in effetti, a confronto dell'enunciato dimostrativo concernente ogni triangolo, che abbia i tre angoli uguali a due retti, sembrerebbe essere particolare l'enunciato che dice non che "ogni triangolo" ma che "alcuni hanno gli angoli sulla base uguali tra loro". 6 Detto in questo modo, dunque, sia l'enunciato che la conoscenza non sono certo ben definiti né scientifici, mentre in quello "ogni triangolo isoscele ha gli angoli sulla base uguali tra loro" sono sia scientifici che generali. 7 È però usuale per i Greci sia l'espressione che indica la generalità tramite l'anteposizione della molteplicità, sia anche senza di essa: allo stesso modo è infatti possibile dire "ogni triangolo isoscele ha gli angoli sulla base uguali tra loro" come "i triangoli isosceli hanno gli angoli sulla base uguali tra loro". 8 E c'è di più: è consuetudine dei Greci esprimere ciò che è detto così anche al singolare, e non differisce proprio in niente che dicano «tutti quanti i triangoli isosceli hanno gli angoli sulla base uguali tra loro» oppure «il triangolo isoscele»: mirando in effetti alla forma come a ciò che vale per tutti i particolari, formulano giustamente l'enunciato come se valesse per uno solo: e infatti come forma è una.

Di fatto, la matematica greca impiega raramente la quantificazione; la generalità di un enunciato è segnalata dall'assenza di determinazioni che ne limitino la validità. Solo una trentina di teoremi degli *Elementi* contiene quantificazioni esplicite nell'enunciato; gli altri esprimono la generalità facendo riferimento a una delle seguenti tipologie: *i*) classi di oggetti prese come pluralità, *ii*) oggetti generici di una certa classe, *iii*) coppie o *n*-ple di tali oggetti. Vediamo un esempio per sorte preso dal I libro degli *Elementi*, nell'ordine I.16, 47, 6, 15 (*EE* I, 24.15-17, 63.4-7, 13.23-25 e 23.11-12):

παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς γωνία ἐκατέρας τῶν l'angolo all'esterno è maggiore di uno e dell'altro

<sup>1</sup> Ma si veda anche, in altro contesto, Aristotele, *Int.* 7, 17a35-17b16.

ἐντὸς καὶ ἀπεναντίου γωνιῶν μείζων ἐστίν.

degli angoli all'interno e opposti.

ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθῆν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθῆν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che comprendono l'angolo retto.

ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Qualora due angoli di un triangolo siano uguali tra loro, anche i lati che si tendono sotto gli angoli uguali saranno uguali tra loro.

ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφῆν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Qualora due rette si sechino tra loro, fanno gli angoli al vertice uguali tra loro.

Le qualificazioni non usate (e quindi non nominate) determinano esattamente il grado di generalità di un teorema (e quindi del suo enunciato). Per converso, ciò che viene espresso limita il campo di validità della prova: il modo migliore per esprimere la generalità è tacerne. Se questa è la pratica comune, specialmente in ambito geometrico, non è detto che non ammetta varianti o deroghe parziali. Espressioni esplicite di generalità si trovano, ed occorre analizzarle in dettaglio per comprenderne la natura e, specialmente, per capire se siano originali oppure frutto di rielaborazioni scolastico-erudite tardive. A questo scopo occorre un'ipotesi di lavoro. Nei linguaggi formalizzati attuali l'uso di simboli come i quantificatori è regolato in modo estremamente preciso, e assenza o presenza, e diversa posizione, di un quantificatore comportano variazioni decisive sul piano del significato matematico.

Qualcosa di analogo accade nei testi matematici greci: a volte incontriamo determinazioni di generalità collocate dove non dovrebbero, spesso ci troviamo di fronte ad un fenomeno di *sovradeterminazione* della generalità che, sebbene in sé non erroneo, suggerisce fortemente un processo di revisione di un nucleo originale meno esplicito. In generale dovremmo supporre, ma vedremo un'eccezione clamorosa nella sez. 2.1.3, che le determinazioni di generalità tendano ad accrescersi in numero piuttosto che a diminuire, in buon accordo con l'approccio ai testi matematici "classici" degli editori e commentatori tardo-antichi. D'altro canto, anche i revisori arabi da cui dipende tutta la tradizione indiretta soffrivano della stessa nevrosi, e ciò è particolarmente eclatante nel caso dei quantificatori. Occorrerà dunque, qui più che altrove in questo libro, incrociare la tradizione greca e quella indiretta, e supporre che, ove divergano, quella priva di determinazioni di generalità sia la più genuina. Fortunatamente, pare che la nevrosi si sia spesso concretizzata in interventi testuali complementari.

Per fissare una terminologia che useremo nel corso di tutta questa sezione, e per indicarne in compendio le sottosezioni, è conveniente elencare quali forme linguistiche vengano correntemente impiegate quando la generalità non sia implicita; darò loro il nome di genere di «determinativi di generalità»:

- 1) Quantificatori: forme di πᾶς o ἅπας «tutti», «ogni» e uso di εἶναι «essere» esplicitamente esistenziale;
- 2) Determinativi di arbitrarietà: forme del verbo τυγχάνειν «capitare»;
- 3) Determinativi di indefinitzza: forme dell'aggettivo τις «un certo»;
- 4) Qualificativi generalizzanti: forme di ὅποιοσούν «quale si voglia», ὅποσοιδηποτοῦν e ὅσοιδηποτοῦν (solo plurale) «quanti mai si voglia», ὅποσοιοῦν (solo plurale) «quanti si voglia». Affini a queste sono le menzioni esplicite di σχήματα «figure» o εἶδη «forme» (qualificazione di generalità sul numero dei lati).
- 5) Articoli determinativi, apparentemente miranti a limitare la generalità.

La sottosezione finale tratterà dell'uso di condizionali indefiniti nella dialettica stoica.

2.1.1. *Quantificatori*

Ecco l'elenco libro per libro delle proposizioni degli *Elementi* enunciate in maniera esplicitamente generale<sup>2</sup>; un asterisco identifica quelli in forma condizionale<sup>3</sup>:

I	16-20, (22), 32, 43
III	16
V	(1*, 12*)
VI	24, 27
VII	4, 29, 31-32
IX	8*, 9*, 10*, 20, (35*)
XI	2, 18*, 21
XII	3, (4*), 7, 10, <b>b</b> 3, 6, 9

Le proposizioni tra parentesi contengono forme di  $\pi\acute{\alpha}\varsigma$  o  $\acute{\alpha}\pi\alpha\varsigma$  non connesse con la generalità dell'enunciato. A queste vanno aggiunte alcune definizioni e postulati: I.def.15, I.post.1.3.4, II.def.1-2, VI.def.4, XI.def.3.11.

Esaminiamo prima le occorrenze nei princìpi; offrono maggiori motivi d'interesse, sono un buon numero e possiamo vederne in parallelo la struttura (*EE* I, 2.9-13, 4.14-15, 5.1-3, 67.2-7; II, 39.12-13, IV, 1.4-6, 2.9-14):

I.15	κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων <u>πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι</u> [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.	Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea [che è chiamata circonferenza], <u>tutte le rette che incidono</u> sulla quale, <condotte> [alla circonferenza del cerchio] da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura, sono uguali tra loro.
post. 1	ἤτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ <u>πᾶν σημείον</u> εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	Sia richiesto di condurre una linea retta <u>da ogni punto a ogni punto</u> .
post. 3	καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.	E di tracciare un cerchio <u>con ogni centro e intervallo</u> .
post. 4	καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.	E che <u>tutti gli angoli retti</u> siano uguali tra loro.
II.1	<u>πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον</u> περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.	<u>Ogni parallelogrammo rettangolo</u> è detto essere compreso delle due rette che comprendono l'angolo retto.
II.2	<u>παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου</u> τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ	E <u>di ogni dominio parallelogrammico</u> , uno solo quale si voglia dei parallelogrammi intorno alla

<sup>2</sup> Archimede ne fa un uso maggiore: nel *corpus* dei suoi scritti sono enunciati 98 teoremi in forma non condizionale, 36 dei quali quantificati: si tratta di *Sph. cyl.* I.13-15, 18, 33-34, 42, 44, II.2, *Circ.* 1 e 3, *Con. sph.* 4-5, 18, 21, 25, 27, 29, 31, *Aeq.* I.9-10, 13-15, II.4, 8, 10, *Quadr.* 17 e 24, *Fluit.* I.2, *Meth.* 2, 4, 6-8, 10. Si ricordi anche che, in *Sph. cyl.* I e II, tutti i teoremi enunciati nelle epistole prefatorie sono quantificati.

<sup>3</sup> Le 4 occorrenze di  $\acute{\alpha}\mu\pi\alpha\varsigma$  «totale» in IX.36 non sono legate alla generalità.

	<p>παραλληλογράμμων ἔν ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.</p>	<p>sua diagonale insieme con i due completamenti sia chiamato gnomone.</p>
VI.4	<p>ὑψος ἐστὶ <u>παντὸς σχήματος</u> ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.</p>	<p>Altezza <u>di ogni figura</u> è la «retta» condotta dal vertice perpendicolare alla base.</p>
XI.3	<p>εὐθεία πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς <u>πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας</u> καὶ οὐσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.</p>	<p>Una retta è ortogonale a un piano quando faccia angoli retti rispetto <u>a tutte le rette che la toccano</u> e che sono nel piano [soggiacente].</p>
XI.11	<p>στερεὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς <u>πάσαις ταῖς</u> <u>γραμμαῖς</u> κλίσις. Ἔλλως: στερεὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων.</p>	<p>Angolo solido è l'inclinazione rispetto a <u>tutte le</u> <u>rette</u> «compresa» da più che due rette che si toccano tra loro e che non sono nella stessa superficie. In altro modo: angolo solido è quello compreso da più che due angoli piani costruiti su un solo punto «e» che non sono nello stesso piano.</p>

Ci interessano le definizioni nel cui *definiens* si fa riferimento a «tutti» gli oggetti di una data classe, e cioè I.def.15 e XI.def.3.11; le altre si limitano a quantificare nel *definiendum*. Come fare a stabilire se un ente geometrico soddisfa queste definizioni, dovendo fare un controllo su infiniti oggetti?

Eliminiamo subito XI.def.11 come spuria: dove negli *Elementi* è utilizzata la nozione di angolo solido (prop. XI.20-21, 23, 26-27, 36) si fa riferimento sempre alla seconda delle definizioni attestate, che non contiene quantificatori. La prima è assente in tutta la tradizione indiretta, anche se una seconda serie di definizioni contenuta nel manoscritto arabo Teheran, *Malik* 3585 riporta solo questa, e ne dobbiamo concludere che così fosse anche in qualche manoscritto greco: la doppia definizione degli *Elementi* è quindi sicuramente frutto di contaminazione<sup>4</sup>.

Per quanto riguarda la definizione di cerchio in I.def.15, negli *Elementi* viene sempre utilizzata in un verso: il cerchio è dato e se ne può concludere che tutti i suoi raggi sono uguali o che un certo punto si trova su di esso. La definizione viene ancora utilizzata nello stesso verso quando si asserisca che un cerchio che passa per certi punti transita anche per altri. Questo passaggio deduttivo, caratterizzato da un'espressione formulare ben precisa, si ritrova nelle proposizioni III.25, 33, IV.4-5, 8-9, 13-14, XII.17; XIII.13-16. Nelle proposizioni del libro XIII la stessa espressione identifica il passaggio che permette di mostrare che una stessa sfera passa per certi punti, ovviamente in conformità con la sua definizione cinematica che troviamo negli *Elementi*.

Mai viene proposta, almeno negli *Elementi*, una linea di natura ignota con l'intento di verificare che sia un cerchio. Al massimo, dato un cerchio, si dimostra che bastano tre raggi uguali per determinarne il centro (III.9)<sup>5</sup>, oppure, dato un arco di circonferenza, si costruisce l'intera circonferenza che lo contiene (III.25). Il problema di determinare se una certa curva è un cerchio si presenta però spesso, e ricevette una varietà di formulazioni. La prima di esse si trova nella def. 6 dei *Data*, che stabilisce con il linguaggio dei «dati» l'"esistenza e unicità" di un cerchio di raggio e centro fissati (*EOO* VI, 2.13-15):

τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει κύκλος δεδοσθαι Ἔ detto essere dato in grandezza e posizione un

<sup>4</sup> Si veda Vitrac 1990-2001 IV, 82-83 per una discussione. Le *Definitiones* eroniane non hanno quella di angolo solido.

<sup>5</sup> Eccone l'enunciato: «Qualora sia preso un certo punto all'interno di un cerchio, e dal punto incidano sul cerchio più di due rette uguali, il punto preso è centro del cerchio». Asserire che questo teorema dimostra che un cerchio è univocamente determinato da tre suoi punti è fuorviante. Si noti in particolare che non viene fatto alcun riferimento a punti sul cerchio.

λέγεται, οὐ δέδοται τὸ μὲν κέντρον τῆ θέσει, ἢ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τῶ μεγέθει. cerchio il centro del quale è dato in posizione, il raggio in grandezza.

Un punto che sia l'estremo di un segmento dato il cui altro estremo sia dato si trova su una circonferenza data: ciò equivale sia a stabilire la natura della linea-luogo tracciata dall'estremo mobile, sia a determinarla univocamente. Carmandro, a quanto riferisce Pappo, aveva riformulato questa definizione come problema di luogo, e nello stesso formato aveva espresso il risultato che l'uguaglianza degli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (*El.* III.21) è in realtà proprietà necessaria e sufficiente alla determinazione della specie di linea (*Coll.* VII.24):

ἐὰν εὐθείας τῶ μεγέθει δεδομένης τὸ ἐν πέρας ἢ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης· Qualora un solo estremo di una retta data in grandezza sia dato, l'altro toccherà un arco concavo dato in posizione;  
 ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημείον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης· qualora da due punti dati siano inflesse rette che comprendono un angolo dato, il loro punto comune toccherà un arco concavo dato in posizione.

Esempi della definizione di cerchio applicata all'inverso troviamo in un certo numero di autori. In *Sph.* I.1 Teodosio mostra che la sezione di una sfera con un piano è un cerchio.<sup>6</sup> Se il piano passa per il centro della sfera, l'uguaglianza di tutti i raggi di quest'ultima comporta immediatamente che la sezione è un cerchio<sup>7</sup>, avente come centro quello della sfera. Se il piano non passa per il centro, è prima identificato un punto che sarà il centro del cerchio, poi si dimostra che due rette (non qualificate come "generiche") condotte dal punto alla curva sezione sono uguali (non vengono presi punti sulla curva), e questo risultato viene infine esteso con una dimostrazione potenziale a tutte le rette. La forma dell'estensione non è impeccabile dal punto di vista logico, e rasenta la petizione di principio (*Sph.* I.1, 4.19-21)<sup>8</sup>:

ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ E πρὸς τὴν ABΓ γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἢ ἄρα ABΓ γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν, ἧς κέντρον τὸ E. Del tutto similmente dimostreremo che anche tutte le <rette> che da E incidono sulla linea ABΓ sono uguali tra loro: la linea ABΓ è quindi una circonferenza di cerchio, centro della quale E.

Un primo problema viene dalla necessità di scegliere, nella resa di ὅτι καί, tra le alternative «che anche» e «anche che», non adiafore dal punto di vista matematico. La scelta è impregiudicata dall'ordine delle parole in greco, come vedremo nella sez. 2.7; la resa adottata è suggerita dalle formulazioni analoghe in *Con.* I.5 ed *El.* XI.18, che non sono in forma dichiarativa. La pseudo-petizione di principio risiede però altrove. Che *tutte* le rette da τὸ E alla linea ἢ ABΓ sono uguali è proprio quello che si deve dimostrare, data la definizione di cerchio; la dimostrazione potenziale può essere solo un passaggio intermedio per raggiungere quella conclusione, non può contenerla. Più corretto sarebbe stato asserire «Del tutto similmente dimostreremo che anche tutte le *altre* <rette> che da E incidono sulla linea ABΓ sono uguali tra loro», per poi inferirne l'uguaglianza di tutte le rette. La

<sup>6</sup> Egli utilizza a questo scopo la definizione euclidea di cerchio, ponendo come prima delle *Sphaerica* una definizione di sfera che ne è un calco. L'inizio è ovviamente σφαῖρά ἐστι σχῆμα σφαιρόν.... Il resto è assolutamente identico, se facciamo astrazione dalle interpolazioni nel testo euclideo.

<sup>7</sup> Si noti che in questa prima parte Teodosio omette il quantificatore da entrambe le definizioni.

<sup>8</sup> La pecca deduttiva è comune a *Con.* I.4-5 e *El.* XI.4 e 18, che vedremo di séguito a questa.

forma attestata va interpretata come un'abbreviazione accettabile, sicuramente inconsapevole, di una formulazione altrimenti troppo involuta. Sia come sia, è lo strumento linguistico delle dimostrazioni potenziale che permette di comprendere infiniti casi sotto un unico asserto, non l'uso di appropriati indicatori linguistici (come ad esempio qualificare le due rette dal punto alla curva come «arbitrarie»).

In *Con.* I.4 Apollonio stabilisce che una sezione di cono parallela al cerchio di base è ancora un cerchio, con un procedimento del tutto analogo a quello di Teodosio: stesso uso della dimostrazione potenziale su infiniti casi, con lo stesso problema logico. Differenza non trascurabile il fatto che Apollonio prenda sin dall'inizio un punto arbitrario (τι σημείον) sulla curva sezione (*AGE* I, 16.2). Egli non si rifà invece a nessuna definizione per stabilire in *Con.* I.5 e II.48 che una particolare sezione conica è un cerchio. Sfrutta invece, dandolo per acquisito, il risultato che, una volta identificata una linea come diametro, la proprietà dimostrata in vari modi in *El.* II.14, III.35, VI.8 e 13 determina univocamente un cerchio: essa stabilisce che, condotta una perpendicolare da un punto su una circonferenza ad un suo diametro, il quadrato sulla perpendicolare è uguale al rettangolo compreso dai segmenti in cui risulta diviso il diametro (Apollonio generalizza la proprietà a qualsiasi conica a centro in *Con.* I.21). Egli offre, nelle proposizioni citate, due argomenti, del tutto simili tra loro eccettuato un punto cruciale: solo quello di I.5 si chiude con una dimostrazione potenziale<sup>9</sup>, in II.48 la conclusione è invece raggiunta una volta verificata la condizione caratteristica per due punti differenti τὸ Γ e τὸ Λ. Leggiamo i due argomenti uno di séguito all'altro (*AGE* I, 20.2-7 e 272.28-274.2) – nel primo brano si noti il linguaggio delle “potenze”:

καὶ τὸ ὑπὸ τῶν KZ, ZH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZΘ. ὁμοίως δὲ δεῖχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς HΘK γραμμῆς ἐπὶ τὴν HK ἡγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς HK. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, οὗ διάμετρος ἡ HK.

ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ GP τῷ ὑπὸ MPN, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΣ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΓΜ γραμμῆ.

Anche il «rettangolo compreso» da KZ, ZH è quindi uguale al «quadrato» su ZΘ. Del tutto similmente anche tutte le «rette» condotte dalla linea HΘK perpendicolari a HK saranno dimostrate potere ugualmente a quello dai segmenti di HK. La sezione è quindi un cerchio, diametro del quale HK.

Quello su GP è quindi uguale a quello da MPN, quello su ΛΣ a quello da ΜΣΝ. La linea ΛΓΜ è quindi un cerchio.

Coerentemente con la scelta di impiegare una dimostrazione potenziale, il punto τὸ Θ in I.5 è qualificato come punto arbitrario (τι σημείον) sulla curva sezione (*AGE* I, 18.13), mentre entrambi i punti τὸ Γ e τὸ Λ di II.48 sono introdotti nella configurazione geometrica solo in maniera derivata, come estremi di perpendicolari condotte dalla curva. Il secondo argomento di Apollonio mostra che gli accorgimenti di segnalare il punto sulla curva come arbitrario e di introdurre la dimostrazione potenziale sono tratti stilistici non necessari alla formulazione di una deduzione generale: basta prendere due punti (ed al limite anche uno solo) e demandare la sottolineatura del carattere arbitrario della scelta alla semplice assenza dell'articolo.

Il risultato assunto da Apollonio in *Con.* I.5 e II.48 è dimostrato da Pappo tra i lemmi da lui proposti a completamento di *Con.* I, da Sereno in *Sect. cyl.* 4 e due secoli dopo da Eutocio nel suo commento a *Con.* I.5<sup>10</sup>. Leggiamo in parallelo le tre dimostrazioni, che applicano in successione *El.* II.5 e I.47, in modo da apprezzare le differenze:

<sup>9</sup> Eutocio (*AGE* II, 208.7-10) legge l'argomento potenziale nei suoi esemplari di *Conica* e lo trascrive come lemma; non si tratta dunque di una sua aggiunta.

<sup>10</sup> Rispettivamente *Coll.* VII.237, *Opuscula*, 16.2-18, e in *Con.* I.5, *AGE* II, 208.17-210.7. Eutocio offre subito prima (208.10-15) una semplice dimostrazione per assurdo, adattabile a dimostrare che qualsiasi proprietà di punti arbitrari di una curva

Pappo	Sereno	Eutocio
	ἐὰν καμπύλην γραμμὴν ὑποτείνῃ εὐθεΐα, αἱ δὲ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετοι ἴσον δύνωνται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης, ἡ γραμμὴ κύκλου περιφέρεια ἔσται.	
ἔστω γραμμὴ ἡ $AB\Gamma$ , καὶ θέσει ἡ $A\Gamma$ ,	ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ $AB\Delta$ , ὑποτείνουσα δὲ αὐτὴν ἡ $A\Delta$ εὐθεΐα,	ἔστω τις γραμμὴ ἡ $H\Theta$ , καὶ ὑποτεινέτω αὐτὴν ἡ $HK$ ,
πάσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν $A\Gamma$ κάθετοι [ἀγόμεναι] οὕτως ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἐκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ἀφ' ἐκάστης αὐτῶν τμηθέντων·		
λέγω ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστὶν ἡ $AB\Gamma$ , διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστὶν ἡ $A\Gamma$ .		
ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν $\Delta B E$ κάθετοι αἱ $\Delta Z BH E\Theta$ · τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ $\Delta Z$ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ $AZ\Gamma$ , τὸ δὲ ἀπὸ $BH$ τῷ ὑπὸ $AH\Gamma$ , τὸ δὲ ἀπὸ $E\Theta$ τῷ ὑπὸ $A\Theta\Gamma$ .	καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν $A\Delta$ αἱ $BE, \Gamma Z$ , καὶ ὑποκείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $BE$ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $AE, E\Delta$ , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $\Gamma Z$ ἴσον τῷ ὑπὸ $AZ\Delta$ .	εἰλήφθω δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεία τὰ $\Theta, O$ , καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὴν $HK$ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ $\Theta Z, O\Pi$ , καὶ ἔστω τὸ μὲν ἀπὸ $Z\Theta$ ἴσον τῷ ὑπὸ $HZK$ , τὸ δὲ ἀπὸ $O\Pi$ τῷ ὑπὸ $H\Pi K$ ἴσον.
	λέγω ὅτι ἡ $AB\Delta$ κύκλου περιφέρειά ἐστι.	λέγω ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ $H\Theta O K$ γραμμὴ.
τετμήσθω δὴ δίχα ἡ $A\Gamma$ κατὰ τὸ $K$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Delta K KB KE$ .	τετμήσθω δίχα ἡ $A\Delta$ κατὰ τὸ $H$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $HB, H\Gamma$ .	τετμήσθω γὰρ ἡ $HK$ δίχα κατὰ τὸ $N$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $N\Theta, NO$ .
ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ $AZ\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ZK$ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ $AK$ ,	ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς $H\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς $HE$ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν $AE, E\Delta$ ,	ἐπεὶ οὖν εὐθεΐα ἡ $HK$ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ $N$ , εἰς δὲ ἄμισα κατὰ τὸ $Z$ , τὸ ὑπὸ $HZK$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $NZ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $NK$ .
ἀλλὰ τῷ ὑπὸ $AZ\Gamma$ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ $\Delta Z$ ,	ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $BE$ ,	τὸ δὲ ὑπὸ $HZK$ ἴσον ὑπόκειται τῷ ἀπὸ $\Theta Z$ ·

espressa come uguaglianza è necessaria e sufficiente alla determinazione della curva (cfr. *infra*). Si veda anche la spiegazione posposta spuria ad un passaggio di *El. XIII.13 (EE IV, 162.2-5)*

τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ,	τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ.
τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΔΚ,	ἄλλα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΗΕ, ΕΒ,
ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΚ·	ἴσα δέ ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΘΖ, ΖΝ τῷ ἀπὸ ΝΘ·
ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῆ ΚΔ.	ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ·
ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΒΚ ΕΚ ἴση ἐστὶν τῆ ΑΚ ἢ τῆ ΚΓ·	τὸ ἄρα ἀπὸ ΝΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ.
	ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῆ ΗΔ.
ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΓΗ τῆ ΗΔ ἴση δείκνυται καὶ αἱ ἄλλαι·	ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΝΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ.
κύκλου ἄρα περιφέρειά ἐστὶν ἡμικύκλιον ἄρα τὸ ΑΒΔ.	κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘΚ
ἡ ΑΒΓ τοῦ περὶ κέντρον τὸ Κ,	γραμμῆ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.
τουτέστιν τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ.	

Non è detto che Eutocio peschi la dimostrazione direttamente dagli altri due; l'ipotesi di una fonte lemmatica comune non può essere scartata. Confrontiamo i due commentatori: Pappo risulta, come suo solito, più stringato e meno canonico di Eutocio, che pone l'argomento in buona forma "euclidea" e lo dota di certe clausole da commentatore: separazione delle costruzioni vere e proprie da quelle da collocare in esposizione per mezzo dell'aggiunta della determinazione; identificazione delle prime con il coordinante canonico γάρ «in effetti» invece del δὴ «pertanto» di Pappo, identificazione dei punti sulla curva su cui verte la dimostrazione tramite il determinativo di arbitrarietà τυχόντα «come capita»; riscrittura dell'anafora in forma di riferimento istanziato a *El. II.5*; inserimento del rimando metamatematico ὑπόκειται «è stato supposto» e di una spiegazione posposta; dispiegamento dell'identificazione di oggetto pappiana (la clausola in «cioè») in un argomento completo; conclusione enunciata in maniera da risultare conforme a quella del testo apolloniano commentato. Mi stupisce solo il mancato passaggio dall'uguaglianza dei quadrati a quella delle rette. Eutocio avrà quindi rielaborato la dimostrazione ben più di Pappo. Le tre dimostrazioni confermano però il punto interpretativo su cui ho insistito alla fine del capoverso precedente: la conclusione è tratta senza che sia introdotta un'estensione potenziale a tutte le rette, sostituita da una più innocua a quelle introdotte in esposizione (le tre rette prese da Pappo servono evidentemente a conferire maggiore generalità all'estensione).

Dimostrazioni come la precedente sono in realtà il travestimento di un metodo che trova applicazione sistematica quando occorra determinare la linea che soddisfa una certa proprietà, cioè, nel nostro linguaggio, quando occorra fare verifiche su un numero infinito di punti. Il metodo è quello tipico dei problemi di luogo, cui soggiace la nozione fondamentale di σύμπτωμα «proprietà caratteristica» di una linea. Un σύμπτωμα è una relazione invariante di uguaglianza o proporzionalità tra grandezze variabili legate alla posizione di un punto sulla linea e certe grandezze fisse che fungono da parametri. I geometri greci definivano le linee sempre per via geometrica o meglio ancora generativa, tramite sezioni (ad esempio le coniche come sezioni di un cono con un piano), e solo in séguito ne derivavano le relazioni caratteristiche. A seconda delle linee considerate, alcune relazioni caratteristiche hanno uno statuto più fondamentale di altre. Quelle delle coniche sono denominate ἀρχικὰ συμπτώματα «proprietà caratteristiche originarie» da Apollonio e sono formulate in *Con.*

I.11-13, che definiscono contestualmente anche i parametri di forma delle coniche in questione, come il lato retto e quello trasverso.

Sorge un problema: ci aspettiamo che un  $\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$  sia una proprietà che determina univocamente una linea una volta che i parametri siano fissati. Tuttavia, teoremi come *Con.* I.11-13 stabiliscono soltanto che la proprietà in questione è necessaria alla determinazione univoca della curva, ma non sufficiente. Questo verso dell'implicazione era però dato per scontato, in quanto è possibile stabilirlo in tutta generalità con un argomento molto semplice, che andiamo a vedere. Occorre chiarire preliminarmente cosa si intendesse per «determinazione univoca». Nella pratica antica, in effetti, le linee sono definite individualmente, non identificate tramite proprietà a partire da una classe di linee generiche (unica eccezione le linee omeomere, per cui si veda Acerbi 2010). Per questo motivo la forma della linea non può essere che molto raramente (come nelle dimostrazioni per il cerchio lette sopra) tra ciò che risulta determinato *in generale* dalla proprietà caratteristica; all'inverso, questa già lavora su linee ben determinate. Una volta che ci restringiamo, ad esempio, alle sezioni coniche, però, la relazione caratteristica determina effettivamente il tipo di sezione. Ciò che ci dice la proprietà caratteristica è quindi soltanto che un'unica linea con certi parametri e *di forma prefissata* passerà per un certo punto.

La dimostrazione che la relazione caratteristica determina univocamente la curva ad essa associata *nel senso appena detto* è immediata. Leggiamo l'argomento indiretto proposto da Eutocio immediatamente prima della dimostrazione letta sopra (*in Con.* I.5, *AGE* II, 208.10-15):

καὶ δυνατὸν μὲν ἔστιν ἐπιλογίσασθαι τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. εἰ γὰρ ὁ περὶ τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος οὐχ ἦξει διὰ τοῦ Θ σημείου, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἴσον ἤτοι τῷ ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΘ ἢ τῷ ἀπὸ ἐλάσσονος· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

È anche possibile concluderlo tramite una riduzione all'impossibile. Se infatti il cerchio tracciato intorno a ΚΗ non passerà per il punto Θ, il «rettangolo compreso» da ΚΖ, ΖΗ sarà uguale o a quello su «una retta» maggiore di ΖΘ oppure a quello su una minore; il che non è stato supposto.

Dimostrazioni di questo genere si trovano in *Con.* VI.1-3; venivano però sicuramente date per scontate, una volta che sia chiaro che il metodo funziona sempre inalterato e vale anche per linee con più parametri, come ellisse e iperbole. Che questo fosse anche il punto di vista antico sul legame tra unicità della linea e condizione caratteristica è chiaro ad esempio da *Con.* I.53, dove Apollonio insegna a costruire una parabola con parametri fissati e in modo che le ordinate facciano un angolo dato con il diametro. Risolto il problema nel caso di angolo dato retto per via generativa, cioè costruendo un cono opportuno e intersecandolo con un piano altrettanto opportuno, Apollonio passa al caso di angolo dato acuto. Si vuole che il vertice sia il punto τὸ Α; con semplici costruzioni si dispongono due rette ortogonali ἡ ΑΛ e ἡ ΚΛ e si determina una retta ἡ ΚΜ tale che il quadrato su ἡ ΑΛ sia uguale al rettangolo compreso da αὐτὴ ΑΚΜ; si è quindi ricondotti al caso di angolo retto con vertice τὸ Κ, diametro lungo ἡ ΚΛ e lato retto ἡ ΚΜ; la riduzione termina così (*AGE* I, 164.7-12):

καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΚ, ΚΜ, τῆς μὲν ΚΛ θέσει πεπερασμένης κατὰ τὸ Κ, τῆς δὲ ΚΜ μεγέθει, καὶ γωνίας ὀρθῆς γεγράφθω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΚΛ, κορυφή δὲ τὸ Κ, ὀρθία δὲ ἡ ΚΜ, ὡς προδέδεικται· ἦξει δὲ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΛ τῷ ὑπὸ ΑΚΜ.

E date due rette ΑΚ, ΚΜ, essendo ΚΛ «data» in posizione limitata secondo Κ, ΚΜ in grandezza, e «dato» un angolo retto, sia tracciata una parabola, diametro della quale ΚΛ, vertice Κ, lato retto ΚΜ, come è stato dimostrato prima; passerà pertanto per Α per il fatto di essere il «quadrato» su ΑΛ uguale al «rettangolo compreso» da ΑΚΜ.

In ciò che resta del teorema Apollonio determina il lato retto, ovviamente diverso da  $\eta$  KM, relativo al nuovo diametro. Egli usa quindi in I.53 una proprietà che dimostrerà solo in VI.1 e 3: o supponiamo che queste siano interpolazioni, il che mi pare implausibile, oppure dobbiamo concludere che Apollonio le abbia inserite nel luogo più opportuno dal punto di vista dell'economia deduttiva del trattato, ma che ciò che dimostrano venisse dato per scontato. È altrettanto chiaro che condizioni espresse in termini di uguaglianze o proporzioni e derivate dalle proprietà caratteristiche originarie tramite catene di identità o di uguaglianze venivano immediatamente percepite come caratteristiche: si consideri ad esempio, sempre per la parabola, quella che stabilisce che i quadrati sulle ordinate di punti differenti sono in proporzione con le corrispondenti ascisse (*Con.* I.20).

Dovendo fare un controllo su infiniti oggetti che non siano punti lo strumento adatto resta la dimostrazione potenziale. Ne troviamo un esempio anche negli *Elementi*. La definizione 3 del libro XI è infatti impiegata in senso inverso nella proposizione XI.4: tutte le altre dimostrazioni di perpendicolarità di una retta rispetto ad un piano dipendono da questa. Leggiamone enunciato ed esposizione (*EE IV*, 6.21-7.4):

ἐὰν εὐθεία δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῆ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. εὐθεία γὰρ τις ἡ EZ δύο εὐθείαις ταῖς AB, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον ἀπὸ τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἐφεσάτω· λέγω ὅτι ἡ EZ καὶ τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

Qualora una retta stia sulla sezione comune ad «angoli» retti con due rette che si secano tra loro, sarà ad angoli retti anche con il piano per esse.

In effetti, una certa retta EZ stia su da E ad «angoli» retti con due rette AB, ΓΔ che si secano tra loro secondo il punto E: dico che EZ è ad «angoli» retti anche con il piano per AB, ΓΔ.

La dimostrazione è piuttosto lunga ma semplice. Si prende una retta arbitraria  $\eta$  HEΘ nel piano identificato da  $\alpha$  AB, ΓΔ e che passi per il loro punto comune τὸ E e si dimostra che anch'essa è perpendicolare alla retta  $\eta$  ZE che sta fuori dal piano. L'arbitrarietà di  $\eta$  HEΘ è segnalata da τῆς rafforzato da ὡς ἔτυχεν «come capita» nella costruzione<sup>11</sup>.

La tradizione greca e quella indiretta divergono su come passare da questa a tutte le rette del piano, in accordo con quanto richiesto dalla definizione. Leggiamo la parte finale della dimostrazione greca (*EE IV*, 8.10-20):

ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ HEZ, ΘEZ γωνιῶν. ἡ ZE ἄρα πρὸς τὴν HΘ τυχόντως διὰ τοῦ E ἀχθεῖσαν ὀρθὴ ἔστιν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι ἡ ZE καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπομένους αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεία δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔστιν ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπομένους αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῆ γωνίας· ἡ ZE ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν AB, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ZE ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἔστι τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Uno e l'altro degli angoli HEZ, ΘEZ è quindi retto. ZE è quindi ortogonale a HΘ condotta come capita per E. Del tutto similmente dimostreremo che ZE farà angoli retti anche rispetto a tutte le rette che la toccano e che sono nel piano soggiacente. E una retta è ortogonale a un piano quando faccia angoli retti rispetto a tutte le rette che la toccano e che sono nello stesso piano: ZE è quindi ad «angoli» retti con il piano soggiacente. E il piano soggiacente è quello per le rette AB, ΓΔ. ZE è quindi ad «angoli» retti con il piano per AB, ΓΔ.

<sup>11</sup> Il determinativo di arbitrarietà è assente in tutta la tradizione indiretta, così come un τυχόντως analogo per il punto τὸ Z sulla retta ed esterno al piano.

Ecco le versioni di Adelardo e Gerardo; il lettore non avrà problemi a stabilire la corrispondenza tra le lettere denotative<sup>12</sup>:

Adelardo I	Gerardo
duorum itaque angulorum <i>nbt</i> et <i>nbk</i> uterque rectus. quare <i>nb</i> super <i>kt</i> iuxta duos angulos rectos. sicque manifestum quia omnis linea producta ex <i>b</i> super superficiem duarum linearum <i>gd</i> et <i>zh</i> producet angulum rectum ex <i>nb</i> . erit igitur <i>nb</i> perpendicularis super superficiem <i>gdh</i> .	ergo quisquis duorum angulorum <i>hbt</i> et <i>hbk</i> est rectus, ergo <i>hb</i> est perpendicularis super <i>tk</i> . et similiter ostenditur, quod omnis linea a puncto <i>b</i> in superficie linearum <i>gd</i> ; <i>ez</i> propterea continet cum <i>hb</i> angulum rectum. ergo linea <i>hb</i> est perpendicularis erecta super superficiem <i>gd</i> ; <i>ez</i> .

Le traduzioni arabo-latine sono quindi molto più asciutte; è assente quasi tutta la parte di testo greco che segue la dimostrazione potenziale<sup>13</sup>. La dimostrazione greca è appesantita prima da una forma di argomento potenziale, sottolineato nel testo, abbastanza inusuale (solo una grandezza è dotata di lettere), da una citazione completa di XI.def.3 poi e infine dagli ultimi tre passaggi, farraginosi ma necessari una volta che si sia fatto appello al «piano soggiacente» della def. 3. Nella parte non riportata della dimostrazione troviamo inoltre 4 richiami di dimostrazione in ἐδείχθη in 7 righe e una dimostrazione analogica (*EE* IV, 8.1-7 e 7.23-24), tutti assenti nella tradizione arabo-latina<sup>14</sup>. Sembra pertanto chiaro che la dimostrazione greca sia il risultato di una revisione capillare; il prodotto finale, corretto ma pesante ed inelegante, vuole veder scritti tutti i passaggi e resa manifesta la struttura deduttiva.

Questa discussione permette di giungere ad una conclusione importante: salvo evidenza contraria, l'ipotesi di lavoro più assennata è che le indicazioni di generalità tramite opportuni determinativi siano dovute alla mano di revisori posteriori, anche solo per la semplice esigenza di rendere maggiormente perspicuo un testo percepito come troppo poco esplicito (e probabilmente non proprio corretto dal punto di vista matematico).

Le proposizioni con quantificatori nell'enunciato sono relativamente innocue, e non vi sono motivi matematicamente cogenti che discriminino quelle che lo hanno da quelle che non lo hanno<sup>15</sup>. Se escludiamo gli enunciati in forma condizionale, un tratto comune di quelli con quantificatore è predicare una proprietà di un intero genere di oggetti geometrici: tutti i triangoli (I.16-20, 32, XI.2); tutti i parallelogrammi (I.43, VI.24); tutti gli angoli solidi (XI.21); tutte le piramidi (XII.3), i prismi (7), i coni (10); tutti i numeri (VII.4 e 32), i numeri primi (29) o quelli composti (31). A questi vanno aggiunti i due risultati di massimo (III.16 e VI.27), in cui il quantificatore ha altri scopi. Resta il fatto che il campione è limitato, che quasi ogni teorema potrebbe essere formulato con il quantificatore oppure senza, e che possono aver giocato motivi stilistici preponderanti nel formulare allo stesso modo i teoremi del gruppetto I.17-20, e le coppie I.16, 32 e I.43, VI.24. Le dimostrazioni di enunciati contenenti un quantificatore sono indistinguibili da quelle degli enunciati che non lo contengono.

<sup>12</sup> Rispettivamente Busard 1983, 302.106-110 e Busard 1984, c. 340.48-53. Nella tradizione indiretta troviamo un richiamo esplicito della definizione di angolo retto, assente in quella greca. Evidentemente non tutti i revisori vedono le stesse lacune deduttive.

<sup>13</sup> Nella versione greca c'è inoltre un *surplus* di determinazioni di generalità. L'avverbio determinativo di arbitrarietà τυχόντως «come capita» sottolineato nel testo è uno *hapax* nel *corpus* euclideo e già per questo sospetto (nel *corpus* matematico antico lo si ritrova solo in Teone, in *Alm. I.2, iA*, 333.3). Due forme analoghe di τυχαίνειν nella parte non tradotta non trovano riscontro nella tradizione indiretta, come abbiamo visto sopra.

<sup>14</sup> La dimostrazione potenziale non impeccabile dal punto di vista logico del tipo che abbiamo visto in *Sph. I.1* è invece preservata nella tradizione arabo-latina, qui come in XI.18 che vedremo subito sotto.

<sup>15</sup> Una curiosità: nel libro VII i soli tre teoremi con la conclusione generale hanno il quantificatore nell'enunciato. La tradizione arabo-latina non aiuta, anzi: la fonte di Gerardo quantifica tutti i teoremi del libro XII!

Chiudo questa sottosezione offrendo qualche osservazione sparsa. Interessanti III.16 e XI.2: una certa proprietà è stabilita valida per una classe di oggetti dimostrando che non esistono oggetti della classe che la contraddicono. Oggi vi vedremo un'applicazione dell'equivalenza di  $\forall$  e  $\neg\exists\neg$ . VI.27 è un teorema di massimo preliminare alla teoria dell'applicazione delle aree (*EE* II, 88.13-18):

<p><u>πάντων</u> τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθείαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἑλλειπόντων εἶδει παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὃν τῷ ἑλλείμματι.</p>	<p>Di <u>tutti</u> i parallelogrammi applicati alla stessa retta e che fanno difetto di forme parallelogrammiche sia simili che poste similmente a quella descritta sulla metà, è massimo il [parallelogrammo] applicato sulla metà, e che è simile al difetto.</p>
---	---

La dimostrazione è un modello di asciuttezza: non un quantificatore, non un aggettivo indefinito o un determinativo di arbitrarietà, nessuna dimostrazione potenziale: viene preso un parallelogrammo diverso da quello costruito su metà retta e dimostrato minore. Passiamo ora ad enunciato ed esposizione di XI.18 (*EE* IV, 25.16-20):

<p>ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ <u>τινὶ</u> πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ <u>πάντα</u> τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.</p> <p>εὐθεῖα γάρ <u>τις</u> ἢ <u>AB</u> τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ <u>πάντα</u> τὰ διὰ τῆς <u>AB</u> ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.</p>	<p>Qualora una retta sia ad &lt;angoli&gt; retti con <u>un certo</u> piano, anche <u>tutti</u> i piani per essa saranno ad &lt;angoli&gt; retti con lo stesso piano.</p> <p>In effetti, <u>una certa</u> retta <u>AB</u> sia ad &lt;angoli&gt; retti con il piano soggiacente: dico che anche <u>tutti</u> i piani per <u>AB</u> sono ad &lt;angoli&gt; retti con il piano soggiacente.</p>
--	---

La dimostrazione greca ha una struttura analoga a XI.4 e presenta gli stessi problemi testuali. Viene usata XI.def.3 in senso diretto citandola nella stessa forma quasi-non istanziata della proposizione XI.4. Viene invocata anche XI.def.4 (qui la citazione è non istanziata), il che rende necessario il richiamo di dimostrazione in ἐδείχθη immediatamente seguente. Tutto ciò manca nella tradizione arabo-latina, che è pure priva di uno dei due determinativi di arbitrarietà che troviamo nel testo greco. Quello mancante è contenuto nella dimostrazione potenziale quasi-fallace finale (*EE* IV, 26.21-23):

<p>ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ <u>πάντα</u> τὰ διὰ τῆς <u>AB</u> ἐπίπεδα ὀρθὰ <u>τυγχάνοντα</u> πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.</p>	<p>Del tutto similmente anche tutti i piani per <u>AB</u> saranno dimostrati <u>capitare</u> ortogonali al piano soggiacente.</p>
---	---

D'altra parte, la dimostrazione arabo-latina sembra non concludere, dato che si arresta a mostrare che il piano condotto per la retta è ortogonale al piano soggiacente, con una forma di dimostrazione potenziale del tutto analoga a quella greca – *gd* è l'intersezione del piano per la retta ortogonale con il piano soggiacente (Busard 1983, 312.335-337 e Busard 1984, c. 348.27-29):

Adelardo I

Gerardo

<p>eodemque modo ostendemus quia omnes linee producte a linea <i>gd</i> supra duos angulos rectos in superficie <i>abgd</i> erunt supra superficiem assignatam.</p>	<p>et similiter ostenditur quod omnis perpendicularis producta ex linea <i>gd</i> in superficie <i>abgd</i> est perpendiculariter erecta super superficiem datam.</p>
---	---

È però vero che il piano per la retta ortogonale è dichiarato arbitrario sin dall'inizio<sup>16</sup>, il che non troviamo nel greco, e quindi la dimostrazione potenziale per estensione a tutti i piani non è strettamente necessaria. Evidentemente tutto ciò non era chiaro al revisore cui dobbiamo la versione greca trasmessa. Nel libro X degli *Elementi* vi sono 12 occorrenze di πάντως «in ogni caso». Si tratta quasi totalmente di materiale spurio, e non è il caso di dilungarvi<sup>17</sup>.

2.1.2. *Determinativi di arbitrarietà*

Nella sottosezione precedente abbiamo già incontrato il determinativo di arbitrarietà più importante: le forme di τυγχάνειν «capitare»<sup>18</sup>. Ecco in un prospetto le forme attestate negli *Elementi* e nei *Data* (131 in totale nel *corpus* euclideo):

τυγχ-	III.25, 37, IV.5 ( <i>quater</i> ), XI.18, XII.4/5
participio	I.5, 9, 11, 12, 23, 31, III.2 ( <i>ter</i> ), 13, 32, VI.9 ( <i>bis</i> ), 10, 11, 12, XI.2, 4, 7 ( <i>ter</i> ), 9, 14, 18, 21, 26, 35
aoristo	( <i>bis</i> ), <b>b36</b> , XII.17, <b>b16</b> , altXI-XIII.3, <i>Data</i> 94, alt6
ἔτυχεν	II.1, 2 ( <i>ter</i> ), 3 ( <i>ter</i> ), 4 ( <i>ter</i> ), 7 ( <i>ter</i> ), 8 ( <i>ter</i> ), 12, 13, III.1, 5, 6, 8 ( <i>bis</i> ), IV.3, V.4 ( <i>quater</i> ), 7 ( <i>quinquies</i> ), 8 ( <i>ter</i> ), 11 ( <i>quater</i> ), 12 ( <i>bis</i> ), 13 ( <i>quater</i> ), 14, 16 ( <i>bis</i> ), 17 ( <i>bis</i> ), 22 ( <i>quater</i> ), 23, VI.1, XI.4, 11, <i>Data</i> 49 ( <i>bis</i> ), 51 ( <i>bis</i> ), 63, 77, 78
τύχοι	X.72
τυχόντως	XI.4

La maggioranza delle occorrenze si presenta dunque in due forme:

- 1) participio aoristo a qualificare direttamente come arbitrario un oggetto, spesso un punto (32 negli *Elementi*);
- 2) clausole del tipo ὡς / ὅ / ἃ ἔτυχεν, che svolgono in modo perifrastico le funzioni di determinazioni di oggetto (le ultime due) e di azione (59).

Fatto relevantissimo, nessuna forma del verbo si trova nei libri aritmetici, dove invece dominano i qualificativi generalizzanti, e l'unica attestazione nel libro X è nella forma dell'inciso εἰ τύχοι «se càpita» in X.72 (*EE* III, 124.10), assente nei manoscritti teonini e in **G**, *hapax* negli *Elementi*, posto in posizione del tutto anomala<sup>19</sup> e quindi sicuramente spurio. Le occorrenze connesse con la proporzionalità e in particolare con la celebre definizione 5 del libro V, tutte in forma di clausola perifrastica, saranno discusse in estremo dettaglio più oltre, e vedremo che sono quasi sempre aggiunte posteriori. Occupiamoci degli altri casi.

<sup>16</sup> Ad esempio con l'espressione «quoniam protraham ex linea ab superficiem, quocumque modo producat, [...]» in **G**; si veda Busard 1984, c. 348.16-17.

<sup>17</sup> Per una discussione completa dei problemi testuali del libro X si veda Vitrac 1990-2001 III, 381-399, e Rommevaux, Djebbar, Vitrac 2001.

<sup>18</sup> Per l'unica occorrenza, in XI.4, dell'avverbio τυχόντως «come càpita» si veda la sezione 2.1.1.

<sup>19</sup> Nella clausola ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μείζον τὸ AB τοῦ ΓΔ «sia, se càpita, in primo luogo AB maggiore di ΓΔ». L'inciso è ozioso: si confrontino, giusto a titolo di esempio, i passaggi analoghi in I.6 o 26. Il caso «AB minore di ΓΔ» non è trattato in X.72, se non tramite una dimostrazione potenziale, contrariamente a quanto avviene nell'analogo X.71. In effetti anche la dimostrazione potenziale, non attestata in **P** né nella tradizione indiretta, è inutile, dato che già il caso «maggiore» è sufficiente a produrre le due linee irrazionali richieste. In X.71, invece, è richiesto di produrre quattro linee irrazionali, due delle quali risultano dal caso «maggiore», le altre due da quello «minore». Darei per sicuro che sia la dimostrazione potenziale sia l'espressione «se càpita, in primo luogo» nella frase citata all'inizio di nota siano aggiunte maldestre al testo di X.72.

Nel libro II la locuzione ὡς ἔτυχευ determina l'arbitrarietà dell'azione di secare una retta secondo un punto qualsiasi, ed è l'unica usata. Dopo la singola occorrenza di II.1, è una richiesta cruciale di II.2-4 e 7-8, ripetuta ogni volta in enunciato, esposizione e conclusione; le occorrenze in II.12 e 13 sono citazioni istanziate di II.4 e 7 rispettivamente. La clausola interviene soltanto nelle proposizioni in cui l'unica operazione effettuata sulla retta di riferimento è seccarla in un unico punto; negli altri casi la retta è seccata «in «segmenti» uguali e disuguali» (II.5 e 9) oppure «a metà, e una certa retta sia sommata a essa» (II.6 e 10). In II.1 il determinativo di arbitrarietà dell'esposizione, relativo ai punti di sezione, risponde al qualificativo generalizzante «in quanti mai si voglia segmenti» dell'enunciato. Il passaggio da uno all'altro è correlato al cambio di oggetto geometrico in questione: i segmenti sono i termini di una sequenza discreta di oggetti; i punti non possono esserlo. Le clausole del libro II sono quasi sicuramente originali, anche se la tradizione arabo-latina si divide: **G** conferma la loro presenza ovunque, anche nelle citazioni istanziate di II.12 e 13, **A** non ne ha neanche una. Non è chiaro cosa pensare di quest'ultimo dato, ma in **A** sono assenti anche tutte le conclusioni generali del libro II, che invece **G** preserva in blocco. È probabile che Adelardo abbia abbreviato, come del resto fa spesso.

Altrove ὡς ἔτυχευ determina il «condurre oltre» una retta (III.1, 5, 6, IV.3 e XI.4 e 11)<sup>20</sup>; due occorrenze di questo genere in enunciato e conclusione di III.8 sono invece chiaramente fuori posto (*EE* I, 103.14 e 107.3): non le troviamo nell'enunciato parallelo di III.7 e introducono una precisazione tutto sommato oziosa. La tradizione indiretta conferma che si tratta di aggiunte posteriori (cfr. Busard 1984, c. 63.41). Le 7 occorrenze di ἄ ἔτυχευ in *Data* 49, 51, 63, 77, 78 (le ultime due in citazioni istanziate della proposizione 49) si riferiscono tutte a «figure rettilinee» arbitrarie e sono con ogni probabilità originarie. L'unica altra occorrenza del determinativo di arbitrarietà nei *Data*, la clausola τις τυχοῦσα «una certa «retta», come capita» in *Data* 94, è un caso di sovradeterminazione e per questo sospetta.

Forme verbali con la radice del presente τυγχ- ricorrono solo in porzioni di testo quasi sicuramente non autentiche (sono tutti participi presenti eccetto l'occorrenza in III.37 e una in IV.5por): le troviamo in III.25 (richiamo all'evidenza sospetto), 37 (aggiunta finale del tutto inutile in forma di dimostrazione potenziale; nella tradizione indiretta si trovano prove esplicite), porisma a IV.5 (*quater*; porisma quasi sicuramente spurio), XI.18 (aggiunta finale potenziale spuria), XII.4/5 (lemma assente dalla tradizione indiretta).

Il participio aoristo è impiegato principalmente per determinare l'arbitrarietà di punti presi a caso, su rette o circonferenze, nel corso di costruzioni. Nel libro I troviamo solo occorrenze singole di τυχόν σημείον «punto come capita» nelle costruzioni (proposizioni I.5, 9, 11, 12, 23, 31; i punti sono 2 in I.23 e il participio è ovviamente al plurale), e lo stesso vale per il punto preso su una retta in VI.9. Nel libro III i punti a caso sono presi solo su circonferenze, nelle proposizioni 2 e 13 (2 punti) e 32. In III.2 la determinazione di arbitrarietà fa parte delle ipotesi, e la troviamo ripetuta coerentemente 3 volte, in enunciato, esposizione e costruzione. Il libro XI offre un panorama del tutto analogo: XI.2 (2 punti), 4 (spurio; analizzato nella sez. precedente), 7 (3 occorrenze distribuite come in III.2), 9, 14, 18, 21 (3 punti), 26, 35 (due punti su rette differenti, in enunciato e esposizione – la conclusione manca).

I punti qualificati da forme di τυγγάμειν sono dunque presi sempre su linee, mai nel piano. In XII.17 (= 16 **b**) troviamo presi a caso 4 punti, 2 coppie su 2 rette parallele. Le due dimostrazioni, notevolmente divergenti, sono il risultato finale di una serie di rielaborazioni e contaminazioni successive a partire da una redazione abbreviata, che coinvolge anche la versione che troviamo nella tradizione arabo-latina (Vitrac 1990-2001 IV, 355-371), ed è degno di nota che nella trasformazione di

<sup>20</sup> Solo il penultimo, come abbiamo visto nella sezione precedente, non attestato nelle arabo-latine e sicuramente inautentico. Una retta è «condotta oltre» (forme di διάγω) quando è tracciata a partire da un punto senza vincoli ulteriori (quali parallelismo, passaggio per altri punti ecc.). Altrimenti viene usato il verbo ἄγω (cfr. sez. 1.3).

un normale passaggio istanziato (in **b**) in una citazione non istanziata (qui XI.7) sia stato mantenuto il determinativo di arbitrarietà. Questo perché XI.7 ha il determinativo anche nell'enunciato, e il passaggio istanziato che utilizzi XI.7 è ragionevole lo faccia preservando certe caratteristiche peculiari della formulazione della proposizione cui rinviare.

Quando occorra prendere punti arbitrari nel piano (o più in generale su una superficie come in Apollonio, *Con.* I.6 o Archimede, *Con. sph.* 15), questi non ricevono il determinativo di arbitrarietà, bensì quello di indefiniteness  $\tau\iota$ , come in III.7-8, 36-37, IV.10 (punto esterno ad un cerchio), III.9 (interno), XI.12 (punto «in alto» e quindi nello spazio: la forma verbale non è εἰλήφθω «sia preso» ma quella corrente nello spazio: νενοήσθω «sia concepito»). Un «punto come cāpita» preso sul piano troviamo nella dimostrazione alternativa a *Data* 30 e nella proposizione XI.38 della vulgata, e questo conferma il carattere compilativo di queste dimostrazioni. Esempio notevole della renitenza a prendere punti a caso sul piano è offerto dalle dimostrazioni eroniane aggiuntive a *El.* I.1 (ma cfr. Pappo, *Coll.* III.64 per un'eccezione). Il problema è costruire su una retta data un triangolo con tre lati disuguali, ed il primo caso prevede che la retta data risulti minore di uno degli altri due lati ma maggiore del terzo. La costruzione inizia come in I.1, tracciando due cerchi uguali *age*, *bgd* intersecantisi in *g*. Basterebbe prendere un punto a caso interno a uno dei due cerchi ma esterno all'altro per ottenere, congiungendo due rette opportune, un triangolo che soddisfa i vincoli imposti. Leggiamo invece la soluzione di Erone nel testo offerto da an-Nayrīzī (*Anaritius*, 40.18-24 Tummers):

deinde signabo in arcu *ge* punctum qualitercumque contingat, quod sit punctum *z*, et coniungam *a* cum *z*. punctum quoque secundum signabo in linea que est inter punctum *z* et circumferentiam circuli *bgd*, quod sit punctum *h*, et coniungam *b* cum *h* et protraham ipsam lineam secundum rectitudinem usque ad punctum *t*. manifestum est ergo quod linea *ah* est longior linea *ab* et linea *ab* est longior linea *bh*.

Non riesco ad offrire altra spiegazione di questo procedimento involuto se non la volontà di evitare che punti a caso siano presi all'interno di domini piani.

È raro che altri oggetti geometrici ricevano il determinativo di arbitrarietà: nel libro VI (9-12) troviamo qualificato da  $\tau\upsilon\chi\omicron\upsilon\sigma\alpha$  l'angolo arbitrario compreso tra due rette. In XI.36 nella redazione **b** è qualificato «come cāpita» un angolo solido; il determinativo non è presente nel resto della tradizione greca ma confermato da quella indiretta. Inversamente, non ho negli *Elementi* trovato esempi di punti presi «a caso» che non siano dotati di determinativo di arbitrarietà o di indefiniteness (per il libro I ho controllato anche la tradizione arabo-latina).

Merita soffermarsi su un'interessante differenza di formulazione tra i libri I e II. Nel primo il determinativo di arbitrarietà si riferisce ad un punto, qualificato con il participio aoristo, nell'altro al verbo che descrive l'operazione di sezione, tramite la clausola perifrastica ὡς ἔτυχεν. Leggiamo in parallelo la costruzione di I.11 e l'enunciato di II.4 (*EE* I, 19.1-3 e 71.5-8):

εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχόν σημείον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἢ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ ΖΓ. ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Sia preso su ΑΓ un punto come cāpita Δ, e uguale a ΓΔ sia posta ΓΕ, e sia costruito su ΔΕ un triangolo equilatero ΖΔΕ, e sia congiunta ΖΓ.

Qualora una linea retta sia secata come cāpita, il quadrato sulla «retta» totale è uguale sia ai quadrati sui segmenti che a due volte il rettangolo compreso dai segmenti.

Le modalità di riferimento sono esattamente complementari (il che, se ce ne fosse bisogno, sottolinea la compartimentazione tra i libri degli *Elementi*), ma in realtà si tratta della “stessa operazione” di prendere un «punto a caso» su una retta. Il motivo della differenza risiede nel fatto che ciò che interessa nel libro II sono l’operazione di sezione ed i risultati da essa ottenuti, cioè i segmenti su cui costruire le figure coinvolte nell’uguaglianza da stabilire, qualificati già dall’enunciato esplicitamente come tali (τμήματα, *nomen rei actae* relativo al verbo τέμνειν «secare»). Il punto di sezione è nominato nell’esposizione, ma la sua presenza è in qualche senso accidentale, intervenendo solo a determinare l’operazione come avvenuta κατὰ τὸ Γ «secondo Γ». In entrambe le proposizioni il punto preso a caso interviene “attivamente” in tutta la costruzione che segue, come estremo di una retta su cui è costruito un triangolo equilatero in I.11, come punto per cui condurre parallele in II.4; le due costruzioni hanno però ruoli differenti: la prima è la classica costruzione ausiliaria che viene “scaricata” nel corso della dimostrazione, la seconda stabilisce la configurazione geometrica su cui verte l’enunciato. Questo scarto persiste tra tutte le proposizioni rilevanti dei libri I (punto preso a caso in costruzioni ausiliarie) e II. Si tratta quindi di focalizzazioni su aspetti complementari di un’operazione, che richiedono formulazioni accuratamente differenziate. Quella in termini di “stessa operazione” che ho proposto poche righe fa è quindi in fin dei conti fuorviante, e costituisce un ottimo esempio di come il preteso “contenuto matematico” invariante di una proposizione geometrica esista solo in un approccio storicamente distorto e linguisticamente primitivo.

Il libro V degli *Elementi* era già considerato nell’antichità un vertice di astrazione, ed il campione della generalità matematica dispiegata. Merita dunque analizzare in dettaglio la presenza massiccia nel libro di determinativi di arbitrarietà. La discussione seguente mostrerà che quasi tutte le occorrenze di ἄλλο, ὃ ἔτυχεν / ἄλλα, ἃ ἔτυχεν «un altro/altri, come capita» nel libro V sono interpolazioni posteriori (cfr. Acerbi 2003).

In primo luogo, solo poche di esse sono attestate in **AG**: 5 in **A**, 3 in **G** (un sottoinsieme di quelle in **A**), a fronte delle ben 32 in **PT**<sup>21</sup>. Altre espressioni simili sono preservate regolarmente<sup>22</sup>. Ed è sospetto che le locuzioni in ἔτυχεν compaiano quasi ovunque ci si aspetti di trovarle<sup>23</sup>: una siffatta uniformità può ben essere segno di una revisione sistematica. In effetti, le locuzioni hanno due impieghi nel libro V:

<sup>21</sup> Le cifre sono le seguenti (*legenda*: n. della proposizione: occorrenze in **PT** (occorrenze in **AG**): 4: 4 (0); 7: 5 (2); 8: 3 (0); 11: 4 (0); 12: 2 (0); 13: 4 (0); 14: 1 (0); 16: 2 (0); 17: 2 (0); 22: 4 (1); 23: 1 (2/0). 2/0 in V.23 significa che Adelardo I ha due occorrenze (entrambe «multiplicitates alie quelibet») mentre Gerardo nessuna. In V.7 la seconda e la terza occorrenza di **PT** sono preservate. La prima è tradotta «multiplex quodlibet» da **G**, mentre **A** ha «multiplicitas alia quelibet»; la seconda è resa «quelibet alia quantitas» in entrambi, ma non si riferisce a multipli. In V.22 la seconda occorrenza è preservata, tradotta «multiplicia alia quocumque modo contingat» in **G** e «multiplicitates equales quelibet» in **A**. C’è un’occorrenza in VI.1, assente in **AG**. In VI.33, XI.25 e XII.13 non ci sono occorrenze (quest’ultima proposizione non è attestata in **AG**). La prima occorrenza in V.13 è resa semplicemente «alie/alia», esattamente come fa **A** da solo per V.4. Per quanto riguarda le fonti arabe, la famiglia A conferma entrambe le occorrenze in V.7, mentre nessuna delle altre è preservata. Il ms. *Scorial*. 907 ha un’occorrenza in V.4, corrispondente alla terza del testo greco. Ma è importante osservare che le traduzioni arabe rendono le locuzioni in ἔτυχεν esattamente con la stessa formulazione di espressioni quali ὀποσαοῦν; si veda Engroff 1980, 294 e 296.

<sup>22</sup> La forma ὀποσαοῦν negli enunciati di V.1, V.12 e V.22 è resa in **AG** con «quelibet» / «quotlibet» o «quotcumque». È piuttosto sorprendente che il qualificativo indefinito in V.1 non sia attestato in **AB**; si veda Engroff 1980, 299. Nelle esposizioni delle stesse tre proposizioni **AG** qualificano le grandezze con il numerale opportuno. Anche le due occorrenze di ὀσαϊδηποτοῦν nella dimostrazione di VI.1 sono tradotte (per la prima di esse **AG** sostiene la lezione di **T** contro **P**), e lo stesso accade per le proposizioni VI.33 e XI.25.

<sup>23</sup> Tra le eccezioni figurano le proposizioni V.7, V.20 e V.21 (*EE* II, 12.13, 30.14 e 31.24), dove troviamo la locuzione ἄλλο δέ τι. In tutti questi casi la grandezza arbitraria non è vista *qua* multiplo ma semplicemente *qua* grandezza indipendente (in V.7 è un multiplo, ma nel passaggio in questione è in gioco *qua* grandezza indipendente). Nelle applicazioni della def. 5, le locuzioni in ἔτυχεν mancano solo nelle proposizioni V.12, V.17 e V.23; si veda *EE* II, 20.11, 26.21, e 35.15. In V.23 l’applicazione è in forma così abbreviata da non permettere interpolazione della locuzione; nondimeno l’intera espressione canonica è riesumata come *marginale* nel ms. **F**. In V.17 la locuzione è presente (in varie collocazioni: testo, *marginalia*...) in tutti i mss. teonini: si veda *EE* II, 26.21 in *app*. Sorprendentemente, **A** segue **T** in questo caso (Busard 1983, 158.342), mentre le traduzioni arabe non lo fanno.

- 1) Segnalano l'arbitrarietà nella scelta di una grandezza direttamente coinvolta in un rapporto (come ad esempio in V.7, 8, 14). Le prop. V.7, 20, 21, che costituiscono le sole eccezioni ad un'applicazione sistematica della locuzione in questo caso, apportano indizi preziosi. In V.7 la presenza del tutto inutile di  $\tau\iota$ <sup>24</sup> all'inizio dell'esposizione rivela una mano frettolosa, mentre la *variatio* ὁ ἔτυχεν/τι tra i due casi della dimostrazione (EE II, 12.5 e 12.13) ha luogo in contesti indistinguibili dal punto di vista matematico. Nelle proposizioni 20 e 21 la dimostrazione inizia con la citazione canonica dell'esposizione di un risultato già dimostrato (qui V.8), e la pratica di citazione *verbatim* è disturbata in entrambi i casi dalla presenza di  $\tau\iota$  al posto dell'ὁ ἔτυχεν attestato in V.8 (EE II, 30.14, 31.24 e 13.6) – relitto della formulazione originale della prop. 8<sup>25</sup>.
- 2) La locuzione esprime anche il fatto che una delle prescrizioni della def. 5 sia regolarmente soddisfatta, cioè quella che gli equimultipli vanno presi καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμόν «secondo quale si voglia multiplo»<sup>26</sup>. Ora, negli *Elementi* l'esplicitazione di una condizione verificata di *routine* viene progressivamente rarefatta, una volta che la condizione non stabilisca nessi logici necessari allo sviluppo della dimostrazione, oppure possa essere tranquillamente sottintesa dato il contesto<sup>27</sup>. Ci si dovrebbe quindi aspettare che questo fenomeno si produca anche per la clausola in ἔτυχεν nella verifica della def. 5, dal momento che la prescrizione di arbitrarietà degli equimultipli è automaticamente soddisfatta.

L'impressione di una standardizzazione sistematica è confermata dal fatto cruciale che la locuzione in ἔτυχεν si trova anche dove non dovrebbe stare. Abbiamo in effetti appena visto che può servire ad esprimere arbitrarietà e indipendenza mutua nella scelta dei multipli in gioco nella def. 5. Ma quando si ha a che fare con disuguaglianze di rapporti, come nelle proposizioni V.8 e 13, occorre fare ricorso alla definizione 7 (EE II, 2.3-8):

ὅταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

E quando degli equimultipli, il multiplo della prima ecceda il multiplo della seconda, e il multiplo della terza non ecceda il multiplo della quarta, allora la prima rispetto alla seconda è detta avere rapporto maggiore che la terza rispetto alla quarta.

La seconda coppia di multipli non può essere arbitraria in questo caso, dal momento che non ogni coppia funziona<sup>28</sup>, e infatti nella def. 7 la frase introdotta da καθ' ὅποιονοῦν che troviamo nella def. 5 non c'è. Inserire ἔτυχεν in questi casi è un errore grave. L'errore è particolarmente evidente in V.13 (EE II, 21.7-16):

ἐπεὶ γὰρ ἔστι τινα τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια, In effetti, poiché ci sono certi equimultipli di

<sup>24</sup> Nell'espressione ἄλλο δέ τι, ὁ ἔτυχεν, che è uno *hapax* nel libro V. Si veda EE II, 11.21.

<sup>25</sup> AG traducono regolarmente con «alia».

<sup>26</sup> Per questo qualificativo generalizzante ὅποιονοῦν «quale si voglia» si veda la prossima sottosezione; per un'analisi di V.def.5 la sez. 2.8.

<sup>27</sup> Tra gli esempi nel libro V ci sono la frequente e pressoché casuale preterizione del termine μέγεθος «grandezza» e l'assunzione tacita che le grandezze nelle proposizioni 7-10, 12, 14, 15, 16, 19 e 25 siano omogenee. Un altro esempio interessante si trova nel libro II, dove il completamento della figura è descritto in dettaglio solo nelle prime proposizioni. D'altro canto, è chiaro che le forme di τυγχάνειν sono necessarie nelle costruzioni geometriche in cui sia scelto un punto o un angolo arbitrario.

<sup>28</sup> In termini algebrici, dati due rapporti disuguali,  $a/b > c/d$ , con  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , per ogni  $m \in \mathbf{N}$  fissato esiste solo un insieme finito di  $n \in \mathbf{N}$  tali che  $ma > nb$  ma  $mc \leq nd$ , e, per certi  $m^* \in \mathbf{N}$ , per tutti gli  $m < m^*$  non esistono tali  $n$  ( $m^*$  dipende da  $a/b$  e  $c/d$ ).

τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια, καὶ τὸ Γ, Ε e altri, quali cāpita, equimultipli di Δ, Ζ, μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίον e il multiplo di Γ eccede il multiplo di Δ, e il ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ multiplo di Ε non eccede il multiplo di Ζ, πολλαπλασίον οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν siano presi, e siano di Γ, Ε equimultipli Η, Θ, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ di Δ, Ζ altri, quali cāpita, equimultipli Κ, Λ, ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ così che Η eccede Κ, e Θ non eccede Λ. Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν.

L'argomento inizia con un ἔστι dal chiaro valore esistenziale, e l'apparente incongruenza logica del ragionamento (l'esistenza dei multipli è asserita prima ancora che la proprietà che li identifica sia resa esplicita) può essere appianata intendendo il καὶ sottolineato come epesegetico<sup>29</sup>. Dato il contesto, così attento dal punto di vista logico, la doppia occorrenza di ἃ ἔτυχεν è proprio fuori posto. Lo stesso vale per la proposizione 8, dove viene introdotta una grandezza τὸ Ν come multiplo ben definito di τὸ Δ, cioè il primo maggiore di un multiplo fissato in precedenza. Il multiplo τὸ Ν può assumere un solo valore, ed è assurdo definirlo arbitrario<sup>30</sup>. La tradizione indiretta conferma che ἔτυχεν fu inserito posteriormente in V.8, sia nella dimostrazione che nell'esposizione<sup>31</sup>. Quest'ultima era formulata in origine semplicemente con ἄλλο δέ τι, come attestano le citazioni in V.20 e 21 e come è naturale in vista del fatto che è in gioco l'arbitrarietà di una grandezza differente (non *qua* multiplo).

Ulteriori indicazioni vengono dalle differenze nella formulazione di V.def.5. Nelle *Definitiones* attribuite ad Erone, V.def.5 è citata in una formulazione molto vicina a quella di **PT**; la sola differenza è che l'espressione καθ' ὁποιοῦν πολλαπλασιασμὸν ἐκάτερον ἐκατέρου è rimpiazzata da ἄλλων, ὧν ἔτυχεν (*Definitiones* 124, *HOO IV*, 78.22-80.2):

ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγονται πρῶτον πρὸς Grandezze sono dette nello stesso rapporto, prima δεῦτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον ὅταν τὰ rispetto a seconda e terza rispetto a quarta, quando gli τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου ἰσάκεις πολυπλάσια equimultipli della prima e della terza o eccedano insieme τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἄλλων, ὧν gli altri, quali cāpita, equimultipli della seconda e della ἔτυχεν, ἰσάκεις πολυπλασίων ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ quarta presi in ordine corrispondente, oppure siano ἅμα ἴσα ἢ ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα. insieme uguali, oppure facciano insieme difetto.

La clausola in ἔτυχεν nella formulazione eroniana, come è chiaro dalla presenza del genitivo, assegna l'arbitrarietà nella scelta degli equimultipli alla seconda coppia, mentre l'espressione corrispondente nella def. 5 degli *Elementi* si riferisce a entrambe. Si osservi poi che usare forme di ἄλλος «altro» è fuorviante, dal momento che il termine suggerisce che la seconda coppia di equimultipli non possa essere scelta ad arbitrio: deve essere differente (s'intende per quanto riguarda il fattore moltiplicativo) dalla prima. Si tratta di un difetto serio dal punto di vista logico-matematico.

Mi sembra ragionevole concludere da quanto precede che il formato primitivo delle applicazioni di V.def.5 non dovesse contenere nessun riferimento esplicito all'arbitrarietà della seconda coppia di equimultipli, l'assenza di qualificazioni contando al solito per adesione alla maggiore generalità possibile: le due coppie di equimultipli sono sullo stesso piano per quanto riguarda l'arbitrarietà. Segni

<sup>29</sup> Una simile preferenza per costruzioni paratattiche si osserva nelle formulazioni in «forma I» discusse nella sez. 1.5.1.4. Spiegherei nello stesso modo costrutti verbali come ad esempio quelli in cui una linea è prolungata fino ad un punto ben definito, ma la proprietà che identifica il punto è specificata in una frase immediatamente seguente e coordinata paratatticamente. Si veda ad esempio la proposizione II.11, *EE I*, 87.7-8.

<sup>30</sup> Simson (1811, 314) argomentò che le clausole in ἔτυχεν in V.4, 13, e 17 sono usate in maniera scorretta. Era inoltre sua opinione che «though they are true, they are quite superfluous» in certe occorrenze nelle proposizioni V.11, 12, 22, 23.

<sup>31</sup> Si noti anche che la citazione dell'esposizione di V.8 in V.14, assente in **AG**, ha la locuzione ὃ ἔτυχεν.

di modifiche posteriori sono già evidenti in **AG**, ma buona parte delle interpolazioni di clausole in ἔτυχεν va assegnata ad un periodo posteriore a quello in cui la tradizione diretta e indiretta cominciarono a divergere<sup>32</sup>, e probabilmente anteriore alla compilazione del nucleo delle *Definitiones*. Gli interventi si concentrarono, com'è naturale, principalmente sulle applicazioni della def. 5, ma in certi rami della tradizione toccarono la definizione stessa, come ci conferma la formulazione delle *Definitiones*. Il fatto che questa venisse percepita come equivalente alla formulazione degli *Elementi* mostra che il lavoro interpretativo aveva finito per oscurare aspetti sottili, come l'espressione della generalità, strettamente legati a microstrutture sintattiche e lessicali.

### 2.1.3. Determinativi di indefinitezza

Forme di τις «un certo» sono correntemente impiegate per rafforzare il carattere indefinito di un'asserto o di una supposizione e quindi la sua generalità. Nel testo principale degli *Elementi* se ne registrano 360 occorrenze, così ripartite libro per libro (di cui sono indicati anche numero di proposizioni e dimensioni, in percentuale sui segni totali)<sup>33</sup>:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	tot.
# proposiz.	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
% # segni	7,6	3,3	6,9	3,4	4,9	7,6	5,7	5	5,1	26,1	9	8,3	6,9	100
forme di τις	14	13	71	3	11	9	80	7	39	39	26	46	2	360

La redazione **b** del libro XII fa registrare 35 occorrenze. La distribuzione è evidentemente scorrelata dal numero di proposizioni e dalla dimensione dei singoli libri. L'uso del determinativo di indefinitezza è quindi legato a esigenze matematiche particolari. Il suo campo d'azione sono le specificazioni d'oggetto, la cui determinazione è in qualche rispetto, ma non totalmente, lasciata impregiudicata. Non ricevono quindi il determinativo gli oggetti dati, sulla base dei quali vada effettuata una costruzione. All'estremo opposto dello spettro, nel caso di totale indeterminazione (quando cioè gli enti non siano menzionati nell'enunciato né facciano parte delle costruzioni ausiliarie) si usano di norma forme di ἐκκεῖσθαι «essere fissato» (cfr. sez. 1.2), come avviene nel caso geometrico in I.22\*, IV.10\*, VI.12, 23\*, X.29, 48, 50, 52-53, 62, XI.23/24 XII.13 (retta), IV.11 (triangolo), XI.36 (angolo solido), XIII.13-16, 18 (diametro), XIII.13, 16 (cerchio), XIII.14-15 (quadrato), XIII.17 (due facce di un cubo). Nel caso aritmetico il verbo introduce un'unità, in VIII.9 e IX.32. Solo sporadicamente viene introdotto un τις a rafforzare, quando si tratti di una sola retta (occorrenze marcate con asterisco). Uniche eccezioni si trovano nelle proposizioni III.1 e XI.11, dove rette totalmente arbitrarie sono «condotte oltre» in un cerchio o nel piano e dotate di doppio determinativo, come vediamo per XI.11 (*EE* IV, 17.1-2; ritorneremo su queste due proposizioni tra breve):

διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ In effetti, sia condotta oltre, nel piano soggiacente, una  
 εὐθεία, ὡς ἔτυχεν, ἢ ΒΓ. certa retta, come capita ΒΓ.

<sup>32</sup> Come abbiamo visto, i manoscritti ci fanno apprezzare un processo in fase di completamento. In effetti, Erone potrebbe essere stato responsabile, per tramite dei suoi commentari, dell'inserzione di molte delle locuzioni in ἔτυχεν: si vedano le numerose occorrenze di forme del verbo nei *Metrica* e nella *Dioptra* (cfr. l'indice in *HOO* III, 363). Se non altro, Erone potrebbe riflettere l'uso canonico della sua epoca.

<sup>33</sup> Sono elencate anche le occorrenze nelle definizioni I.def.13, 14 (*bis*), 17, III.8, 9, V.def.18 (*bis*), VI.def.5, VII.def.14-18, X.def.4, XI.def.17.

La tradizione arabo-latina mantiene solo il secondo, ma ciò non è significativo, come vedremo tra un attimo. Tutto ciò è relativamente paradossale: quando sussista totale libertà nell'assegnazione di un oggetto all'interno di un certo genere troviamo un verbo con connotazioni particolarizzanti piuttosto marcate quale è ἐκκεῖσθαι. La differenza tra i due gradi di indeterminazione, parziale e totale, si coglie sull'esempio di VI.9 e 12, di cui riporto esposizione e costruzione (EE II, 57.6-14 e 60.1-7):

ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὴ τῆς AB τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ A εὐθεῖα ἡ AG γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς AB τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχόν σημεῖον ἐπὶ τῆς AG τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ AD ἴσαι αἰ ΔE, EΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἦχθω ἡ ΔZ.

ἔστωσαν αἰ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἰ A, B, Γ· δεῖ δὴ τῶν A, B, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

ἐκκεῖσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἰ ΔE, ΔZ γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ EΔZ· καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔH, τῇ δὲ B ἴση ἡ HE, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς HΘ παράλληλος αὐτῇ ἦχθω διὰ τοῦ E ἡ EZ.

Sia una retta data AB: si deve pertanto sottrarre di AB la parte prescritta.

Sia pertanto fissata la terza <parte>. [E] sia condotta oltre da A una certa retta AG che comprende con AB un angolo come cāpita; e sia preso su AG un punto come cāpita Δ, e uguali a AD siano poste ΔE, EΓ. E sia congiunta BΓ, e per Δ parallela a essa sia condotta <una retta> ΔZ.

Siano tre rette date A, B, Γ: si deve pertanto trovare una quarta proporzionale di A, B, Γ.

Siano fissate due rette ΔE, ΔZ che comprendono un angolo [come cāpita]<sup>34</sup> EΔZ; e uguale a A sia posta ΔH, uguale a B HE, e ancora uguale a Γ ΔΘ; e congiunta HΘ parallela a essa sia condotta per E <una retta> EZ.

Si noti, qui come in VI.10-11, la presenza dei determinativi di arbitrarietà a rafforzare ulteriormente il carattere parzialmente libero della costruzione. Venendo alla differenza tra le due proposizioni, basta osservare che in VI.9 la retta ἡ AG ha un estremo vincolato, cioè il punto A, mentre in VI.12 le due rette possono essere poste a piacere e formano un angolo qualsiasi. Si tratta quindi di enti alcune caratteristiche dei quali sono lasciate completamente impregiudicate, in quanto irrilevanti.

Gli oggetti qualificati da forme di τις sono, nel caso geometrico, principalmente rette e punti. Rappresento lo spettro di variabilità libro per libro nella tabella seguente, includendo anche le 26 occorrenze dei *Data*:

punto (19+4)	III (17), IV (1), XI (1), <i>Data</i> 4
retta (109+12)	I (14), II (13), III (52), IV (2), VI (5), X (8+6) <sup>35</sup> , XI (8), XIII (1), <i>Data</i> 12
parte di retta (7)	XI (7)
arco (1)	III (1)
angolo (1)	III (1)
segmento di cerchio (5)	XII (5)
rettangolo (+2)	<i>Data</i> 2
figura rettilinea (2)	X (1), XII (1)
piano (11)	XI (10), XII (1)
poliedro (2)	XII (2)
piramide (1)	XII (1)
sfera (5)	XII (5)

<sup>34</sup> Il determinativo si trova nei teonini ed è quasi sicuramente caduto per errore di copia in P.

<sup>35</sup> Le 6 occorrenze qualificano la retta ῥητή «esprimibile».

solido (22)	XII (21), XIII (1)
dominio piano (9)	XII (9) <sup>36</sup>
grandezza (35+8)	V (11), VI (3+1) <sup>37</sup> , X (19), XII (1), <i>Data</i> 8
numero (126)	VII (80) <sup>38</sup> , VIII (5), IX (39), X (2)
metalinguistico (5)	VIII (2) <sup>39</sup> , X (3) <sup>40</sup>

Se, come spesso accade, il determinativo è presente nell'enunciato lo è anche nell'esposizione, che può contenerne eventualmente di aggiuntivi. Nel libro II ciò avviene in II.5-10, come vediamo sull'esempio di II.6 (*EE I*, 75.8-9 e 13-15):

ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ δίχα, προστεθῆ δὲ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπ' εὐθείας, [...]	Qualora una linea retta sia secata a metà, e <u>una certa</u> retta sia sommata ad essa in <linea> retta, [...]
εὐθεία γάρ τῆς ἢ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημείον, προσκείσθω δὲ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπ' εὐθείας ἢ ΒΔ.	In effetti, <u>una certa</u> retta AB sia secata a metà secondo il punto Γ, e sia sommata a essa in <linea> retta <u>una certa</u> retta ΒΔ.

Queste occorrenze aggiuntive sono *a priori* sospette in quanto introducono un *surplus* di generalità rispetto all'enunciato. La tradizione indiretta non è di aiuto: i determinativi di indefinitezza sono sistematicamente omessi, a causa del fatto che assenza di articolo e presenza di determinativo di indefinitezza sono resi in arabo con lo stesso accorgimento (la cosiddetta «nunazione»). Un traduttore latino rende quindi naturalmente una forma non determinata (con nunazione) con un semplice sostantivo, senza aggiungere determinativi di indefinitezza, la cui esistenza nel testo greco non è in grado di ricostruire.

La ripartizione delle occorrenze dei determinativi di indefinitezza per parti specifiche della proposizione permette di ottenere indicazioni utili quanto alla loro autenticità e pertinenza. Quest'ultimo punto può essere formulato nei termini seguenti. Lo stile matematico greco ha già uno «strumento» per segnalare il carattere indefinito del riferimento ad un oggetto matematico generico: l'assenza dell'articolo determinativo. C'è pertanto da chiedersi quali motivazioni matematiche spingano al rafforzamento dell'indefinitezza, in modo da renderla esplicita. Vediamo la ripartizione delle occorrenze per parti specifiche della proposizione e per funzione logico-deduttiva all'interno della dimostrazione.

definizione	I.13, 14 ( <i>bis</i> ), 17, III.8-9, V.18 ( <i>bis</i> ), [VI.5], VII.14-18, X.4, XI.17
enunciato	I.14, II.6, 10, III.1por ( <i>bis</i> ), 3 ( <i>bis</i> ), 7 ( <i>bis</i> ), 8 ( <i>bis</i> ), 9*, 18 ( <i>bis</i> )*, 19, 32 ( <i>bis</i> ), 36-37, V.6*, 7por, VI.2*, VII.15 ( <i>bis</i> ), 16*, 17*, 18 ( <i>bis</i> )*, 24, 27 ( <i>bis</i> )*, 28*, 30 ( <i>bis</i> )*, 31-32, 35, 37, VIII.13 ( <i>bis</i> )*, IX.1*, 3-4*, 5, 7 ( <i>bis</i> )*, 11, 16-17, 28*, 29*, 31, 36*, X.1, 13, 13/14, 16/17*, 18/19 ( <i>ter</i> )*, 23por, XI.1 ( <i>bis</i> ), 8*, 16*, 18*, 19*, XII.7por
esposizione	I.13*, 14, II.5*, 6 ( <i>bis</i> )*, 7 ( <i>bis</i> )*, 9*, 10 ( <i>bis</i> )*, III.3 ( <i>bis</i> ), 7 ( <i>bis</i> ), 8 ( <i>bis</i> ), 18, 19, 32 ( <i>bis</i> ), 36-37, V.7*, VII.15 ( <i>bis</i> ), 18, 23*, 24, 30, 31-32, 35, 37, IX.5, 7, 11, 16-17, 31, X.1, 13, 13/14, XI.1 ( <i>bis</i> ), 4*, 5*, 14*, 18*, XIII.3*

<sup>36</sup> Questi, e i precedenti relativi al libro XII, si trovano nella clausola introduttiva della prova per esaurimento.

<sup>37</sup> Citazione istanziata di V.7 applicata a un parallelogrammo in VI.14, a un triangolo in VI.2 e 15. Si aggiunga a questa la qualificazione di *πηλικότης* «valore» nella spuria VI.def.5.

<sup>38</sup> A volte, come in VII.4, è qualificato un μέρος «parte» di un numero.

<sup>39</sup> Nell'espressione *ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ* «quanti uno prescrive».

<sup>40</sup> Nell'espressione *κατὰ τινα τῶν προειρημένων τρόπων* «secondo una certa delle (pre)dette maniere».

anafora	III.19, V.7
clausola in ἐκκεῖσθω	I.22, IV.10, VI.23, X.29, 48, 50 ( <i>bis</i> ) <sup>41</sup> , 52-53, 62
costruzione	III.1, VI.9, IX.12, XI.4, 11, 12, XII.17
conclusione	I.14, II.6, 10, III.3 ( <i>bis</i> ), 7 ( <i>bis</i> ), 8 ( <i>bis</i> ), 9, 18 ( <i>bis</i> ), 19, 32 ( <i>bis</i> ), 36-37, V.6, VI.2, VII.31-32, IX.11 <sup>42</sup> , 17 <sup>43</sup> , X.16/17, XI.1 <sup>**</sup> , 8, 16, 18, 19, XIII.17 <sup>44</sup>
citazione non istanziata	III.9 (1por), VII.22 (VII.def.15), 31 (VII.def.14 <i>bis</i> ), 32 (31), IX.7 (VII.def.14), 9 (3), 12 (VII.def.14), 13 (VII.31 <i>bis</i> ), 14 (VII.30), 15 (VII.24), X.28/29I (IX.1), XI.11 (8), XII.2 (X.1)
citazione istanziata	I.45, 47 (14), II.10 (I.29*), III.4 (3 <i>bis</i> ), 10 (1por <i>bis</i> ), 14 (3), 32 (19), 33 (32), 34 (32**), 35-36 (3), IV.2 (III.32**), 17 (III.37), V.20-21 (8*), VI.2, 14-15 (V.7), 32 (I.14), VII.1 (VII.def.15), 2 (1), 3 (VII.def.15), 19 (18**), 23 (VII.def.15), 24 (VII.def.15), 24 (23), 28 (VII.def.15 <i>bis</i> ), 29 (VII.def.15), 31 (VII.def.14), IX.13 (11 e VII.31 <i>bis</i> ), 20 (VII.31), 31 (VII.def.15), X.2 (1), 4 (X.def.1*), 5 (X.def.1*), 15 (X.def.1* <i>bis</i> ), 16 (X.def.1* <i>bis</i> ), XI.2 (1** <i>bis</i> )
pseudo-esistenziale o sua negazione <sup>45</sup>	III.7, V.13, 18, VII.1§c <sup>46</sup> , 2§c ( <i>bis</i> ), 3§c ( <i>ter</i> ), 4, 22§c, 23§c, 24§c, 28§c ( <i>bis</i> ), 29§c, 31 ( <i>bis</i> ), 34§ ( <i>bis</i> ), 36§ ( <i>bis</i> ), IX.13, 31c, 34, 36§, X.2§, 3§, 4§, 16§ ( <i>bis</i> ), XII.2, 5, 10 ( <i>bis</i> ), 11, 12, 17 ( <i>bis</i> )
esaustione <sup>47</sup>	XII.2 ( <i>nonies</i> ), 5 ( <i>septies</i> ), 11 ( <i>septies</i> ), 12 ( <i>septies</i> ), 18 ( <i>quinquies</i> )
esistenziale	III.16, V.13, VII.21§, 33§, 39§, VIII.4 ( <i>ter</i> ), XI.1 ( <i>sexties</i> )
clausola in ποιῶσί τινας <sup>48</sup>	VII.def.17-18, VII.16-18, 27, 30, VIII.13, IX.1, 3-4, 5, 7, 9, 11, 14, 28-29, 36, X.28/29I
clausola in πλὴν <sup>49</sup>	I.14, 39-40, III.1, 18-19, XI.3

Marcati con asterisco \* sono gli enunciati che hanno un'occorrenza in più rispetto all'esposizione corrispondente, o viceversa (lo stesso per le citazioni istanziate rispetto alle esposizioni, ma solo in questo verso); doppio asterisco \*\* hanno le citazioni o conclusioni con meno occorrenze delle esposizioni corrispondenti; tra parentesi la proposizione citata, priva di numero di libro se appartiene allo stesso libro della proposizione ospite ed eventualmente posto alla fine di stringhe di proposizioni se la citazione è la stessa. Analogo prospetto per i *Data*:

enunciato	2, 5, 9, 22, 36*, 38, 73*, 78, 89*, 91 ( <i>bis</i> ), 92 ( <i>bis</i> ), 94
esposizione	2, 5, 9, 22, 38, 78, 91 ( <i>bis</i> ), 92 ( <i>bis</i> ), 94
citazione istanziata	67 <sup>50</sup>

<sup>41</sup> Una delle due occorrenze fissa un numero, l'altra un'«esprimibile».

<sup>42</sup> Conclusione istanziata.

<sup>43</sup> Conclusione istanziata.

<sup>44</sup> Si tratta di un tipo di conclusione parziale distintivo di questo problema.

<sup>45</sup> Quando un'occorrenza multipla sia marcata dal simbolo §, due di esse sono rispettivamente la clausola introduttiva e finale di argomenti per assurdo. Altrimenti sono affermazioni pseudo-esistenziali isolate, solo eventualmente introduttive di argomenti per assurdo.

<sup>46</sup> Quando le occorrenze siano marcate dalla lettera c, una di esse coincide con la citazione corrispondente, ed è quindi già stata elencata.

<sup>47</sup> Si tratta di una sottocategoria di quella precedente, che ho preferito incorporare.

<sup>48</sup> Già elencate tra enunciati o citazioni.

<sup>49</sup> Queste particolari occorrenze, all'interno di asserzioni negative contenenti la clausola ἄλλη τις πλὴν «una certa altra eccetto» o simili, sono state analizzate nella sez. 1.5.3.

<sup>50</sup> Si tratta di un risultato facilmente deducibile da *El.* II.5; la dimostrazione è attestata solamente come scolio a questo passaggio dei *Data* (scolio n. 133 in *EOO* VI, 296.2-297.8). La forma del rimando nel testo dei *Data* è quella della citazione istanziata (in anafora!); l'enunciato che compare nello scolio è ovviamente una ricostruzione *a posteriori*.

Il quadro è abbastanza chiaro: la grande maggioranza delle occorrenze di forme di  $\tau\iota\varsigma$  si trova in enunciati o in loro riprese, istanziate e non: esposizioni vere e proprie, citazioni istanziate e non, conclusioni. Curioso il caso isolato di III.19, con la ripetizione del determinativo in anafora, dopo che lo troviamo in enunciato, esposizione e conclusione<sup>51</sup>. Le occorrenze in più o in meno nel confronto tra enunciato e esposizione fanno intravedere delle regolarità: i casi di eccesso nell'enunciato sono circa il doppio di quelli di eccesso nell'esposizione; il libro XI li ripartisce piuttosto equamente, mentre il libro II e i libri aritmetici rivelano delle compartimentazioni marcate e di segno opposto.

Il resto delle occorrenze si lascia inquadrare in categorie che presentano connotazioni esistenziali più o meno marcate. Ho chiamato certe clausole «pseudo-esistenziali» in quanto la portata esistenziale è in qualche senso “mascherata” dalla formulazione. Qualche esempio permetterà di capire che la forzatura che introduco è innocua. Si legga in primo luogo una clausola esistenziale vera e propria, come in una delle occorrenze in VIII.4 (*EE* II, 156.17-157.4):

οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται <u>τινες</u> τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις.	N, Ξ, Μ, Ο sono quindi di séguito in proporzione nei rapporti sia di Α rispetto a Β che di Γ rispetto a Δ che ancora di Ε rispetto a Ζ. Dico ora che sono anche minimi nei rapporti ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Se infatti no, ci saranno <u>certi</u> numeri minori di Ν, Ξ, Μ, Ο di séguito in proporzione nei rapporti ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ.
--	---

L'esempio è rappresentativo: buona parte delle clausole esistenziali o pseudo-esistenziali si rintraccia nei libri aritmetici, introducendo argomenti per assurdo. Si tratta dunque di determinazioni locali (cfr. sez. 1.2.1), come la prima pseudo-esistenziale in VII.34 (*EE* II, 141.11-13):

οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί <u>τινα</u> ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ.	Α, Β misurano quindi Γ. Dico ora che <Γ> è anche minimo. Se infatti no, Α, Β misureranno <u>un certo</u> numero che è minore di Γ.
--	--

L'assunzione di esistenza di un numero misurato o misurante (come nella grande quantità di richiami a VII.def.15) esaurisce quasi tutte le occorrenze di asserti pseudo-esistenziali. La formulazione delle due clausole precedenti è strettamente parallela, e mi pare che la prima confermi il carattere esistenziale (per quanto non esplicito) della seconda, piuttosto che la seconda il carattere copulativo della prima. La seconda formulazione può essere dettata da esigenze stilistiche, allo scopo di evitare l'appesantimento dovuto al doppio participio congiunto in una formulazione come ad esempio \*εἰ γὰρ μὴ, ἔσται τις ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ἐλάσσων ὦν τοῦ Γ «se infatti no, ci sarà un certo numero minimo misurato da Α, Β che è minore di Γ»\*.

Caso particolare, che ho rubricato a sé, sono le locuzioni cui ricorre il metodo di esaurimento, di cui leggiamo quella che introduce il procedimento per assurdo in XII.5 (*EE* IV, 93.1-5):

εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἐλασσόν <u>τι</u> τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μείζον.	Se infatti non è come la base ΑΒΓ rispetto alla base ΔΕΖ, così la piramide ΑΒΓΗ rispetto alla piramide ΔΕΖΘ, sarà come la base ΑΒΓ rispetto alla base ΔΕΖ, così la piramide ΑΒΓΗ o rispetto a <u>un certo</u> solido minore della piramide ΔΕΖΘ oppure rispetto a uno maggiore.
---	---

<sup>51</sup> L'occorrenza in V.7 è a rigore esterna all'anafora, ma si tratta in ogni caso di un riferimento alla costruzione.

L'assunzione è quella, classica, di un quarto proporzionale, e la connotazione esistenziale piuttosto marcata per quanto non esplicita. Lo stesso si dica per gli asserti pseudo-esistenziali che descrivono il cuore del procedimento, che vediamo ancora sull'esempio di XII.5 (*EE IV*, 93.9-13):

<p>καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι          πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθωσαν, καὶ τοῦτο αἰ          γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί <u>τινες</u> πυραμίδες ἀπὸ τῆς          ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἱ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς,          ἣ ὑπερέχει ἢ ΔΕΖΘ πυραμῖς τοῦ Χ στερεοῦ.</p>	<p>E di nuovo le piramidi che risultano dalla divisione          siano divise similmente, e questo avvenga in          successione, finché dalla piramide ΔΕΖΘ siano          restate <u>certe</u> piramidi, che sono minori dell'eccesso          con cui la piramide ΔΕΖΘ eccede il solido X.</p>
--	---

La frase negativa che segue immediatamente il riconoscimento dell'assurdo ripete quasi sempre il determinativo iniziale, come abbiamo visto nel prospetto. A volte la *reductio* è accompagnata da una clausola in πλήν, che normalmente fa registrare un τις ulteriore e la cui portata esistenziale è abbastanza esplicita (per quanto neghi l'esistenza di più oggetti con una certa proprietà e quindi sia leggibile anche come affermazione di unicità).

Estremamente rare sono le presenze di forme di τις nelle costruzioni geometriche. Se escludiamo le clausole in ἐκκείσθω, rimangono una manciata di occorrenze. Nelle costruzioni si devono in effetti produrre molto raramente oggetti non completamente determinati. Quattro dei sei casi geometrici riguardano rette arbitrarie o condotte senza ulteriori vincoli a partire da un solo punto: III.1, VI.9, XI.4, 11, di cui abbiamo già letto il secondo e il quarto (per XI.12 si veda la sezione precedente, cui si aggiunga l'occorrenza in *Data* 67). Il verbo è διάγειν «condurre oltre», non a caso il verbo meno “vincolante” relativo a rette, e l'unico non strettamente legato a uno dei postulati (si veda la sez. 1.3). Analoga, ma riscalata di una dimensione quanto all'oggetto da tracciare, l'occorrenza in XII.17 (*EE IV*, 127.5):

<p>τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ <u>τινὶ</u> διὰ τοῦ          κέντρου.</p>	<p>Siano secate le sfere con <u>un certo</u> piano per il centro.</p>
---	---

Riassumendo, la presenza del determinativo di indefinitezza τις è richiesta quando un ente matematico, di norma introdotto per via stipulativa in parti liminari rispetto alla costruzione e alla catena dimostrativa, è legato strettamente ad oggetti che sono il vero soggetto matematico della proposizione, e che impongono su di esso dei vincoli. Prendiamo ad esempio il libro III: non ha senso riferirsi a «un certo» cerchio, mentre lo ha riferirsi ad «una certa» sua tangente (III.16) o corda (III.3), in quanto tali oggetti sono in senso forte (in quanto classe) determinati dal cerchio. I determinativi di indefinitezza introducono dunque una connotazione particolarizzante, atta a selezionare da un genere indifferenziato oggetti matematici soggetti a restrizioni che non li determinano però univocamente (cfr Humbert 1960, 26).

In ambito numerico la presenza del determinativo di indefinitezza è ancor più giustificata, in quanto la connotazione particolarizzante è maggiormente marcata, ed in effetti i tre libri aritmetici da soli raccolgono un terzo abbondante delle occorrenze, pur occupando un 16% scarso del trattato. Un numero particolare, per quanto indeterminato, ha una classe di riferimento che, in qualche senso, ha pochi gradi di libertà. Lo stesso non accade, ad esempio, per la classe dei triangoli isosceli all'interno di quella dei triangoli. Per questo motivo si possono fare affermazioni sui numeri il cui grado di particolarizzazione è variabile, e c'è una notevole differenza tra quelle che si applicano a «numero» in quanto denotante senza restrizioni la classe dei numeri o a «numero» in quanto entità arbitraria di un

insieme numerico soggetto a vincoli. Vediamo tutto ciò sull'esempio di VII.37 (EE II, 146.14-15) – si legga poi per confronto anche l'unica costruzione aritmetica, in IX.12:

ἐὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρήται, ὁ Qualora un numero sia misurato da un certo numero,  
μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι. il misurato avrà una parte omonima al misurante.

Una clausola in cui entrano determinativi di indefinitezza nei libri aritmetici è interessante in questa prospettiva: si tratta delle locuzioni del tipo ποιῶσί τινας «facciano certi «numeri»», con tutte le combinazioni possibili di singolare e plurale. Leggendo un enunciato formulato con questo tipo di clausola ci rendiamo anche conto di come la presenza o l'assenza del determinativo nell'esposizione non sia strettamente legata all'attribuzione di lettere denotative. Ecco VII.18 (EE II, 124.11-16):

ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσαντες Qualora due numeri moltiplicando un certo numero  
ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἔξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν facciano certi numeri, quelli che risultano da essi  
ἔξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν. avranno lo stesso rapporto di quelli che  
δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B ἀριθμὸν τινα τὸν Γ moltiplicano.  
πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι In effetti, due numeri A, B moltiplicando un certo  
ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. numero Γ facciamo Δ, Ε: dico che è come A  
rispetto a B, così Δ rispetto a Ε.

Qui la caduta del secondo determinativo è naturalmente connessa alla sua funzione pronominale (il primo è un aggettivo): l'introduzione del riferimento tramite lettere lo rende inutile.

#### 2.1.4. Qualificativi generalizzanti

I qualificativi generalizzanti sono impiegati sistematicamente solo nelle proposizioni dichiarate valide per molteplicità indeterminate di termini. Non è dunque sorprendente che quasi 2/3 delle occorrenze negli *Elementi* si trovino nei libri aritmetici (45 su 72). I qualificativi generalizzanti impiegati sono i seguenti, naturalmente sempre solo al plurale: ὅποσοιδηποτοῦν «quanti mai si voglia», ὅσοιδηποτοῦν «quanti mai si voglia», ὅποσοιοῦν «quanti si voglia» (numeri o molto raramente rette) o ὅποσοαῶν «quante si voglia» (grandezze)<sup>52</sup>. Quest'ultimo funziona da marcatore stilistico per il libro V, in quanto non vi si registrano occorrenze di qualificativi rafforzati dal suffisso -δηποτ-. Nei libri aritmetici le forme sono intercambiabili: ne troviamo a volte una nell'enunciato ed un'altra nell'esposizione. Vediamone la distribuzione nel prospetto seguente. Le occorrenze in ogni proposizione sono quasi sempre a terne o a coppie, a seconda che sia presente la conclusione generale (libro V) oppure no (libri aritmetici). Le due proposizioni marcate con asterisco \* hanno una sola occorrenza in enunciato o esposizione<sup>53</sup>.

	enunciato	esposizione	costruzione	citazione	conclusione
	VII.12, 14, 33, VIII.3,	VII.12, 14, 33,		VIII.2 <sup>54</sup> ,	
ὅποσοιοῦν	4*, 6-7, IX.8-13, 21-	VIII.1, 3, 6-7,		IX.28 <sup>55</sup> ,	
	23, 36	13, IX.8, 11,		32 <sup>56</sup> ,	

<sup>52</sup> Nelle opere minori del *corpus* euclideo troviamo anche espressioni come ὅπωςδηποτοῦν «come mai si voglia», ὅπωςοῦν «come si voglia» (entrambi una occorrenza in *Opt.* 23 e 28 A), ὅσδηποτοῦν «quale mai si voglia» (*Phaen.*, introduzione), ma non ce ne occuperemo.

<sup>53</sup> La traduzione di Gerardo da Cremona conferma che lo stesso accade nella tradizione arabo-latina.

<sup>54</sup> La citazione, non istanziata, è dell'enunciato di VIII.1.

		13, 21, 23		X.12 <sup>57</sup>
ὅποσαοῦν <sup>58</sup>	V.1 ( <i>bis</i> ), 12, 22	V.1 ( <i>bis</i> ), 12, 22, 23		V.12 ( <i>bis</i> ) <sup>59</sup> V.1 ( <i>bis</i> ), 12, 22
ὅποσοιδηποτοῦν		IX.12, 35		
ὄσοιδηποτοῦν	II.1, VIII.1, 13, IX.17, 35, bXI.37	IX.9, 10, 17, 22, 32*, 36, bXI.37	VI.1 ( <i>bis</i> ), 33 ( <i>bis</i> ), XI.25 ( <i>bis</i> ), XII.13 ( <i>bis</i> ) <sup>60</sup>	II.1

Dal prospetto risulta che un qualificativo generalizzante presente nell'enunciato permane nell'esposizione. Il fatto è a prima vista sorprendente, dato che la molteplicità è forzatamente istanziata su di un numero definito di termini. Vediamo dunque come funzionino questi qualificativi, sull'esempio dal trattamento delle progressioni geometriche di ragione qualsiasi in IX.35 (*EE* II, 223.2-11):

ἐὰν ὡσιν ὄσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπὸ τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρώτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ἔστωσαν ὄποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος ἐκάτερος τῶν ΒΗ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΓ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Qualora siano quanti mai si voglia numeri di séguito in proporzione continua, e <ne> siano sottratti uguali al primo sia dal secondo che dall'ultimo, sarà come l'eccesso del secondo rispetto al primo, così l'eccesso dell'ultimo rispetto a tutti quelli prima di se stesso.

Siano quanti mai si voglia numeri di séguito in proporzione continua Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ a partire da Α minimo, e sia sottratto da ΒΓ e ΕΖ uno e l'altro dei ΒΗ, ΖΘ<sup>61</sup> uguale a Α: dico che è come ΗΓ rispetto a Α, così ΕΘ rispetto a Α, ΒΓ, Δ.

La ragione ὁ Α della progressione non merita nessun determinativo di indeterminatezza, ed è anzi menzionata come di sfuggita; la molteplicità dei termini da sommare, arbitraria, riceve invece il qualificativo generalizzante ὄ(πο)σοιδηποτοῦν, nell'enunciato come nell'esposizione. L'esposizione è condotta, qui come ovunque altrove, sul numero minimale di termini perché la dimostrazione si possa applicare in tutta generalità. Nel nostro caso, l'enunciato ne menziona tre, «primo», «secondo» e «ultimo», ma nella dimostrazione occorre aggiungerne uno affinché «quelli prima» non siano solo il primo e il secondo, già introdotti per altri scopi. Si noti che il primo e il terzo termine, da cui non occorre sottrarre altri numeri, sono denotati da una sola lettera. La dimostrazione è generale esattamente perché non si usa il fatto che i termini siano un numero ben preciso. Poiché l'esposizione ripete rigidamente l'enunciato a parte la sostituzione delle lettere denotative ove possibile<sup>62</sup>, ne risulta

<sup>55</sup> La citazione, non istanziata, è dell'enunciato di IX.21.

<sup>56</sup> La citazione, non istanziata, è dell'enunciato di IX.13.

<sup>57</sup> La citazione, istanziata, è di VIII.4.

<sup>58</sup> Si aggiungano anche le due occorrenze, una in enunciato una nella costruzione, in *Data* 3.

<sup>59</sup> La citazione, non istanziata, è dell'enunciato di V.1.

<sup>60</sup> In queste quattro proposizioni il riferimento è all'arbitrarietà degli equimultipli nella costruzione necessaria ad un'applicazione di V.def.5.

<sup>61</sup> Contrariamente all'uso attuale, nello stile matematico greco viene specificato, qui con «uno e l'altro», quando i termini di una sequenza vanno presi separatamente, mentre l'assenza di specificazioni comporta che i termini vadano sommati; si veda la sez 2.10.

<sup>62</sup> La qualificazione «a partire da Α minimo» è necessaria nell'esposizione ma non nell'enunciato, dove l'ordinamento è implicito nell'assegnazione degli ordinali. Le lettere denotative intervengono a sostituire appunto gli ordinali, a rappresentare direttamente il segmento differenza, ecc.

la pratica, certamente sorprendente ai nostri occhi, per cui i termini delle sequenze concretamente assunte, denotati con lettere, sono qualificati come ὅποσοιδηποτοῦν «quanti mai si voglia».

La lesione alla generalità che interviene nell'esposizione a séguito dell'introduzione delle lettere è ovviamente solo apparente: denominare un oggetto «l'eccesso del secondo <sul primo>» oppure ὁ ΗΓ, una volta che sia stato detto che  $HΓ = BΓ - BH$ , con  $BH = A$ , non fa nessuna differenza. Si consideri inoltre che teoremi come IX.35 hanno una forte connotazione particolarizzatrice, e che l'unico parametro veramente libero è il numero di termini nella progressione, non a caso il solo dotato di qualificativo generalizzante.

Un ulteriore esempio è costituito da IX.36. Il teorema stabilisce una condizione sufficiente perché un numero sia perfetto, cioè uguale alla somma dei suoi divisori propri. La condizione coinvolge la somma di un'opportuna progressione geometrica di ragione 2. La dimostrazione è generale ma è ovviamente condotta su un'istanza concreta: anche se non era l'unico noto<sup>63</sup>, il numero di termini della serie è tale da fornire il numero perfetto 496. Nonostante ciò, il numero di termini riceve il qualificativo sia in enunciato che in esposizione (EE II, 224.13-23):

ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογία, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῆ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογία, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαρτι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.

Qualora a partire da un'unità quanti si voglia numeri siano fissati di séguito in proporzione raddoppiata, fino a che il totale composto sia primo, e il totale moltiplicato per l'ultimo faccia un certo «numero», quello che risulta sarà perfetto.

In effetti, a partire da un'unità siano fissati quanti mai si voglia numeri in proporzione raddoppiata, fino a che il totale composto sia primo, Α, Β, Γ, Δ, e uguale al totale sia Ε, e Ε moltiplicando Δ faccia ΖΗ. Dico che ΖΗ è perfetto.

La formulazione dell'esposizione merita una breve discussione. La dimostrazione ovviamente funziona quale che sia il numero di termini della progressione istanzati, ad esempio cinque (tre è un numero troppo basso, come vedremo tra un attimo), *anche se* in questo caso il numero risultante non è perfetto. È chiaro che, istanzando, occorre pur scegliere una molteplicità definita, ma ci si potrebbe chiedere se la forza della dimostrazione non sarebbe risultata accresciuta se fosse stata effettivamente condotta su di un caso che “non torna”. Ebbene, la formulazione dell'esposizione mostra che questo problema fu percepito, e che la scelta di quattro termini è deliberata. Primo, i termini non potevano essere meno di quattro in quanto occorre applicare IX.35, dove abbiamo appena visto che quattro era la molteplicità minimale. Progressioni a due o tre termini oltre l'unità, che forniscono i numeri perfetti 6 e 28, non erano quindi ammissibili. Sei termini, che forniscono 8128, sono in eccesso una volta che funzioni anche quattro, e costituirebbero, oltre che un inutile appesantimento, una deroga intollerabile ad una pratica di minimalità abbastanza strettamente osservata (si veda più oltre). Resta la scelta tra quattro e cinque, legata al problema esposto sopra. La minimalità orienta la decisione su quattro, che offre come *surplus* un numero perfetto (ne risulta un'applicazione di IX.35 a cinque termini). La formulazione dell'enunciato scelta dall'estensore permette di confezionare una dimostrazione istanziata irreprensibile dal punto di vista della generalità. Come visto più volte, in effetti, le lettere

<sup>63</sup> Le fonti greche attestano la conoscenza dei primi 4 numeri perfetti, 6, 28, 496, 8128. Si veda ad esempio Nicomaco, *Ar.* I.16. Egli asserisce che la condizione è anche necessaria per numeri perfetti pari, ma non fornisce una dimostrazione (ma si noti che per lui i numeri perfetti sono per definizione una sottospecie dei pari), che dobbiamo ad Eulero.

denotative sono il nome di una descrizione definita, quella sottolineata nell'esposizione. Porre il «nome» οἱ A, B, Γ, Δ *dopo* la frase relativa ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται «fino a che il totale sia primo» e non *prima* comporta di includerla nella descrizione definita che queste lettere denominano. Ne risulta che la sequenza effettivamente istanziata deve dar luogo, se sommata, ad un numero primo, il che non accade per cinque termini. Tale opzione è dunque esplicitamente esclusa fin dall'esposizione, in virtù della mera posizione in essa delle lettere denotative.

Restano ora da sostanziare le affermazioni sulla minimalità della molteplicità dei termini che ricevono il qualificativo generalizzante. Fornisco i dati rilevanti nei prospetti seguenti, che indicano, per le proposizioni elencate all'inizio di questa sezione, la molteplicità dei termini con cui sono istanziate. La metà superiore include le proposizioni istanziate con una molteplicità minimale, quella inferiore le proposizioni che (apparentemente) non lo sono (per queste segue un'ulteriore riga con le molteplicità in Gerardo da Cremona):

II	V		VI		VII		VIII		IX								XI	XII	bXI	
1	1	22	1	33	12	14	7	13	8	10	11	17	21	22	23	35	36	25	13	37
2	2	3	2	2	2+2	3	4	3	6	6	4	4	4	4	3	4	4	2	2	4

V	VII	VIII				IX			
12	33	1	3	4	6	9	12	13	32
3+3	3	4	4	2+2+2	5	6	4	4	3
3+3	3	4	4	2+2+2	5	4	4	4	3

Commenti sulla metà superiore. Le esposizioni con molteplicità 2 sono ovviamente minimali. Molteplicità maggiori sono forzate da richieste ineludibili dell'enunciato in V.22 e nell'analogia numerica VII.12 (teoremi «tramite uguale»), VIII.13 (molteplicità minima di numeri in proporzione continua), IX.8 (sono richiesti sette termini in proporzione continua compresa l'unità), 21-22 (2 non è il miglior esempio di numero pari), 23 (3 è il primo numero dispari), bXI.37 (molteplicità minima di rette in proporzione generica). Ragioni legate alla formulazione dell'enunciato forzano il numero di termini in VIII.7, IX.17 (menzionati «primo», «secondo» e «ultimo» termine: occorre quindi che ce ne sia almeno un'altro nel mezzo), IX.10 (menzionati il terzo nella sequenza e οἱ δύο διαλείποντες πάντες «tutti quelli tralasciandone due»), 11 (menzionati il «minore», il «maggiore» e τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς «un certo «numero» tra quelli che sussistono nei numeri in proporzione»: il plurale implica dunque che ci siano almeno 4 termini), 35 (visto sopra, così come IX.36).

Commenti sulla metà inferiore. In V.12, 2+2 grandezze sarebbero sufficienti, e in effetti è applicata V.1 che è istanziata con con 2 grandezze, e nell'analogia VII.12 l'esposizione è fatta su 2+2 numeri. In VII.33 basterebbero 2 numeri. In VIII.1 ne bastano decisamente 3. Un'occhiata più approfondita alle dimostrazioni delle altre proposizioni rivela che il requisito di minimalità è in esse soddisfatto. In VIII.6 sembra ne bastino 3, ed in effetti due dei termini istanziate non sono usati nella dimostrazione. Si noti però che l'esposizione menziona «primo», «secondo» e «nessun altro» (EE II, 159.15-19):

ἔστωσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, E, ὁ δὲ A τὸν B μὴ μετρεῖτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Siano quanti si voglia numeri di séguito in proporzione A, B, Γ, Δ, E, e A non misuri B: dico che neanche nessun altro misurerà nessuno.

Dobbiamo quindi supporre che ce ne siano almeno quattro (i tre menzionati e il restante non misurato da nessuno di questi tre). La dimostrazione richiede poi un termine aggiuntivo, in quanto spiega perché siano non misurabili anche due termini non consecutivi (per termini consecutivi è ovvio), e da qui, tramite dimostrazione potenziale, quelli ancora più distanziati nella sequenza. Dunque sono necessari 5 termini. La dimostrazione smentisce tutto ciò prendendo come termine «nessun altro» il «primo». Dato che ἄλλος «altro» nell'enunciato è esclusivo, la dimostrazione greca è dunque da considerarsi scorretta in questo rispetto. In VIII.3 ne bastano 3 ma la connotazione esplicitamente iterativa della costruzione suggerisce di arrivare fino a 4 termini. In VIII.4 la procedura di costruzione per 2+2 termini non è sufficientemente generale da essere applicabile a sequenze di molteplicità superiore, quella per 2+2+2 termini lo è. In IX.9 uno dei 6 termini istanziati non compare nella dimostrazione, che però cita esplicitamente IX.8, dove i 6 termini sono richiesti (i 4 termini in Gerardo da Cremona sono minimali ed infatti la sua dimostrazione è diversa – cfr. Busard 1984, cc. 215.48-216.7). In IX.12 e 13 basterebbero meno di 4 termini ma le due dimostrazioni sono esplicitamente iterative. Mettere in rilievo questa caratteristica comporta un passaggio, e quindi un termine, in più. In IX.32 basterebbero 2 termini, ma 3 servono per applicare IX.13 ai 3 arbitrari più la diade. Ne concludo che le uniche proposizioni dove venga meno il requisito di minimalità sono V.12, VII.33 e VIII.1, cioè una frangia marginale (3 su 31).

Considerazioni di minimalità prevalgono anche, in maniera più facilmente esperibile, nei teoremi che coinvolgono poligoni (VI.20, XII.1, 6)<sup>64</sup>, figure rettilinee (VI.18, 21, 22, 25, 28 e 29) o εἶδη «forme» (VI.31 e il corollario a VI.19)<sup>65</sup>. Ogni dimostrazione è condotta ovviamente con un numero di lati fissato, che è quello minimale perché non risulti lesa la sua generalità. Nel caso di poligoni è usato sempre un pentagono<sup>66</sup>. Questo per due motivi. In primo luogo, né un triangolo né un quadrilatero sono poligoni: ciò risulta ragionevolmente chiaro da I.def.19, dove si elencano le tre specie in cui si ripartisce la classe delle figure rettilinee: «polilatero <sono> quelle comprese da più di quattro rette» (EE I, 3.9-12)<sup>67</sup>. In secondo luogo, in VI.20 e XII.6 la scelta di un poligono con più di 4 lati è cruciale perché la dimostrazione contenga tutti i passaggi necessari alla sua estensione a numero di lati qualsiasi. Il pentagono è in effetti diviso in triangoli conducendo tutte le diagonali da un vertice (cioè 2, ma naturalmente ciò non è specificato): dei tre triangoli risultanti quello «interno» ha uno statuto differente dagli altri due, in quanto solo uno dei suoi lati coincide con un lato del pentagono. La dimostrazione procede con una specie di induzione sul numero dei lati, ed il passaggio da un triangolo «esterno» ad uno «interno» comporta dei passaggi addizionali inevitabili. In un quadrilatero tale triangolo «interno» non esiste, e la dimostrazione è conseguentemente semplificata e qualitativamente diversa. Dato che nel testo greco sia VI.20 che XII.6 (quest'ultima con la riserva della sua probabile non autenticità) sono estensioni di proposizioni analoghe enunciate per triangoli, occorre intendere che la dimostrazione per i quadrilateri sia sottintesa in quanto ovvia e inutile per l'economia deduttiva<sup>68</sup>.

Quanto a XII.1, dove il triangolo «interno» non serve, si osservi che essa viene usata in teoremi dove la si applica a un poligono con numeri arbitrariamente alti di lati: dimostrarla per un quadrilatero sarebbe stato bizzarro, oltre che non in linea con la definizione appena vista di poligono. Quando si

<sup>64</sup> XII.6 non esiste nella tradizione indiretta né in **b**, ed è quindi quasi sicuramente un'aggiunta posteriore.

<sup>65</sup> Il corollario è attestato sia nella tradizione greca che in quella arabo-latina e quindi non abbiamo ragione di sospettare della sua autenticità, fatta salva l'evidente interpolazione finale (clausola in ἐπειδήπερ in EE II, 72.5-7).

<sup>66</sup> Che sia un pentagono il poligono in gioco *non* si ricava dalla figura, ma dal numero delle lettere che nel testo denotano l'oggetto geometrico «poligono».

<sup>67</sup> Si noti che «polilatero» è uno *hapax* nel *corpus* euclideo. Come per tutte le definizioni, niente ci garantisce che sia originale, ma questo fatto conta relativamente; analoga partizione e definizione troviamo in *Definitiones* 39 e 64, *HOO* IV, 38.9-11 e 46.8-10: il tutto era quindi canonico.

<sup>68</sup> Evidentemente questo non era il parere dell'estensore del primo corollario a VI.20, assente in tutta la tradizione arabo-latina.

vogliamo includere anche triangoli e quadrilateri si parla di «figure rettilinee», e in effetti le dimostrazioni di I.45 e VI.18 sono condotte sul numero di lati minimale per essere immediatamente estendibili, cioè 4.

In II.14, VI.21, 28 e 29 le figure sono denotate da una singola lettera ed è irrilevante quale tracciare nel diagramma: Heiberg generalizza scorrettamente ponendo dei quadrilateri (pentagono in VI.29), mentre i codici hanno concordemente triangoli. VI.22 e 25 si riferiscono a coppie di figure indipendenti: nei codici troviamo quindi triangoli e quadrilateri, ma questi ultimi sono denotati in VI.22 da 3 lettere, in VI.25 da una sola. La scelta di variare il numero di lati può ben essere un capriccio di qualche illustratore. Le εἴδη «forme» in VI.19 *porisma* e 31 sono un sinonimo di «figure rettilinee» e non sono neanche denotate da lettere, ma da un'espressione del tipo τὸ εἶδος ἀπό «la forma su...». La formulazione non pregiudica quindi in niente la scelta del numero di lati (il corollario non ha ovviamente neanche la figura): nei codici in effetti non troviamo tracciata nessuna di queste forme: anche qui Heiberg ha apportato modifiche, aggiungendo le «forme» come quadrilateri.

Con le proposizioni V.20, V.21 e V.23 ci troviamo di fronte a un problema interessante, che merita analizzare in dettaglio: in **G** le proposizioni sono enunciate in completa generalità<sup>69</sup>, mentre **APT** menzionano esplicitamente tre coppie di grandezze. Un fenomeno analogo è riscontrabile in VI.22 e XI.37, mentre in V.22 anche **PT** ricorre ad un enunciato in termini generali. I dati sono raccolti nel prospetto seguente, dove «3» o «4» denotano il numero delle grandezze cui viene fatto riferimento, «gen» significa che la generalità dell'enunciato è resa esplicita da un qualificativo opportuno delle grandezze in questione<sup>70</sup>, «(gen)» significa che la generalità è sottintesa (assenza di qualificativi). Il primo dato in ciascuna cella è quello dell'enunciato, il secondo quello dell'esposizione (**b** si accorda con **AG** per XI.37)<sup>71</sup>.

	<b>A</b>	<b>G</b>	<b>PT</b>
V.20	3/3	gen/3	3/3
V.21	3/3	gen/3	3/3
V.22	3/3	gen/3	gen/gen
V.23	3/3	gen/(gen)	3/3
VI.22	gen/4	(gen)/(gen)	4/4
XI.37	gen/gen	gen/gen	4/4

I dati sono apparentemente contraddittori, ma possono ricevere una spiegazione soddisfacente<sup>72</sup>.

1) La proposizione V.20 ristretta a tre coppie di grandezze è sufficiente, dato che è immediato generalizzare la dimostrazione di V.22, che è una conseguenza diretta di V.20, e la generalizzazione non dipende da una corrispondente generalizzazione di V.20<sup>73</sup>. D'altro canto, la dimostrazione di V.20 non si presta ad una generalizzazione immediata. Certo, il risultato di V.20 vale in generale, e possiamo dimostrarlo facilmente usando V.16. Non si tratta però di una via praticabile: se vogliamo seguire lo stesso schema dimostrativo degli *Elementi*, dovremmo applicare V.22 – dimostrata a partire

<sup>69</sup> **G** si riferisce a «aliquot/quotlibet quantitates». Si veda Busard 1984, cc. 131.22, 131.58, 133.22. Si confronti il numerale «due» nell'esposizione di V.8.

<sup>70</sup> Ad esempio «quotlibet» (che è il termine preferito) o «quotcumque» in **AG**, ὀποσαοὺν in **PT** e ὀσαυδηποτοῦν in XI.37 **b**.

<sup>71</sup> **PT** danno i numerali anche negli enunciati e nelle esposizioni di V.6, V.16 e V.25, e lo stesso fanno **AG** e **AB**.

<sup>72</sup> Fonti arabe (solo per il libro V; cfr. Engroff 1981): le proposizioni 20-23 hanno nella famiglia **A** un enunciato generale e un'esposizione gen oppure (gen). La famiglia **B** si accorda con **A**, anche se nel caso degli enunciati di V.22 e V.23 solo uno dei manoscritti dà i numerali.

<sup>73</sup> Dal momento che V.20 e 21 hanno dimostrazioni identiche, enunciare V.20 in tutta generalità avrebbe immediatamente comportato la possibilità di farlo anche per V.21.

da V.20 stessa – e l'argomento risulterebbe circolare (si noti anche che V.16 comporterebbe un vincolo di omogeneità non necessario). Infine, una generalizzazione di V.21 e V.23 a molteplicità arbitrarie di coppie di grandezze si scontrerebbe con la difficoltà che la definizione di proporzione perturbata ammette più estensioni. Insomma, per quanto riguarda V.20-23, ciò che osserviamo in **PT** ha un grado maggiore di fondatezza matematica di quanto proposto in **AG**.

2) Come già osservato, negli *Elementi*, quando l'enunciato corrispondente faccia esplicito riferimento ad un numero indefinito di oggetti, l'aggettivo indefinito dell'enunciato è normalmente ripetuto nell'esposizione, quale che sia il numero di oggetti concretamente messi in gioco<sup>74</sup>. Questi non sono mai qualificati con il numerale corrispondente. Contro tale pratica andrebbero **PT** se presentassero una situazione come quella della versione **G** di V.20-22 o della versione **A** di VI.22.

3) Dato l'accordo di **A** e **PT** su V.20, 21, 23, e tenendo conto di quanto appena detto, se ne conclude che **G** ha subito modifiche editoriali, e che le formulazioni degli enunciati in **APT** sono più antiche. Per V.22 quanto visto nel punto 1) non sembra recare aiuto: in tutte le applicazioni di V.22 in **PT** si usano solo tre coppie di grandezze<sup>75</sup>. Addirittura, alla doppia applicazione di V.22 alla fine di XII.6 non è preferita una più economica applicazione singola istanziata con quattro coppie di grandezze (*EE* IV, 96.12-97.9). Si ricordi però che XII.6 è assente in **AG**: come aggiunta posteriore, a maggior ragione dovrebbe citare risultati già presenti nel testo in maniera conforme alla loro formulazione. Ma il riferimento, quando sia implicito, è di norma all'esposizione della proposizione citata, e V.22 è istanziata e dimostrata in **A** come in **GPT** su *tre* coppie di grandezze: il valore della testimonianza di XII.6 si riduce quindi a ben poco. Si osservi infine che il corrispondente teorema *ex aequali* per numeri (VII.14) è enunciato in termini generali, e V.22 è *per se* una proposizione molto importante. Occorrono dati in più per decidere.

4) Questi vengono da VI.22 e XI.37. In **PT** VI.22 (risp. XI.37) afferma che, date quattro rette in proporzione, le figure rettilinee (risp. solidi parallelepipedi) simili e descritte similmente su di esse saranno proporzionali, e l'inverso. Una generalizzazione ad un numero arbitrario (ma pari) di rette in proporzione è immediata via V.11, ma si può ben fare a meno di renderla esplicita, di modo che la versione più generale di VI.22 che troviamo in **AG** differisce soltanto nell'enunciato e nell'esposizione, mentre la dimostrazione è la stessa di **PT**. La dimostrazione di VI.22 (in **PTAG**) applica la proprietà *ex aequali* di V.22 e niente altro è che una dimostrazione che due rapporti sono lo stesso se e solo se lo sono i corrispondenti rapporti raddoppiati (sulla questione si veda Saito 1993). In particolare, la seconda parte dell'enunciato è dimostrata per mezzo di un argomento indiretto che sfrutta l'osservazione che, se due figure rettilinee sono simili, poste similmente ed uguali, allora i loro lati omologhi sono uguali (cioè le figure sono congruenti)<sup>76</sup>. La dimostrazione di XI.37, invece, si riferisce direttamente al risultato (dimostrato in XI.33) che solidi parallelepipedi simili sono uno rispetto all'altro in rapporto triplicato di quello dei lati omologhi, e *assume* due rapporti sono lo stesso se e solo se lo sono i corrispondenti rapporti triplicati: l'argomento contenuto nella seconda parte di

<sup>74</sup> **G** ha la formulazione con aggettivo (con «quotcumque» – quasi sempre – e «quotlibet») solo nell'enunciato, mentre nell'esposizione non c'è qualificazione, di modo che l'affermazione è generale. Di conseguenza la formulazione di **G** in V.20, 21, 23 è in contraddizione con quella di **G** stesso altrove. Si noti che in tre occasioni (V.5, 17, 19) **G** specifica già nell'enunciato il numero delle grandezze in gioco, mentre il testo greco lo sottintende. La specificazione dei numerali è confermata da *AB* sia in V.5 che in V.19. Per V.17 solo un manoscritto in *A* conferma la lezione di **G**. **A** ha aggettivi indefinite solo in cinque proposizioni tra quelle elencate sopra. Si noti anche che **G** aggiunge gli ordinali nella dimostrazione di V.6; questa caratteristica è presa a prestito da *A*. A differenza del testo greco, **AGAB** aggiungono tutti i numerali nella citazione di V.2 contenuta nella dimostrazione di V.17.

<sup>75</sup> Si veda Aujac 1986, 385, per un prospetto delle occorrenze del termine *di'isou* nel *corpus* matematico antico. La proposizione VII.14 (la proprietà *di'isou* per rapporti numerici), per quanto istanziata con tre coppie, è applicata a più di tre coppie in VIII.1, 8, 13, IX.36.

<sup>76</sup> Gli *Elementi* contengono un lemma piuttosto mal redatto (VI.22/23) che dimostra quest'asserzione. Heiberg lo considera un'interpunzione pre-teonina (*EE* II, 80.6 *in app.*). Il lemma è assente in **AG**.

VI.22 non c'è. I commentatori moderni hanno da subito avuto perplessità riguardo a XI.37: Clavio adotta una dimostrazione simile a quella di VI.22 e trascrive quella di **PT** chiosando: «Brevius tota haec propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo» (Clavius 1611, 508). Siamo arrivati in fondo. Primo: **AG** e **b** hanno una dimostrazione del tutto differente di XI.37, del tutto analoga a quella di VI.22 che troviamo in **PT**. Secondo: **G** scrive, come commento alla sua VI.22: «Inveni in aliis scripturis aliam ab hac quam modo premisi probationem, que est huiusmodi»; segue (Busard 1984, c. 155.6-20) una dimostrazione che ricalca la stessa linea deduttiva (più breve e con riferimento esplicito a rapporti raddoppiati) della dimostrazione di XI.37 in **PT**. Ne consegue che esistevano due versioni parallele di VI.22 e XI.37, e suggerisco che quelle più lunghe, meglio fondate e più variate da un punto di vista tecnico fossero quelle originali<sup>77</sup>.

5) Ultimo colpo di scena: nella versione di **b** di XI.37 troviamo un'applicazione di V.22 a quattro coppie di grandezze<sup>78</sup>, mossa non lecita se l'enunciato originale di V.22 avesse fatto riferimento solo a tre coppie di grandezze. Se ne conclude che la versione di V.22 attestata in **PT** deve essere quella più antica. Le versioni in **AG** sono revisioni posteriori, intese uniformare gli enunciati di V.20-23.

L'esempio appena discusso permette di trarre una conclusione di portata più ampia: negli *Elementi*, così come nel *corpus* antico, non c'è mai tendenza ad enunciare un teorema nei termini più generali possibili. È anzi vero il contrario, dato che nelle applicazioni successive tali formulazioni generali non sono quasi mai richieste: un esempio paradigmatico sono V.2-3, 5-6 (cfr. sez. 1.5.1.4).

Forme di ὅποιοσούν «quale si voglia» indicano l'arbitrarietà della scelta tra due o più opzioni<sup>79</sup>. La scelta può essere di 1 tra 2: II.def.1, corollario a VI.8, ma anche di 2 tra 3: IX.15 e XI.20-22 (ma le occorrenze in XI.21-22 sono semplicemente due citazioni istanziate di XI.20); di 3 da 4: *Data* 83; in V.def.5, V.4 e *Data* 77 il numero di opzioni a disposizione è illimitato, e se ne deve scegliere una<sup>80</sup>. Uno sguardo alla tradizione indiretta mostra, come ormai possiamo attenderci, che essa è meno ricca: **AG** non hanno il determinativo in II.def.1; lo hanno in XI.20 e non in XI.21-22 perché in queste ultime mancano le due citazioni istanziate<sup>81</sup>. Le occorrenze di δύο ὅποιοσούν sia nell'enunciato che nell'esposizione di IX.15 sono confermate da **G** (che però traduce «omnes duo») e da entrambe le famiglie della tradizione araba. Purtroppo non esiste nessuna edizione della traduzione araba dei *Data*, e la traduzione latina medievale è fatta sul testo greco. Il determinativo in V.def.5 e V.4 merita una discussione a parte, che faremo nella sez. 2.8.

Il corollario a VI.8 offre un certo numero di spunti interessanti. Leggiamo il testo di Heiberg (*EE* II, 56.19-57.3):

<p>ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, ἢ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν ὅπερ ἔδει δειξαί [καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὀποιοσούν τῶν τμημάτων ἢ πρὸς τῷ τμήματι</p>	<p>Da questo è pertanto manifesto che, qualora in un triangolo rettangolo dall'angolo retto sia condotta una retta perpendicolare alla base, quella condotta è media proporzionale dei segmenti della base: il che si doveva dimostrare [e ancora che il lato corrispondente al segmento è medio proporzionale della base e di uno solo <u>quale si</u></p>
---	---

<sup>77</sup> Non so spiegarmi perché, nel testo trasmesso degli *Elementi*, si trovi solo la versione teonina di XI.37.

<sup>78</sup> *EE* IV, 209.8-11. Le versioni in **AG** sono più compresse e mancano dell'argomento in tramite uguale. Ma qui l'autorità **b** è decisiva.

<sup>79</sup> Solo 2 occorrenze di ὅστισούν «qualunque», in VII.38 (*EE* II, 147.9-11).

<sup>80</sup> Trascuro l'occorrenza nel Lemma X.27/28, relegato da Heiberg in appendice perché presente solo in **V**. Il carattere spurio di tutto il lemma è evidente; oltretutto stabilisce un risultato falso.

<sup>81</sup> Delle quattro occorrenze nel testo greco di XI.20, solo tre sono preservate. Gerardo rende δύο ὀποιοσούν sempre con «omnes duo», come in IX.15, Adelardo una volta così e le altre due con «duo quolibet/quilibet». L'occorrenza mancante è in un richiamo all'evidenza sicuramente interpolato.

πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν].

voglia dei segmenti].

Occorre dare un'occhiata anche all'apparato: la clausola posta tra quadre da Heiberg si trova in **PBp** nel testo principale, in **F** di prima mano su cancellatura e in **V** di seconda mano in margine<sup>82</sup>. Heiberg la mantiene nel testo ma è convinto che sia spuria: «sine dubio interpolata est». Motivi: segue e non precede la clausola canonica «il che si doveva dimostrare», non viene mai usata e mancava in buoni codici teonini. Heiberg valuta male la questione: la presenza o assenza della clausola canonica non dice niente, e questa è presente solo in **P**, dove sarà stata una distrazione del copista. Allo stesso modo, le testimonianze di **F** e **V** hanno scarso valore se non corroborate da altra evidenza. Infine, il mancato uso del corollario non fornisce alcuna prova, dato che anche proposizioni dallo statuto testuale inattaccabile non vengono mai usate. Tutto ciò non garantisce che il corollario sia originale, ma che sia molto antico e vada conservato integralmente mi pare indubbio. Questo fatto è confermato dalla sua presenza nella tradizione indiretta – si noti l'aumento di determinazioni di generalità, parte delle quali fuori posto o francamente oziose; l'unica attestata nel testo greco permane, e doveva essere presente anche nella formulazione originaria (Busard 1983, 173.209-212 e Busard 1984, cc. 144.53-145.4):

Adelardo I

unde etiam manifestum est quia omnis trianguli rectanguli a cuius angulo recto perpendicularis ad basim exierit, erit perpendicularis proportio ad dividientia basis, unicuique etiam lateri ad totam basim atque ad dividientia singularia.

Gerardo

unde ex hoc manifestum est quod perpendicularis protracta ab omni recto angulo cuiuslibet trianguli ad basim est proportionalis inter duas sectiones basis, et quod unumquodque duorum laterum trianguli est proportionale inter basim et unam sectionum eius quod ipsam sequitur.

*vel aliter:* unde ex hoc manifestum est quod perpendicularis producta ad basim a recto angulo cuiuslibet trianguli est media in proportione inter easdem sectiones basis. quod tamen in greco non invenitur, et unumquodque duorum laterum trianguli est medium in proportione unicuique basi et inter unamquamque duarum sectionum eius.

Insomma, prescindendo dalle formulazioni a volte piuttosto oscure dei latini, il corollario è ben radicato nella tradizione, e la sua formulazione greca, alquanto asciutta in fatto di determinazioni di generalità, si raccomanda come molto antica. Gerardo, come spesso accade, collaziona senza scegliere, ed è per noi la fonte più preziosa: la sua versione *aliter* conferma che circolasse una versione del corollario mutila alla fine.

### 2.1.5. *Uso dell'articolo*

Un problema molto sottile per l'espressione della generalità negli *enunciati* viene a creare la presenza o meno di un articolo che determini gli oggetti matematici in gioco (si ricordi che in greco esiste solo l'articolo determinativo). L'articolo è sempre presente, ovviamente al plurale, quando intere classi di oggetti siano menzionate nell'enunciato, come nell'esempio di I.47 letto all'inizio di questa sezione. Qui non sorge nessun problema di generalità, come già faceva osservare Galeno in *Inst. log.* XII.7. D'altro canto, non sono per niente infrequenti i casi di enunciati riferiti ad un *singolo* oggetto generico

<sup>82</sup> **F** ha come determinativo l'inedito ὁποτερουούν.

di una certa classe, e in cui l'oggetto sia dotato di articolo. Occorre discuterli per capire se la sua presenza fa perdere generalità all'enunciato oppure no.

Gli esempi più numerosi vengono dagli enunciati di problemi: l'oggetto da costruire è privo di articolo, ma i dati lo hanno sempre, e questo permane anche nell'esposizione, come in *El. I.1 (EE I, 7.2-6)*:

ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.	Costruire <u>su una</u> retta limitata data un triangolo equilatero.
ἔστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.	Sia <u>una</u> retta limitata data AB.
δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.	Si deve pertanto costruire sulla retta AB un triangolo equilatero.

Potrebbe sembrare di trovarsi di fronte ad un difetto di generalità, visto che è comunque una retta generica quella data. Al problema si possono dare due risposte tra loro complementari: una puramente grammaticale (Federspiel 1995), l'altra rivolgendosi al contesto.

Il motivo grammaticale è che l'articolo è richiesto quando sia presente un participio congiunto in posizione attributiva determinato da un complemento in forma preposizionale (cfr. la discussione di I.29 nella sez. 1.0.4). Con il predicato *δοθέν*, però, la situazione è diversa, in quanto non è dotato di complemento. Essendo possibili anche i costrutti in cui nessun articolo accompagna *δοθέν*, la soluzione adottata sarebbe quindi frutto di una scelta puramente stilistica, mantenuta coerentemente lungo tutti gli *Elementi*.

La seconda risposta è complementare alla precedente. Le proposizioni degli *Elementi* dove un oggetto è qualificato «dato» sono invariabilmente dei problemi di costruzione, ed il dato è ciò «a partire da cui» va effettuata la costruzione. L'enunciato di un problema è formulato con il verbo all'infinito, da intendersi retto da un imperativo sottinteso, come *ἡτήσθω* per i postulati. Il contesto è quindi di tipo dialettico, dove chi interroga propone un oggetto geometrico e chi risponde ha il compito di effettuarvi la costruzione. Per questo motivo l'oggetto dato è «presente» al matematico in senso più forte che non uno dei dati di un teorema: è dato proprio quell'oggetto proposto da chi interroga.

Quanto al carattere dialettico, si ricordi che *πρόβλημα* «problema» è un deverbale da *προβάλλω* ed è quindi in senso proprio «ciò che è proposto», o meglio ancora «ciò che è gettato davanti»; il suo uso come termine tecnico in contesti dialettici è ben stabilito e la derivazione del termine matematico da questi praticamente certa<sup>83</sup>. Ovviamente, la formulazione di un *πρόβλημα* dialettico (normalmente una domanda del tipo «*p* oppure non-*p*?», ma Aristotele chiama *πρόβλημα* anche il singolo asserto derivante dall'aver scelto uno dei corni dell'alternativa) non corrisponde a quella di un problema geometrico: il prestito sarà stato soltanto terminologico, ma resta il fatto che un problema matematico è in senso molto proprio una sfida proposta da chi interroga a chi risponde, e chi interroga fissa il «soggetto» su cui chi risponde dovrà elaborare. In un testo matematico tutto ciò è una finzione, ma ne sono rimaste tracce inequivocabili nella canonizzazione linguistica. Diverso è invece quanto succede nei *Data*, dove l'articolo è sempre assente, come vediamo sull'esempio di della prop. 78 (*EOO VI, 150.2-8*):

<sup>83</sup> Cfr. *in primis* Aristotele, *Top.* A 4. Sulla struttura della disputa dialettica si veda l'introduzione di J. Brunschwig (1967) alla sua edizione di *Top.* I-IV. Per un uso «etimologico» del verbo in contesto matematico si veda la lettera prefatoria di Archimede a *Con. sph.*, *AOO I*, 246.8, 248.11, 250.24, 254.21, le ultime tre nel bel corto circuito terminologico *προβάλλεται / προεβάλλετο τάδε θεωρήσαι* «è / era proposto di esaminare ciò».

ἐὰν δοθὲν εἶδος πρὸς τι ὀρθογώνιον λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχη δοθέντα, δέδοται τὸ ὀρθογώνιον τῷ εἶδει.

δοθὲν γὰρ εἶδος τὸ AZB πρὸς τι ὀρθογώνιον τὸ ΓΔ λόγον ἔχέτω δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τῆς ZB πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἶδει.

Qualora una forma data rispetto ad un certo rettangolo abbia rapporto dato, e un solo lato rispetto ad un solo lato abbia rapporto dato, il rettangolo risulta dato in forma.

In effetti, una forma data AZB rispetto ad un certo rettangolo ΓΔ abbia rapporto dato, e sia il rapporto di ZB rispetto ad ΕΔ dato: dico che ΓΔ risulta dato in forma.

Quanto detto sopra spiega perché qui l'articolo non ci sia: basta osservare che questo dei *Data* è un teorema e non un problema – nessuna proposizione di *Data* potrebbe essere un problema – e quindi lo statuto dei dati geometrici di partenza è ben differente. Il contesto non mostra più reminiscenze dialettiche; ci si occupa semplicemente della trasferibilità del predicato «dato» da certi oggetti ad altri. Essendo il predicato la vera materia d'indagine, il fatto che qualifichi enti geometrici è tutto sommato un carattere accessorio: i *Data* trattano di oggetti matematici solo in quanto «dati», e non di oggetti matematici un cui carattere accidentale sia quello di essere dati. Negli *Elementi* è esattamente il contrario: è investigato l'oggetto matematico, e il suo essere qualificato come «dato» è dovuto alla situazione contingente del problema. La spiegazione semantica e contestuale che ho proposto rende quindi ragione della differenza tra gli *Elementi* e i *Data*.

Un'analisi delle occorrenze del predicato *δοθέν* in altri autori permette solo di ampliare il campione. Conviene partire dai dati sull'uso differenziale dei participi *δοθέν* / *δεδομένον* per indicare che una grandezza è data. Il primo è un aoristo passivo, il secondo un perfetto medio-passivo: il primo esprime l'aspetto puntuale di un'azione ed è quindi più adatto nelle supposizioni; il secondo, che in tutto il *corpus* euclideo troviamo solo nei *Data*, viene impiegato per il suo valore aspettuale di «presente compiuto», svincolato da connotazioni temporali o di durata. Questa connotazione è prevalente su quella risultativa: altrimenti dovremmo attenderci che figurasse di preferenza nelle inferenze, sia nei passaggi intermedi che nella conclusione, oppure quando si faccia riferimento a grandezze date già incontrate nel corso della dimostrazione, eppure la distinzione non ha alcun peso nei *Data*, dove i due predicati sono usati indifferentemente. Troviamo solo la prima forma negli *Elementi*, dove *δοθέν* «dato» è predicato unicamente al livello di supposizioni<sup>84</sup>. Nelle *Coniche* di Apollonio il rapporto è 180/11<sup>85</sup>, nel *corpus* archimedeo 119/15 (di queste ultime ben 14 in *Spir.* e la rimanente in *Fluit.* II.10)<sup>86</sup>. Nei *Data* troviamo entrambi, in rapporto 1128/509, e questo valore costituisce in qualche modo un'eccezione: la preferenza degli autori matematici è sicuramente per l'aoristo passivo. Ho controllato presenza o assenza dell'articolo, in Apollonio ed Archimede, nelle occorrenze di *δοθέν* analoghe a quelle degli *Elementi*, cioè ad indicare nella loro prima occorrenza grandezze assegnate come date in un enunciato o in un'esposizione<sup>87</sup>.

Il campione non è molto ampio, dato che entrambi gli autori risolvono un certo numero di problemi per analisi e sintesi: la gran parte delle occorrenze si trova quindi all'interno di catene di dati, dove il

<sup>84</sup> Le 2 occorrenze di participio presente in IV.5por e nella determinazione di VI.28 (*EE* I, 159.15, e II, 90.6) sono la prima sicuramente spuria, la seconda forse dubbia e da correggere in un perfetto (ma si vedano le note successive; le altre due determinazioni negli *Elementi* non contengono il predicato «dato»). Nei *Data* non si riscontra nessuna occorrenza del tema del presente.

<sup>85</sup> Anche qui 2 occorrenze di participio presente, all'interno di un'esposizione parziale in II.49 e nella determinazione di II.53 (*AGE* I, 276.23 e 310.22). L'unica altra determinazione in II.50 ha un participio perfetto.

<sup>86</sup> Anche qui 2 occorrenze di participio presente, nell'esposizione di *Sph. cyl.* II.1 e nella determinazione di II.7 (*AOO* I, 170.13 e 208.13). Si tratta della sola determinazione in Archimede. Per quanto il campione sia minimo, sembra che il participio presente caratterizzi le determinazioni. Se dunque vanno proposte emendazioni, occorrerà correggere il participio perfetto di *Con.* II.50 (la proposta opposta in Federspiel 2000, 374-376).

<sup>87</sup> Escludendo ovviamente le occorrenze in genitivi assoluti, dove l'articolo è forzatamente omesso.

participio è in posizione predicativa e quindi necessariamente sprovvisto di articolo. In Apollonio le occorrenze rilevanti sono concentrate nei problemi in *Con.* I.52-60, II.4, II.44-47, 49-51, 53<sup>88</sup>. Escludendo II.4, che è sicuramente un'aggiunta eutociana, gli altri problemi presentano particolarità linguistiche eccentriche che suggeriscono di considerarli redazioni precedenti integrate da Apollonio nel suo trattato (Federspiel 2008). All'interno di questo piccolo *corpus* si rintracciano varianti rispetto all'uso euclideo solo negli enunciati di I.52 e 56<sup>89</sup>: le espressioni sono ἐν δοθείση γωνία e ἐν γωνία δοθείση «in un angolo dato», da confrontare ad esempio con l'analogo ἐν τῇ δοθείση γωνία in *El.* I.42, 44-45. Le due in Apollonio ricorrono però in due frasi identiche dal sapore formulare accentuato, coinvolgono il sostantivo γωνία, che è refrattario alla ricezione dell'articolo (Federspiel 1995, 290-293), e soprattutto confliggono con la formulazione di tre frasi identiche contenute nelle proposizioni I.54, 59-60<sup>90</sup>, dove troviamo l'articolo. Quelle in I. 52 e 56 non sono dunque occorrenze significative, potendosi ben trattare di scorsi di penna di copisti. Per quanto riguarda Archimede, la situazione è del tutto analoga: 1 sola occorrenza senza articolo, nella lettera prefatoria di *Con. sph.* (AOO I, 258.13).

Una ricerca sui campioni, già piuttosto ristretti, di occorrenze di δεδομένον rivela una situazione analoga. Solo 2 occorrenze in Apollonio hanno l'articolo (I.55 e la seconda in II.50), ma l'assenza nelle altre è forzata o dall'essere il participio in posizione predicativa (II.47), oppure dal trovarsi all'interno di una citazione di un enunciato dei *Data* (II.46, 49, prima e terza in 50, in citazioni di *Data* 28, 28, 29 e 90 rispettivamente), oppure dall'essere il soggetto di clausole in ἐκκείσθω, dal carattere necessariamente indefinito (II.51 *bis*, nella prima rafforzato con τις), oppure, infine, dall'essere qualificato dal dativo di relazione θέσει «in posizione» (I.52), che impone, come gli altri dativi analoghi qualificanti l'«essere dato», la forma indefinita. Resta solo l'occorrenza nell'esposizione di I.56, parallela a quella nell'enunciato vista prima. In Archimede è priva di articolo solo quella all'inizio dell'esposizione di *Spir.* 8. Troppo poco: ne concludo che la variante con δοθέν privo di articolo nel presentare i dati di un problema di costruzione, per quanto permessa dalla lingua, non veniva ritenuta ammissibile.

Sono abbastanza rari i casi di enunciati di teoremi riferiti ad un singolo oggetto generico, ma dotato articolo. Esamineremo alcuni esempi, mostrando che la presenza dell'articolo è in genere forzata da motivi grammaticali. Si noti che tale problema si pone, nel caso di enunciati condizionali, solo se la determinazione con articolo ha luogo nell'antecedente, perché nel conseguente l'articolo è di norma richiesto dal fatto che si tratta di oggetti già esplicitamente o implicitamente definiti una volta posti gli enti dati nell'antecedente. Ad esempio, in XIII.9-12 si fa riferimento a «il lato di un pentagono/decagono/esagono regolare inscritto in un cerchio»: questo perché una volta dato un poligono regolare inscritto in un cerchio dato, un suo lato è univocamente determinato in grandezza, e quindi può essere sin da subito dotato di articolo<sup>91</sup>. Il problema di denominazioni al singolare dotate di articolo si presenta in forma particolarmente chiara nel libro X, dove è questione di certe specie di linee irrazionali. Leggiamo gli enunciati delle proposizioni X.54, 60, 66, che predicano proprietà della irrazionale denominata «binomiale», in parallelo a quelli di X.91, 97, 103, loro corrispondenti per l'irrazionale denominata «apotome»<sup>92</sup>:

<sup>88</sup> Escludo sin da ora le 4 occorrenze in I.8 e le 2 in II.14, dove è questione di espressioni del tipo «ogni retta data» (ed il participio ha l'articolo).

<sup>89</sup> AGE I, 158.21, 174.28. Altre occorrenze senza articolo nelle stesse proposizioni sono qualificate da un determinativo di indefinitzza τινος o da un dativo di relazione θέσει «in posizione», oppure hanno il participio perfetto δεδομένον (*ibid.*, 158.24, 25, 176.11). Non costituiscono quindi un campione omogeneo a quello euclideo, anche se l'ultima occorrenza corrisponde a quella a 174.28 (quest'ultima nell'enunciato, l'altra nell'esposizione).

<sup>90</sup> AGE I, 166.19 (esposizione), 184.28-186.1 (enunciato), 188.24 (citazione istanziata di I.59).

<sup>91</sup> In XIII.9 i lati sono già menzionati in antecedente insieme con i relativi poligoni, e quindi hanno l'articolo *a fortiori*.

<sup>92</sup> EE III, 90.6-8, 103.19-20, 113.18-19, 155.17-18, 172.12-13, 187.7-8 (in ordine progressivo, prima la prima colonna dall'alto in basso, poi la seconda).

ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστίν ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

ἢ τῆ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτή.

ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

ἢ τῆ ἀποτομῆ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτή.

Le esposizioni non fanno che confermare quanto si ricava dal confronto degli enunciati: le espressioni nella prima colonna sono indefinite anche quando sia presente l'articolo. L'osservazione decisiva è che in greco ἐκ δύο ὀνομάτων «binomiale» è un'espressione preposizionale indeclinabile, cui occorre preporre l'articolo opportuno se vogliamo declinarla, come in X.54 e 60. «Apotome» ἀποτομή, invece, è un sostantivo vero e proprio, regolarmente declinabile e quindi privo di articolo quando il senso sia indefinito.

Alcune osservazioni ulteriori. In X.66 e 103 l'articolo incipitario è richiesto dalla presenza di un aggettivo ulteriormente determinato da un complemento in forma preposizionale, che qualifica un εὐθεῖα «retta» sottinteso ed indefinito: si tratta esattamente dello stesso fenomeno visto all'opera in I.29 nella sez. 1.0.4<sup>93</sup>. Come per I.29, le esposizioni corrispondenti confermano il carattere indefinito. In quella di X.66, ad esempio, leggiamo (EE III, 113.20-22)

ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ AB, καὶ τῆ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἢ ΓΔ· λέγω ὅτι ἢ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτὴ τῆ AB.

Sia una binomiale AB, e commensurabile in lunghezza con AB sia «una retta» ΓΔ: dico che ΓΔ è binomiale e la stessa in ordine di AB.

Il verbo «essere» incipitario ha portata espositiva, ἐκ δύο ὀνομάτων come locuzione sostantivata è al nominativo e quindi non necessita di articolo; nel secondo congiunto occorre sottintendere εὐθεῖα indefinito soggetto dell'esistenziale ἔστω. L'articolo è assente anche nei casi in cui l'espressione sostantivata funzioni da nome del predicato, come leggiamo in X.54 e specialmente 66. Il primo caso è interessante, in quanto occorre intendere che l'articolo ἢ qualifichi il participio καλουμένη e non il sintagma sostantivato ἐκ δύο ὀνομάτων che segue (ci troviamo ancora di fronte ad un caso di neutralizzazione). Infine, l'espressione πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην in X.60 può essere resa come «fa una larghezza binomiale prima» oppure «fa come larghezza una binomiale prima». Il confronto con il caso dell'apotome conferma il carattere indefinito, la presenza dell'articolo decide per la prima: si tratta di un'espressione sostantivata in posizione appositiva, che in quanto tale richiede l'articolo; questo non sarebbe necessario se l'espressione fosse il complemento oggetto del verbo in quanto l'aggettivo «primo» è declinabile. Si osservi però che nessuna delle sottospecie di binomiale è priva di articolo, che invece si riscontra in sintagmi del tutto analoghi come ἐκ δύο μέσων πρώτην «bimediale prima», regolarmente all'accusativo senz'articolo nel porisma riassuntivo finale del libro X (EE III, 201.20). Qui gioca anche il considerare il nome di un'irrazionale come una specie di «singolare collettivo», analogamente a quanto attualmente si fa, dicendo «la binomiale»; occorre però considerare che esistono infiniti esemplari della «stessa» binomiale, non solo perché dipendono da quale esprimibile sia stata fissata, ma anche in senso più forte ed estraneo alla nostra sensibilità

<sup>93</sup> Si noti anche il primo αὐτὴ privo di articolo (= ipsa), il secondo essendone dotato (= eadem).

matematica: due rette uguali ma distinte contano come rette diverse, e *a fortiori* come binomiali diverse. La resa indefinita è quindi richiesta anche dalla semantica dell'espressione.

L'articolo è richiesto dalla grammatica anche in XI.14, che offre vari motivi d'interesse (EE IV, 19.24-20.3):

<p>πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἢ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστίν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα. εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, EZ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.</p>	<p>A quali piani è ortogonale una stessa retta, i piani saranno paralleli. In effetti, una certa retta AB sia ad &lt;angoli&gt; retti con uno e l'altro dei piani ΓΔ, EZ: dico che i piani sono paralleli.</p>
--	--

La prolessi del relativo rende barbara la traduzione italiana, una volta che si voglia mantenere la ripetizione di «piani» nell'enunciato. La prima occorrenza di ἐπίπεδα è ovviamente senza articolo, se non altro a causa del relativo, la seconda lo ha perché i piani sono stati già menzionati e sono quindi un oggetto ben definito. L'articolo che precede «stessa retta» è dovuto al significato di αὐτή che qualifica la retta: *eadem* e non *ipsa*: l'espressione è quindi indefinita, come conferma l'esposizione, che rinforza questa connotazione con τις.

#### 2.1.6. I condizionali indefiniti nella dialettica stoica

Il dualismo tra proposizioni istanziate e loro corrispondenti indefiniti si ritrova anche nella dialettica stoica. La scuola di Crisippo introdusse un particolare tipo di proposizioni non semplici, quasi sicuramente per formulare asserti generali<sup>94</sup>. Si tratta di condizionali con antecedente a soggetto indefinito (forme di τις), in cui il riferimento interno è assicurato nel conseguente da un pronome dimostrativo (canonicamente ἐκεῖνος «quello»<sup>95</sup>) anaforico del τις presente nell'antecedente: ad esempio «se qualcuno è qui, non: quello è a Rodi» (D.L. VII.82, e cfr. anche VII.75). È questo il modo stoico di affrontare problemi di quantificazione universale, per formulare cioè asserti in cui un predicato si applichi ad una classe di oggetti. Tali asserti venivano appunto chiamati καθολικά «generali» (Sesto Empirico, *M* XI.8-11, e cfr. Cicerone, *De fato* 11-15). Ecco *M* XI.8:

<p>τὸν γὰρ ὄρον φασὶν οἱ τεχνολογοὶ ψιλῆ τῆ συντάξει διαφέρειν τοῦ καθολικοῦ, δυνάμει τὸν αὐτὸν ὄντα. καὶ εἰκότως· ὁ γὰρ εἰπὼν "ἄνθρωπος ἐστὶ ζῶον λογικὸν θνητόν" τῷ εἰπόντι "εἰ τί ἐστὶν ἄνθρωπος, ἐκεῖνο ζῶον ἐστὶ λογικὸν θνητόν" τῇ μὲν δυνάμει τὸ αὐτὸ λέγει, τῇ δὲ φωνῇ διάφορον.</p>	<p>In effetti, gli scrittori di cose tecniche dicono che una definizione differisce da un «asserto» generale giusto per la sintassi, pur essendo la stessa quanto al significato. E a buon diritto: chi dice "l'uomo è un animale mortale razionale" dice in effetti lo stesso quanto al significato, ma differente quanto all'espressione, di chi dice "se qualcosa è un uomo, quello è un animale mortale razionale".</p>
--	---

Sesto stabilisce dunque un parallelo con le definizioni (cioè con frasi dichiarative), non con asserti generali in forma condizionale come gli enunciati matematici.

Un condizionale indefinito stoico ha come soggetto un pronome indefinito ed è vero se e solo se lo sono tutte le sue istanze, che sono dette ad esso «subordinate» (il verbo è ὑποτάττειν). All'interno di argomenti, il condizionale è accompagnato da una coassunzione definita, non enunciata in modo

<sup>94</sup> Sulla questione si vedano Frede 1974, Crivelli 1994 e Caston 1999.

<sup>95</sup> Nello stile matematico greco, il pronome ἐκεῖνος è sempre correlato ad un relativo, nell'ambito di costruzioni verbali con prolessi di quest'ultimo, mai ad un pronome indefinito.

ipotetico, anch'essa contenente un dimostrativo o un nome proprio anaforico di uno degli indefiniti presenti nel condizionale. Leggiamone un esempio in Sesto Empirico, *PH* II.141 (stesso esempio anche in *M* VIII.308 e 313; si noti l'ulteriore deittico οὗτος «costui», ripetuto identico ovunque, in ossequio alla prescrizione stoica di evitare riferimenti sottintesi):

<p>εἶ τις σοι &lt;θεῶν&gt; εἶπεν ὅτι πλουτήσῃ οὗτος, πλουτήσῃ οὗτος· οὗτος δὲ ὁ θεός (δείκνυμι δὲ καθ' ὑπόθεσιν τὸν Δία) εἶπέ σοι ὅτι πλουτήσῃ οὗτος· πλουτήσῃ ἄρα οὗτος.</p>	<p>Se <u>un certo</u> dio ti avesse detto che costui si arricchirà, costui si arricchirà; ma <u>questo</u> dio <u>qui</u> (e suppongo di indicare Giove) ti disse che costui si arricchirà: quindi costui si arricchirà.</p>
---	--

Portata analoga sembra avere la trasformazione in una negazione di congiunzione, come risulta da Cicerone, *De Fato* 15-16:

**15** hoc loco Chrysippus aestuans falli sperat Chaldaeos ceterosque diuinos, neque eos usuros esse coniunctionibus, ut ita sua percepta pronuntient “si quis natus est oriente Canicula, is in mari non morietur” sed potius ita dicent: “non et natus est quis oriente Canicula et is in mari morietur”. o licentiam iocularem: ne ipse incidat in Diodorum, docet Chaldaeos quo pacto eos exponere percepta oporteat. quaero enim, si Chaldaei ita loquentur ut negationes infinitarum coniunctionum potius quam infinita conexa ponant cur idem medici cur geometrae, cur reliqui facere non possint. medicus in primis quod erit ei perspectum in arte non ita proponet “si cui uenae sic mouentur, is habet febrim”, sed potius illo modo “non et uenae sic <cui> mouentur, et is febrim non habet”; itemque geometres non ita dicet “in sphaera maximi orbis medii inter se diuiduntur”, sed potius illo modo: “Non et sunt in sphaera maximi orbis, et ei non medii inter se diuiduntur”. **16** quid est, quod non possit isto modo ex conexo transferri ad coniunctionum negationem? et quidem aliis modis easdem res efferre possumus. modo dixi “in sphaera maximi orbis medii inter se diuiduntur”, possum dicere: “si in sphaera maximi orbis erunt”, possum dicere “quia in sphaera maximi orbis erunt”; multa genera sunt enuntiandi nec ullum distortius quam hoc, quo Chrysippus sperat Chaldaeos contentos Stoicorum causa fore.

Si tratta, contrariamente a quanto suggerisce Cicerone con l'esempio geometrico, di una trasformazione che si applica a stati di fatto effettivamente esistenti ma tra i quali non sia ammissibile stabilire una συνάρτησις «connessione» in senso crisippeo.

La differenza cruciale con il caso matematico è quindi che gli enunciati indefiniti stoici contengono per definizione un pronome indefinito che denota un ente *individuale*, cui viene coordinato per anafora un deittico. In matematica il ruolo del pronome è giocato dal nome indefinito della specie matematica in gioco («un triangolo», «una retta»: un ente *non* individuale), di solito sottaciuto nel conseguente. Alla coassunzione stoica, in cui il riferimento del deittico viene identificato per ostensione, corrisponde nel caso matematico dall'esposizione, che come abbiamo visto *non* è una forma di ostensione, ed è per di più enunciata nel modo ipotetico. In nessuno dei due casi si suppone che tutte le istanze possono essere sussunte in una sola tramite una fattispecie esemplare apparentemente particolare. Inoltre, quando in una dimostrazione viene fatto riferimento ad un enunciato indefinito (cioè generale), a volte questo è ripetuto non istanziato, a volte sì; nel primo caso è inteso valere automaticamente per tutte le istanze possibili; nel secondo è già adattato all'esposizione della proposizione ospite.

Al di là dell'impiego di espressioni indefinite per “quantificare”, il parallelismo fra la dottrina stoica e la pratica matematica, per quanto notevole, è quindi non totalmente compiuto, specialmente a causa del fatto che i *relata* delle espressioni che fanno da soggetto alle parafrasi stoiche sono oggetti individuali, ed i termini generali sono sistematicamente spostati dalla posizione di soggetto a quella di

predicato: sono quindi eliminati dal panorama ontologico (si veda Caston 1999, 192-204; Crisippo, *apud* Alessandro, in *APr.*, 402.16-18, usa una strategia analoga per mettere in evidenza la portata esistenziale degli asserti singolari, in particolare di quelli negativi; si tratta di uno spostamento di senso del tutto analogo a quello in opera nella traduzione *vulgata* dell'esposizione criticata nella sez. 1.0). L'analogia con le strutture indefinite stoiche è resa ancor meno stringente dal fatto che, negli enunciati matematici in forma condizionale, il soggetto varia di norma tra antecedente e conseguente. Alcuni enunciati si prestano tuttavia meglio di altri a rientrare nel paradigma stoico, una volta che ci affranchiamo dalla semplice struttura soggetto-predicato degli esempi di Sesto (ma si vedano già quelli di Cicerone) ed accettiamo che il ruolo del pronome indefinito sia giocato dalla specie matematica in gioco: l'intuizione di grado zero della formulazione stoica risiede infatti nel porre un referente indefinito in antecedente ed uno definito, anaforico di quello indefinito, nel conseguente. Leggiamo I.41 (*EE* I, 54.20-22):

<p>ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἢ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.</p>	<p>Qualora un parallelogrammo abbia la stessa base di un triangolo e sia nelle stesse parallele, <u>il</u> parallelogrammo è doppio del triangolo.</p>
---	--

Come è la norma in greco, l'articolo nel conseguente serve a identificare, nella classe dei parallelogrammi, esattamente quelli che soddisfano la condizione nell'antecedente: la seconda menzione è anaforica della prima. Una trasformazione immediata restituisce un condizionale indefinito stoico in forma non troppo scorretta:

<p>εἴ τί ἐστιν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχον τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ὄν, ἐκεῖνο διπλάσιόν ἐστι τοῦ τριγώνου.</p>	<p>Se qualcosa è un parallelogrammo che abbia la stessa base di un triangolo e che sia nelle stesse parallele, quello è doppio del triangolo.</p>
--	---

## 2.2. MODALITÀ

Per gli Stoici le modalità sono proprietà di asserti, non operatori che mandano asserti in asserti, quale è invece la negazione (cfr. Alessandro, in *APr.*, 177.25-178.4, D.L. VII.75, Boezio, *Int.* 2.11, 234.27-235.4); in matematica qualificano stati di cose; le loro espressioni linguistiche agiscono sulle espressioni degli asserti secondo le regole del linguaggio corrente, di norma come predicati il cui soggetto sono intere frasi dichiarative<sup>96</sup>.

Operatori di necessità sono particolarmente rari nei testi matematici, a parte un'eccezione interessante in un'espressione squisitamente metalinguistica: in tutti i problemi la determinazione è introdotta da δεῖ «si deve». Naturalmente, ciò è conseguenza della connotazione iussiva che occorre sottintendere all'enunciato di ogni problema e che qui è reso esplicito. Non fa testo l'espressione ὅπερ ἔδει δεῖξαι (ποιῆσαι) «il che si doveva dimostrare (fare)» con cui si chiude una proposizione. È quasi sicuramente un'aggiunta scolastica al testo degli *Elementi*: la clausola è infatti assente nel resto del *corpus* antico (Nei *Data* l'unica proposizione che la ha è l'ultima!). Non vi sono occorrenze di ἀναγκαῖος «necessario» o simili, parola comunque rarissima nel *corpus* matematico greco, al pari di «vero». L'unico autore che ne fa uso è Archimede<sup>97</sup>, con 9 occorrenze in contesti tecnici e 1 nella prefazione dello *Stomachion*. L'uso è molto variato: la necessità è predicata del conseguente di un

<sup>96</sup> L'impiego del verbo δύνασθαι e del linguaggio delle δυνάμεις «potenze» nella teoria delle linee irrazionali esposta nel libro X non ha niente a che vedere con la modalità.

<sup>97</sup> L'occorrenza in Apollonio, lettera prefatoria a *Con.* I, è irrilevante (*AGE* I, 4.7).

condizionale che introduce una *reductio*, di un paracondizionale (*bis*), di conclusioni di inferenze (*ter*), di un asserto da dimostrare, di un richiamo a un risultato noto, di una conseguenza immediata della configurazione geometrica<sup>98</sup>.

Altre espressioni con sfumatura modale di necessità sono δεικτέον «va dimostrato» (per il suo uso in Archimede come sostituto del canonico λέγω si veda la sez. 1.2.1) e δέον (ἔστω) «si debba». Negli *Elementi*, il primo conta 16 occorrenze, soltanto nel libro X<sup>99</sup>, per cui funge ovviamente da marcatore stilistico, e 8 nel materiale aggiuntivo, sempre al di fuori del libro X (XII.4/5, XIII.2/3, 13/14, 18/19, X.23poralt, 39alt, 117alt, XII.17alt). Il secondo, la cui connotazione metalinguistica è più forte, ricorre 8 volte, in materiale non autentico o comunque stilisticamente e matematicamente aberrante (III.33, IX.18-19, X.13/14, X.27alt, 29alt, 39alt), come le prop. IX.18-19. Interessanti le 4 occorrenze nelle proposizioni “gnomoniche” Opt. 18-21 A, e le 2 di θετέον «va posto», riferito ad assunzioni, nell’introduzione ai *Phaenomena* (EOO VIII, 2.8-14).

I predicati «vero» e «falso» non trovano riscontro nel *corpus* euclideo, e fanno apparizioni solo sporadiche in altri autori, mai però nel corso di dimostrazioni<sup>100</sup>. In particolare, Archimede denomina «falsi» o «veri» certi enunciati, ed applica il secondo predicato al termine συμπέρασμα «conclusione», evidentemente impiegato in luogo di «enunciato». Il predicato ψευδής «falso» era applicato alle dimostrazioni fallaci, come suggeriscono il titolo degli *Pseudaria* ed una serie di passaggi aristotelici (Acerbi 2008c).

Dato che le proposizioni matematiche stabiliscono verità necessarie ed indipendenti dal tempo, «impossibile» equivale a «falso». Aristotele lo riconosce chiaramente, ricorrendo ad un esempio ben noto di argomento per assurdo (*Metaph.* Δ 12, 1019b21-27)<sup>101</sup>:

E alcune cose sono dette impossibili in accordo con questa incapacità, altre sia possibili che impossibili secondo un altro modo di «essere», ed impossibile è ciò il cui contrario è vero di necessità (ad esempio è impossibile che la diagonale sia commensurabile in quanto questa è una falsità il cui contrario non solo è vero, ma anche necessario che «sia vero: è quindi necessario che la diagonale» sia incommensurabile: quindi che sia commensurabile non è soltanto falso ma anche falso di necessità).

Locuzioni con sfumatura modale di (im)possibilità si trovano in effetti quasi esclusivamente nelle dimostrazioni per assurdo, cui è dedicata la sezione seguente.

### 2.2.1. Riduzioni all’assurdo

Negli *Elementi* vi sono 123 *reductiones*, includendo anche le proposizioni spurie I.40 e III.12. Altre se ne trovano nel materiale complementare: lemmi e aggiunte varie mantenuti da Heiberg nel testo principale (10 argomenti)<sup>102</sup>, dimostrazioni alternative (20)<sup>103</sup>, redazione **b** del libro XII (12, analoghi a quelli nelle corrispondenti proposizioni della redazione principale). Infine, 3 *reductiones* sono nei *Data* (prop. 28-30) e 13 nelle opere minori. Ecco libro per libro le proposizioni nel testo principale degli *Elementi* contenenti argomenti per assurdo:

<sup>98</sup> Rispettivamente a AOO I, 286.18 / 304.6, II, 304.7 / I, 304.9, 328.8, II, 320.19 / I, 358.19 / II, 56.9 / 290.21.

<sup>99</sup> X.17-18 (entrambi *bis*), 49, 53, 55-58, 60-63, 69-70, dove introduce determinazioni aggiuntive in corso di dimostrazione, con eccezione delle ultime due occorrenze, dove la determinazione è quella principale.

<sup>100</sup> In Archimede 4 occorrenze di ψευδός nella lettera prefatoria di *Spir.*, 2 di ἀληθής in *Meth.* (AOO II, 4.29, 6.1, 11, 18 e 438.18-19), 1 irrilevante in Apollonio, lettera prefatoria a *Con.* IV (AGE II, 4.10).

<sup>101</sup> L’integrazione più lunga, necessaria al senso, è di Jaeger.

<sup>102</sup> Si tratta di VI.22/23, X.28/29II (*bis*), XIII.2/3 (*bis*) e XIII.18/19 (*quinquies*).

<sup>103</sup> Nelle prove *aliter* di III.7-10, VII.31, nei teoremi *vulgo* X.13, X.117 (*ter*), X.117*aliter* (*bis*), XI.38, nelle aggiunte di casi a III.11 (*bis*), X.9por, X.38, XI.23 (*quater*).

I	4, 6-7, 14, 26 ( <i>bis</i> ), 27, 39-40
III	1, 2, 4-8, 10-12, 13 ( <i>bis</i> ), 16 ( <i>bis</i> ), 18-19, 23-24, 27
IV	4, 8, 13
V	18
VI	7 ( <i>bis</i> ), 26
VII	1-2, 3 ( <i>bis</i> ), 20-24, 28 ( <i>bis</i> ), 29, 31, 33, 34 ( <i>bis</i> ), 35, 36 ( <i>bis</i> ), 39
VIII	1, 4 ( <i>bis</i> ), (6)
IX	10 ( <i>bis</i> ), 12, 13 ( <i>sexties</i> ), 14, 16-18, 19 ( <i>bis</i> ), 20, 30-31, 33-34, 36
X	2-4, 13, 16 ( <i>bis</i> ), 26, 42 ( <i>bis</i> ), 43, (44), 45-47, 79-84, 111
XI	1-3, 5, 7, 13-14, 19, 23 ( <i>bis</i> )
XII	2, 5, 10-12, 18 (ciascuna <i>bis</i> )

La proposizione X.44 è posta tra parentesi in quanto il richiamo finale all'impossibile non è esplicito, sebbene necessario, come mostra anche *l'incipit* della dimostrazione «se infatti possibile» (*EE* III, 71.4). La chiusa è probabilmente caduta per accidente di copia; la troviamo in **F** (*EE* III, 71.4 *in app.*), forse per facile congettura, e conservata nella tradizione indiretta con richiamo a X.42. Ad analoga caduta per accidente di copia deve essere imputata la mancanza della clausola finale nella prima *reductio* di XII.18. La proposizione VIII.6 è in realtà una dimostrazione diretta.

L'assurdo si realizza secondo una certa varietà di modi; eccone un regesto per tipologie; tra parentesi il risultato contraddetto, qualora esso sia stato stabilito tra i principi o in una proposizione precedente; il libro è lo stesso se l'ordinale corrispondente è omissso; l'identità di numerale arabo indica un caso precedente della stessa proposizione; (ass.) significa che una delle due condizioni in contraddizione è assunta per ipotesi:

- 1) contraddizione con teorema o risultato precedente: I.26 (16), 27 (16), III.7 (7), 8 (8), 10 (5), 16 (I.17), 23 (I.16), 24 (10), IV.4, 8, 13 (ognuna III.16), VI.7 (I.17), IX.13 (11, 12 + VII.def.12), X.42-43 (26), 44 (42), 45-46 (26), 47 (42), 79-80 (26), 81 (79), 82-83 (26), 84 (79), XI.2 (1), 14 (I.17), 19 (13), XII.2 (2), 5 (5), 11 (11), 12 (12), 18 (18);
- 2) contraddizione con principio o definizione: I.4 (nc 7), VII.21, 23-24, 28 (ognuna def. 13), 29 (def. 12), IX.13 (11, 12 + VII.def.12), 16, 17, 19, 31 (ognuna VII.def.13), XI.1 (I.def.16), 3 (nc 9), 7 (nc 9);
- 3) certe grandezze sono contemporaneamente uguali e disuguali (ass.): rette III.5-6, 27, VI.26, angoli I.7, 14, 26, III.1, 4, 13, 18, XI.5, 13, 23, triangoli I.6, 39, 40;
- 4) certe grandezze sono contemporaneamente maggiori e minori una dell'altra (ass.): rette III.2, 16, III.11-12, 18, angoli VI.7, domini o solidi XII.2, 5, 10-12, 18, generali V.18;
- 5) una stessa retta è interna ed esterna (ass.) ad un cerchio: III.13;
- 6) due punti coincidono e non coincidono (ass.): X.42<sup>104</sup>;
- 7) una linea è sia esprimibile che irrazionale: X. 26, 111 (apotome);
- 8) un numero misura un numero minore o un'unità: VII.1-3, 34, 36, VIII.1, 4, IX.20;
- 9) un numero misura e non misura un altro numero (ass.): IX.12, 18, 19;
- 10) uno stesso numero è pari e dispari (ass.): IX.30;
- 11) un numero pari misura un numero dispari: IX.33;

<sup>104</sup> L'argomento a *EE* III, 69.3-11, è sicuramente spurio, ed è assente nelle traduzioni latine medievali. Si veda Vitrac 1990-2001 III, 216-218.

- 12) uno stesso numero è quadrato (cubo) e non lo è (ass.): IX.10;
- 13) uno stesso numero è una potenza di 2 e non lo è (ass.): IX.34;
- 14) due numeri coincidono e non coincidono (ass.): IX.36;
- 15) numeri minori di numeri minimi nello stesso rapporto (ass.): VII.20, 22;
- 16) numero maggiore del M.C.D. di certi numeri (ass.) e che misura gli stessi numeri: VII.33, 39;
- 17) numero minore del m.c.m. di certi numeri (ass.) e che è misurato dagli stessi numeri: VII.35, IX.14;
- 18) discesa infinita in numeri: VII.31;
- 19) una grandezza misura una grandezza minore: X.2-4;
- 20) due grandezze sono sia commensurabili che non (ass.): X.13, 16.

Dall'elenco risulta chiaro che le tipologie di assurdi numerici sono più variate e “fantasiose” di quelle geometriche, che ricadono in grandissima maggioranza in due categorie principali: contraddizione con teorema precedente o con principio, grandezze che soddisfano contemporaneamente (dis)uguaglianze contraddittorie.

Una dimostrazione per assurdo, che segue di norma una «determinazione», eventualmente locale (cfr. sez. 1.2.1), è delimitata da tre frasi canoniche; le inferenze che stanno in mezzo sono indistinguibili da quelle di una normale dimostrazione:

1) La frase iniziale può essere analizzata sotto vari rispetti. Di norma è formulata come condizionale, il cui antecedente è di solito in forma abbreviata. In casi eccezionali, ad esempio per *reductiones* particolarmente brevi, il condizionale è assente, come risulta dal seguente prospetto, riferito al complesso degli *Elementi* (la doppia barra separa il materiale aggiuntivo: lemmi, porismi o dimostrazioni alternative):

antecedente ellittico	I.7, 26-27, 39, 40, III.1, 2, 4-8, 10-12, 13 ( <i>bis</i> ), 16 ( <i>bis</i> ), 18, 19, 23, VI.26, VII.20, 21, 34 ( <i>bis</i> ), 36 ( <i>bis</i> ), 39, VIII.1, 4, (6), IX.10 ( <i>bis</i> ), 12, 13 ( <i>bis</i> ), 14, 16-18, 19 ( <i>bis</i> ), 20, 30, 34, 36, X.2-4, 16, 26, 42 ( <i>bis</i> ), 43, (44), 45-47, 79-84, 111, XI.1, 3, 5, 7, 13, 14, 19, 23 ( <i>bis</i> ), XII.2, 5, 10, 11 ( <i>bis</i> ), 12, 18 // III.9, VII.31, X.28/29II ( <i>bis</i> ), X.117, X.117 <i>aliter</i> ( <i>bis</i> ), XI.23 ( <i>ter</i> ), 38, XII.2, 5, 10-12, 18, XIII.2/3
antecedente dispiegato	I.4, 6, 14, 26 ( <i>bis</i> ), III.24, 27, IV.4, 8, 13, V.18, VI.7, VII.1, 2, 3 ( <i>bis</i> ), 22-24, 28 ( <i>bis</i> ), 29, 31, 33, 35, VIII.4, IX.13 ( <i>quater</i> ), 31, 33, X.2, 13, 16 ( <i>bis</i> ), XI.2, XII.2, 5, 10, 12, 18 // VI.22/23, X.9por, X.13, X.38, X.28/29II, X.117 ( <i>bis</i> ), XII.2, 5, 10-12, 18
condizionale assente	VI.7, IX.12, XI.19 // III.7-8, 10, 11 ( <i>bis</i> ), XI.23, XIII.2/3, XIII.18/19 ( <i>quinquies</i> )

L'antecedente abbreviato assume una varietà di forme; esse possono contenere una negazione, come  $\epsilon\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \mu\eta\acute{\iota}$  «se infatti no» (61 occorrenze nell'intero *corpus* euclideo, non limitate alle dimostrazioni per assurdo), oppure un operatore modale di possibilità:  $\epsilon\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omicron}\nu$  «se infatti possibile» (62 occorrenze), ad esempio nel caso di riduzione all'assurdo di enunciati negativi, o  $\mu\eta\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho,\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\prime\ \epsilon\acute{\iota}\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omicron}\nu$  «no infatti, ma se possibile»<sup>105</sup>, in accordo con la tabella seguente:

$\epsilon\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omicron}\nu$	I.7, III.4-8, 10, 13 ( <i>bis</i> ), 16, 23, VII.20, VIII.(6), IX.10 ( <i>bis</i> ), 13-14, 16-18, 19 ( <i>bis</i> ), 20, 30, 36, X.4, 26, 42 ( <i>bis</i> ), 43, (44), 45-47, 79-84, 111, XI.1, 13, 23, XII.2,
---	---

<sup>105</sup> Oltre che nell'introduzione di argomenti per assurdo, il predicato  $\delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omicron}\nu$  «possibile» compare anche in alcuni problemi, ad es. IX.18 e 19 e XI.22 (si vedano la sez. 1.2.1 e 1.3).

	5, 10-12, 18 // X.28/29II, X.117, X.117aliter (bis), XI.23, XII.2, 5, 10-12, 18
εἰ γὰρ μή	I.27, 39, 40, III.18, VII.21, 34 (bis), 36 (bis), 39, VIII.1, 4, X.3, XI.3, 14, 23, XII.11 // VII.31, XI.23 (bis), XIII.2/3
μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν	III.1, 2, 11-12, 16, 19, VI.26, XI.5, 7 // III.9, XI.38
μὴ γάρ	IX.12, XI.19
εἰ γάρ	IX.16
εἰ γὰρ οὐ	IX.34 <sup>106</sup>
εἰ δυνατόν	I.26, X.2, 16 // X.28/29II, XIII.2/3

L'ultima clausola elencata può comparire (prime 3 occorrenze) nei casi in cui un condizionale dispiegato con conseguente all'indicativo è seguito da un condizionale con conseguente all'imperativo. Il ruolo del secondo consiste nell'istanziare l'oggetto la cui esistenza è asserita nel primo, come nell'esempio di X.16 (*EE* III, 25.12-13)<sup>107</sup>:

εἰ γὰρ μή ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, Se infatti ΓΑ, ΑΒ non sono incommensurabili, una certa  
μετρήσει τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρείτω, εἰ grandezza [le] misurerà. «Le» misuri, se possibile, e sia  
δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. Δ.

In generale, il conseguente ha il verbo all'imperativo se stabilisce una costruzione (perfetto medio-passivo; eccezioni in I.27 e in XI.14) o la prima occorrenza istanziata di un oggetto (di norma verbo «essere» al presente, come in X.16 appena letta). I conseguenti non pertinenti a costruzioni (ad esempio rimandi diretti, in forma di spiegazione posposta, a proposizioni già dimostrate o a risultati assunti come princìpi, come in I.4, III.24, IV.4, 8, 13, VII.31) non hanno bisogno dell'imperativo, e possiamo trovare l'indicativo presente o futuro. Rarissimi e sicuramente non canonici i casi di ottativo (caso aggiuntivo a X.38), o di periodi ipotetici dell'irrealtà con l'imperfetto (X.117). Le occorrenze del modo verbale nel conseguente si distribuiscono equamente tra i due tipi principali, e questo avviene sia nei libri geometrici che in quelli aritmetici<sup>108</sup>:

indicativo	I.4, 6, 26 (bis), 27, III.24, 27, IV.4, 8, 13, V.18, VI.7, VII.1-2, 3 (bis), 21-24, 28 (bis), 29, 31, 33, 34 (bis), 35, 36 (bis), 39, VIII.4, IX.13 (quinqies), 31, 33, 34, X.2, 3, 13, 16 (bis), XI.2, 14, 23, XII.2, 5, 10-12, 18 // VI.22/23, X.9por, X.13, X.28/29II, X.38, X.117 (bis), XI.23 (bis), XII.2, 5, 10-12, 18
imperativo	I.7, 14, 26, 39, 40, III.1, 2, 4-8, 10-12, 13 (bis), 16 (bis), 18, 19, 23, VI.26, VII.20, VIII.1, 4, (6), IX.10 (bis), 13-14, 16-18, 19 (bis), 20, 30, 36, X.2, 4, 16, 26, 42 (bis), 43, (44), 45-47, 79-84, 111, XI.1, 3, 5, 7, 13, 19, 23, XII.2, 5, 10-12, 18 // III.9, VII.31, X.28/29II (bis), X.117, X.117aliter (bis), XI.23, 38, XII.2, 5, 10-12, 18, XIII.2/3

Quando non siano da eseguire costruzioni, nelle quali l'imperativo è d'obbligo, la distinzione tra conseguente all'imperativo o all'indicativo si rivela una scelta stilistica senza rilevanza dal punto di vista logico-matematico, come è reso evidente dall'esempio di due passaggi paralleli contenuti in VIII.4 (*EE* II, 155.3-6 e 157.1-4):

<sup>106</sup> La presenza della negazione oggettiva deve essere considerata un'anomalia, dovuta probabilmente all'assenza di una determinazione locale.

<sup>107</sup> La proposizione presenta due argomenti quasi identici, con due variazioni: il secondo non ha la clausola εἰ δυνατόν, e tra i manoscritti sussistono incertezze quanto alla forma di ὑποκεῖσθαι con cui è riconosciuto l'assurdo.

<sup>108</sup> Interessante il caso di IX.13, in cui un macro-argomento per assurdo ne contiene altri cinque concatenati tra loro. L'argomento più esterno ha il conseguente all'imperativo, gli altri all'indicativo.

λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ εἴσιν οἱ Θ, Η, Κ, Α ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο.	Dico ora che sono anche minimi. Se infatti Θ, Η, Κ, Α non sono di séguito in proporzione minimi nei rapporti sia di Α rispetto a Β che di Γ rispetto a Δ che in quello di Ε rispetto a Ζ, <lo> siano Ν, Ξ, Μ, Ο.
λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ.	Dico ora che sono anche minimi nei rapporti ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Se infatti no, ci saranno certi numeri minori di Ν, Ξ, Μ, Ο di séguito in proporzione nei rapporti ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Siano Π, Ρ, Σ, Τ.

La prima formulazione sussume nello stesso condizionale sia l'asserzione di esistenza dell'oggetto che la sua esposizione; la seconda le separa in due frasi indipendenti. In principio, dunque, un condizionale con imperativo nel conseguente può sempre essere letto come forma breve di una formulazione con indicativo seguita da una supposizione con imperativo istanziale – o viceversa la seconda può essere vista come forma lunga della prima.

Quando occorra, il conseguente è espresso come una disgiunzione, ad esempio in tutte le dimostrazioni per esaurimento. Asserti complessi in forma congiuntiva sono formulati *nel conseguente* con una proposizione principale qualificata con un costrutto participiale, come in VIII.1 (*EE II*, p.149.7-10):

λέγω ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.	Dico che Α, Β, Γ, Δ sono minimi tra quelli che hanno il loro stesso rapporto.
Εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς.	Se infatti no, siano minori di Α, Β, Γ, Δ <numeri> Ε, Ζ, Η, Θ <u>che sono</u> nel loro stesso rapporto.

o con una proposizione relativa, come in VII.31 e 39. Nei libri aritmetici, costrutti participiali a formulare supposizioni dell'assurdo complesse si trovano in VII.3 (*bis*), 21, 31, 33, 34 (*bis*), 35, 36 (*bis*), 39, VIII.1, 4 (*bis*)<sup>109</sup>, IX.13 (*ter*), 20.

2) La *reductio* vera e propria è chiusa da una constatazione della riduzione all'assurdo: ὅπερ (ἐστὶν) ἀδύνατον «il che è impossibile» oppure ὅπερ (ἐστὶν) ἄτοπον «il che è assurdo»; il primo tipo è più usato del secondo negli *Elementi*: 119 occorrenze contro 29 (in Archimede troviamo solo il primo). In casi eccezionali la clausola è sostituita da un riferimento esplicito al fatto che si è giunti a contraddire un'assunzione, per mezzo delle formule ὅπερ οὐχ ὑπόκειται «il che non è stato supposto» in IX.10, 13<sup>110</sup>, 34, X.9, 42, *aliter* X.13, 39 (e non οὐχ ὑπόκειται δέ «e non è stato supposto», che è distintiva di una contrapposizione), o ὅπερ οὐχ ὑπέκειτο «il che non era stato supposto» in IX.10. L'espressione funziona ovviamente da marcatore per i libri aritmetici (e per l'argomento spurio in X.42). Pur in presenza di una chiusa canonica, in proposizioni come X.16 (*bis*) il riferimento all'assunzione poi contraddetta è reso esplicito da ὑπέκει(ν)το «erano stati supposti», mentre in VII.20, X.9por, XI.23 (*bis*) la forma verbale è ὑπόκειται «sono stati supposti». Alcune particolarissime *reductiones* non hanno questa formula: i quattro tipi di constatazione finale appena elencati danno insieme 156 occorrenze, mentre le *reductiones* recensite sopra nel complesso degli *Elementi* sono 165. Le nove riduzioni senza chiusa canonica sono VIII.6, X.44, XII.18 (1 argomento su 2), e, tra il materiale aggiuntivo, III.11 (1 su 2), XI.23 (1 su 4), XIII.2/3 (1 su 2), XIII.18/19 (3 su

<sup>109</sup> Qui il participio del verbo «essere» è sottinteso.

<sup>110</sup> In IX.13 l'argomento che fa da cornice esterna è identificato da ἄτοπον, i 5 concatenati lo sono da ἀδύνατον o dalla formula appena vista (il terzo).

5). La prima è in realtà una dimostrazione diretta. Le chiuse di X.44 e XII.18 sono sicuramente cadute per accidente meccanico, come abbiamo visto sopra. Le prove nel materiale aggiuntivo sono redazioni abbreviate o maldestre (contengono tra l'altro espressioni del tipo  $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\omicron\mu\epsilon\nu\ \tau\acute{o}\ \acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\nu$  «dimostreremo l'assurdo» o  $\mu\omicron\lambda\lambda\acute{\omega}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \tau\acute{o}\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu\ \mu\epsilon\acute{\iota}\zeta\omicron\nu$  «l'impossibile è infatti di molto maggiore») e possiamo tranquillamente ignorarle.

3) La constatazione 2 è seguita dalla negazione della supposizione dell'assurdo contenuta nel condizionale in 1); questa negazione è equivalente all'asserto immediatamente precedente lo stesso condizionale, che di norma è formulato, come abbiamo visto, come «determinazione locale» (cfr. sez. 1.2.1). La negazione è sempre anteposta, fatto su cui ritorneremo nella sez. 2.5. Essa può mancare (come ad esempio in I.4) nel caso in cui la frase negata contenga già una negazione: il passaggio con doppia negazione è dunque omissivo a favore della frase affermativa corrispondente.

La scelta di privilegiare una qualificazione *a priori* più forte (come lo è «impossibile» rispetto a «falso») nella clausola 2 deve aver avuto una motivazione stilistica, legata ad una percezione di maggiore persuasività indotta dalla presenza della sfumatura modale. Ciò è confermato dalla buona frequenza della variante in termini di  $\acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\nu$  «assurdo». Non è però immediato quali stati di cose siano dichiarati (im)possibili. Nella clausola finale di una *reductio* il sussistere di un certo stato di cose geometrico (ad esempio che la grandezza A sia maggiore di B) è direttamente o implicitamente messo a confronto con il sussistere di uno stato di cose con questo incompatibile (ad esempio che A sia uguale a B). L'impossibilità o l'assurdo qualificano il sussistere congiunto di entrambi gli stati cose, e non un singolo stato di cose che ne contraddica uno la cui validità è ammessa o dimostrata. È quindi il primo fatto logico, cioè una congiunzione, e non il secondo, cioè un singolo asserto, il *relatum* del relativo  $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$  nella clausola finale. In questa interpretazione, il carattere metalinguistico della clausola è particolarmente spiccato – si tratta di negare la sussistenza di un fatto logico – e la determinazione modale è pienamente giustificata in quanto essa opera in modo non ambiguo su (espressioni di) asserti, non su stati di cose geometrici. Che questa sia la lettura corretta è confermato da decine di passaggi finali di *reductiones*, tra cui scelgo quelli di I.7 e VII.1 (EE I, 15.14-16, e II, 106.10-11) – si noti la congiunzione espressa nel primo in forma debole con un  $\delta\acute{\epsilon}$ , nel secondo con un costrutto partecipiale:

$\mu\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron\nu\ \acute{\epsilon}\pi\epsilon\acute{\iota}\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu\ \eta\ \Gamma\text{B}\ \tau\eta\ \Delta\text{B},\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \eta\ \acute{\upsilon}\pi\omicron\ \Gamma\Delta\text{B}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \tau\eta\ \acute{\upsilon}\pi\omicron\ \Delta\Gamma\text{B}.\ \acute{\epsilon}\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta\ \delta\acute{\epsilon}\ \alpha\upsilon\tau\eta\varsigma\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ \mu\omicron\lambda\lambda\acute{\omega}\ \mu\epsilon\acute{\iota}\zeta\omega\nu.\ \acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu.\ \kappa\alpha\acute{\iota}\ \lambda\omicron\iota\pi\eta\nu\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \tau\eta\nu\ \text{A}\Theta\ \mu\omicron\nu\acute{\alpha}\delta\alpha\ \mu\epsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\epsilon\iota\ \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \acute{\omega}\nu.\ \acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu\ \acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu.$

Di nuovo, poiché  $\Gamma\text{B}$  è uguale a  $\Delta\text{B}$ , anche un angolo  $\Gamma\Delta\text{B}$  è uguale a un angolo  $\Delta\Gamma\text{B}$ . E fu dimostrato anche di molto maggiore dello stesso; il che è impossibile. Misurerà quindi, pur essendo un numero, anche l'unità  $\text{A}\Theta$  restante; il che è impossibile.

La clausola finale di una *reductio* segnala dunque l'impossibilità di stati di cose contraddittori. Diverso è il ruolo di un'espressione come  $\acute{\epsilon}\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{o}\nu$  «se infatti possibile», che introduce la *reductio*. Anche qui la presenza delle numerose varianti viste sopra, tra cui spicca  $\acute{\epsilon}\acute{\iota}\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \mu\acute{\eta}$  «se infatti no», che introduce semplicemente la contraddittoria della proposizione da dimostrare per quanto la negazione sia quella soggettiva, mostra che la sfumatura modale non è necessaria per la validità dell'argomento, costituendo quindi un mero tratto stilistico. Sia come sia, ciò che è qualificato possibile è di solito un singolo asserto (ma si noti il controesempio in X.4) e non una congiunzione di asserti. In questo caso, dunque, la sfumatura modale è giustificata soltanto dall'identificazione di falsità e impossibilità.

Lo stesso fenomeno si osserva in una variante della clausola finale, che accentua la connotazione metamatematica e che contiene un palese riferimento ad un singolo asserto: si tratta delle espressioni

del tipo «il che è stato dimostrato impossibile». Nei prospetti seguenti ne sono riportate le occorrenze nel *corpus* euclideo, ripartite per tipologia del richiamo all'impossibile, per forma verbale e per posizione del verbo (tra parentesi il teorema invocato, quando questo sia differente da un caso precedente di quello in questione – le occorrenze con verbo anteposto e non posposto sono in grassetto):

	δέδεικται	ἔδειχθη
ἄτοπον	/ IV.4, 8, 13 (tutti III.16), XI.2 (XI.1), XII.5	
ἀδύνατον	<b>b</b> XII.2, 5, 10, 11	III.8, <b>X.84 (X.79)</b> , XII.2, 11-12, 18

I risultati invocati sono tutti dimostrati per assurdo. L'espressione funziona palesemente da marcatore stilistico per tutte e sole le dimostrazioni per assurdo del libro IV (che dipendono tutte dalla sola III.16) e per quelle del libro XII in cui la seconda parte della *reductio* impiegata nel metodo di esaurizione sia ricondotta alla prima (manca dunque XII.10 = 9 **b**). Non è escluso che le altre occorrenze siano aggiunte di revisori: X.84 è l'unica di una stringa di proposizioni esattamente analoghe ad avere la forma verbale ἔδειχθη nel richiamo all'assurdo, e lo stesso vale per III.8 se confrontata con il teorema gemello III.7. La tradizione arabo-latina permette di chiarire la questione. La traduzione di Gerardo ha il verbo «dimostrare» nelle proposizioni corrispondenti a XII.2, 5, 10-11, 18, ma non in XI.2 né nelle costruzioni del libro IV. La versione Adelardo I, com'è da attendersi, lo ha solo in XII.2. Inoltre, in **AG** sono assenti nella loro interezza le tre brevi riduzioni del libro IV, la cui forma induce *a priori* il sospetto che si tratti di *marginalia* introdotti poi nel testo. Sono infatti costituite da un singolo condizionale, il cui conseguente è identico ad una parte dell'enunciato di III.16 (a parte la sostituzione di ἐκτός «all'esterno» con ἐντός «all'interno» per generare un asserto che contraddice quell'enunciato). Il condizionale è in forma di spiegazione posposta ed è immediatamente seguito da «il che fu dimostrato impossibile». Si aggiunga che in IV.13 è aggiunto un ulteriore elemento metalinguistico: il conseguente è introdotto da συμβήσεται «ne conseguirà» (*EE* I, 173.14)<sup>111</sup>. Argomenti analoghi valgono per l'attestazione in XI.2.

Ne dobbiamo concludere che le uniche occorrenze del verbo δεικνύναι «dimostrare» in richiami a risultati dimostrati per assurdo da non considerarsi sicure interpolazioni sono quelle del libro XII, che sono *interne* alla proposizione stessa, in quanto si riferiscono ad un risultato dimostrato nella prima parte. Siamo dunque ancora nel corso della prova, e non vi sono risultati sanciti da un *enunciato* da menzionare: è quindi la collocazione che determina questa forma, tutto sommato non totalmente corretta, di riferimento. Nel dettare questa formulazione potrebbe però avere avuto un ruolo anche la necessità di aderire al formato canonico: l'espressione minimale ὅπερ ἄτοπον/ἀδύνατον, che va intesa con il verbo «essere» sottinteso, viene espansa in ὅπερ ἄτοπον/ἀδύνατον δέδεικται «il che è stato dimostrato assurdo/impossibile». La formulazione non minimale è quindi naturale se vista come possibile decontrazione di quella minimale. Ciò mostra quanto forti siano i vincoli imposti dalla regimentazione linguistica dello stile matematico greco, e fornisce una spiegazione ulteriore dell'oscillazione nel riferimento del predicato modale.

I molteplici riferimenti di Aristotele a particolari dimostrazioni per assurdo e a questo metodo deduttivo in generale mostrano che già nella sua epoca esso trovava ampia applicazione in contesti matematici. Esempio paradigmatico di argomentazione per assurdo è per Aristotele la prova di incommensurabilità di lato e diagonale di un quadrato: egli accenna anche ad una dimostrazione in cui,

<sup>111</sup> Negli *Elementi* ricorre anche in VII.27 e VIII.13.

come conseguenza della supposizione di commensurabilità, «i dispari risultano uguali ai pari»<sup>112</sup>, e questo fatto è stato sicuramente fonte di rimaneggiamenti tardivi al testo degli *Elementi*<sup>113</sup>. Aristotele riconosce inoltre che le dimostrazioni per assurdo non sono interamente riducibili ad una formulazione sillogistica (*APr.* A 44, 50a29-38):

E similmente anche per quanto si conclude tramite l'impossibile: non è infatti possibile risolvere neanche questi, ma la riduzione all'impossibile lo è (la si dimostra infatti con un sillogismo), mentre l'altro non lo è: conclude infatti da una supposizione. E differiscono da quelli detti prima [*scil.* i sillogismi da una supposizione] in quanto in quelli si deve procedere ad un accordo preliminare se si vuole andare avanti, ad esempio se si è dimostrato che c'è una sola potenza dei contrari, anche la scienza «che li riguarda» sarà la medesima; qui, invece, anche senza accordo preliminare si raggiunge consenso per il fatto di essere la falsità manifesta, ad esempio posta commensurabile la diagonale l'essere i dispari uguali ai pari.

Aristotele cerca, qui e in A 23, di chiarire quale sia la struttura di una dimostrazione per assurdo, in quanto specie del più ampio genere delle prove che discendono ἐξ ὑποθέσεως «da una supposizione»<sup>114</sup>. Una parte della *reductio ad absurdum* è per Aristotele sempre riconducibile a una formulazione sillogistica: quella che dalla negazione dell'enunciato da dimostrare conduce a un risultato noto come falso o ad una contraddizione. La parte non riconducibile è il segmento finale di una *reductio*: la transizione dalla contraddizione alla negazione della supposizione dell'assurdo, cioè al risultato da dimostrare. Tale transizione è sempre data per scontata: per questo Aristotele dice che non c'è bisogno di accordo preliminare in quanto la falsità è manifesta. Una *reductio* è una specie del sillogismo da una supposizione poiché quest'ultimo procede per rimpiazzamento del *demonstrandum* con un asserto «che <gli> è sostituito» (τὸ μεταλαμβάνομενον), provvisorio e da cui esso possa essere dedotto. Il passaggio dall'asserto suppletivo al *demonstrandum* è convalidato da un accordo preliminare, e non è formalizzabile in forma sillogistica. Nella prove per assurdo la supposizione, su cui Aristotele asserisce che non sia necessario accordarsi, è la negazione della falsità patente cui si arriva al termine della *reductio*<sup>115</sup>, cioè un asserto; nel caso più generale dei sillogismi da una supposizione non è chiarissimo se la supposizione cui Aristotele fa riferimento sia l'assunzione suppletiva (cioè un asserto) o l'oggetto logico corrispondente al passaggio da questa al *demonstrandum* (cioè una regola d'inferenza).

Aristotele afferma anche che ogni dimostrazione per assurdo può essere convertita in una diretta<sup>116</sup>. Ciò si realizza tramite una forma di conversione per argomenti molto simile al primo *thema* stoico e alle dimostrazioni matematiche per contrapposizione (si veda la sezione successiva): se da due premesse deduciamo sillogisticamente una conclusione, risulterà valido anche il sillogismo in cui una delle premesse e la conclusione sono negate e scambiate tra loro. Poiché dunque la parte sillogistica di una deduzione per assurdo la cui conclusione è *C* è del tipo *A*,  $\neg C$ :  $\neg B$ , la regola permette di convertirla in *A*, *B*: *C* e quindi in una prova diretta di *C*, in quanto il passaggio da  $\neg\neg B$  a *C* non è più

<sup>112</sup> *APr.* A 23, 41a21-32. Ulteriori menzioni si trovano ad esempio in *APo.* A 33, 89a29-30, *Top.* A 15, 106a38-b1 e  $\Theta$  13, 163a11-13, *Ph.*  $\Delta$  12, 221b24-25, *GA* B 6, 742b27, *Metaph.*  $\Delta$  12, 1019b21-27 e I 1, 1053a17-18, *EN*  $\Gamma$  5, 1112a21-23. Il penultimo passaggio accenna al fatto che occorre misurare lato e diagonale con due misure differenti.

<sup>113</sup> Una dimostrazione sulla falsariga delle indicazioni aristoteliche è trasmessa da tutti i manoscritti degli *Elementi* (la cosiddetta X.117 *vulgo*, che non ha nessuna connessione con quanto precede). Simile ma non identica la dimostrazione nel commento di Alessandro (*in Apr.*, 260.20-261.19): la sua presenza dimostra però che Alessandro non leggeva X.117 *vulgo* nel testo degli *Elementi* a sua disposizione, e che quindi questa è un'aggiunta posteriore.

<sup>114</sup> Altri passaggi rilevanti in *APr.* A 23 e B 11-14, *Top.* A 18, 108b12-19,  $\Gamma$  6, 119b35-120a2, H 2, 157b34-158a2. Si veda Striker 1979.

<sup>115</sup> Oltre al passaggio letto sopra, piuttosto esplicito sulla questione, si vedano *APr.* A 23, 41a30-40, B 11, 61a21-25, B 14, 62b29-38, *Top.* H 2, 157b34-158a2.

<sup>116</sup> *APr.* A 29, 45a23-b20, e B 11-14, e si veda Lear 1980, 49-52.

necessario. Vi sono due motivi per cui quest'osservazione non può funzionare in ogni caso fuori da uno schema strettamente sillogistico. Primo, certe proposizioni dimostrate per assurdo, come ad es. *El.* III.1: «Trovare il centro del cerchio dato», dipendono soltanto da una definizione, qui quella di cerchio (cfr. sez. 2.1.1). Se vogliamo determinarne il centro con una costruzione la definizione è del tutto inutile, dato che in essa l'esistenza del centro è supposta, e quindi non restano premesse possibili da cui dedurre direttamente III.1. Secondo, si provi a convertire una deduzione in cui la contraddizione ottenuta è del tipo «due angoli sono contemporaneamente uguali e disuguali», caso che si verifica di frequente. La negazione di questa proposizione è una vuota tautologia, inutilizzabile come premessa di un'inferenza. Solo riduzioni in cui la contraddizione si ottiene per negazione di un teorema precedente possono essere convertite secondo le indicazioni aristoteliche. Queste non sono neanche specie maggioritaria tra i tipi attestati di contraddizione, sebbene siano la più numerosa. Naturalmente, è sempre possibile trasformare una prova geometrica indiretta in una diretta, ma a prezzo di giochetti coi quantificatori tali da renderla improponibile come prova genuinamente "greca" (Löwenheim 1946). Trasformare una prova diretta in una indiretta è invece immediato, seguendo il metodo praticato ad esempio da Archimede in *Con. sph.* 7-9 e da Apollonio in *Con.* VI.1-2. Basta porre come supposizione dell'assurdo il contraddittorio dell'asserto da dimostrare e far seguire la dimostrazione *diretta* di quest'ultimo, dichiarando poi «e questo non era stato supposto, il che è assurdo» ed asserendo di conseguenza quanto era da dimostrare. Il trucco, in questa versione fittizia di una *reductio*, è che il contraddittorio dell'asserto da dimostrare *non* intervenga nella dimostrazione diretta.

Aristotele considerava le dimostrazioni dirette migliori di quelle per assurdo (ad esempio *APo.* A 26), ma ciò non gli impediva di considerare le seconde perfettamente valide dal punto di vista logico e dimostrativo. Per quanto le prove indirette siano gli argomenti con carattere dialettico più spiccato, e per quanto Aristotele parli di inutilità dell'accordo in caso di falsità manifesta (e quindi in qualche modo presupponga che ad un accordo preliminare si dovesse in linea di principio addivenire), pure il loro uso in ambito dimostrativo all'esterno di un contesto dialettico ne faceva uno strumento deduttivo altrettanto valido di quelle dirette (*Top.* H 2, 157b34-38).

Dalle fonti a disposizione sembra di poter concludere che gli Stoici non avessero tematizzato le argomentazioni per assurdo; accordarono invece preminenza alla contrapposizione, come andiamo a vedere nella prossima sezione.

### 2.2.2. Argomenti per contrapposizione

Le dimostrazioni nel testo principale degli *Elementi* dove appare una deduzione per contrapposizione sono elencate, libro per libro, nel prospetto seguente. Nell'ultima colonna figurano, con corrispondenza ovvia, le proposizioni degli *Elementi* di cui sono contrapositive.

I	8, 19, 25 ( <i>bis</i> ), 29	I.7, I.5 e 18, I.4 e 24, I.post.5
III	16	III.16
V	9 ( <i>bis</i> ), 10 ( <i>quater</i> )	V.8, V.7 e 8
VII	2	VII.1
VIII	7, 16 ( <i>bis</i> ), 17 ( <i>bis</i> )	VIII.6, VIII.14, VIII.15
X	7, 8, 9 ( <i>bis</i> )	X.6, X.5, X.9
XI	16	XI.1 e XI.def.8 e XI.23

I due micro-argomenti in XI.34 (*EE* IV, 60.8-61.3 e 61.8-10) sono sicuramente interpolazioni, la prima addirittura a parziale correzione di una maldestra interpolazione precedente. La due coppie VIII.14-15

e X.7-8, che completano il “quadrato”, sono quasi sicuramente non autentiche. Nei *Data* le prop. 25-27 sono dimostrate per contrapposizione.

Una contrapposizione si fa riconoscere, oltre che per la sua brevità, per l’assenza di operatori modali e (ovviamente) della clausola di constatazione della riduzione all’assurdo. Il confine concettuale tra i due tipi di prova è dunque labile: l’argomento complesso di III.24 è formulato da una parte della tradizione come *reductio*, dall’altra come contrapposizione. Minimi cambiamenti linguistici, in pratica l’aggiunta delle clausole descritte sotto i punti 1) e 2) *supra*, sono sufficienti a trasformare un tipo nell’altro. Ma proprio per questo la cura con cui i due argomenti sono distinti negli *Elementi* è significativa. Le contrapposizioni trovano impiego quando l’intero argomento indiretto sia esprimibile in forma particolarmente breve e sia di contenuto geometrico scarso o nullo, se non nel riferimento a un teorema precedente; fanno eccezione le contrapposizioni nelle proposizioni omologhe I.29 e XI.16, uniche a non essere deduzioni a due premesse e una conclusione. In una *reductio* l’argomento ha invece quasi sempre un contenuto geometrico e può essere anche molto lungo, come ad esempio quello in IX.36, che occupa 34 righe nell’edizione di Heiberg. Questo fu molto probabilmente il criterio principale su cui si basò per decidere di impostare una contrapposizione invece di una *reductio*.

C’è una certa elasticità nella formulazione della contrapposizione. In I.19, 25 e V.10, gli unici teoremi dove si pongano tre alternative e se ne scartino due, il primo asserto dell’argomento non è un condizionale completo ma soltanto il suo conseguente, riconoscibile dalla presenza di ἄν + tempo storico (a segnalare impossibilità), all’interno di una macro-spiegazione posposta. L’antecedente è preterito in quanto la sua negazione è anticipata (con particella negativa non anteposta). Vediamo un esempio in V.10 (*EE II*, 17.1-7):

εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ A τῷ B· ἐκότερον γὰρ ἂν τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστὶ τὸ A τοῦ B· τὸ A γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἢ περ τὸ B πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστὶ τὸ A τοῦ B. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ A τοῦ B.

Se infatti no, o A è uguale a B oppure minore. Dunque, A non è uguale a B: una e l’altra delle A, B rispetto a Γ avrebbe infatti lo stesso rapporto. E non <lo> ha: non si dà quindi il caso che A sia uguale a B. Né a dire il vero A è minore di B: A rispetto a Γ avrebbe infatti rapporto minore che B rispetto a Γ. E non <lo> ha: non si dà quindi il caso che A sia minore di B. E fu dimostrato neanche uguale: A è quindi maggiore di B.

Le contrapposizioni in forma dispiegata sono I.8, I.29<sup>117</sup>, III.16, V.9, VII.2<sup>118</sup>, VIII.7, 16-17; X.7-9 (le ultime sei le più pulite, anche se X.7-8 sono interpolazioni sicure), XI.16: in questi casi abbiamo un argomento la cui prima proposizione è un condizionale introdotto da εἰ «se» con verbi all’indicativo presente o futuro<sup>119</sup>, la coassunzione è la negazione del conseguente, la conclusione quelle dell’antecedente. In questa forma costituirebbero esempi quasi canonici di secondo indimostrato stoico. Questi ultimi sono argomenti particolari di forma ben definita che gli Stoici posero alla base della propria sillogistica (cioè teoria della deduzione). Per gli indimostrati era «immediatamente chiaro il fatto che concludono validamente, cioè il fatto che per essi la conclusione sia validamente dedotta dalle premesse» (Sesto Empirico, *M VIII*.228); per questo motivo ognuno di essi era denominato ἀναπόδεικτος (συλλογισμός) «(sillogismo) indimostrato». Crisippo ne riconobbe cinque specie, di ognuna delle quali esisteva una descrizione ed un esempio canonico, oltre che una formulazione

<sup>117</sup> Più che dispiegata in questo caso, dato che il condizionale è amplificato ad un argomento con un certo numero di passaggi.

<sup>118</sup> Nelle ultime due l’antecedente del condizionale è abbreviato nella formula εἰ γὰρ/δέ μή «se (infatti) no».

<sup>119</sup> In V.9 l’antecedente è ellittico ed il conseguente ha ἄν + imperfetto.

caratterizzata dalla presenza di abbreviazioni di asserti, atte a mettere in evidenza la forma logica e che vedremo nella sez. 2.9 (si noti che gli indimostrati veri e propri sono argomenti concreti). Ecco le descrizioni del primo e degli ultimi tre, che trascrivo uniformandole (cfr. D.L. VII.80-81, Sesto Empirico, *M* VIII.224-226):

Un primo indimostrato è quello «composto» da un condizionale e dall'antecedente «come premesse», avente come conclusione il conseguente in quel condizionale.

Un terzo indimostrato è quello «composto» da una negazione di una congiunzione e da uno solo dei congiunti «come premesse», avente come conclusione il contraddittorio del congiunto restante.

Un quarto indimostrato è quello «composto» da una disgiunzione e da uno dei disgiunti «come premesse», avente come conclusione il contraddittorio del disgiunto restante.

Un quinto indimostrato è quello «composto» da una disgiunzione e dal contraddittorio di uno dei disgiunti «come premesse», avente come conclusione il disgiunto restante.

Ecco invece la descrizione e un esempio canonico di secondo indimostrato come li leggiamo in Sesto Empirico (*M* VIII.225; cfr. anche D.L. VII.80):

<p>δεύτερος δ' ἐστὶν ἀναπόδεικτος ὁ ἐκ συνημένου καὶ τοῦ ἀντικειμένου τῷ λήγοντι ἐν ἐκείνῳ τῷ συνημένῳ, τὸ ἀντικείμενον τῷ ἡγούμενῳ ἔχων συμπέρασμα. [...] ὡς τὸ "εἰ ἡμέρα ἔστι, φῶς ἔστιν· οὐχὶ δέ γε φῶς ἔστιν· οὐκ ἄρα ἔστιν ἡμέρα".</p>	<p>Un secondo indimostrato è quello «composto» da un condizionale e dal contraddittorio del conseguente in quel condizionale «come premesse», avente come conclusione il contraddittorio dell'antecedente. [...] come "se è giorno, c'è luce; ma certamente non: c'è luce: quindi non: è giorno".</p>
---	---

Un cosiddetto quinto indimostrato con disgiunti multipli formalizza il tipo di deduzione al lavoro in una contrapposizione con diramazioni. Ne abbiamo un esempio ancora in Sesto, che riporta la convinzione di Crisippo che anche un cane da caccia applichi la dialettica stoica (*PH* I.69; cfr. Cleomede, *Cael.* I.5.23-28 e I.6.1-7):

<p>ἤτοι τῆδε ἢ τῆδε ἢ τῆδε διήλθε τὸ θηρίον· οὐτε δὲ τῆδε οὐτε τῆδε· τῆδε ἄρα.</p>	<p>La bestia passò o di qui oppure di qui oppure di qui; ma né di qui né di qui: quindi di qui.</p>
--	---

La forma corrente della coassunzione impiegata in matematica è οὐδέ... οὐδέ... «né... né...», mentre quella canonica in dialettica stoica sembra essere stata οὐτε... οὐτε... .

Gli Stoici avrebbero avuto da obiettare all'identificazione tra argomento per contrapposizione e secondo indimostrato, in quanto lo schema non è applicato in maniera uniforme negli *Elementi*: non sempre la negazione è anteposta, non sempre il primo asserto è un condizionale, non sempre la coassunzione è la negazione del conseguente di quel condizionale quando questo sia presente, non sempre le doppie negazioni richieste sono espresse (VIII.7); le formulazioni di I.19, 25 e V.10 sono alquanto eterodosse. Si trovano però delle ottime approssimazioni, come VIII.16 (*EE* II, 173.22-174.12):

<p>ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.</p>	<p>Qualora un numero quadrato non misuri un numero quadrato, neanche il lato misurerà il lato; e qualora il lato non misuri il lato, neanche il quadrato misurerà il quadrato.</p>
--	--

ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ *A*, *B*, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ *Γ*, *Δ*, καὶ μὴ μετρεῖτω ὁ *A* τὸν *B*: λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ *Γ* τὸν *Δ* μετρεῖ. Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ *Γ* τὸν *Δ*, μετρήσει καὶ ὁ *A* τὸν *B*. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ *A* τὸν *B*: οὐδὲ ἄρα ὁ *Γ* τὸν *Δ* μετρήσει.

μὴ μετρεῖτω [δὴ] πάλιν ὁ *Γ* τὸν *Δ*: λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ *A* τὸν *B* μετρήσει. Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ *A* τὸν *B*, μετρήσει καὶ ὁ *Γ* τὸν *Δ*. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ *Γ* τὸν *Δ*: οὐδ' ἄρα ὁ *A* τὸν *B* μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Siano numeri quadrati *A*, *B*, e loro lati siano *Γ*, *Δ*, e *A* non misuri *B*: dico che neanche *Γ* misura *Δ*. Se infatti *Γ* misura *Δ*, anche *A* misurerà *B*. E *A* non misura *B*: neanche *Γ* misurerà quindi *Δ*.

Di nuovo, *Γ* non misuri [ora] *Δ*: dico che neanche *A* misurerà *B*. Se infatti *A* misura *B*, anche *Γ* misurerà *Δ*. E *Γ* non misura *Δ*: neanche *A* misurerà quindi *B*: il che si doveva dimostrare.

Quando la coassunzione non fa riferimento ad un teorema precedente ma ad una supposizione peculiare al teorema in cui essa stessa si trova e che sia esplicitamente formulata in esposizione, l'argomento viene chiuso con la clausola seguente, che genera un ibrido tra *reductio* e contrapposizione: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται «il che non è stato supposto», mentre ci saremmo aspettati οὐχ ὑπόκειται δέ «e non è stato supposto», seguito dal resto della contrapposizione. Ciò avviene in I.29, VII.2, IX.13, IX.34, e, tra il materiale aggiuntivo, nel lemma X.9/10, nella dimostrazione accessoria apposta a X.39 e nella proposizione che la vulgata greca e greco-latina antepone a X.13<sup>120</sup>. Per questo motivo, ho preferito includere queste deduzioni, eccettuate le prime due, tra le *reductiones*. Le due occorrenze della clausola in IX.10 (la prima all'imperfetto) e l'unica in X.42 sono classificabili come riduzioni all'assurdo *tout court* per la lunghezza dell'argomento e in quanto, pur prive ovviamente della formula 2) descritta nella sezione precedente, hanno la 1) e la 3). Un fenomeno inverso ha luogo in IV.4, 8, 13, i cui argomenti ho classificato tra le *reductiones*.

Ci si potrebbe chiedere perché negli *Elementi* non si faccia mai appello diretto ad una regola di contrapposizione per accorciare le dimostrazioni. Non che mancassero gli strumenti. Abbiamo visto nella sezione precedente la regola di contrapposizione sillogistica esposta da Aristotele, che egli differenzia esplicitamente dall'assurdo pur riconoscendo che sono facilmente trasformabili l'una nell'altro (*APr.* B 11, 61a21-25 e 32-33):

ὅμοιον γὰρ ἔστι τῇ ἀντιστροφῇ, πλὴν διαφέρει τοσοῦτον ὅτι ἀντιστρέφεται μὲν γεγενημένου συλλογισμοῦ καὶ εἰλημμένων ἀμφοῖν τῶν προτάσεων, ἀπάγεται δ' εἰς ἀδύνατον οὐ προομολογηθέντος τοῦ ἀντικειμένου πρότερον, ἀλλὰ φανεροῦ ὄντος ὅτι ἀληθές. [...] ὅσα γὰρ ἀντιστροφήν δέχεται καὶ τὸν διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογισμόν.

[L'assurdo] è infatti simile alla conversione, eccetto che differiscono in tanto in quanto si converte una volta che risulti un sillogismo e siano assunte entrambe le premesse, mentre si ha riduzione all'impossibile quando non ci sia accordo preliminare sulla contraddittoria, ma sia manifesto che è vera. [...] infatti ciò che ammette conversione <ammette> anche sillogismo per impossibile.

Gli Stoici proposero una regola di contrapposizione per argomenti, detta «primo *thema*», analoga a quella aristotelica. Si tratta di una prescrizione per manipolare deduzioni complesse, in modo da ridurle a una catena di indimostrati. Ne abbiamo una descrizione in Apuleio che, si noti, confonde tra assurdo e contrapposizione (*Int.*, 209.9-14):

<sup>120</sup> I teonini nel testo principale (ma **B** sembra dichiarare di averla trovata in un altro antigrafo), **P** in margine di seconda mano. Lo stesso risultato, questa volta sotto forma di *reductio* canonica, è conservato come scolio a X.17 in **P** oppure a X.18 in **V**; in **P** lo scolio, sul margine inferiore della pagina, è di prima mano e porta la soprascritta «In altri questo è posto come teorema in ordine dopo il 12» (si veda *EE* V,2, 139.7-15 e *in app.*). X.13 *vulgo* manca della conclusione ed è introdotta da una clausola sospetta e vagamente criptica: «Lemma alla 13 dalla riduzione ad assurdo». Heiberg la relega giustamente in appendice come interpolata, si veda *EE* III, 216.1-9. La tradizione arabo-latina non ha neanche la proposizione X.13.

est et altera probatio communis omnium etiam indemonstrabilium, quae dicitur “impossibile” appellaturque a Stoicis “prima constitutio” vel “primum expositum”. quod sic definiunt: “Si ex duobus tertium quid colligitur, alterum eorum cum contrario illationis colligit contrarium reliqui”.

C'è anche un'altra dimostrazione comune a tutti gli indimostrabili, che è detta “impossibile” ed è chiamata dagli Stoici “prima regola” o “prima posizione”. La definiscono così: “Se da due <premesse> una terza consegue, da una o l'altra di esse con il contraddittorio della conclusione consegue il contraddittorio di quella che resta”.

Oltre a permettere di dedurre un secondo indimostrato da un primo, la regola autorizza *a priori* qualsiasi deduzione per contrapposizione, una volta che la logica soggiacente sia di tipo proposizionale. Nel caso matematico, si tratterebbe però di uno strumento sostanzialmente inutile. Alcuni teoremi dimostrati per contrapposizione richiedono una divisione preliminare in casi, diventando quindi impossibile fare riferimento ad una sola proposizione precedente. L'abbreviazione sarebbe stata ben poco efficace. Inoltre, ciò che contengono gli *Elementi* sono dimostrazioni, e una dimostrazione è un argomento direttamente calato nel soggetto d'indagine: fare appello ad una regola logica generale non è un argomento di questo tipo; si veda su questo punto Aristotele, *APo.* A 9, 75b37-76a3, e le sue considerazioni in *SE* 11 su dimostrazioni sofistiche in quanto non sviluppate κατὰ τὸ πρᾶγμα.

### 2.3. CONDIZIONALE

Asserti condizionali sono impiegati in primo luogo negli enunciati dei teoremi e, all'interno di una dimostrazione, quando ci si richiami esplicitamente ad essi. La forma è sempre ἐάν «qualora» con congiuntivo aoristo o indicativo presente nell'antecedente, indicativo presente o futuro nel conseguente. Il congiuntivo aoristo passivo trova impiego quando il verbo indichi un'azione o costruzione subita dall'ente matematico soggetto dell'antecedente. In questi casi, quindi, nell'esposizione troviamo regolarmente un perfetto medio-passivo all'imperativo, come vediamo per il verbo τέμνειν «secare» sull'esempio di II.2 (*EE* I, 69.2-6) – lo stesso fenomeno ha luogo in tutta la striscia II.1-10:

ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.  
εὐθεῖα γὰρ ἢ AB τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημείον.

Qualora una linea retta sia secata come càpita, il rettangolo compreso dalla <retta> totale e da uno e dall'altro dei segmenti è uguale al quadrato su quella totale.

In effetti, una retta AB sia secata, come càpita, secondo il punto Γ.

I condizionali negli enunciati matematici presentano quindi una differenza significativa rispetto al formato canonico degli asserti condizionali (συννημμένα lett. «connessi») raccomandato dalla scuola stoica: la presenza di ἐάν con congiuntivo invece di εἰ «se» con indicativo nell'antecedente (D.L. VII.71).

Alla radice di questa scelta ci sono molto probabilmente motivi legati al raggiungimento di una generalità matematica massimale: in prosa greca ordinaria, la protasi in ἐάν fa riferimento a circostanze la cui realizzazione può attendersi in ogni momento e che necessitano quella delle circostanze nell'apodosi (Kühner, Gerth 1898-1904, § 575): una traduzione più accurata del connettore

potrebbe essere «ogni volta che». La particella ἄν dà la stessa sfumatura ad un altro connettore, di uso molto meno frequente e tipico, ma non esclusivo<sup>121</sup>, delle definizioni: ὅταν = ὅτε ἄν «quando e ogni volta che». Esso svolge quindi la funzione del nostro «se e solo se».

A volte una costruzione con genitivo assoluto sostituisce l'antecedente del condizionale; si tratta di una formulazione che fa da ponte tra questa e quella in forma di asserto semplice (I.16, 32, X.1, 71-72, 108-110). Leggiamo l'enunciato di I.32 (EE I, 44.7-10):

<p>παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς γωνία δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.</p>	<p>Un angolo all'esterno di ogni triangolo, prolungato avanti uno solo dei lati, è uguale ai due all'interno e opposti, e i tre angoli all'interno del triangolo sono uguali a due retti.</p>
---	---

In analogia con i problemi della stringa I.16-20, tutti contenenti un quantificatore universale, la traduzione proposta è preferibile a «Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno ecc.», anche se il testo è a mio avviso volutamente ambiguo. Tra le risorse della lingua greca figura infatti anche la capacità di porre «a fattore comune» un'espressione, nel caso presente παντὸς τριγώνου, che determina sia il soggetto della principale che quello della subordinata al genitivo assoluto. Si noti che un enunciato in forma condizionale avrebbe probabilmente imposto l'omissione del quantificatore: ἐὰν τριγώνου μία τῶν πλευρῶν προσεκβληθῆ, ἢ ἐκτὸς γωνία κτλ. È dunque probabile che la forma attestata sia stata scelta per preservare l'analogia di formulazione con le cinque proposizioni precedenti.

Nel *corpus* archimedeo, 24 problemi su 27 contengono nell'enunciato un genitivo assoluto, ma nessun teorema. Nelle *Coniche* di Apollonio la situazione è più complessa: sono enunciati in questa forma 6 problemi (su 18) e 33 teoremi (12 asserti semplici e 21 condizionali) su 208, ma la seconda fattispecie è composta in gran parte di sottocasi di proposizioni precedenti che ricevono un nuovo numero d'ordine. C'è da dubitare che si tratti di una caratteristica originaria: sarà dovuta piuttosto all'intento di editori posteriori di ridurre la lunghezza di certe proposizioni.

Troviamo condizionali, sempre nella forma ἐάν con congiuntivo, anche in alcune definizioni; ve ne sono di annidati, con un imperativo del verbo «chiamare» nel conseguente, in quelle delle sottospecie delle linee irrazionali nel libro X. Leggiamo le 6 definizioni delle 6 sottospecie di binomiale poste tra le prop. X.47 e 48 (EE III, 76.19-77.11) – i «nomi» della binomiale sono le sue rette componenti; si notino la supposizione iniziale in genitivo assoluto, la *variatio* tra relativa e condizionale nel formulare la prima condizione sui «nomi»; i tre condizionali annidati coordinati da μέν... δέ... δέ:

<p>ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλείσθω [ἢ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη. ἐὰν δὲ τὸ ἐλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλείσθω ἐκ δύο</p>	<p>&lt;1&gt; Supposta un'esprimibile e una binomiale divisa nei nomi, il nome maggiore della quale può più del minore per il «quadrato» su «una retta» commensurabile in lunghezza con se stessa, qualora il nome maggiore sia commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata, [quella totale] sia chiamata binomiale prima. &lt;2&gt; E qualora il nome minore sia commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata, sia chiamata binomiale seconda. &lt;3&gt; E qualora né uno né l'altro dei nomi sia commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata,</p>
--	---

<sup>121</sup> Si veda ad es. III.20, dove sostituisce un più regolare ἐάν allo scopo di produrre un enunciato compatto.

ὀνομάτων τρίτη.

πάλιν δὴ ἔαν τὸ μείζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει, ἔαν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ἦ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ἔαν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.

ἔαν δὲ μῆδέτερον, ἕκτη.

sia chiamata binomiale terza.

<4> Ora, di nuovo, qualora il nome maggiore possa più [del minore] per il <quadrato> su <una retta> incommensurabile in lunghezza con se stessa, qualora il nome maggiore sia commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata, sia chiamata binomiale quarta.

<5> E qualora quello minore, quinta.

<6> E qualora né uno né l'altro, sesta.

La definizione è ripresa in forma più sintetica ed istanziata in X.66, 103, 112-113, dove si tratta di identificare in successione tutte le sottospecie in configurazioni particolari. Ebbene, l'identificazione ha luogo su casi effettivamente realizzabili data la configurazione geometrica in questione, e conseguentemente il periodo ipotetico è posto nel modo della realtà (per cui al posto di *μηδέτερον* troviamo *οὔδετέρα*<sup>122</sup>). La struttura condizionale della definizione serve pertanto solo a segnalare la divisione in casi in cui essa si articola. Vediamo il passaggio in X.66, di cui riprendo solo le ultime tre identificazioni (*EE* III, 115.9-14):

καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῆ, καὶ ἐστιν ἑκάτερα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκάτερα πέμπτη. εἰ δὲ οὔδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὔδετέρα σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καὶ ἔσται ἑκάτερα ἕκτη.

E se AE è commensurabile con l'esprimibile fissata, anche ΓΖ è commensurabile con essa, e una e l'altra è quarta. E se EB, anche ΖΔ, e una e l'altra sarà quinta. E se né una né l'altra delle AE, EB, anche né una né l'altra delle ΓΖ, ΖΔ è commensurabile con l'esprimibile fissata, e una e l'altra sarà sesta.

Nel corpo di una proposizione troviamo relativamente pochi condizionali con sfumatura eventuale: le menzioni esplicite di risultati precedenti tramite la ripresa dell'intero enunciato sono infrequenti (ovviamente, non tutte rimandano a un enunciato condizionale), e *a priori* soggette a dubbi di autenticità. La forma di gran lunga più frequente di periodo ipotetico è εἰ «se» con presente indicativo nell'antecedente (ma il verbo è di regola sottinteso), indicativo presente o futuro o imperativo nel conseguente. Questa forma di condizionale si limita a porre un'assunzione, senza implicazioni sulla sua possibile realizzabilità: è curioso che proprio una formulazione siffatta (e non un periodo ipotetico dell'irrealtà) sia esclusiva degli argomenti per assurdo (cfr. la sez. 2.2.1). Più limitato l'uso del condizionale, sempre nella stessa forma, per stabilire un'alternativa tra due o più casi di una dimostrazione<sup>123</sup>, ognuno dotato di una propria dimostrazione, come ad esempio in X.66 vista sopra o in I.13 (*EE* I, 21.8-11)<sup>124</sup>:

εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῆ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἦχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆ ΓΔ [εὐθεία] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ.

Se dunque ΓΒΑ è uguale a ΑΒΔ, sono due retti. Se invece no, sia condotta dal punto Β ad <angoli> retti con la [retta] ΓΔ <una retta> ΒΕ.

Qualora uno dei casi sia affrontato tramite una dimostrazione potenziale, il condizionale passa al modo dell'eventualità, come vediamo sull'esempio, a dire il vero sporadico, di V.6 (*EE* II, 11.10-13)<sup>125</sup>. Qui

<sup>122</sup> Il cambio di genere è dovuto al passaggio dai «nomi» alle «rette» ΑΕ, ΕΒ che li rappresentano.

<sup>123</sup> La forma preferita è un imperativo istanziale che introduca ciascun caso della disgiunzione.

<sup>124</sup> L'espressione ellittica εἰ δὲ οὐ a segnalare il secondo di una divisione in casi è presente in I.13, II.14, VI.28, VII.2, 4, 33, IX.19, XI.11, 20, 22.

<sup>125</sup> Casi analoghi, di autenticità alquanto dubbia, in III.25 e 37.

il condizionale in forma eventuale segue immediatamente la conclusione, formulata nel modo della realtà, dell'argomento completamente dispiegato e potenzialmente da ripetere:

<p>ὥστε εἰ τὸ HB τῷ E ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Z.</p> <p>ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι, <u>κἂν</u> πολλαπλάσιον ἢ τὸ HB τοῦ E, ποσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Z.</p>	<p>Così che <u>se</u> HB è uguale a E, anche ΘΔ sarà uguale a Z.</p> <p>Del tutto similmente dimostreremo che, anche <u>qualora</u> sia multiplo HB di E, tante volte multiplo sarà anche ΘΔ di Z.</p>
--	--

Un ulteriore uso estremamente peculiare di condizionale introdotto da εἰ si rintraccia nelle applicazioni di V.def.5, dove la definizione viene verificata in forma di congiunzione di una tripla di condizionali, come in V.11 (EE II, 18.7-11):

<p>καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ M, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.</p>	<p>E poiché è come A rispetto a B, così Γ rispetto a Δ, e risultano presi di A, Γ equimultipli H, Θ, di B, Δ altri, quali capita, equimultipli Λ, M, <u>se</u> quindi H eccede Λ, anche Θ eccede M, e <u>se</u> è uguale, è uguale, e <u>se</u> fa difetto, fa difetto.</p>
---	---

Gli antecedenti hanno εἰ con indicativo, la definizione ha ὅταν (richiesto dalla doppia implicazione) con congiuntivo, per il fenomeno che discuteremo nella sez. 2.8.

Gli enunciati paralleli di IX.18 e 19 offrono un esempio interessante di correzioni antiche di forme ritenute aberranti rispetto a quella canonica del condizionale (EE II, 209.16-17 e 210.22-23):

<p>δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν ἐστὶν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.</p> <p>τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, <u>πότε δυνατὸν ἐστὶν</u> αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.</p>	<p>Dati due numeri investigare <u>se è possibile</u> trovare un loro terzo proporzionale.</p> <p>Dati tre numeri investigare <u>quando è possibile</u> trovare un loro quarto proporzionale.</p>
--	--

Il primo enunciato ha εἰ dove il secondo ha πότε «quando», ma i manoscritti teonini al posto di quest'ultimo hanno concordemente εἰ. Non è chiaro se si tratti di una variante che, misteriosamente, non sia registrata per IX.18, oppure se la lezione teonina sia semplicemente una correzione dovuta alla volontà di uniformare due testi paralleli altrettanto misteriosamente varianti. (La determinazione di IX.19 ha ovviamente un altro πότε. L'avverbio ποτε «prima o poi», enclitico, compare in passi paralleli in V.8 (bis), X.1 e X.1alt, X.3.)

Il condizionale, indipendentemente dal connettore che lo introduce, è sempre formulato come asserto non semplice: i casi di condizionale ibrido con ἄρα nel conseguente sono rarissimi, e ne ho rintracciati solo nelle frasi introduttive di argomenti per assurdo. Ne troviamo una buona concentrazione (che funziona quindi da marcatore stilistico) nella redazione **b** del libro XII (**b** XII.5, 9-10, 17, ma anche un residuo in XII.18 (EE IV, 135.1-4) sfuggito all'opera di omogenizzazione), di cui leggiamo il passaggio di XII.10 (EE IV, 223.1-5):

<p>εἰ γὰρ μὴ ὁ ABΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν EZHΘMN τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔξει <u>ἄρα</u> ὁ ABΓΔΚΛ κῶνος ἢτοι πρὸς ἑλασσόν τι</p>	<p><u>Se</u> infatti il cono ABΓΔΚΛ rispetto a EZHΘMN non ha rapporto triplicato che ΒΔ rispetto a ΖΘ, il cono ABΓΔΚΛ o rispetto a un certo solido minore</p>
---	---

τοῦ EZHΘMN κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον del cono EZHΘMN oppure rispetto a uno maggiore ἢπερ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ ἢ πρὸς τὸ μείζον. avrà quindi rapporto triplicato che ΒΔ rispetto a ΖΘ.

Il fenomeno dell'ibridazione tra asserto non semplice e inferenza assume ben altra ampiezza con l'oggetto logico che andiamo ad analizzare, e che abbiamo appena visto al lavoro nel testo estratto da V.11.

#### 2.4. PARACONDIZIONALE

Nella sez. 1.4 ci siamo occupati della parte specifica della proposizione denominata «anafora». Essa è caratterizzata da una forma logica peculiare, che trova riscontro nella dialettica antica. Lo stoico Crini (posteriore alla seconda metà del II secolo a.C.) introdusse in effetti nella sua *Tecnica dialettica* un asserto non semplice affine al condizionale, denominandolo παρασυνημμένον «paracondizionale»: dal condizionale differisce dal punto di vista sintattico solo per l'uso di ἐπεὶ «poiché» al posto di εἰ «se». Dal punto di vista semantico ne è invece un rafforzamento (D.L. VII.71 – per l'uso dei numerali si veda la sez. 2.9, per il verbo «annunciare» le sez. 2.6-7):

ἐπαγγέλλεται δ' ὁ σύνδεσμος ἀκολουθεῖν τε τὸ Il connettore annuncia sia che il secondo è δεύτερον τῷ πρώτῳ καὶ τὸ πρῶτον ὑφεστάναι. conseguenza del primo sia che il primo sussiste.

Un paracondizionale è vero quando il conseguente segue (εἰς ἀκόλουθον λήγει) dall'antecedente e quest'ultimo è vero (D.L. VII.74) – si noti che questa caratterizzazione non è vero-funzionale, a causa della presenza della nozione di ἀκολουθία «conseguenza». Già Teofrasto si occupò di tali asserti e «rese chiara la ragione di un siffatto uso nel primo «libro» degli *Analitici primi*» (Simplicio, in *Cael.*, 552.31-553.5), ma non sappiamo più di questo. Da notare, nella definizione data sopra, il verbo ὑφεστάναι «sussistere». Non possiamo dare troppo peso a questa forma verbale, per quanto nella dottrina stoica indichi il modo di esistenza di enti incorporei come gli ἀξιώματα: in Dionisio Trace (92.2-3) troviamo una definizione alternativa che impiega la nozione concorrente di ὑπαρξίς «esistere» (sui due verbi cfr. Goldschmidt 1972):

παρασυναπτικοὶ δέ εἰσιν ὅσοι μεθ' ὑπάρξεως καὶ Paracondizionanti sono quanti rendono manifesto un τάξιν δηλοῦσιν. ordine insieme con un'esistenza.

A prima vista, si tratta esattamente della situazione che riscontriamo nel caso matematico: l'antecedente formula un stato di cose «sussistente», che è tale in quanto supposto nell'esposizione o nella costruzione, il conseguente segue dall'antecedente immediatamente o in virtù di uno o più risultati precedenti. Un problema insormontabile cui va incontro tale identificazione risiede nel fatto che un paracondizionale stoico è un asserto, per quanto non semplice. Ebbene, negli *Elementi* e altrove il suo conseguente è molto spesso accompagnato da ἄρα «quindi», il che rende la frase introdotta da ἐπεὶ un argomento e non un singolo asserto. Se quest'ultimo fosse il caso, si tratterebbe dell'unico caso in cui ἄρα si trova sistematicamente all'interno di un asserto e non segnala una conclusione di inferenza. Per chiarire il fenomeno mettiamo a confronto le «anafore» di I.43 e 44 (*EE I*, 57.14-15 e 59.2-4) – le proposizioni cui si fa riferimento implicito sono I.34 e I.29 rispettivamente:

ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, In effetti, poiché è un parallelogrammo ΑΒΓΔ, e διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἢ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ una sua diagonale ΑΓ, il triangolo ΑΒΓ è uguale al

<p>τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι.</p>	<p>triangolo ΑΓΔ. E poiché una retta ΘΖ incise su parallele ΑΘ, ΕΖ, gli angoli ΑΘΖ, ΘΖΕ sono <u>quindi</u> uguali a due retti.</p>
---	--

Nella prima anafora troviamo dunque un asserto non semplice in forma di paracondizionale<sup>126</sup>, nella seconda un ibrido logico tra asserto non semplice e argomento – continuerò a chiamare entrambi i tipi, per comodità, paracondizionale, nel caso specificando se siano quello in forma pura o quello ibrido.

Se guardiamo all'apparato di Heiberg ci viene suggerita una possibile via per dirimere la questione. Nel caso di I.43 il ms. **F** inserisce ἄρα tra ἴσον e ἐστὶ, mentre in I.44 è **P** che preterisce la particella (*EE* I, 57.14 e 59.3 *in app.*). Il sospetto è che il carattere non inferenziale ma assertivo di un paracondizionale non fosse stato colto da editori posteriori, che trovarono più naturale inserire ἄρα nel suo conseguente. Ancora di più potrebbe aver pesato la *routine* dei copisti, abituati a scrivere ἄρα ogni volta che sia raggiunta una conclusione di argomento parziale (presumibilmente sempre in compendio, il che rende la cosa ancora più automatica). Una volta aggiuntolo è ben difficile che si inneschi il processo inverso. L'ultimo tocco lo danno i criteri strettamente lachmanniani che segue nel nostro caso Heiberg: il manoscritto che ha altrove la sua preferenza quasi incondizionata, **P**, è nel caso di I.44 messo in minoranza dal consenso dei teonini, così come lezione di minoranza era quella di **F** per I.43. Potremmo dunque essere tentati di considerare la presenza di ἄρα nel conseguente di un paracondizionale come una corruttela generalizzata dovuta alla convergenza di più fattori covarianti: correzioni stratificate di revisori, ipercorrettismo di copisti.... Un'analisi statistica permette di falsificare quest'ipotesi. A questo scopo, ho parametrizzato la distribuzione delle occorrenze nei paracondizionali sulla base di una serie di correlazioni con altre caratteristiche dell'unità testuale introdotta da ἐπεὶ:

- 1) Tipo di clausola introduttiva: καὶ ἐπεὶ, ἐπεὶ οὖν, ἐπεὶ καί, ἐπεὶ γάρ, ἐπεὶ, πάλιν ἐπεὶ.
- 2) Natura dell'asserto: paracondizionale puro, ibrido con ἄρα, ibrido con δὴ.
- 3) Tipologia delle assunzioni in antecedente: richiami all'esposizione, alla costruzione, a una proposizione precedente, ad un risultato appena dimostrato.
- 4) Verbo nel conseguente: indicativo o imperativo, corrispondenti rispettivamente ad un asserto geometrico o a una costruzione.
- 5) Posizione nel corpo della dimostrazione: iniziale o intermedia.
- 6) Presenza o assenza di un richiamo esplicito a una proposizione precedente (ma la questione può essere difficile da decidere, cfr. la sez. 1.5.4).
- 7) Posizione dell'antecedente: anteposto o posposto.
- 8) Antecedente del paracondizionale in forma di asserto semplice o di congiunzione.

Ho analizzato in questo modo le «anafore» nei libri I, II, IV, V, VI, VII, XII degli *Elementi*. I risultati sono i seguenti (tra quadre le occorrenze in passaggi ritenuti dubbi da Heiberg).

Legenda dei segni che accompagnano i numeri di proposizione:

natura dell'assunzione in antecedente: a = assunzione in esposizione, c = costruzione, d = risultato acquisito nel corso della dimostrazione, p = risultato acquisito in una proposizione precedente. In neretto le occorrenze con imperativo nel conseguente.

+ = posizione non iniziale nella dimostrazione; \* = citazione (eventualmente istanziata) di enunciato; \*\* = paracondizionale posto nella costruzione; \*\*\* = posposto; § = congiunzione in antecedente.

<sup>126</sup> Si noti che l'antecedente è formato da due asserti, congiunti con un δέ coassuntivo; ne ripareremo nella sez. 2.7.

## Libro I:

	puro	ibrido con ἄρα	ibrido con δῆ
καὶ ἐπεὶ	1c, 3c, <b>13c</b> , 17c, 18c+, 32c§, 33a§, 42c, 45c+, <b>47c</b>	5a+§, 20d+§*, 21p*, 24d+§*, 30c, 31c, 33d+, 34d+, 36a§, 44c <sup>127</sup> , 44c+§ <sup>128</sup> , 45c, 45c+§, 45d+§	26c+§, 33a+§, 47c+, 47c+§ <sup>129</sup> , 48c+§
ἐπεὶ οὖν	2c, 7c, 20c, 43d+§ <sup>130</sup>	5d+§, 14c, 23c§	5a§*, 6c§, 16c§, 24a§, 26c§
ἐπεὶ καὶ	18c+***		
ἐπεὶ γάρ	<b>18a**</b> , 22c, <b>24a**</b> , 34a§, 35a, 43a§ <sup>131</sup>	15a, 28a§, 46c+	9c§, 10c§, 11c§, 12c§, 34a+§
ἐπεὶ	48c		
πάλιν ἐπεὶ	1c+, 2c+, 7c+, <b>13c+</b> , <b>21p+</b> , 22c+, 24c+, 32c+§, 34a+§, 43a+§ <sup>132</sup>	15a+, 21+*, 28a+§, 30c+	

## Libro II:

	puro	ibrido con ἄρα
καὶ ἐπεὶ	4c§, <b>5d</b> , 9c, 9c+, 10c+, 10c+	4dp+§, 8cp+§, 8c+§, 8c+, 9c+, 9dp+§, 10c, 10d+
ἐπεὶ οὖν	<b>6a</b> , <b>7p</b>	8cp§, 14c§*
ἐπεὶ καὶ	4c+***, 5a+***	
ἐπεὶ γάρ		4c+§, 11c§*, 12a*, 13a*
ἐπεὶ		
πάλιν ἐπεὶ	9d+, 10d+	8cp+§, 9dp+§, 10cp+§

## Libro IV:

	puro	ibrido con ἄρα	ibrido con δῆ
καὶ ἐπεὶ	10d+, 12c+	3c§, 3d+§, 5c§ ( <i>bis</i> ), 6c§ <sup>133</sup> , 7cp+§, 7cd+§, 8ad§, 9ad+§ <sup>134</sup> , 10c§, 10cd+§, 12c§, 12d+ ( <i>bis</i> ), 13ac+§, 14ac+§, 15c+*	4c§*, 9a§, 12a+§, 13a§, 13c+§*
ἐπεὶ οὖν	1c+, <b>10d+</b>	2c§, 7c§, 10cd+§, 11cd§	
ἐπεὶ καὶ	10c+***		
ἐπεὶ γάρ	<b>11d+</b> , 15c, <b>15d+</b>	6c+, 7cd+§, 12d+§	
ἐπεὶ			
πάλιν ἐπεὶ	15c+		

## Libro V:

	puro	ibrido con ἄρα
--	------	----------------

<sup>127</sup> om. ἄρα P.<sup>128</sup> om. ἄρα B.<sup>129</sup> om. δῆ BFVbp.<sup>130</sup> add. ἄρα b.<sup>131</sup> add. ἄρα F.<sup>132</sup> add. ἄρα P.<sup>133</sup> om. ἄρα Bp.<sup>134</sup> om. ἄρα p.

καὶ ἐπεὶ	18c+*, 19a+* <sup>135</sup> , [19d+], 23a+, 24d+*	1c+, 3ac+§, 4ac§, 4ac+§, 5c, 5ad+§, 8c+, 11ac§, 12ac§, 13ac+§, 15c+§, 16c*§, 17c, 17a+§, 22ac§, 23ap*§, 23ap+*§, 25d+*, 25c+§, [25p+*]
ἐπεὶ οὖν		3d+§*, 6d+, 7ac§, 8c+, 22d+*, 23d+*§, 24ad+§, [25ac§]
ἐπεὶ καὶ		
ἐπεὶ γάρ	<b>8a**</b> , <b>13a**§</b> , 19a	1a, 2a, 3a, 14a§, 15a, 20a*§, 21a§, 24a
ἐπεὶ		6§
πάλιν ἐπεὶ	17c+§* <sup>136</sup>	8c+§, 11ac+§, 16c+, 17c+, 23a+

## Libro VI:

	puro	ibrido con ἄρα	ibrido con δὴ
καὶ ἐπεὶ	1c, 4a+ <sup>137</sup> , 20a, 20p§ <sup>138</sup> , 22/23a+, 24a+, <b>28p+</b> , 29c+, <b>30c+</b>	1d+§*, 3c, 3c+*, 4ad§, 4c+*, 5cd+§, 7ac, 10c+*, 13c+*, 16ac§, 17ac§, 18cd+, 19cp+§*, 20p+§, 20d+§, 20dp+§*, 22ap§, 22cd§, 23ap+§, 24d+, 25cp§*, 28c, 29c, 31d+, 31d+*, 32ad+§*	
ἐπεὶ οὖν	11c*, 31c <sup>139</sup> , 33c	1d+, 4d+, 9c*, 12c*, 14ac§*, 15ac§*, 19a, 20dp+§*, 22c§, 23d+, 26c, 27cp+§, 28c	5d+§
ἐπεὶ καὶ	27c+***, 28c+***, 29p+***		
ἐπεὶ γάρ	21a, 24c, 27c <sup>140</sup> , 32§a*	8ap§, 8ad§, 14ap§	
ἐπεὶ	13c	2p§, 3d§, 15ap§, 16c§, 17ac§c, 29c§	
πάλιν ἐπεὶ	3c+, 4a+, 21a+, 24c+	4d+, 10c+*, 23ap+§	

## Libro VII (nessun conseguente all'imperativo):

	puro	ibrido con ἄρα	ibrido con δὴ
καὶ ἐπεὶ	3c+, 4c+, 10c+	2c+§, 3c+§, 5c+ <sup>141</sup> , 6c+, 7c, 7c+ <sup>142</sup> , 8ac+§, 9c+§, 15c+§, 20c+§, 21c+, 24ac+§ <sup>143</sup> , 28c+, 29c+, 31c+§, 33c+ ( <i>bis</i> ), 34c+ ( <i>bis</i> ), 35ac§	
ἐπεὶ οὖν		1c+§, 2c+§, 3c+, 21p+*, 27ad+§, 27ad+*, 28c+, 30c+	19ac§
ἐπεὶ καὶ			
ἐπεὶ γάρ	31a*	3a+*, 5a, 6a, 9a, 10a, 12a, 13a, 14a, 15a, 16a, 17a, 18a <sup>144</sup> , 26a, 27a§, 38ap§	
ἐπεὶ		11a, 19a+, 22c+, 23ac+§, 25ac+§, 29ac+§, 36c+, 36c+§, 36c+, 37cp§	
πάλιν ἐπεὶ		8ac+§, 14a+, 16+, 27a+§	19ac+§

## Libro XII (nessun conseguente all'imperativo):

<sup>135</sup> add. ἄρα **Bp** m. 2 **V** m. rec. **P**.<sup>136</sup> add. ἄρα **BpF**.<sup>137</sup> add. ἄρα **BVp** m. 2 **F**.<sup>138</sup> add. ἄρα **F**.<sup>139</sup> add. ἄρα **V**.<sup>140</sup> add. ἄρα **Bp**.<sup>141</sup> om. ἄρα **BVFp**.<sup>142</sup> om. ἄρα **F**.<sup>143</sup> om. ἄρα **Vφ**.<sup>144</sup> om. ἄρα **φ** del. **V**.

	puro	ibrido con ἄρα
καὶ ἐπεὶ	1a, 3c+* ( <i>ter</i> ), 3c+, 17c+, 17c+§, 17c+ ( <i>bis</i> )	3c+§, 3p+*, 4a+, 4/5a+*, 6c+, 7cd+§, 8a, 8d+§, 9ad§, 12a+, 12d+§, 13c* <sup>145</sup> , 14c+*, 15a+, 16c+§, 17c+*, 17c+, 17c+§ <sup>146</sup> , 17c+*, 17c+§ ( <i>ter</i> )
ἐπεὶ οὖν	6c*, 14a*	11d+§, 12d+§*, 13c+§
ἐπεὶ καὶ		
ἐπεὶ γάρ	2/3d+	4a§
ἐπεὶ		3c§, 7a§, 9d+§, 15a+§
πάλιν ἐπεὶ	7a+§	12c+§, 12d+§ ( <i>bis</i> )

Prima osservazione, la più importante: i paracondizionali in forma assertiva sono nettamente minoritari, ed i dati non permettono di stabilire correlazioni strette con nessuno dei parametri di controllo, a parte fatti accidentali o dalla statistica troppo bassa: i paracondizionali con antecedente posposto sono ovviamente puri; tutti quelli con imperativo nel conseguente lo sono. È rilevabile solo una correlazione con il numero delle assunzioni congiunte nell'antecedente.

Secondo: i casi di ἐπεὶ non accompagnato da ulteriori particelle sono piuttosto rari (ma si vedano i dati del libro VII, dove funzionano da marcatore stilistico). Ho contato soltanto 17 varianti manoscritte nel tipo di clausola introduttiva, quasi tutte arricchimenti per aggiunta di una particella ad un ἐπεὶ solitario. Il dato non deve stupire: è una caratteristica peculiare della lingua greca identificare con opportune particelle le singole unità testuali indipendenti, caratteristica portata all'estremo nel linguaggio matematico (cfr. sez. 1.0). Se particelle aggiuntive come δέ o ἄρα qualificano certi asserti semplici come unità logiche specifiche (coassunzioni, conclusioni), qui, ad un livello logico superiore, è l'intero paracondizionale che viene caratterizzato in funzione del suo ruolo nell'economia generale della proposizione. Troviamo dunque paracondizionali con funzione di inizializzazione di una dimostrazione (accompagnati da γάρ), collocati quasi soltanto immediatamente dopo l'esposizione o la costruzione (e se nel corpo della dimostrazione, dopo la ripresa di una divisione in casi), con funzione progressiva (qualificati da καὶ o οὖν), che siano posti all'inizio o nel corso della dimostrazione, con funzione reiterativa (πάλιν), tutti nel corpo della prova. Scarse sono quindi le occorrenze di ἐπεὶ solitario. In certi casi, esso segue un'espressione immediatamente precedente il paracondizionale ma ad esso subordinata, come ad esempio il genitivo assoluto in τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ... « In effetti, effettuate le stesse costruzioni, poiché... » (occorrenze in III.3, VI.2, 3, VI.16-17, VII.19, XI.34, XII.9, 15).

Terzo, sono molto scarsi i paracondizionali nel cui conseguente siano eseguite costruzioni (esempi nella sez. 1.4).

Quarto, un caso interessante di paracondizionale semi-ibrido è quello contenente la particella debolmente risultativa δὴ nel conseguente. Le occorrenze nel primo libro sono quasi tutte all'interno di applicazioni di I.4 e I.8<sup>147</sup>. Si tratta di passaggi di transizione, semplici constatazioni di fatti ovvi, dal carattere inferenziale estremamente debole<sup>148</sup>: per questo troviamo δὴ nel conseguente (cfr. sez. 2.11). I passaggi sono definibili "di transizione" in quanto riformulano la congiunzione di due assunzioni in modo che il risultato sia in linea con l'espressione canonica contenuta nell'antecedente

<sup>145</sup> om. ἄρα P.

<sup>146</sup> om. ἄρα m. 1 P.

<sup>147</sup> Unica eccezione la prima occorrenza in I.47, inclusa in un riferimento a I.14. Il fatto ovvio è che la somma di due angoli retti faccia due retti, e questo porta a soddisfare le ipotesi di I.14.

<sup>148</sup> Ma non tutti i passaggi del genere hanno δὴ: si veda ad esempio VII.5: καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A, ὁ δὲ EΘ τῷ Δ, καὶ οἱ BH, EΘ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι «e poiché BH è uguale a A, e EΘ a Δ, anche BH, EΘ sono quindi uguali a A, Δ» (EE II, 111.23-24).

del teorema da applicare. Vediamo un esempio per I.4 e uno per I.8, rispettivamente in I.5 e I.9 (*EE I*, 12.19-21 e 17.14-16):

<p>ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AZ τῆ AH ἢ δὲ AB τῆ          ΑΓ, δύο δὲ αἱ ZA, ΑΓ δυσὶ ταῖς HA, AB ἴσαι          εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω.</p> <p>ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆ AE, κοινὴ δὲ ἡ AZ,          δύο δὲ αἱ ΔΑ, AZ δυσὶ ταῖς EA, AZ ἴσαι εἰσὶν          ἑκατέρω ἑκατέρω.</p>	<p>Poiché dunque AZ è uguale a AH e AB a ΑΓ, due          «rette» ZA, ΑΓ sono <u>pertanto</u> rispettivamente uguali a          due HA, AB.</p> <p>In effetti, poiché ΑΔ è uguale a AE, e AZ comune, due          «rette» ΔΑ, AZ sono <u>pertanto</u> rispettivamente uguali a          due EA, AZ.</p>
--	---

Lo stesso accade in VII.19, dove la constatazione è la seguente (*EE II*, 125.15-19):

<p>ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η          πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε          πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὲ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ,          Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν.</p>	<p>Poiché dunque Α moltiplicando Γ risulta fare Η, e          moltiplicando Δ risulta fare Ε, un numero Α          moltiplicando due numeri Γ, Δ risulta <u>pertanto</u> fare Η,          Ε.</p>
---	--

Quinto, molti casi di assenza di paracondizionale strettamente incipitario di una dimostrazione (cioè immediatamente susseguente alla costruzione) sono dovuti alla forma di quest'ultima, quando preveda una divisione in casi o sia condotta per assurdo.

Sesto, l'apparato di Heiberg rivela che le varianti concernenti ἄρα nel conseguente sono strettamente minoritarie, contrariamente a quanto avevo tendenziosamente suggerito più sopra, e quindi tutte giustificabili come normali varianti di copia.

Settimo, che il paracondizionale ricavi la condizione in antecedente dalla costruzione o dall'esposizione è un fattore legato al dominio matematico in questione: paracondizionali in dimostrazioni geometriche tendono naturalmente a fare ricorso alla costruzione in misura maggiore di quanto accada in teoria dei numeri o delle proporzioni.

Ottavo, la presenza della particolare clausola introduttiva ἐπεὶ γάρ non è correlata a quella di un γάρ in un'esposizione o costruzione precedente. Già solo nel libro I, un paracondizionale così introdotto segue esposizione e costruzione non introdotte da γάρ in 9-11, 22, 46, segue esposizione e costruzione, ma quest'ultima è introdotta da γάρ, in 12, segue immediatamente l'esposizione in 15, 28, 34 (*bis*), 35, 43, dà inizio alla costruzione in 18 e 24.

La conclusione che traggo da quest'analisi è che la pratica matematica e la sistematizzazione stoica per quanto riguarda il paracondizionale non sono solo indipendenti, ma divergenti. Se andiamo in effetti a vedere come è strutturato l'antecedente in forma di congiunzione di un paracondizionale, riscontriamo un'enorme variabilità di particelle adibite allo scopo, dove spiccano però quelle tipicamente coassuntive, non congiuntive (cfr. sez. 1.5.5). Ecco in un prospetto quanto accade nel libro VI (includo con esitazione le correlative μέν... δέ... rette dallo stesso verbo):

forma correlativa	proposizioni
niente... ἀλλά...	3, 17, 23 ( <i>bis</i> ), 29
niente... ἀλλὰ μέν... δέ...	2, 14, 15
niente... ἀλλὰ μήν...	8, 20
niente... δέ...	4, 5, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22 ( <i>bis</i> ), 25, 27, 32
niente... δὲ καί...	20
niente... καί...	8, 20, 32

niente... καὶ μέν... δέ...	16, 22
niente... καὶ ἔτι...	20
μέν... ἀλλά...	5
μέν... δέ...	1, 4, 7, 18, 23, 24
μέν... δέ... δέ...	1

Potremmo tentare di salvare la connessione osservando che il paracondizionale è pur sempre una struttura logica cruciale per la macchina deduttiva della matematica greca: è il solo asserto non semplice con carattere inferenziale locale esplicito che operi sulla configurazione geometrica con sistematicità; il condizionale è di gran lunga meno usato e compare principalmente in situazioni che pertengono all'economia globale della dimostrazione (assurdo, divisione in casi – le citazioni di enunciati condizionali sono sospette *a priori*, come abbiamo visto). Sarebbe dunque sorprendente una disattenzione stoica nei confronti di questo tipo di struttura logica. Tra l'altro, in un paracondizionale l'antecedente è vero: potrebbe dunque essere interpretato come un primo indimostrato ellittico, il che giustificerebbe in parte le incertezze nell'uso di ἄρα. La prescrizione di Crini avrebbe semplicemente risolto l'ambiguità insita nella pratica matematica. L'argomento mi pare piuttosto debole: i dati a nostra disposizione sembrano corroborare solo un'ipotesi di interazione nulla.

Chiudo con una tabella riepilogativa della distribuzione dei paracondizionali, ripartiti per sintagma incipitario e per libro, nel testo principale degli *Elementi*. È indicato il numero di proposizioni per libro, anche se non si tratta di un buon parametro: la densità di paracondizionali dipende dalla lunghezza e dalla varietà di una dimostrazione (si prenda ad esempio il libro XIII). Per questo ho aggiunto anche una stima, approssimata al centinaio più vicino, del numero di segni (Si aggiungano tre occorrenze di διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ in XI.17, 31, XIII.16):

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	tot.
# proposiz.	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
# segni	58	25,3	52,6	26	37,7	58	44	38,3	39	199,7	68	63,7	52,7	763,4
%	7,6	3,3	6,9	3,4	4,9	7,6	5,7	5	5,1	26,1	9	8,3	6,9	100
καὶ ἐπεὶ	29	14	39	24	25	35	23	38	31	149	64	31	55	557
ἐπεὶ οὖν	12	4	21	6	8	17	9	2	5	65	5	5	5	164
ἐπεὶ καί	1	2	/	1	/	3	/	/	1	/	1	/	4	13
ἐπεὶ γάρ	14	4	2	6	11	7	16	13	14	64	5	2	10	168
πάλιν ἐπεὶ	14	5	12	1	6	7	5	17	4	31	3	4	8	117
tot.	70	29	74	38	50	69	53	70	55	309	78	42	82	1019

Si contano in tutto 1070 occorrenze di ἐπεὶ: quelle non qualificate da ulteriori particelle sono quindi 51. Le occorrenze per libro sono evidentemente proporzionali al relativo numero di segni. La costante di proporzionalità si riduce nettamente solo nel libro XII, fatto spiegabile con la lunghezza dei teoremi in esso contenuto, che introduce una correlazione negativa.

## 2.5. NEGAZIONE<sup>149</sup>

<sup>149</sup> Si vedano Moorhouse 1959 per una trattazione generale dei negativi nella prosa greca (sebbene il campione di scritti post-classici sia limitato) e Cavini 1985 per quanto riguarda gli aspetti più spiccatamente logici.

Le proposizioni degli *Elementi* il cui enunciato è in forma negativa sono elencate nel prospetto seguente; in caso di enunciati condizionali, s'intende ovviamente che la negazione si trovi nel conseguente:

asserto con negazione del predicato verbale	denegativo
I.7, III.4-6, 10, 13, 16 <sup>150</sup> , 23, VIII.6, 16-17, IX.16-17, X.7, 9 <sup>151</sup> , 26, 111, XI.1, 13	VIII.6 <sup>152</sup> , IX.10, 13-14, X.115

La terminologia è ricalcata su quella della classificazione stoica degli asserti negativi che leggiamo in D.L. VII.69-70<sup>153</sup>:

**69** ἐν δὲ τοῖς ἀπλοῖς ἀξιώμασιν ἐστὶ τὸ ἀποφατικὸν καὶ τὸ ἀρνητικὸν καὶ τὸ στερητικὸν [...] ἀποφατικὸν μὲν «ἐστὶ τὸ συνεστὸς ἐξ ἀποφάσεως καὶ ἀξιώματος» οἷον "οὐχὶ ἡμέρα ἐστίν", εἶδος δὲ τούτου τὸ ὑπεραποφατικόν. ὑπεραποφατικὸν δ' ἐστὶν ἀποφατικὸν ἀποφατικοῦ, οἷον "οὐχὶ «οὐχὶ» ἡμέρα ἔστι". τίθησι δὲ τὸ "ἡμέρα ἐστίν." **70** ἀρνητικὸν δὲ ἐστὶ τὸ συνεστὸς ἐξ ἀρνητικοῦ μορίου καὶ κατηγορήματος, οἷον "οὐδεὶς περιπατεῖ". στερητικὸν δὲ ἐστὶ τὸ συνεστὸς ἐκ στερητικοῦ μορίου καὶ ἀξιώματος κατὰ δύναμιν, οἷον "ἀφιλάνθρωπός ἐστὶν οὗτος".

**69** Tra gli asserti semplici c'è quello negativo, quello denegativo e quello privativo [...] negativo «è quello costituito da una negazione e da un asserto», come “non: è giorno”; il supernegativo ne è una specie. Supernegativo è un negativo di un negativo, come “non: <non:> è giorno”. Stabilisce “è giorno”. **70** Denegativo è quello costituito da una parte denegativa e da un predicato, come “nessuno cammina”. Privativo è quello costituito da una parte privativa e da un asserto potenziale, come “costui è asociale”.

Ad esclusione di X.115, le dimostrazioni di queste proposizioni sono tutte indirette. Come abbiamo visto nella sez. 1.2, alcune proposizioni enunciate in forma negativa (I.7, III.10, 13, 23, X.26, XI.1, 13) sono prive di esposizione. Dopo l'enunciato viene quindi proposto immediatamente il condizionale canonico incipitario di una *reductio*, che di solito contiene una esemplificazione della configurazione “impossibile” (sottolineata nel testo) ed è immediatamente seguita dalla costruzione, come in X.26 (*EE* III, 41.2-7):

μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ.  
εἰ γὰρ δυνατὸν, μέσον τὸ  $AB$  μέσου τοῦ  $AG$  ὑπερεχέτω ῥητῶ τῶ  $ΔB$ , καὶ ἐκκείσθω ῥητῆ ἢ  $EZ$ , καὶ τῶ  $AB$  ἴσον παρὰ τὴν  $EZ$  παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ  $ZΘ$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $EΘ$ , τῶ δὲ  $AG$  ἴσον ἀφηρήσθω τὸ  $ZH$ .

Un mediale non eccede un mediale per un esprimibile.  
Se infatti possibile, un mediale  $AB$  ecceda un mediale  $AG$  per un esprimibile  $ΔB$ , e sia fissata un'esprimibile  $EZ$ , e uguale a  $AB$  sia applicato a  $EZ$  un parallelogrammo rettangolo  $ZΘ$  facendo una larghezza  $EΘ$ , e uguale a  $AG$  sia sottratto  $ZH$ .

Come abbiamo visto nella sez. 1.3, è la negazione che permette di formulare asserti di unicità.

Ma ritorniamo all'elenco fornito all'inizio. Un esempio di asserto denegativo è l'enunciato del teorema di impossibilità in IX.13 (*EE* II, 202.5-8):

<sup>150</sup> Solo la seconda delle tre asserzioni dell'enunciato.

<sup>151</sup> Solo la seconda parte dell'enunciato.

<sup>152</sup> L'enunciato contiene sia una negazione che pronomi denegativi.

<sup>153</sup> Agli accenni di Diogene si aggiunga la lunga discussione in Alessandro, in *APr.*, 401.16-405.16.

ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιὸν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ἦ, ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς [ἄλλου] μετρηθήσεται παρῆξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Qualora siano a partire da un'unità quanti si voglia numeri di séguito in proporzione, e quello dopo l'unità sia primo, quello massimo <non> sarà misurato da nessun [altro] a parte quelli che si trovano ad essere tra i numeri in proporzione.

Piuttosto comuni sono gli asserti privativi, in cui cioè il nome del predicato è formato per anteposizione di una particella privativa. Ad esempio, il predicato ἄνισος «disuguale» ricorre circa 200 volte nel *corpus* euclideo. Enunciati in cui sia richiesto di dimostrare che certi oggetti matematici sono disuguali sono però molto rari. Un esempio ne è la prop. 35 della redazione A dell'*Ottica* (EOO VII, 64.23-27):

ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ ὀμματος πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου προσπίπτουσα μήτε πρὸς ὀρθὰς ἢ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου μήτε τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα, αἱ διάμετροι ἄνισοι φανήσονται, πρὸς ἃς ποιεῖ ἀνίσους γωνίας. E qualora la <retta> che incide dall'occhio sul centro del cerchio non sia né ad <angoli> retti con il piano del cerchio né uguale al raggio né tale da comprendere angoli uguali, i diametri rispetto a cui fa angoli disuguali appariranno disuguali.

Una nozione privativa molto importante definita negli *Elementi* è la relazione di incommensurabilità (X.def.1, EE III, 1.2-4) :

σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι. Grandezze commensurabili sono dette quelle misurate con la stessa misura, incommensurabili quelle di cui <non> è possibile che risulti nessuna misura comune.

Da notare che il *definiendum* contiene una parte denegativa con particella negativa μή, come si deve in una subordinata, e una connotazione modale esplicita; essa sottolinea il carattere operativo della procedura che permette di stabilire quando due grandezze siano incommensurabili (cf. X.2). Un esempio di asserto che esprime un risultato di incommensurabilità è l'enunciato di X.16 (EE III, 25.6-8) :

ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῆ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. Qualora due grandezze incommensurabili siano composte, anche quella totale sarà incommensurabile con una e con l'altra di esse; e qualora quella totale sia incommensurabile con una sola di esse, anche le grandezze in origine saranno incommensurabili.

La formulazione più corrente di asserto negativo è però quella in cui la particella negativa è una parte indipendente della frase, la negazione agendo direttamente sul predicato verbale, come nell'enunciato di III.10 (EE I, 108.17) :

κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. Un cerchio non *seca* un cerchio secondo più punti che due.

Quando sia negato il predicato verbale della proposizione principale, la particella impiegata è la negazione oggettiva οὐ (o οὐκ(χ) davanti a vocale); nessuna occorrenza significativa si registra della forma οὐχί raccomandata dalla tradizione dialettica<sup>154</sup>. La negazione soggettiva μή trova invece impiego per negare subordinate (di norma l'antecedente di un condizionale; ciò accade anche nelle supposizioni dell'assurdo), forme participiali, predicati non verbali in forma di sintagmi complessi. Leggiamone un esempio per specie.

Negazione della subordinata nell'enunciato di VIII.16 (EE II, 173.22-25) – nella principale troviamo una particella negativa oggettiva nella forma οὐδέ:

ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῆ, οὐδέ ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κὰν ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῆ, οὐδέ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.	Qualora un numero quadrato <u>non</u> misuri un numero quadrato, <u>neanche</u> il lato misurerà il lato; e qualora il lato <u>non</u> misuri il lato, <u>neanche</u> il quadrato misurerà il quadrato.
---	---

Forma participiale nell'enunciato di XI.9 (EE IV, 14.12-13):

αἱ τῆ αὐτῆ εὐθεία παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῆ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.	Rette parallele alla stessa retta e che <u>non sono</u> nel suo stesso piano sono anche parallele tra loro.
---	---

Predicato non verbale, incluso in un pronome denegativo, nella supposizione della *reductio* di IX.36 (EE II, 226.1-3):

εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μῆδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἔστω ὁ αὐτός.	Se infatti possibile, un certo «numero» Ο misuri ΖΗ, e Ο <u>non</u> sia identico a nessuno dei Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ.
---	---

Negli enunciati negativi la negazione è sempre anteposta direttamente al verbo, e questo si trova di solito in posizione intermedia all'interno della frase. Il corpo di una *dimostrazione* offre però esempi estremamente interessanti di negazioni anteposte ad un'intera proposizione e ben separate dal predicato verbale. Le occorrenze si trovano tutte in inferenze per contrapposizione o per assurdo, in particolare nella loro conclusione, quando quest'ultima sia data in forma negativa. Vediamo come esempio supposizione e conclusione della prima *reductio* in I.26 (EE I, 36.22-23 e 37.10-11)<sup>155</sup>:

εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἢ ΑΒ τῆ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν.	Se infatti è disuguale ΑΒ a ΔΕ, una sola di esse è maggiore.
οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἢ ΑΒ τῆ ΔΕ.	Non si dà quindi il caso che sia disuguale ΑΒ a ΔΕ.

Il punto sta nel capire se la posizione anteposta della negazione, ovviamente enfatica e già attestata come tendenza marcata in prosa greca ordinaria (Moorhouse 1959), può essere caricata di plusvalori logici. Ciò è suggerito dai seguenti dati di fatto:

<sup>154</sup> La forma ricorre solo 2 volte, nelle introduzioni a *Optica* Β (sicuramente spuria) e alla *Sectio canonis*. Non si registrano occorrenze in Archimede o Apollonio.

<sup>155</sup> Qui come in tutto il resto del libro, traduco le occorrenze di οὐκ (ἄρα) anteposto in *testi matematici* con «non si dà (quindi) il caso che». Gli Stoici sembra ammettessero però solo l'atto discorsivo di asserzione di una negazione, e non quello di diniego di un asserto – si veda Cavini 1985, 50 e 61 –; per questo motivo nei testi logici traduco la stessa espressione con «non (quindi)», anche se forse occorrerebbe «si dà il caso che non (quindi)».

1) La negazione anteposta si rintraccia soltanto nei casi menzionati. Le conclusioni negative di queste inferenze sono introdotte invariabilmente (157 occorrenze nel complesso gli *Elementi*) con οὐκ ἄρα «non si dà quindi il caso che» o con οὐδὲ ἄρα «neanche si dà quindi il caso che»<sup>156</sup> se la supposizione era in forma congiuntiva. A volte, ad es. in I.7, III.10, 23, X.42-47, XI.13, la conclusione dell'argomento per assurdo è offerta direttamente in forma non istanziata, e coincide con la conclusione dell'intero teorema. Ciò produce alcuni tra i pochissimi casi in cui la conclusione di un teorema non è identica all'enunciato, fatta salva ovviamente la presenza di ἄρα, anche se solo per la posizione della negazione (il caso di X.42-47 è solo apparentemente più complicato). Ecco la conclusione di III.10, il cui enunciato abbiamo letto sopra (*EE I*, 109.21-22):

οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο. Non si dà quindi il caso che un cerchio sechi un cerchio secondo più punti che due.

Nel caso la conclusione sia solo istanziata, come in IX.13 letta all'inizio di questa sezione, la particella negativa è estratta dalla parte denegativa ed anteposta a tutta la frase (*EE II*, 204.16-17):

οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρ᾽ ἑ τῶν Α, Β, Γ. Non si dà quindi il caso che quello massimo Δ sia misurato da un altro numero a parte Α, Β, Γ.

2) In certe dimostrazioni per contrapposizione, la coassunzione si compone di tre termini: οὐκ–predicato verbale–δέ «e non...»; l'ordine è sempre negazione-verbo-particella avversativa. Ne leggiamo un esempio doppio in V.10 (*EE II*, 17.1-7):

εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β ἢ ἕλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ἐκότερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἕλασσόν ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β· τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἢ περ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἕλασσόν ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Se infatti no, o Α è uguale a Β oppure minore. Dunque, Α non è uguale a Β: una e l'altra delle Α, Β rispetto a Γ avrebbe infatti lo stesso rapporto. E non <lo> ha: non si dà quindi il caso che Α sia uguale a Β. Né a dire il vero Α è minore di Β: Α rispetto a Γ avrebbe infatti rapporto minore che Β rispetto a Γ. E non <lo> ha: non si dà quindi il caso che Α sia minore di Β. E fu dimostrato neanche uguale: Α è quindi maggiore di Β.

La presenza della negazione comporta la dislocazione della particella, normalmente in seconda posizione. In autori classici frasi analoghe hanno la negazione in ultima posizione (Moorhouse 1959, 76). La sua posizione anteposta nello stile matematico è dunque un tratto caratterizzante.

3) Si trovano esempi di doppia negazione, una delle quali anteposta alla frase e l'altra al predicato verbale<sup>157</sup>. Se ne deve presumere che le due posizioni fossero ritenute equivalenti dal punto di vista matematico. Le due negazioni si elidono, e spesso il carattere inferenziale di questa mossa viene reso esplicito con un passaggio ulteriore, come leggiamo in IX.31 (*EE II*, 220.12-14):

<sup>156</sup> Se ne contano 23 occorrenze, in V.8, VIII.16, 17 (*bis*), X.10, 30, 51-52, 85 (*bis*), 87 (*ter*), 88 (*bis*), 89 (*bis*), 90 (*quater*), XI.34 (*bis*), più una di οὐδὲ ἄρα senza elisione in VIII.16, conseguenza di una scelta editoriale di Heiberg.

<sup>157</sup> Le uniche eccezioni apparenti sono le occorrenze di οὐκ ἄρα οὐ(κ) in VI.26 e VII.35. Si tratta di casi accidentali, dovuti il primo alla forma particolare dell'asserto negato, che ha il verbo «essere», negato a sua volta, anteposto, il secondo alla brevità della frase negata. Le due negazioni sono ad ogni buon conto separate da un ἄρα «quindi».

οὐκ ἄρα ὁ A πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἐστίν. οἱ A, Non si dà quindi il caso che A non sia primo rispetto a Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Γ. A, Γ sono quindi primi tra loro.

Esempio ulteriore, ed interessante, in I.6, dove la negazione anteposta neutralizza quella implicita in una privativa (*EE I*, 14.14-15):

οὐκ ἄρα ἄμισός ἐστιν ἡ AB τῆ ΑΓ· ἴση Non si dà quindi il caso che sia disuguale AB a ΑΓ: è quindi ἄρα. uguale.

Tuttavia, la «regola della doppia negazione» è spesso obliterata, e non abbiamo nessun elemento per stabilire se in questi casi si tratti di una sua applicazione implicita all'inizio o alla fine di una *reductio*, con passaggi omessi per evitare accumulazioni di particelle negative, o se da un asserto negativo si ritorni in modo naturale “indietro” all'asserto positivo corrispondente (questo punto è metodologicamente importante, in quanto impedisce di trarre conclusioni sul carattere (non) costruttivo di queste dimostrazioni). L'obliterazione della doppia negazione è sistematica quando una dimostrazione indiretta stabilisce un enunciato negativo, come X.26. Leggiamo la supposizione che apre la *reductio* di III.10, di cui abbiamo letto sopra enunciato e conclusione (*EE I*, 108.18-19) :

εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ Se infatti possibile, un cerchio ΑΒΓ sechi un τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο τὰ Β, Η, Ζ, Θ, cerchio ΔΕΖ secondo più punti che due Β, Η, Ζ, [...] Θ, [...]

Il fatto che l'enunciato da stabilire sia negativo è ulteriormente segnalato dalla presenza della locuzione «se infatti possibile».

In conclusione, il senso che si vuole convogliare con l'anteposizione della negazione è che inferenze per contrapposizione o per assurdo arrivano a negare tutto ciò che è stato supposto, quindi un intero asserto e non semplicemente il predicato verbale contenuto in essa. Ciò è confermato dal fatto che la forma verbale è mantenuta nella sua posizione canonica all'interno della frase, ben separato dalla negazione.

Le dottrine antiche della negazione hanno come scopo di eliminare le ambiguità legate alla posizione della particella negativa nel linguaggio ordinario. La dottrina aristotelica nel *de Interpretatione* non accorda portata esistenziale agli asserti negativi; ciò implica che la particella negativa può restare semplicemente anteposta al predicato verbale (verbo o copula). Gli Stoici, in particolare Crisippo, sostennero la posizione contraria quanto alla portata esistenziale degli asserti negativi. Ne consegue che anche l'anteposizione della particella negativa al predicato verbale può generare ambiguità, in quanto la sua portata non è determinata in maniera univoca, una volta che il soggetto della frase negativa sia non-esistente (si veda la lunga discussione in Alessandro, *in APr.*, 401.16-405.16). Per gli Stoici, pertanto, la negazione non è un connettore, ma un operatore che manda asserti in asserti. La negazione di un asserto produce il suo contraddittorio, cioè un asserto il cui valore di verità è opposto a quello di partenza. Leggiamo in proposito un passo particolarmente chiaro (se facciamo astrazione dalla confusione tra uso e menzione, d'altronde corrente nelle fonti antiche) in Sesto Empirico, *M VIII.89-90*<sup>158</sup>:

<sup>158</sup> Si aggiungano anche *M VIII.225-227* ed altri esempi sparsi in Sesto, ad esempio *M PH II.231* e *241*, dove un paradosso è generato dall'ambiguità nell'ambito della particella negativa (le inutili espunzioni proposte da alcuni interpreti, ad esempio Mates 1961, nota 27 a p. 31, rendono incomprensibile il paradosso).

89 φασὶ γὰρ "ἀντικείμενά ἐστιν ὦν τὸ ἕτερον τοῦ ἐτέρου ἀποφάσει πλεονάζει", οἷον "ἡμέρα ἐστιν-οὐχ ἡμέρα ἔστιν". τοῦ γὰρ "ἡμέρα ἔστιν" ἀξιώματος τὸ "οὐχ ἡμέρα ἔστιν" ἀποφάσει πλεονάζει τῇ οὐχί, καὶ διὰ τοῦτ' ἀντικείμενόν ἐστιν ἐκείνω. ἀλλ' εἰ τοῦτ' ἐστι τὸ ἀντικείμενον, ἔσται καὶ τὰ τοιαῦτα ἀντικείμενα, τό τε "ἡμέρα ἔστι <καὶ φῶς ἔστιν" καὶ τὸ "ἡμέρα ἔστιν" καὶ οὐχὶ φῶς ἔστιν". τοῦ γὰρ "ἡμέρα ἔστιν <καὶ φῶς ἔστιν>" ἀξιώματος ἀποφάσει πλεονάζει τὸ <"ἡμέρα ἔστιν καὶ" οὐχὶ φῶς ἔστιν". οὐχὶ δέ γε κατ' αὐτοὺς ταῦτα ἀντικείμενά ἐστιν: οὐκ ἄρα ἀντικείμενά ἐστι <τῶ> τὸ ἕτερον τοῦ ἐτέρου ἀποφάσει πλεονάζειν. 90 ναί, φασίν, ἀλλὰ σὺν τούτῳ ἀντικείμενά ἐστι, σὺν τῷ τὴν ἀπόφασιν προτετάχθαι τοῦ ἐτέρου: τότε γὰρ καὶ κυριεύει τοῦ ὅλου ἀξιώματος, ἐπὶ δὲ τοῦ "ἡμέρα ἔστιν καὶ οὐχὶ φῶς ἔστιν", μέρος οὔσα τοῦ παντός, οὐ κυριεύει πρὸς τὸ ἀποφατικὸν ποιῆσαι τὸ πᾶν. ἐχρήν οὖν, ἐροῦμεν, προσκεῖσθαι τῇ ἐννοίᾳ τῶν ἀντικειμένων ὅτι τότε ἀντικείμενά ἐστιν ὅταν μὴ ψιλῶς τὸ ἕτερον τοῦ ἐτέρου ἀποφάσει πλεονάζει, ἀλλ' ὅταν ἡ ἀπόφασις προτάτῃται τοῦ ἀξιώματος.

89 Dicono infatti "sono contraddittori <asserti> tali che uno eccede l'altro per una negazione", ad esempio "è giorno – non: è giorno". "non: è giorno" eccede infatti l'asserto "è giorno" per una negazione "non", e per questo è contraddittorio di quello. Ma se "contraddittorio" è questo, anche i seguenti saranno contraddittori, "è giorno e c'è luce" e "è giorno e non: c'è luce": "è giorno e non: c'è luce" eccede infatti l'asserto "è giorno e c'è luce" per una negazione. Ma certamente non: secondo loro questi sono contraddittori. Non quindi: sono contraddittori per il fatto che uno eccede l'altro per una negazione. 90 Essi, dicono, ma sono contraddittori con questo <in aggiunta>, che la negazione sia anteposta a uno o all'altro: allora infatti domina anche l'intero asserto, mentre in "è giorno e non: c'è luce", che è una parte del tutto, non domina in modo da rendere il tutto una negazione. Occorre dunque, dicevamo, aggiungere alla nozione di contraddittori che sono contraddittori non quando uno ecceda l'altro per una negazione *tout court*, ma quando la negazione sia anteposta all'asserto.

Si notino *a*) il termine tecnico προτάττειν «anteporre» per designare la posizione della negazione; *b*) l'argomento sestano (sottolineato) poi confutato dall'immaginario contendente stoico, in cui Sesto fa il verso a certe prescrizioni stoiche in materia di forma di un argomento, compresi – estremo tocco di raffinatezza – tipo e posizione della negazione. L'uso della particella negativa οὐχί permetteva in effetti di evitare fallacie di divisione legate a οὐκ quali quelle esposte tramite esempi nel *PPar.* 2 (Cavini 1985).

Analogamente a quanto visto sopra nel punto 3), la possibilità che la negazione anteposta interagisca con quella implicita in una privativa è dichiarata dottrina genuinamente stoica in Plutarco, *Comm. not.* 39, 1080C (si noti anche il condizionale indefinito, atto ad esprimere un asserto generale – cfr. la sez. 2.1.6):

αὐτοὶ τὰ τοιαῦτα ἀξιώματα ψευδῆ λέγοντες εἶναι: "εἴ τινα μὴ ἐστιν ἴσα ἀλλήλοις, ἐκεῖνα ἄμισά ἐστιν ἀλλήλοις" καὶ "οὐκ ἐστι μὲν ἴσα ταῦτ' ἀλλήλοις, οὐκ ἄμισα δ' ἐστὶ ταῦτ' ἀλλήλοις".

Costoro asseriscono che i seguenti asserti sono falsi: "se certe cose non sono uguali tra loro, quelle sono disuguali tra loro" e "non: queste sono uguali tra loro mentre non: queste sono disuguali tra loro".

Il contesto è l'esposizione del paradosso democriteo delle sezioni di un cono. La falsità del primo condizionale comporta che una negazione della sola forma verbale (per questo motivo è soggettiva) non si estenda automaticamente al predicato completo «essere uguali». Nella seconda frase occorre fare attenzione all'ambito della prima negazione: esso si estende infatti a tutta la congiunzione che

segue (per μέν... δέ con valore congiuntivo si veda le sez. 2.7), il cui secondo congiunto è a sua volta negato. Se dunque l'asserto è falso, sarà vera la sua negazione, che si ottiene eliminando la prima particella negativa: ne risulta l'equivalenza di «uguali» e «non disuguali», una volta che “fattorizziamo” ed eliminiamo il soggetto comune.

Già argomenti attribuiti a Diodoro Crono e Arcesilao (tra fine IV e inizio III secolo a.C.) impiegano volutamente l'accorgimento della negazione anteposta e separata dal verbo (Sesto Empirico, *M* X.85-101 e VII.157). Se non sono stati vittime di una riscrittura sestana (certa per quanto riguarda la particella coassuntiva δέ γε), essi testimoniano di un uso dialettico, anteriore alla normalizzazione stoica, della negazione anteposta nella presentazione di inferenze per contrapposizione. Leggiamo quella attribuita ad Arcesilao (*M* VII.157):

εἰ τῶν συγκατατιθεμένων ἐστὶν ὁ σοφός, τῶν  
δοξαστικῶν ἔσται ὁ σοφός. οὐχὶ δέ γε τῶν  
δοξαστικῶν ἐστὶν ὁ σοφός [...]. οὐκ ἄρα τῶν  
συγκατατιθεμένων ἐστὶν ὁ σοφός.

Se il sapiente è tra chi concede l'assenso, il sapiente è tra chi intrattiene credenze. Ma certamente non: il sapiente è tra chi intrattiene credenze [...]: non quindi: il sapiente è tra chi concede l'assenso.

Ancor prima, un breve cenno di Aristotele suggerisce che nella pratica dialettica fosse corrente formulare le conclusioni negative anteponendo la negazione, e che questa fungesse in qualche modo da *pendant* negativo dell'operatore di necessità, adoperato come “segno di asserzione” nel caso di conclusioni affermative (*Rh.* B 24, 1400b34-1401a6; si veda anche *SE* 15, 174b8-11):

ἐπεὶ δ' ἐνδέχεται τὸν μὲν εἶναι συλλογισμόν, τὸν δὲ μὴ εἶναι μὲν φαίνεσθαι δέ, ἀνάγκη καὶ ἐνθύμημα τὸ μὲν εἶναι, τὸ δὲ μὴ εἶναι ἐνθύμημα φαίνεσθαι δέ, ἐπεὶ περ τὸ ἐνθύμημα συλλογισμός τις. τόποι δ' εἰσὶ τῶν φαινομένων ἐνθυμημάτων εἷς μὲν ὁ παρὰ τὴν λέξιν, καὶ τούτου ἔν μὲν μέρος, ὥσπερ ἐν τοῖς διαλεκτικοῖς, τὸ μὴ συλλογισάμενον συμπερασματικῶς τὸ τελευταῖον εἰπεῖν, "οὐκ ἄρα τὸ καὶ τό, ἀνάγκη ἄρα τὸ καὶ τό", ἐν τοῖς ἐνθυμήμασι τὸ συνεστραμμένως καὶ ἀντικειμένως εἰπεῖν φαίνεται ἐνθύμημα (ἢ γὰρ τοιαύτη λέξις χώρα ἐστὶν ἐνθυμήματος):

Poiché è possibile che questo sia un sillogismo, mentre quello non lo sia ma lo sembri, è anche necessario che questo sia un entimema, mentre quello non sia un entimema ma lo sembri, poiché appunto un entimema è un sillogismo di un certo tipo. E uno dei luoghi degli entimemi apparenti è quello che dipende dalla formulazione. Uno dei tipi di questo è «il seguente»: come in dialettica enunciare l'ultimo passaggio alla maniera di una conclusione, anche se non risulta da un sillogismo: “non quindi: questo e questo”, “necessariamente quindi: questo e questo”, così anche per gli entimemi l'enunciare in maniera concisa e antitetica sembra un entimema – in effetti una tale formulazione è tipica di un entimema.

La pratica matematica si inserisce dunque in un contesto dialettico ben radicato. Una verifica fatta sui maggiori *corpora* prosastici anteriori al terzo secolo della nostra era dà per οὐκ ἄρα incipitario in una conclusione 549 occorrenze, 476 delle quali nei soli Aristotele (64), Platone (116), Sesto Empirico e Diogene Laerzio (296). Si tratta di autori molto connotati dal punto di vista logico, e sicuramente gli ultimi due risentono in maniera decisiva dell'impronta stoica. Pur con questa limitazione, e anche se buona parte delle occorrenze in (ad esempio) Aristotele si registra in frasi brevi e aventi spesso il predicato verbale ad inizio di frase, ne concludiamo che anteporre la particella negativa alla conclusione di un'inferenza fosse una pratica condivisa: lo stile matematico la fece propria come marcatore delle inferenze il cui carattere dialettico è più spiccato, cioè quelle indirette. Non c'è però spazio per dedurre direzioni privilegiate di influenza tra pratica matematica e regolamentazione stoica.

## 2.6. DISGIUNZIONE<sup>159</sup>

La matematica greca fa un uso caratteristico della disgiunzione esclusiva. Ciò significa che solo uno dei disgiunti sussiste. Se i disgiunti nel loro complesso esauriscono tutti i casi possibili, e quindi almeno uno di essi sussiste, la disgiunzione è detta esaustiva. Se una disgiunzione esclusiva è anche esaustiva, essa è necessariamente vera. Occorre distinguere questi aspetti semantici da quelli sintattici, che soli pertengono alla formulazione di una disgiunzione in termini di elementi linguistici.

La formulazione di una disgiunzione esclusiva è caratterizzata dalla presenza della forma ἤτοι «oppure», bisillabica e debolmente intensiva, dell'usuale connettore disgiuntivo ἤ<sup>160</sup>. Negli *Elementi* la forma bisillabica occorre 94 volte (l'apparato di Heiberg non registra casi di ἤτοι mancanti o aggiunti); essa è sempre anteposta e seguita da almeno un altro ἤ collocato tra i termini della disgiunzione. Unico esempio di ἤ monosillabico anteposto si trova nella famosa definizione 5 del V libro (si veda *infra*). L'enunciato di I.13 (*EE* I, 21.2-3) è un primo esempio della pratica appena descritta:

ἐὰν εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταθείσα γωνίας ποιῆ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ. Qualora una retta che sta su una retta faccia angoli, farà o due retti oppure uguali a due retti.

La disgiunzione nel conseguente del condizionale è esclusiva in quanto si assume tacitamente che i due disgiunti siano incompatibili. Di conseguenza, la dimostrazione si compone di due deduzioni indipendenti, secondo che i due angoli siano uguali (e quindi *sono* due retti) oppure no. Il conseguente del condizionale è debolmente brachilogico, con il verbo messo “a fattore comune” come d'abitudine: una formulazione ben formata per i canoni stoici sarebbe (si ricordi la prescrizione di ricorrere ad un tipo differente di protasi):

εἰ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθείσα γωνίας ποιεῖ, ἤτοι ἢ εὐθεία ποιήσῃ δύο ὀρθὰς ἢ ἢ εὐθεία δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ γωνίας. Se una retta che sta su una retta fa angoli, o la retta farà due retti oppure la retta farà angoli uguali a due retti.

È raro trovare disgiunzioni esclusive negli enunciati; un esempio in forma dichiarativa è VII.32 (*EE* II, 139.2-3):

ἄσας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Ogni numero o è primo oppure è misurato da un certo numero primo.

La brevissima dimostrazione di questo teorema si basa su una disgiunzione esclusiva ed esaustiva (non formulata esplicitamente ma ottenibile combinando le def. 12 e 14 del libro VII), cioè che ogni numero è o primo oppure composto (*EE* II, 139.6-8):

εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσῃ τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός. Se dunque A è primo, si troverebbe ad essere quanto prescritto. Se invece è composto, lo misurerà un certo numero primo.

<sup>159</sup> In questa e nella prossima sezione faccio uso dei risultati già esposti in Acerbi 2008b.

<sup>160</sup> Una buona parte delle occorrenze di ἤ negli *Elementi* è però dovuta al suo impiego, analogo al latino *quam*, in espressioni comparative.

La dimostrazione consiste quindi di due rami indipendenti (si noti l'uso disgiuntivo di μέν... δέ...), e ciò mostra che l'enunciato è ottenuto disgiungendo due sotto-enunciati indipendenti, a seconda che il numero in questione sia primo o composto. Vedremo tra breve altri modi di combinare più risultati nello stesso enunciato.

Gran parte delle disgiunzioni esclusive è dicotomica; esse sono spesso legate a dimostrazioni per assurdo o per contrapposizione, dove due dei tre termini di una tricotomia sono dimostrati non sussistere. L'asserto iniziale di una contrapposizione a base tricotomica è sotto forma di condizionale, come ad esempio in I.19 (*EE I*, 27.20-21; altri esempi particolarmente puliti in V.10 e XI.16) – ciò che è supposto non sussistere è che ἡ ΑΓ sia maggiore di ἡ ΑΒ:

εἰ γὰρ μή, ἧτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων. Se infatti no, ο ΑΓ è uguale ad ΑΒ oppure minore;

e lo stesso accade nelle dimostrazioni per assurdo connesse con il metodo di esaustione, come in XII.10 (si noti la presenza di ἧ sia disgiuntivo che comparativo, non sottolineato), dove occorre dimostrare che un cilindro è triplo del cono che ha la stessa base e altezza uguale (*EE IV*, 104.22-105.1):

εἰ γὰρ μή ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἧτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. Se infatti il cilindro non è triplo del cono, il cilindro sarà ο maggiore che triplo del cono oppure minore che triplo.

Se formulati come argomenti ed integrati con la premessa sottintesa (il che fa diventare la disgiunzione tricotomica), entrambi gli esempi sono apparentabili ad una possibile forma di «indimostrato con disgiunti multipli» stoico<sup>161</sup>, un cui modo sarebbe «o il primo oppure il secondo oppure il terzo; ma non il primo: quindi o il secondo oppure il terzo». Si osservi, ancora una volta (cfr. sez. 1.5.1.3), che gli operatori relazionali μείζων/ἐλάσσων ἢ τριπλασίων «maggiore/minore che triplo» si trovano in posizione esterna alla coppia ordinata di termini in relazione ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου «il cilindro del cono»; i termini formano dunque una coppia non divisa da altri elementi linguistici. Nel testo appena letto, una costruzione ἀπὸ κοινοῦ distribuisce la coppia tra gli operatori relazionali, e la disgiunzione agisce solo su questi ultimi. Nel condizionale tratto da I.19 e letto sopra, la coppia di termini in relazione è inclusa in uno dei disgiunti, ma resta non divisa.

In dimostrazioni dirette, troviamo disgiunzioni tricotomiche quando sia necessario porre una distinzione di casi, come ad esempio in III.25 (*EE I*, 127.16-17) – si noti anche qui la coppia di termini in posizione esterna alla disgiunzione; questa agisce solo sugli operatori relazionali<sup>162</sup>:

ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἧτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων. L'angolo ΑΒΔ è quindi ο maggiore oppure uguale oppure minore di ΒΑΔ.

o in III.24 e 33. Occorrenze sporadiche di disgiunzioni quadricotomiche si trovano in X.71, dove sono elencate alcune specie di linee irrazionali (*EE III*, 120.21-23),

ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες Composto un «dominio» esprimibile e uno mediale risultano

<sup>161</sup> Indimostrato non semplice non attestato ma ottenibile dalla forma attestata di quinto indimostrato con disgiunti multipli (si veda più oltre) per applicazione del primo *thema* (cfr. sez. 2.2.2).

<sup>162</sup> La coppia di termini è divisa dal connettore ἄρα, ma il fatto è forzato da vincoli sintattici: questa particella si trova infatti canonicamente in seconda posizione; di conseguenza, non può oltrepassare l'articolo che introduce il secondo termine. Vincoli sul linguaggio del primo ordine sono subordinati ai vincoli su quello del secondo ordine.

ἄλογοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ quattro irrazionali, o una binomiale oppure una bimediale  
 δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ prima oppure una maggiore oppure una «retta» che può  
 μέσον δυναμένην. esprimibile e mediale.

o in IX.19, il cui testo ha però particolarmente sofferto (si veda la sez. 1.2.1).

Molte disgiunzioni sono espresse con un semplice ἢ interposto, ma in questi casi non sono esclusive (si anche veda l'enunciato di I.28 nella sezione successiva); la distinzione è mantenuta rigidamente e non ammette eccezioni nel testo principale degli *Elementi*<sup>163</sup>. Un esempio splendido è costituito dall'espressione μέρος ἢ μέρη «parte o parti». Ricordiamo le definizioni 3-4 del libro VII (*EE II*, 103.5-7):

μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ Un numero è parte di un numero, il minore del maggiore,  
 μείζονος ὅταν καταμετρῆ τὸν μείζονα. quando misuri completamente<sup>164</sup> il maggiore.  
 μέρη δὲ ὅταν μὴ καταμετρῆ. E parti, quando non «lo» misuri completamente.

Insomma: μέρος «parte» di un numero è un suo divisore, mentre μέρη «parti» (che non è il plurale di «parte» nel senso appena definito, ma un nuovo termine tecnico) di un numero sono i numeri minori di esso che non siano suoi divisori<sup>165</sup>. Leggiamo ora il testo dell'enunciato di VII.4 (*EE II*, 110.5-6):

ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ Ogni numero è o parte oppure parti di ogni numero, il  
 μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. minore del maggiore.

La disgiunzione è esclusiva perché solo uno dei due casi può sussistere: le due definizioni di «parte» e «parti» sono anch'esse esclusive ed inoltre esaustive. Il teorema stabilisce dunque una *partizione* dei numeri minori di un numero dato. Analoga giustapposizione delle due nozioni di «parte» e «parti» ricorre nelle proposizioni da VII.9 a VII.13 e lì soltanto. Ebbene, leggiamo l'enunciato di VII.9 (*EE II*, 115.20-116.2)<sup>166</sup>:

ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ ἕτερος ἑτέρου Qualora un numero sia parte di un numero, e un altro  
 τὸ αὐτὸ μέρος ἦ, καὶ ἐναλλάξ, ὁ μέρος ἐστὶν ἢ sia la stessa parte di un altro, anche alternando, che  
 μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ parte o parti è il primo del terzo, la stessa parte o le  
 τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου. stesse parti sarà anche il secondo del quarto.

Qui «parte o parti» è disgiunto inclusivamente: entrambe le possibilità possono verificarsi, *data la condizione posta nell'antecedente*. Quest'ultima non è sufficiente a escludere uno o l'altro dei due stati di cose aritmetici possibili, per quanto essi siano mutuamente incompatibili. Il solo scopo del teorema è mostrare che i casi «parte» e «parti» nei due asserti correlati nel conseguente non possono interagire. La stessa espressione formulare contenuta nell'enunciato di VII.9 è ripetuta più volte,

<sup>163</sup> Disgiunzioni non esclusive in I.28, III.def.1.11, VII.def.19.20.21 e VII.9-13. Naturalmente, ci aspettiamo disgiunzioni non esclusive nelle definizioni.

<sup>164</sup> Il prefisso κατα- indica che l'operazione di misura è stata portata a termine senza resto residuo.

<sup>165</sup> Dato che un'unità è «parte» di ogni numero, come risulta dalla definizione 2, la def. 3 si limita a stabilire cosa sia per un numero essere una «parte» di un altro. È quindi scorretto affermare, come di solito si fa, che solo un numero può essere parte di un numero; e d'altronde la formulazione della def. 3 questo non lo dice. Se un'unità è sempre una «parte», allora ogni numero minore di un altro è una qualche pluralità di oggetti denominabili «parte»: in questo senso molto sforzato «parti» è plurale di «parte» (cfr. le inferenze esplicite in questo senso in VII.4, *EE II*, 110.11-13 e 111.3-4).

<sup>166</sup> Sull'uso dei numerali, qui semplici abbreviazioni, ci soffermeremo nella sez. 2.9.

istanziata e non<sup>167</sup>, fino alla proposizione VII.13. Si può dubitare dell'appropriatezza della disgiunzione inclusiva nelle occorrenze istanziate<sup>168</sup>, come ad esempio nella dimostrazione di VII.13 (*EE* II, 120.1-7):

ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐναλλάξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

In effetti, poiché è come A rispetto a B, così Γ rispetto a Δ, che parte è quindi A di B o parti, la stessa parte è anche Γ di Δ o le stesse parti. Alternando quindi, che parte è A di Γ o parti, la stessa parte è anche B di Δ o le stesse parti. È quindi come A rispetto a Γ, così B rispetto a Δ.

Basta però osservare che i numeri istanziate con lettere sono generici, e anche qui è pertanto impregiudicato *a priori* quale eventualità tra «parte» e «parti» sia realizzata, sebbene ovviamente non possano presentarsi insieme. I teoremi VII.9-13 lasciano insomma aperte entrambe le possibilità e dimostrano entrambi i casi tramite una e la stessa deduzione, facendone per così dire intravedere uno in filigrana dietro l'altro, senza giustapposizione o subordinazione di dimostrazioni. Prova ne è l'ordinamento estremamente peculiare dei termini, che sembra suggerire che solo il disgiunto «parte» sia quello istanziate: la collocazione in fine di frase della locuzione «o parti» la rende quasi una chiosa ad un'affermazione il cui significato primario è interamente esperibile dal solo caso «parte» (come se il secondo disgiunto fosse un inciso posto tra parentesi).

L'esempio è unico negli *Elementi* e non era facile da trattare matematicamente in forma compatta: la soluzione è affidata ad un'espressione formulare molto concisa e peculiare, con un relativo al singolare in prolessi che va accordato *ad sensum* anche con «parti», il che renderebbe oltretutto molto problematico l'inserimento di un ἦτοι anteposto nella relativa. In altri termini, la formula in VII.9-13 non pone un'alternativa come l'espressione esclusiva in VII.4, ma *elenca* in forma disgiuntiva le possibilità che possono verificarsi; si tratta di una forma debole di disgiunzione, giustamente tenuta distinta da quella esclusiva ed analoga a quella, formulata con il correlativo ... τε... τε..., che vedremo nella prossima sezione.

La spiegazione proposta risulta forse più chiara se confrontiamo l'enunciato di VII.9 letto sopra con quello di V.6 (*EE* II, 10.16-19):

ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρέθεντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἦτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Qualora due grandezze di due grandezze siano equimultipli, e certe «grandezze» sottratte delle stesse siano equimultipli, anche le restanti sono o uguali alle stesse oppure loro equimultipli.

Il conseguente è una disgiunzione singola, e non una frase principale cui è subordinata una relativa, come invece in VII.9. Solo una delle alternative può sussistere una volta che sia preso un ben preciso multiplo delle grandezze in oggetto. È pur vero che il risultato vale per ogni multiplo, ma essi sono tenuti in conto singolarmente nella proposizione, non come un tutto. Un argomento analogo rende ragione della disgiunzione inclusiva in VII.def.21, dove in prima battuta potremmo forse aspettarci una esclusiva (*EE* II, 104.25-105.2):

<sup>167</sup> Quest'ultima eventualità si presenta solo una volta, nell'enunciato di VII.10, del tutto analogo a quello di VII.9.

<sup>168</sup> In quanto segue non si tratta di render conto di un fenomeno estremamente comune nel linguaggio greco ordinario, ma di fornire un motivo matematico per questa scelta al di là della prassi linguistica corrente: questa non è mai sufficiente a determinare univocamente le formule da impiegarsi in un linguaggio altamente irregimentato e dove le sfumature di senso possono risultare essenziali.

ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

Numeri in proporzione sono quando il primo del secondo e il terzo del quarto sia equimultiplo o la stessa parte o siano le stesse parti.

Questa definizione presenta però vari problemi e non può costituire un esempio probante. In primo luogo matematici: non tutti i casi di «primo maggiore di secondo» sono presi in considerazione (si pensi a 7:4 – invece la partizione del caso «minore» è esaustiva) e, quel che più conta, nelle applicazioni il disgiunto «equimultiplo» non è mai menzionato, come abbiamo appena visto. In secondo luogo testuali: la famiglia *B* della tradizione araba è priva dello stesso disgiunto già dalla definizione<sup>169</sup>. Inoltre, percependo un problema, le redazioni dei manoscritti **F** e **V** antepongono un ἢ a ἰσάκεις<sup>170</sup>, che rimetterebbe il tutto parzialmente in linea con la formulazione canonica della disgiunzione esclusiva. Ci sono dunque varie ragioni per sospettare della menzione dell'equimultiplo, ma credere che espungendolo resti automaticamente come anteposto il primo ἢ ora interposto sarebbe alquanto ingenuo.

Una curiosa coincidenza si ha tra la formula appena discussa e la definizione stoica di asserto indefinito nella forma trasmessaci da Diogene Laerzio (VII.70):

ἀόριστον δέ ἐστι τὸ συνεστὸς ἐξ ἀορίστου μορίου ἢ ἀορίστων μορίων καὶ κατηγορήματος.

«Asserto» indefinito è quello composto da una parte indefinita o parti indefinite e da un predicato.

Anche qui, un asserto *o* ha una parte oppure ne ha più di una, ma non troviamo un connettore anteposto né la disgiunzione va intesa come esclusiva (se la definizione risale *recta via* agli Stoici e se la disgiunzione fosse stata percepita come esclusiva dovremmo ben aspettarci un ἢτοι anteposto). È anche vero che, in questa definizione ben più che nel caso matematico, «parti» è il plurale di «parte», ed ha quindi un senso sostenere che il caso «parti» comporta necessariamente una pluralità di casi «parte» (da cui il significato inclusivo).

Come detto all'inizio, la sola occorrenza di ἢ monosillabico anteposto si trova nella def. 5 del libro V (*EE* II, 1.10-15)<sup>171</sup>:

ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν ἐκάτερον ἐκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα.

Grandezze sono dette essere nello stesso rapporto, prima rispetto a seconda e terza rispetto a quarta, quando, secondo quale si voglia multiplo, gli equimultipli della prima e della terza o eccedano insieme rispettivamente gli equimultipli della seconda e della quarta presi in ordine corrispondente, oppure siano insieme uguali, oppure facciano insieme difetto.

Sebbene vi sia un connettore anteposto, la disgiunzione non è esclusiva, ed infatti non troviamo la forma bisillabica ἢτοι. La disgiunzione non è esclusiva in quanto l'insieme dei multipli è illimitato, e

<sup>169</sup> Ma potrebbe ben trattarsi di una correzione *a posteriori* da parte di un revisore per accordare la formulazione della definizione con quella delle applicazioni.

<sup>170</sup> *EE* II, 105.1 *in app.* Il copista di **V** soprascrive la particella. Qui veramente non è chiaro se il connettore in più possa essere innovazione di copista, lezione originale dell'antigrafo o variante di collazione.

<sup>171</sup> Un ἢ monosillabico anteposto introduce in **P** anche la quadricotomia con cui si apre la proposizione IX.19. Heiberg corregge a torto (*EE* II, 211.1 *in app.*). Si ricordi però che l'inizio di questa proposizione è corrotto; nessuna conclusione può essere tratta da quest'occorrenza.

ciascuno dei tre disgiunti sussiste per una qualche scelta di multipli (in realtà infinite scelte per ciascuno dei disgiunti). Se sin dall'inizio fosse stata fissata una coppia di multipli, la disgiunzione sarebbe ovviamente dovuta essere esaustiva, ma qui l'asserto si riferisce all'intero insieme dei multipli (si ricordi il caso esattamente opposto visto sopra in V.6). Di conseguenza, la disgiunzione è inclusiva ed esaustiva. Sono incapace di spiegare perché sia stato anteposto un ἢ monosillabico.

Quando si voglia presentare una disgiunzione inclusiva spesso non viene fatto ricorso a un connettore ma a composti quali ὅπότερος «uno o l'altro», che è il più frequente (25 occorrenze nel complesso degli *Elementi*, 2 nei *Data*). Lo troviamo ad esempio in I.24 (*EE* I, 34.2-3):

καὶ κείσθω ὅποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἢ ΔΗ. E uguale a una o all'altra delle ΑΓ, ΔΖ sia posta ΔΗ.

Il termine ἢ ΔΗ può essere posto uguale a quale si voglia degli altri due, o anche ad entrambi (dato che sono uguali), ma non nel senso che debbano essere sommati: in questo caso non avremmo trovato nessun aggettivo, l'assenza di determinativo comportando di norma che sia da prendersi la somma degli enti in questione. Forme come ὀποτεροσούν «uno o l'altro, quale si voglia», dove la genericità è rafforzata dal suffisso -ούν, occorrono una decina di volte nel *corpus* euclideo ma mai negli *Elementi*<sup>172</sup>.

L'aggettivo ἕτερος «l'uno o l'altro», di norma preceduto dall'articolo, ha valore esclusivo; se ne contano 184 occorrenze nel *corpus* euclideo, è assente nei libri IV-VI e VIII. Si veda ad esempio l'inizio della dimostrazione di I.6 – la traduzione è al maschile perché le coppie di lettere denotano lati, femminili in greco (*EE* I, 14.4-5):

εἰ γὰρ ἀνισός ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆ ΑΓ, ἢ ἑτέρᾳ αὐτῶν In effetti, se ΑΒ è disuguale a ΑΓ, l'uno o l'altro di  
μείζων ἐστίν. essi è maggiore.

Quando ἕτερος non è preceduto da un articolo, come nella grande maggioranza delle occorrenze, ha il significato corrente di «altro» (tra due), come nell'enunciato di VII.9 letto sopra.

Dimostrazioni indirette a base tricotomica mostrano che la negazione di una disgiunzione esclusiva non è la congiunzione delle negazioni dei disgiunti (questo è in effetti vero solo se la disgiunzione è inclusiva)<sup>173</sup>. Il testo di I.19, di cui abbiamo letto poco fa la frase introduttiva, lo rende chiaro (*EE* I, 28.1-5); la correlazione è stabilita da οὐδέ... οὐδέ..., non da καὶ οὐκ... καὶ οὐκ...:

οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων Né a dire il vero ΑΓ è minore di ΑΒ: anche un  
γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ angolo ΑΒΓ sarebbe infatti minore di ΑΓΒ; e non  
ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. «lo» è: non si dà quindi il caso che ΑΓ sia minore di  
ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ. E fu dimostrato che neanche è uguale. ΑΓ è  
ΑΓ τῆς ΑΒ. quindi maggiore di ΑΒ.

Un cosiddetto quinto indimostrato con disgiunti multipli formalizza il tipo di deduzione al lavoro nelle dimostrazioni indirette a base tricotomica: «o il primo oppure il secondo oppure il terzo; ma né il secondo né il terzo: quindi il primo» (cfr. ad esempio Sesto Empirico, *PH* I.69, e Cleomede, *Cael.* I.5.23-28 e I.6.1-7). Dagli esempi sembra di poter assumere che la forma canonica della coassunzione fosse οὐτε... οὐτε... ovvero οὐδέ... οὐδέ... «né... né...». Quest'ultima è, come abbiamo appena

<sup>172</sup> 1 occorrenza nella prop. 42 della redazione A dell'*Ottica*, 9 nei *Phaenomena*, distribuite tra le due redazioni.

<sup>173</sup> Nella logica stoica, questo genere di dualità è escluso a priori, dato che la congiunzione è vero-funzionale, mentre la disgiunzione no.

visto, quella impiegata in matematica, la prima è preferita in esempi (presumibilmente) genuinamente stoici (cfr. Sesto Empirico, *M VIII.434* e *PH I.69* e *II.150*, e Filopono, *in Apr.*, 246.3-4).

L'uso sistematico di ἤτοι anteposto coincide con una delle prescrizioni crisippee per la disgiunzione esclusiva: ciò suggerisce una sua dipendenza diretta dalla pratica matematica, mentre è del tutto implausibile una riscrittura sistematica degli *Elementi* in accordo con essa. Ulteriori indizi si ricavano esaminando le definizioni di disgiunzione trasmesse dalle fonti.

Diogene Laerzio propone una definizione sintattica ed una caratterizzazione semantica (sulla cui forma verbale ritorneremo) che vedremo subito essere una forma debole di quella originaria (VII.72):

<p>διεζευγμένον δέ ἐστιν ὁ ὑπὸ τοῦ "ἤτοι" διαζευκτικοῦ συνδέσμου διεζευκται, οἷον "ἤτοι ἡμέρα ἐστὶν ἢ νύξ ἐστὶν." ἐπαγγέλλεται δ' ὁ σύνδεσμος οὗτος τὸ ἕτερον τῶν ἀξιωματῶν ψεῦδος εἶναι.</p>	<p>E disgiunzione è ciò che risulta disgiunto dal connettore disgiuntivo “oppure”, ad esempio “o è giorno oppure è notte”. Questo connettore annuncia che l'uno o l'altro degli asserti è falso.</p>
---	--

Troviamo una caratterizzazione in termini di valori di verità, ma con un ingrediente in più, in Aulo Gellio (XVI.8.13-14),

**13** omnia autem, quae disiunguntur, pugnancia esse inter sese oportet, eorumque opposita, quae ἀντικείμενα Graeci dicunt, ea quoque ipsa inter se aduersa esse. Ex omnibus, quae disiunguntur, unum esse uerum debet, falsa cetera. **14** quod si aut nihil omnium uerum aut omnia pleraue, quam unum, uera erunt aut quae disiuncta sunt, non pugnabunt aut quae opposita eorum sunt, contraria inter sese non erunt, tunc id disiunctum mendacium est et appellatur παραδιεζευγμένον, sicuti hoc est, in quo, quae opposita, non sunt contraria: “aut curris aut ambulas aut stas”.

e in Sesto Empirico (*PH II.162* e *191*):

<p>ἐν τῷ διεζευγμένῳ τὸ μὲν ἀληθές ἐστι τὸ δὲ ψεῦδος μετὰ μάχης τελείας, ὅπερ ἐπαγγέλλεται τὸ διεζευγμένον.</p> <p>τὸ γὰρ ὑγιές διεζευγμένον ἐπαγγέλλεται ἐν τῶν ἐν αὐτῷ ὑγιές εἶναι, τὸ δὲ λοιπὸν ἢ τὰ λοιπὰ ψεῦδος ἢ ψευδῆ μετὰ μάχης.</p>	<p>Nella disgiunzione un «asserto» è vero, l'altro falso <u>con conflitto completo</u>, ciò che appunto annuncia la disgiunzione.</p> <p>In effetti la disgiunzione valida annuncia che un solo «asserto» in essa è valido, e quello che resta o quelli che restano falso o falsi <u>con conflitto</u>.</p>
--	---

È chiaro che la disgiunzione cui si fa riferimento in questi passaggi è quella esclusiva: al più uno dei disgiunti può essere vero. Che anche l'esaustività (almeno uno dei disgiunti è vero)<sup>174</sup> dovesse essere una delle proprietà caratterizzanti una disgiunzione crisippea valida è corroborato dall'esempio, riportato da Sesto Empirico (*M VIII.434* e *PH II.150*), di argomento non valido κατ' ἔλλειψιν «per difetto»: l'argomento, un quinto indimostrato, non è valido esattamente in quanto una disgiunzione non vi è formulata tenendo conto di tutti i possibili disgiunti<sup>175</sup>. Ciò concorda con l'asserzione di Galeno (*Inst. Log. IV.3* e *V.3*) che solo un conflitto completo tra i disgiunti fa sì che il quarto e il quinto indimostrato siano argomenti validi.

<sup>174</sup> Nelle fonti antiche, l'esaustività è usualmente espressa con la richiesta che i disgiunti non possano essere tutti falsi.

<sup>175</sup> Tutte le descrizioni di sillogismi che coinvolgono disgiunzioni poliadiche prevedono che i disgiunti siano suddivisi in due gruppi, uno dei quali contiene invariabilmente un solo elemento. A quanto pare, la definizione stessa di disgiunzione poliadica esclude altre partizioni dei disgiunti. Né partizioni più complesse si rintracciano in matematica, dove le disgiunzioni che figurano in inferenze del genere del quarto e quinto indimostrato non sono mai più che tricotomiche.

La definizione completa di disgiunzione si basa dunque sul concetto di μάχη «conflitto» (Aulo Gellio traduce il verbo relativo con *pugnare*) tra i disgiunti e pertanto non è vero-funzionale; è però necessaria la condizione che uno e uno soltanto dei disgiunti sia vero. Di fatto, Galeno sembra (*Inst. Log.* IV.2 and V.2) identificare la dicotomia conflitto completo/incompleto con l'alternativa esaustivo/non-esaustivo<sup>176</sup>; la nozione di conflitto comporta già quella di incompatibilità mutua tra i disgiunti, e quindi di esclusività. Il problema di proporre una definizione soddisfacente della nozione di «conflitto», cruciale nel sistema logico crisippeo, è ancora aperto, e si è portati a sospettare che i tentativi di offrire una formalizzazione siano viziati da un'incomprensione metodologica di fondo<sup>177</sup>. È inoltre piuttosto sorprendente che la nozione sia stata studiata principalmente in relazione alla definizione crisippea di condizionale, mentre l'evidenza che proviene da quella di disgiunzione è stata tenuta in conto solo recentemente.

Non è invece sottolineato a sufficienza che la disgiunzione esclusiva matematica può contribuire a chiarire la nozione di conflitto e le sue origini. Asserti del tipo «o A è maggiore di B oppure A è uguale a B oppure A è minore di B» forniscono esempi paradigmatici di enunciati in conflitto completo. La nozione si riduce in matematica alla caratterizzazione vero-funzionale, più maneggevole e più debole, in termini di alternative esclusive (ed esaustive). Ne risulta che una parte della logica soggiacente all'argomentare matematico è una versione drasticamente semplificata di quella stoica. Inoltre, Crisippo intendeva probabilmente che il conflitto tra i disgiunti (che sono λεκτά e quindi enti mentali) si trasferisse anche ad un livello «oggettuale», cioè dei πράγματα «stati di cose»<sup>178</sup> (questa richiesta sembra espressa da Galeno, *Inst. log.* XIV.5, e Apollonio Discolo, *Conj.*, 218.22-26). La disgiunzione matematica si presta ottimamente a tale interpretazione. Occorre in effetti tener presente che asserti come «o A è maggiore di B oppure A è uguale a B oppure A è minore di B» sono sempre riferiti a oggetti matematici: A e B sono angoli, o rette, o figure più complesse.

Da un lato, quindi, l'incompatibilità dei disgiunti è forzata da un punto strutturale, e cioè il significato di relazioni come «uguale a» o «maggiore di». D'altro canto, queste definizioni devono fondarsi su una comprensione intuitiva delle caratteristiche essenziali degli oggetti matematici in gioco, caratteristiche che di norma non sono rese esplicite nelle definizioni di tali oggetti. Cosa significhi per un triangolo essere contenuto in (e quindi essere minore di) un altro non risulta dalla definizione di triangolo, e teoremi come quelli di congruenza dei triangoli rendono più ricco ed articolato il significato della nozione di uguaglianza. In questa prospettiva, non è insensato congetturare che Crisippo abbia assunto gli asserti matematici incompatibili come modelli per sviluppare la nozione di conflitto. Questi asserti sono analitici in un senso abbastanza ovvio, ma si riferiscono anche ad un substrato di relazioni tra oggetti matematici, il cui *status* ontologico sembra essere stato considerato da Crisippo stesso meno astratto di quello correntemente loro attribuito da altri pensatori antichi (si veda ad esempio Robertson 2004).

L'accorgimento dell'anteposizione del connettore dà un carattere spiccatamente formale alla forma disgiuntiva più rilevante in ambito matematico. Dopo Crisippo furono introdotte, forse neanche da Stoici, due forme di παραδιεζευγμένον «paradisgiunzione», indistinguibili dalla disgiunzione

<sup>176</sup> Non è detto che l'evidenza proveniente dall'*Institutio logica* di Galeno si riferisca a dottrine stoiche, come viene mostrato in Bobzien 2004. La sua interpretazione delle proposizioni ipotetiche di Galeno come relazioni tra classi non vuote, in particolare quella della disgiunzione in termini di «classes of things which with regard to some feature N are completely dividable into *non-empty* subclasses, and where the division is based on non-contingent properties of the things» (pp. 70-71), stabilisce una connessione non banale tra le dottrine espone nell'*Institutio logica* e gli enti su cui agisce una disgiunzione in matematica.

<sup>177</sup> Si veda Castagnoli 2004 su questo aspetto. L'autore offre un panorama completo delle interpretazioni di μάχη, e della nozione complementare di συνάρτησις «connessione».

<sup>178</sup> Ma si ricordi che per gli stoici i πράγματα sono anche i significati degli oggetti linguistici (cfr. il titolo della seconda divisione del *corpus* logico di Crisippo in D.L. VII.190, e in generale la classificazione delle "unità di senso" in VII.63-67). Sulla questione si veda Hadot 1980.

esclusiva quanto alla loro forma linguistica ma caratterizzate da criteri di verità differenti. Le definizioni trasmesse, come quella di Gellio letta sopra, sono dunque di tipo semantico: in una paradisgiunzione al massimo uno dei disgiunti è vero (ma non è detto che ve ne siano), nell'altra almeno uno lo è, ma non è detto che sia l'unico. Queste varianti corrispondono rispettivamente a far cadere la prima o la seconda delle condizioni imposte ad una disgiunzione esaustiva ed esclusiva: il secondo tipo di paradisgiunzione corrisponde quindi alla nostra disgiunzione inclusiva.

Il primo tipo è menzionato da Galeno (*Inst. log.* V.1), che ne chiama le istanze παραπλήσια διεζευγμένοις «quasi-disgiunzioni» (lett. «affini alle disgiunzioni»), ed afferma che annunciano un conflitto incompleto. Egli osserva anche che il primo tipo è usualmente identificato con la negazione di una congiunzione – il che comporta di ridurlo ad un connettore vero-funzionale –, ma sostiene che non si tratti di una caratterizzazione corretta (ai suoi occhi ciò comporterebbe di ignorare il conflitto che è inerente alla definizione di una qualsiasi disgiunzione; si noti poi che Galeno definisce tutte le sue disgiunzioni in termini modali). Forse si tratta semplicemente di disgiunzioni definite originariamente in termini vero-funzionali, e che Galeno ed altri vogliono forzare nel gergo del «conflitto». La paradisgiunzione (chiamerò così il secondo tipo) e la quasi-disgiunzione cercano di cogliere aspetti rilevanti del linguaggio ordinario come l'inclusività, ma si rivelano alla fin fine tentativi maldestri basati su una radicale incomprendenza dell'approccio crisippeo, che intendeva chiaramente dare dignità logica soltanto alla disgiunzione esclusiva ed esaustiva. Le paradisgiunzioni sono in effetti indistinguibili da un punto di vista sintattico da quella esclusiva, e ciò crea tensioni insostenibili nel quadro dell'approccio stoico.

Una paradisgiunzione che non annuncia né conflitto né conseguenza logica fu trattata a lungo da Apollonio Discolo, in particolare all'inizio del *De conjunctionibus* (i riferimenti sono alle pagine dell'edizione di Schneider)<sup>179</sup>. Vediamo in dettaglio i punti da lui sollevati:

\* Apollonio non ricorre alla nozione di conflitto per definire la disgiunzione, affermando che essa «annuncia (ἐπαγγέλλεται) l'esistenza (ὑπαρξιν) di un solo <disgiunto>, e la refutazione di quello che resta o di quelli che restano» (216.14-16). D'altro canto, egli dà poco oltre una definizione di conflitto: «in conflitto è ciò che non può essere accettato nelle stesse circostanze» (p. 218.22-23), nel contesto di una digressione sulla differenza posta dagli Stoici tra asserti in conflitto e contraddittori (218.20-219.11). Apollonio introduce invece una distinzione tra asserti che sono disgiunti κατὰ φύσιν «per natura» e πρὸς καιρόν «incidentalmente» (216.17-217.15). Il secondo tipo di disgiunzione è sicuramente non esaustivo e probabilmente non esclusivo. Apollonio osserva che gli asserti disgiunti incidentalmente possono anche essere connessi tramite una congiunzione o un condizionale.

\* Motivo ne è che, nel caso di asserti che implicino di per se stessi quale tipo di relazione logica debba sussistere tra di essi (p. 217.16-218.7), i tre connettori di base sono incompatibili: ciò che annunciano condizionali con συνάρτησις «connessione» e connettori congiuntivi è in conflitto con ciò che annunciano connettori disgiuntivi; d'altro canto, non c'è conseguenza logica (ἀκολουθία) tra asserti congiunti o disgiunti (218.7-19).

\* È ammessa solo una forma di paradisgiunzione, quella inclusiva (219.12-220.22). La connessione risultante non può sussistere tra asserti in conflitto, e il connettore disgiuntivo può in questo caso essere rimpiazzato anche da un καί congiuntivo. Apollonio stabilisce un parallelo tra paradisgiunzione e paracondizionale (220.13-22), poiché entrambi fanno implicito riferimento a due dei connettori di base nei rispettivi «annunci» (congiunzione e disgiunzione il primo, congiunzione e condizionale il secondo).

\* Nella *Syntaxis* (I.12, 14.6), Apollonio menziona ἤτοι come una possibile congiunzione. La stessa osservazione, riferita alla paradisgiunzione inclusiva, si trova a 220.10-13; in questo caso egli rifiuta

<sup>179</sup> Le relazioni tra le esposizioni di Galeno e di Apollonio Discolo sono trattate solo parzialmente in Barnes 2005.

esplicitamente l'assimilazione, osservando che la congiunzione pone (τίθησι) entrambi i congiunti, e non uno o l'altro di essi<sup>180</sup>.

\* Il connettore ἤ può essere sia anteposto che posposto, mentre ἤτοι può essere solo anteposto. La caratteristica distintiva della disgiunzione (inclusiva oppure esclusiva) è costituito dalla presenza di ἤ tra i disgiunti, «come se uno dovesse tenere un asserto separato dall'altro» (220.23-221.15).

\* Nel corso di una ricapitolazione dei differenti tipi del connettore disgiuntivo ἤ (222.24-223.4) Apollonio introduce un condizionale doppio ἐὰν τοῦτο, οὐ τοῦτο, εἰ τοῦτο μή, τοῦτο «qualora questo, non questo; se questo no, questo» per spiegare ciò che ἤ annuncia nel caso del significato propriamente disgiuntivo, mentre il significato dissertivo (διασαφητικόν; discusso a 221.16-222.23)<sup>181</sup> annuncia τοῦτο, οὐ τοῦτο «questo, non questo». Apollonio aggiunge che questo è il motivo per cui in un dissertivo non compare un connettore esterno, bensì l'avverbio intensivo μάλλον. Bobzien (1999, 111) suggerisce che il connettore dissertivo abbia rispetto alla disgiunzione la stessa relazione che il paracondizionale rispetto al condizionale, e propone che le condizioni di verità del connettore dissertivo siano identiche a «sia o il primo oppure il secondo che il secondo».

\* Un ἤ o ἤτοι anteposto annuncia o una disgiunzione o una paradisgiunzione, mentre ἤ interposto è ambiguo tra la disgiunzione e il connettore dissertivo (223.4-22).

Una curiosità finale. Nella sez. 1.1 abbiamo visto un esempio di enunciato particolarmente lungo, in virtù dell'alto numero di ipotesi espresse in forma debolmente congiuntiva. In certi commentatori della tarda antichità diventò addirittura di moda la pratica di montare enunciati complessi, intesi abbracciare con un unico asserto più configurazioni geometriche ottenute una dall'altra per variazioni nei dati. Tali enunciati denunciano una forte impronta formale per quanto riguarda l'uso dei connettori, e non si tratta di un caso. La formazione dialettica era una tappa obbligata nei *curricula* retorico-filosofici dominanti; gli operatori logici venivano quindi impiegati dagli autori di formazione "alta" con una consapevolezza tale da trasformarli da mezzo a fine espressivo. L'elaborazione di enunciati logicamente e sintatticamente complessi va quindi ritenuta appartenere più al dominio retorico che a quello matematico: vanno considerati veri e propri pezzi di bravura prima che mali minori sintattici dettati da necessità espositive (come ad esempio lo erano i lunghi enunciati in Apollonio o Teodosio).

Nel libro VII della *Collectio* Pappo si dedicò a quest'esercizio con passione particolare, ed arrivò a comprendere sotto un unico enunciato interi trattati o loro porzioni cospicue. Leggiamo prima un problema: l'enunciato generale che abbraccia tutta la *Sezione determinata* di Apollonio; sono sottolineati termini tecnici e connettori disgiuntivi (*Coll.* VII.9):

ἐξῆς δὲ τούτοις ἀναδέδοται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία β', ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστιν λέγειν, διεξευγμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθείαν ἐνὶ σημείῳ τεμείν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν ἤτοι πρὸς τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἔξω δοθείσης ἢ

Di séguito a questi risultano trasmessi 2 libri della *Sezione determinata*, che, similmente a quelli di prima, è possibile esprimere con un solo enunciato, disgiunto – questo: secare una retta illimitata data con un solo punto così che, delle rette staccate fino a punti dati su di essa, o il quadrato su una sola oppure il rettangolo compreso da due staccate abbia rapporto dato o rispetto al quadrato su una sola oppure rispetto al rettangolo «compreso» da una sola staccata e da una «retta» data da fuori oppure rispetto al rettangolo

<sup>180</sup> Nella τέχνη γραμματική attribuita a Dionisio Trace ἤτοι è classificato sia tra i connettori congiuntivi che tra quelli disgiuntivi (89.2 e 91.1).

<sup>181</sup> Anche questo connettore ha un'origine stoica, come ricaviamo da D.L. VII.72-73; Apollonio lo chiama «una distinzione ulteriore del disgiungere».

πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχομένων ὀρθογώνιον, ἐφ' ὁπότερ' ἂν χρῆ τῶν δοθέντων σημείων. καὶ ταύτης ἄτε δις διεζευγμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης διὰ πλειόνων ἢ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης.

compreso da due staccate, fino a uno o all'altro, quale si usi, dei punti dati. E poiché quest'«enunciato» è due volte disgiunto e ha determinazioni complicate, la dimostrazione risulta essere necessariamente lunga.

Nel passo ricorrono le uniche due occorrenze nella *Collectio* del termine tecnico διεζευγμένος «disgiunto»; dato che siamo in ambito matematico, lo troviamo a qualificare una πρότασις e non un ἀξίωμα. Si noti l'appropriata osservazione sull'enunciato «due volte disgiunto», ad indicare che le condizioni vanno combinate tra loro in tutti i modi possibili; simili interessi combinatorî sono impliciti negli enunciati omnicomprendivi che Pappo elabora per le *Tangenze* di Apollonio e per alcuni dei *Porismi* euclidei (*Coll.* VII.11 e VII.16 rispettivamente).

In forma condizionale, ecco l'enunciato generale che comprende più luoghi dei *Luoghi piani* di Apollonio (*Coll.* VII.23 – il segno // separa antecedente e conseguente del condizionale; notare l'uso delle congiunzioni καὶ e δέ in antecedente):

ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἧτοι ἀπὸ ἐνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἧτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἧτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἄπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρασ ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἄψεται καὶ τὸ τῆς ἐτέρας πέρασ ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἐτέρου, καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθείαν, ὅτε δὲ ἐναντίως. ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων.

Qualora due rette siano condotte o da un solo punto dato oppure da due, e siano o in «linea» retta oppure parallele oppure comprendenti un angolo dato, e o aventi tra loro rapporto dato oppure comprendenti un dominio dato, e l'estremo dell'una tocchi un luogo piano dato in posizione, // anche l'estremo dell'altra toccherà un luogo piano dato in posizione, ora dello stesso genere, ora dell'altro, e ora posto similmente rispetto alla retta, ora in maniera opposta. E ciò risulta conformemente alle differenze di ciò che è stato supposto.

Il correlativo ὅτε usato da Pappo conta 19 occorrenze nel *corpus* euclideo, 3 delle quali negli *Elementi* – tutte in un porisma a IV.5 che è quasi sicuramente spurio – e nessuna nei *Data*. Nessuna occorrenza si rintraccia nelle opere rimaste di Apollonio o negli *Sphaerica* di Theodosio; giusto una coppia si trova nel *corpus* archimedeo (*AOO* II, 384.25-26). L'assenza in contesti strettamente formali mostra che questo correlativo è il prodotto di intrusioni retoriche nel lessico tecnico minimale adottato dai geometri ellenistici (occorrenze del correlativo ποτε... ποτε «talora... talora» nel *corpus* euclideo: *Ottica* **A** 36 (*bis*), 40 (*quinqies*), 42 (*quater*), 44 (*bis*), 46 (*bis*), 49 (*ter*), *Ottica* **B** 40 (*bis*) *Fenomeni* **b** 14 (*bis*). Si tratta dunque di un marcatore stilistico della redazione **A** dell'*Ottica*).

## 2.7. CONGIUNZIONE

La congiunzione è forse il tipo di asserto non semplice per cui l'uso matematico, particolarmente libero e variato, più si discosta da quello sancito nelle logiche formali antiche. Essa è molto spesso espressa tramite un semplice (μὲν)... δέ.... Altre congiunzioni coordinative, per esempio ἀλλά «ma», hanno sia in matematica che nella dialettica stoica la funzione esclusiva di introdurre coassunzioni. Gli Stoici sembra abbiano identificato ἀλλά come la particella canonica con questa funzione, mentre in matematica viene impiegata in una stretta minoranza di casi, la particella preferita essendo in effetti δέ – entrambe sono riconosciute come connettori προσληπτικοί «coassuntivi» da Apollonio Discolo,

*Conj.*, 250.12-27, che per la terminologia rimanda appunto agli Stoici, mentre Dionisio Trace mescola i generi riconoscendo come συμπλεκτικοὶ σύνδεσμοι «connettori congiuntivi» μέν δέ τέ καί ἄλλά (89.1). Occorre dunque distinguere una congiunzione, che è un asserto non-sempliale, dal sistema di asserti che costituisce un'inferenza: alcune particelle, in particolare δέ, possono avere una funzione coassuntiva / coordinativa, collegando così le espressioni degli asserti indipendenti in un'inferenza, ma possono anche assumere quella di connettori alternativi in una genuina congiunzione. Diciamo immediatamente che l'uso coassuntivo di καί «e» è estremamente circoscritto nei testi matematici. Leggiamo il bell'esempio di VIII.13 (*EE* II, 171.3-11), dove si rintracciano due occorrenze ravvicinate e dove troviamo all'opera molti dei fenomeni linguistici che analizzeremo in questa sezione:

ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλῆθει, τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ.

Del tutto similmente a quanto sopra dimostreremo che Δ, Λ, Ε e Η, Μ, Ν, Θ sono di séguito in proporzione nel rapporto di Α rispetto a Β, e ancora Ε, Ξ, Ζ e Θ, Ο, Π, Κ sono di séguito in proporzione nel rapporto di Β rispetto a Γ. Ed è come Α rispetto a Β, così Β rispetto a Γ: anche Δ, Λ, Ε sono quindi nello stesso rapporto di Ε, Ξ, Ζ e ancora Η, Μ, Ν, Θ di Θ, Ο, Π, Κ. Ed è uguale la molteplicità di Δ, Λ, Ε alla molteplicità di Ε, Ξ, Ζ, quella di Η, Μ, Ν, Θ a quella di Θ, Ο, Π, Κ.

D'altro canto, le stesse particelle che identificano i connettori principali possono avere anche un'altra funzione sintattica, all'interno di sintagmi sub-assertori, ad esempio per connettere sostantivi o aggettivi. Le due funzioni vanno tenute distinte, ma raramente il confine tra di esse è ben demarcato, dato che il greco antico permette la formazione di espressioni particolarmente ellittiche. Si è dunque a volte in dubbio se certi costrutti linguistici dall'apparenza unitaria risultino in effetti dall'applicazione di connettori ad asserti indipendenti formulati in maniera drasticamente ellittica (cfr. la discussione in Barnes 2007, 168-173)<sup>182</sup>. I casi dubbi vanno quindi discussi in dettaglio prima di poterli considerare significativi dal punto di vista statistico.

Nei testi matematici abbondano congiunzioni con καί interposto fra i termini congiunti, ma, contrariamente al caso della disgiunzione, non viene praticamente mai fatto uso del καί anteposto prescritto dalla regolamentazione stoica. L'anteposizione trova impiego qualche sporadica volta, come ad esempio in X.70 (*EE* III, 120.14-18)<sup>183</sup>:

ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Così che è sia il «dominio» composto dai quadrati su ΓΖ, ΖΔ mediale sia quello «compreso» da ΓΖ, ΖΔ mediale sia ancora il «dominio» composto dai quadrati su ΓΖ, ΖΔ incommensurabile con il «rettangolo compreso» da ΓΖ, ΖΔ.

<sup>182</sup> Questa è una delle ragioni per cui gli Stoici proscrivevano ogni forma di ellissi in asserti ben formati, richiedendo per esempio di evitare riferimenti per anafora in asserti non-sempliali (per l'eccezione costituita dagli asserti indefiniti si veda la sez. 2.1.6).

<sup>183</sup> Si potrebbe obiettare che il primo καί ha valore avverbiale e qualifica lo ὥστε precedente. Se così fosse, però, dovremmo attenderci un correlativo che lega il primo congiunto agli altri, come in tutte le altre occorrenze dell'espressione: ne consegue che qui il καί prende veramente il posto del τε canonico. La presenza di quest'ultimo nella proposizione parallela X.107 conferma l'assunto.

La prop. X.70 è uno dei teoremi di una serie in cui l'espressione appena letta, che caratterizza due delle linee irrazionali introdotte nel libro X, è ripetuta quasi alla lettera. Ciò permette di verificare che il *καί* anteposto in X.70 è solo una variante locale. La forma base pone infatti come primo correlativo un *τε* posposto all'articolo: si trova ... *τε... τε... καὶ ἔτι...* in X.78 e 84 (enunciato), ... *τε... καί... καὶ ἔτι...* in X.84 (*bis*, nella dimostrazione e nella conclusione) e X.107, ... *τε... καί... ἔτι τε...* in X.96, ... *τε... καί... καί...* in X.102. La struttura parallela nella prima parte del libro X (prop. 41, 47 e 65) fornisce solo la forma ... *τε... καί... καὶ ἔτι...*

La forma preferita di congiunzione in forma correlativa è in effetti di gran lunga ... *τε... καί...* «sia... che...». Tale costrutto ricorre in primo luogo quando due o più termini in un elenco siano in qualche senso da considerarsi un tutt'uno e non possano essere letti come la congiunzione di due proposizioni fortemente ellittiche. Ciò può avvenire nel riferirsi alle parti non omologhe di cui si compone una singola figura geometrica, come in I.def.18 (*EE I*, 3.5-8),

ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς Semicerchio è la figura compresa sia dal  
 διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς diametro che dall'arco staccato da esso.  
 περιφερείας.

in contesti in cui sia espressa una vera e propria somma di enti matematici, come nell'enunciato di II.3 (*EE I*, 70.2-5),

ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης Qualora una linea retta sia secata come capita, il  
 καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον rettangolo compreso dalla «retta» totale e da uno  
 ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ solo dei segmenti è uguale sia al rettangolo  
 καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. compreso dai segmenti che al quadrato sul  
 predetto segmento.

oppure per indicare la congiunzione di due predicati, come nell'enunciato particolarmente conciso di IV.12 (*EE I*, 169.2-3):

περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε Intorno ad un cerchio dato circoscrivere un  
 καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι. pentagono sia equilatero che equiangolo.

Contrariamente ai prosatori attici del periodo classico, da cui il costrutto veniva probabilmente avvertito come ridondante (Denniston 1950, 512-513), *τε καὶ* giustapposti ricorrono con una certa frequenza nel *corpus* matematico antico, e in quello euclideo più che altrove<sup>184</sup>. Come nell'esempio appena proposto, si tratta quasi sempre di due predicati che, presi in congiunzione, determinano un oggetto matematico come specie di un genere più ampio: oltre a «sia equilatero che equiangolo», che esaurisce le occorrenze nel libro IV, frequenti sono anche «sia simile che posto similmente» (buona parte delle occorrenze nei libri VI e XI), ἴσος τε καὶ ὅμοιος «sia uguale che simile» (5 occorrenze, una in XI.def.13 e due in ognuna delle XII.3 e 8), ἴση τε καὶ παράλληλος «sia uguale che parallela» (11 occorrenze, in I.33, 36 e 45; 4 occorrenze in XIII.16). In tutti i casi l'assenza di articoli rende inevitabile la giustapposizione delle due congiunzioni *τε* e *καί*: altrimenti *τε*, che deve stare in

<sup>184</sup> 107 occorrenze nell'insieme degli *Elementi*, ben 42 nei *Phaenomena*. A queste vanno aggiunte le 15 occorrenze di *τέ ἐστι καί*, tutte nel testo principale degli *Elementi*. Solo 11 occorrenze nei primi 4 libri delle *Coniche* di Apollonio, 32 nel *corpus* archimedeo.

seconda posizione all'interno del sintagma che costituisce il primo congiunto, dovrebbe seguirne immediatamente l'articolo.

Come abbiamo visto in X.70, in elenchi con più di due termini l'ultimo è introdotto da καὶ ἔτι «e ancora». Un ulteriore esempio molto compatto leggiamo in XIII.17 (EE IV, 175.11-13), in realtà una variante del predicato composto di IV.12,

λέγω ὅτι τὸ ὙΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι ἰσογώνιον ἔστιν. Dico che il pentagono ὙΒΧΓΦ è sia equilatero che in un solo piano che ancora equiangolo.

che va inteso come congiunzione di asserti in forma molto ellittica. Le occorrenze di καὶ ἔτι sono spesso indipendenti dalla presenza di ... τε... καὶ precedenti: si veda ad esempio l'esposizione di I.22 (EE I, 31.4-8), dove καὶ ἔτι è in terza posizione dopo un semplice correlativo μέν... δέ... (la nostra congiunzione per asindeto)<sup>185</sup>:

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι. Siano tre rette date Α, Β, Γ, due delle quali sostituite in ogni modo siano maggiori della restante, Α, Β di Γ e Α, Γ di Β e ancora Β, Γ di Α: si deve pertanto costruire un triangolo «a partire» dalle «rette» uguali a Α, Β, Γ.

Si noti che anche qui ci troviamo di fronte ad una vera congiunzione di asserti, per quanto in forma estremamente ellittica, e non ad un elenco di oggetti. Per avere un'idea della variabilità in gioco si consideri la seguente tabella di espressioni correlative contenenti καὶ ἔτι e le loro occorrenze negli *Elementi*:

... καί... δέ... καὶ ἔτι... καὶ ἔτι...	VIII.2
... καί... δέ... καὶ ἔτι...	VIII.2
... καί... καί... καὶ ἔτι...	VIII.19
... καί... καὶ ἔτι...	XI.22, 23, 27, 33, XII.17
μέν... δέ... καὶ ἔτι...	I.22, 23, 26, 34, II.6, V.22, VI.4, 5 (bis), 12, IX.15, X.25, XI.22, 23, 25 (bis), XI.33
μέν... δέ... δέ... καὶ ἔτι...	II.1, III.31 (bis)
μέν... δέ... καί... καὶ ἔτι...	X.32/33
... τε... καί... καὶ ἔτι...	II.1 (bis), VI.18, VIII.4 (salties), 19 (ter), X.35 (bis), 41, 47, 65, 70, 84 (bis), 107 (bis)
... τε καί... καὶ ἔτι...	XIII.17
... τε... τε... καὶ ἔτι...	X.78, 84
niente... καί... καὶ ἔτι...	I.17, VI.5, VIII.4, 13 (bis), 19, X.53, 70, 112, 113 (bis), XI.30, <b>b</b> XII.3
niente... δέ... καὶ ἔτι...	VIII.15
niente... δέ... δέ... καὶ ἔτι...	VI.24
niente... ἦ... καὶ ἔτι...	VIII.19
niente... καὶ ἔτι... καὶ ἔτι...	X.112

<sup>185</sup> L'espressione καὶ ἔτι ricorre 81 volte nell'insieme degli *Elementi*, e solo 8 nel resto del corpus euclideo (1 nei *Data* e 7 nei *Phaenomena*).

niente... καί... καί... καί ἔτι...	XI.4
niente... καὶ ἔτι...	IV.15por, VI.8 ( <i>quater</i> ), 20

A proposito dell'uso estensivo di μέν... δέ... con valore congiuntivo, è importante ricordare che lo si rintraccia anche in argomenti genuinamente stoici, come ad esempio la seguente formulazione del paradosso del Sorite, in cui si notino anche i due δέ con valore non congiuntivo ma inferenziale (non sottolineati) e la negazione anteposta nella forma οὐχί<sup>186</sup>:

οὐχὶ τὰ μὲν δύο ὀλίγα ἐστίν, οὐχὶ δὲ καὶ τὰ τρία, οὐχὶ δὲ καὶ ταῦτα μὲν, οὐχὶ δὲ καὶ τὰ τέσσαρα καὶ οὕτω μέχρι τῶν δέκα· τὰ δὲ δύο ὀλίγα ἐστί· καὶ τὰ δέκα ἄρα. Non: due è poco, mentre non anche tre, e non: questi sì, mentre non anche quattro, e così fino a dieci; ma due è poco: quindi anche dieci.

La formulazione è probabilmente crisippea, per il quale forme deboli di implicazione trovavano espressione più opportuna come negazioni di congiunzione (cfr. Cicerone, *De Fato* 15, letto nella sez. 2.1.6). L'argomento, di lunghezza indeterminata ed a cui il «10» inutilmente corretto dagli interpreti pone un termine solo in modo convenzionale, è composto da una sequenza di negazioni di congiunzione coassunte e da una coassunzione finale in forma di asserto semplice che fa collassare tutta l'inferenza: è analizzabile in una catena di cui ogni anello è un terzo indimostrato.

Un uso accorto di ... τε... καί... nella congiunzione di asserti permette di raggiungere una grande precisione analitica negli enunciati. Un primo esempio si ha quando più risultati siano compresi nell'enunciato dello stesso teorema. Quelli di I.28 e 29 (*EE* I, 40.2-5 e 41.6-9) sono un piccolo *précis* di logica – si confronti ad esempio anche I.34:

ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῆ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῆ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.	Qualora una retta che incide su due rette faccia un angolo all'esterno uguale a quello all'interno e opposto e dalla stessa parte o quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.
ἢ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῆ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.	Una retta che incide su rette parallele fa sia gli angoli alterni uguali tra loro che quello all'esterno uguale all'interno e opposto che quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti.

In I.28 si osservino il cambio di soggetto che rende preferibile la forma condizionale e la disgiunzione non esclusiva caratterizzata dal solo ἢ interposto (le due condizioni sugli angoli sono in effetti equivalenti tra loro e a quella data in I.27). Conseguentemente, la dimostrazione consiste in due rami indipendenti, il primo assumendo la prima ipotesi e il secondo, introdotta dal canonico πάλιν «di nuovo», l'altra. Ne risultano due condizionali indipendenti (non esplicitati nel testo), che sono combinati in accordo con la regola di inferenza (ovviamente non attestata)

$$\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)}{(A \vee C) \rightarrow B}$$

<sup>186</sup> D.L. VII.82; cfr. anche Plutarco, *Comm. not.* 45, 1084C-D, Sesto Empirico, *M* IX.139, e ancora gli splendidi argomenti stoici trascritti e criticati da Alessandro in *De fato*, 207.5-211.4, e Plutarco, *Comm. not.* 39, 1080C – questi ultimi non argomenti soritici.

(si noti che, dal momento che la disgiunzione è inclusiva, vale la dualità rispetto alla congiunzione). In I.29 l'identità di soggetto permette di usare la forma non condizionale. L'enunciato è indefinito e non quantificato; le tre condizioni sugli angoli che in I.27 e 28 figuravano in antecedente sono qui al conseguente, e per questo sono congiunte e non disgiunte. La proposizioni I.29 è infatti l'inversa della coppia I.27-28 e lo scambio di antecedente e conseguente negli enunciati è correttamente accompagnato dalla dualità congiunzione/disgiunzione. Le dimostrazioni delle tre condizioni sono una dipendente dall'altra e per questo effettuate in successione, risultandone una possibile forma logica soggiacente

$$\frac{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)}{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D)}}{A \rightarrow (B \wedge C \wedge D)}$$

Si osservi infine la struttura del conseguente di I.29: oltre a  $\tau\epsilon$  posto dopo il primo elemento del primo congiunto, cioè l'articolo, due dei quattro  $\kappa\alpha\iota$  presenti (sottolineati nel testo) determinano la tripla congiunzione più esterna, ognuno degli altri due una congiunzione binaria annidata. Gli Stoici avrebbero probabilmente anteposto altri  $\kappa\alpha\iota$  per eliminare le possibili ambiguità; qui raggiungono più economicamente lo scopo la disposizione dei termini, con l'operatore relazionale  $\acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma$  «uguale» canonicamente posto all'esterno dei termini in relazione e loro posposto, e la subordinazione allo stesso articolo dei determinanti preposizionali o avverbiali.

Un secondo esempio ricaviamo dall'enunciato di II.10 (*EE* I, 83.19-84.2): sono due congiunzioni annidate, dove il  $\tau\epsilon$  posposto risolve possibili ambiguità di ambito (si noti anche l'antecedente congiunto in forma debole con un  $\delta\acute{\epsilon}$ ):

ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ δίχα, προστεθῆ δέ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Qualora una linea retta sia secata a metà, e una certa retta sia sommata ad essa in <linea> retta, il <quadrato> sulla <retta> totale insieme con quella sommata e quello su quella sommata, i quadrati l'uno con l'altro, sono doppi sia di quello sulla metà che del quadrato descritto su quella composta sia dalla metà che da quella sommata come su una sola <retta>.

Non è facile seguire un enunciato come questo, oltretutto discretamente ellittico, e non sono sicuro che solo il lettore moderno faccia ricorso all'esposizione per comprenderne il senso. Il primo «sia... che», quello più «esterno», indica la somma di due quadrati, come abbiamo già visto sull'esempio di II.3. Il secondo quadrato è determinato da un'espressione complessa: è descritto su una retta che è la somma (qui la «composizione») di altre due: la prima è la metà della retta data, la seconda una retta ad essa sommata. Anche questa somma è formulata per mezzo di un correlativo  $\tau\epsilon\dots\kappa\alpha\iota\dots$ . Per capire quali operazioni sono effettuate sui vari oggetti matematici in gioco, si osservi la differente collocazione delle due preposizioni in accordo con la differente concezione delle somme in gioco. La somma più esterna ha la struttura

quadrati sommati doppi di (somma di quadrati)

mentre quella più interna

retta composta da (somma di rette)

Dunque la somma più esterna è governata dall'articolo τοῦ e quella più interna dalla preposizione ἐκ. Essa non è ripetuta e regge entrambi i genitivi congiunti da ... τε... καί... (si noti che τε segue la preposizione e non l'articolo immediatamente successivo); ciò avviene quasi sempre in espressioni consimili (si confronti anche I.def.18 letto come secondo esempio di questa sezione)<sup>187</sup>: frequente è ad esempio «il rettangolo compreso sia da AB che da ΓΔ». In tutti i casi occorre tradurre ripetendo la preposizione, che in greco è sempre costruita ἀπό κοινοῦ (Denniston 1950, 518-519). La preposizione ἀπό determina i due quadrati di cui è presa la somma: è quindi ripetuta perché solo così ognuno dei due è identificabile come quadrato. Il τε è coerentemente posposto al primo articolo, che però è ripetuto, altrimenti non sarebbe esperibile in quale caso sia declinata l'espressione preposizionale sostantivata τὸ ἀπὸ τῆς «il <quadrato> sulla». Si osservi infine che i quattro genitivi in gioco sono tutti al femminile singolare, e può risultare non immediato quale genitivo sia retto da quale preposizione. La presenza del secondo τε rende automatico il riconoscere che l'ultimo dei quattro genitivi nella congiunzione, l'unico sprovvisto di preposizione, può essere subordinato come secondo congiunto solo alla preposizione ἐκ, e non ad ἀπό, cosa che *a priori* potrebbe invece essere possibile. Dunque il τε posposto si rivela particolarmente utile in congiunzioni brachilogiche od elenchi, dove ambiguità potrebbero sussistere in casi particolarmente infelici ma sono neutralizzate *a priori* proprio dall'aver scelto questa struttura.

Di uso sporadico le congiunzioni in ... τε... τε.... Esempi interessanti si trovano negli enunciati condizionali omologhi di III.13, III.26-27, VI.33, di cui leggiamo il primo (EE I, 112.5-6)<sup>188</sup>:

<p>κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.</p>	<p>Un cerchio non è tangente a un cerchio secondo più punti che uno solo, <u>sia</u> qualora sia tangente all'interno <u>sia</u> qualora &lt;lo sia&gt; all'esterno.</p>
--	--

L'enunciato è condizionale anche se in forma non canonica: il doppio antecedente è posposto e fortemente ellittico. Di norma, nel caso di due teoremi racchiusi nella stessa proposizione, i due enunciati sono completi e separati da un καί: ciò accade quando un teorema e il suo inverso sono formulati nello stesso enunciato. Se viene scelta la strada del condizionale unico, come in I.28 letta sopra, le condizioni alternative sono disgiunte, non congiunte. In III.13, tuttavia, le condizioni nei due antecedenti si sovrappongono parzialmente, e la congiunzione posposta in ἐάν specifica solo la divisione in casi necessaria alla dimostrazione, che è infatti rigorosamente bipartita. Anche in questo caso dobbiamo rammentarci della regola soggiacente

$$\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)}{(A \vee C) \rightarrow B}$$

<sup>187</sup> Eccezione ad esempio in III.8, EE I, 107.8-9: ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου «la <retta> sia tra il punto che il diametro», ma questa è l'unica occorrenza congiunta di μεταξὺ e τε.

<sup>188</sup> Heiberg ridisegnò la figura di questo teorema, come era solito fare. La mossa si rivela infelice: il diagramma risultante è in contraddizione sia con il testo della dimostrazione che con la definizione di cerchi tangenti in III.def.3. La figura dei manoscritti è corretta ma traccia l'impossibile cerchio tangente in due punti in forma di una lunula (la circonferenza è cioè rappresentata da due archi con la convessità dalla stessa parte).

L'impiego di *ἐάν τε... ἐάν τε...* mostra che, nel caso di espressioni ellittiche in linguaggi non formalizzati, la distinzione tra congiunzione e disgiunzione è sfumata. Lo stesso costrutto in un trattato che possiamo definire tecnico si trova ad esempio in *Contro i grammatici* di Sesto Empirico (M I.173):

<p>οὐδὲν γὰρ βλαπτόμεθα, <u>ἐάν τε</u> σὺν τῷ ι γράφωμεν τὴν δοτικὴν πτώσιν <u>ἐάν τε</u> μή, καὶ <u>ἐάν τε</u> διὰ τοῦ σ τὸ σμιλλίον καὶ τὴν Σμύρναν <u>ἐάν τε</u> διὰ τοῦ ζ, καὶ ἐπὶ τοῦ Ἀριστίων ὀνόματος <u>ἐάν τε</u> τῆ προηγουμένη συλλαβῆ τὸ σ προσμερίζωμεν <u>ἐάν τε</u> τῆ ἐπιφερομένη τοῦτο συντάττωμεν.</p>	<p>Non ci verrà fatto del male, sia qualora scriviamo il dativo con la ι sia qualora no, e sia qualora σμιλλίον e Σμύρναν con σ sia qualora con ζ, e, per il nome Ἀριστίων, sia qualora dividiamo assegnando il σ alla sillaba che precede sia qualora la sistemiamo con quella che segue.</p>
--	--

In III.26-27, VI.33 le dimostrazioni non sono neanche strutturate in casi, in quanto le due condizioni nel doppio antecedente posposto, cioè che certi angoli siano al centro oppure alla circonferenza di un cerchio, sono in realtà l'una conseguenza dell'altra, come già mostrato in III.20. La divisione in casi proposta negli enunciati di III.26-27 e VI.33, francamente una forma di ipercorrettismo, è dovuta alla comprensione sotto un unico termine di categorie di oggetti geometrici percepite come intrinsecamente differenti. Le dimostrazioni dipendono in effetti l'una dall'altra, esplicitamente in III.27 e VI.33, mentre in III.26 entrambe le condizioni sono sfruttate per chiudere una singola dimostrazione. In quest'ultimo caso la formulazione dell'enunciato è quindi da ritenersi non irreprensibile.

Altrettanto raro l'impiego di *εἴτε... εἴτε...* «sia che... sia che...». Solo 5 occorrenze negli *Elementi*, e tutte nel libro X; nell'introduzione ai *Phaenomena* *εἴτε* è invece correlato con ἦ, e ne risulta una vera disgiunzione. Nella terza delle «definizioni prime» del libro X la formulazione è particolarmente ellittica, e costituisce uno di quegli stati intermedi tra disgiunzione e congiunzione cui abbiamo appena accennato. Qui, oltretutto, *εἴτε... εἴτε...* connette i due termini di una partizione disgiunta per cui la possibilità di cosussistenza dei termini è esclusa per definizione. Nelle proposizioni X.14 (*bis*), 67, 104, invece, si tratta di congiunzioni di condizionali completi, gli antecedenti recando condizioni incompatibili, e il significato è decisamente quello congiuntivo. In X.14 il dato è reso ancora più evidente dal trovarsi le due occorrenze in esposizione e conclusione istanziata, laddove l'enunciato, costituito canonicamente come congiunzione di due condizionali in *ἐάν*, rivela che in realtà il singolo teorema ingloba due distinte proposizioni matematiche sotto una sola dimostrazione<sup>189</sup>.

Il ruolo enfatico del *καί* si rintraccia quando abbia valore avverbiale, e sia anteposto ad interi relazioni o asserti. La consuetudine, che vale anche nella prosa greca ordinaria, può creare problemi di traduzione, dato che la pratica attuale è quella di enfatizzare una sola componente della relazione: scriviamo insomma «anche A è maggiore di B» e non «anche, A è maggiore di B». In greco troveremmo un'unica espressione *καὶ τὸ Α τοῦ Β μείζον ἐστὶ*, ma la resa corretta, per quanto barbarica, sarebbe la seconda. Tale uso di «anche» è analogo a quello della negazione enfatica anteposta e non va confuso con il *καί* anteposto della congiunzione stoica. La pratica trova un ambiente adatto nelle inferenze per transitività di relazioni. Abbiamo visto nella sez. 1.5.1.3 che in esse il verbo, in quanto parte dell'operatore relazionale, è regolarmente posto all'esterno della coppia ordinata di termini in relazione. Il *καί* nella conclusione dell'inferenza enfatizza lo stabilirsi di una relazione, analoga a quella che compare nelle assunzioni, tra due termini che prima non erano

<sup>189</sup> L'oscillazione tra significato congiuntivo e disgiuntivo in condizionali fortemente ellittici come quelli appena analizzati è un fenomeno sintattico acquisito da tempo; si veda ad esempio Kühner, Gerth 1898-1904, II.ii, § 539. Troviamo la stessa osservazione già in Apollonio Discolo, *Conj.*, 219.12-220.22.

connessi, ma non può interferire con la struttura di coppia ordinata. La collocazione naturale, seppur non esclusiva, è dunque quella anteposta alla coppia, anche se non sempre all'operatore relazionale. Su tale collocazione pesa anche il fatto che la posizione naturale del *καί* enfatico è in testa alla conclusione di un argomento. Vediamo alcuni esempi. Il primo viene da un esempio di doppia applicazione della transitività a proporzioni in VI.14 (*EE* II, 62.21-63.2):

<p>ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ.</p>	<p>In effetti, poiché è come ΔΒ rispetto a ΒΕ, così ΗΒ rispetto a ΒΖ, <u>ma</u> come ΔΒ rispetto a ΒΕ, così il parallelogrammo ΑΒ rispetto al parallelogrammo ΖΕ, <u>e</u> come ΗΒ rispetto a ΒΖ, così il parallelogrammo ΒΓ rispetto al parallelogrammo ΖΕ, <u>anche quindi come</u> ΑΒ rispetto a ΖΕ, così ΒΓ rispetto a ΖΕ.</p>
---	--

Si osservi che la forma logica è quella del paracondizionale ibrido, e la doppia coassunzione espressa con il correlativo *ἀλλὰ μὲν... δέ....*. L'ordinamento delle parole nella forma *καὶ ὡς ἄρα* «anche quindi come», particolarmente aspro se non si vogliono sopporre verbi sottintesi da rendere espliciti, si spiega facilmente come segue: *ὡς* è il primo vocabolo nella formula canonica della proporzionalità: dunque *ἄρα*, che di norma va in seconda posizione come *μὲν* e *δέ* subito prima, lo deve seguire immediatamente; il *καὶ* enfatico va anteposto a tutta la formula. Da un'applicazione della transitività dell'uguaglianza viene quest'altro esempio, preso da II.8 (*EE* I, 79.15-80.1):

<p>πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ.</p>	<p>Di nuovo, poiché ΓΒ è uguale a ΒΔ, <u>ma</u> ΒΔ è uguale a ΒΚ, cioè a ΓΗ, <u>e</u> ΓΒ è uguale a ΗΚ, cioè a ΗΠ, <u>anche</u>, ΓΗ è quindi uguale a ΗΠ. <u>E</u> poiché ΓΗ è uguale a ΗΠ, <u>e</u> ΠΡ a ΡΟ, <u>anche</u>, ΑΗ è uguale a ΜΠ, e ΠΛ a ΡΖ.</p>
--	--

Il primo paracondizionale è ibrido, con struttura identica al precedente, il secondo in forma assertoria. Dei tre *καὶ* presenti, il secondo è meglio reso come un «e» paratattico, ma non sarebbe scorretto intenderlo come avverbiale. Il primo e il terzo mostrano le due possibili posizioni enfatiche; una anteposta a tutta l'espressione relazionale, l'altra solo alla coppia ordinata. In questo secondo caso l'inversione rispetto all'operatore ἴσος «uguale» è motivata dalla presenza di due coppie ordinate, e il *καὶ*, anteposto alle due coppie messe in correlazione con *μὲν... δέ*, è da intendersi «distribuito» tra di esse. La stessa esigenza di «distribuire» su due coppie detta la posizione anteposta dell'operatore relazionale nel secondo paracondizionale, sia in antecedente che al conseguente. Nel primo paracondizionale la presenza delle due clausole in *τουτέστι* «cioè» impone invece per chiarezza la ripetizione dell'operatore e la sua posizione posposta. In entrambe le occorrenze occorre rendere il *καὶ* con un «anche» anteposto: non ci sono proprio ragioni per attribuire il *καὶ* a uno o all'altro dei termini della coppia, ed anzi la pratica attuale farebbe scrivere le stesse espressioni senz'altro prive dell'«anche».

Un problema interessante si pone in traduzione ancora a causa della posizione del *καὶ* avverbiale. La determinazione di un teorema inizia con la clausola canonica *λέγω ὅτι* «dico che...», che specifica ciò che occorre dimostrare. Può accadere che la condizione da provare sia simile ad un'altra già formulata tra i dati del problema come in I.6 (*EE* I, 14.1-3):

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἔστιν ἴση. Sia un triangolo ΑΒΓ che ha l'angolo ΑΒΓ uguale all'angolo ΑΓΒ: dico che anche un lato ΑΒ è uguale a un lato ΑΓ.

In questo caso il καὶ avverbiale specifica che anche i lati sono uguali tra loro, allo stesso modo in cui sono stati assunti esserlo gli angoli: il καὶ opera all'interno della proposizione dichiarativa. Quando più risultati sono dimostrati in un singolo teorema, normalmente la formula «dico che...» viene ripetuta per ogni asserzione dimostrata; un καὶ avverbiale è regolarmente anteposto per ricordare che ci troviamo di fronte ad un risultato addizionale, come in I.34, il cui enunciato è (*EE* I, 46.20-22)

τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίων πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Sia i lati che gli angoli opposti dei domini parallelogrammici sono uguali tra loro, e la diagonale li seca a metà.

Che una sua diagonale sechi a metà un parallelogrammo è dimostrato dopo che il primo risultato è stato completamente provato; ecco dunque la ripresa dell'enunciato (*EE* I, 48.1), che segue una conclusione parziale in forma completa e non istanziata – un fenomeno piuttosto inusuale negli *Elementi*: di solito una conclusione parziale è fornita in forma istanziata:

δέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Dico ora, anche, che la diagonale li seca a metà.

A parte l'inserimento della particella δὴ, posta a segnalare la transizione, l'ordine delle parole è lo stesso che in I.6. Qui, tuttavia, il καὶ avverbiale governa l'intera proposizione dichiarativa (se non l'intero periodo), e non agisce al suo interno.

Il ruolo enfatico originario di ἤτοι anteposto serviva a segnalare la presenza di una struttura sintattica non così comune e marcatamente connotata dal punto di vista logico-deduttivo come la disgiunzione esclusiva. La congiunzione, al contrario, è correntissima anche nel linguaggio ordinario: secondo Galeno è il connettore più debole (*Inst. log.* IV.4 e specialmente XIV.7). La varietà delle particelle e delle strutture congiuntive accettate rendeva praticamente impossibile identificarne una specificamente adatta ad essere fissata nel linguaggio matematico. Al contrario, tale varietà fu sfruttata appieno, con l'introduzione di una serie di formule stereotipate dal significato congiuntivo ma nondimeno ben differenziate sintatticamente, allo scopo di introdurre sfumature di senso che permisero di fissare con notevole elasticità distinzioni matematicamente sottili (ad esempio, le congiunzioni di predicati sono la maniera esclusiva in cui un oggetto veniva identificato in quanto rappresentante di un sottogenere). Tra le forme correlative, τε... καὶ... già conferiva l'enfasi dovuta, nel caso questa fosse richiesta, mettendo in evidenza i due congiunti. Il καὶ anteposto della congiunzione stoica è quindi una prescrizione indipendente, sulla cui rigidità occorrerà riflettere, alla luce dell'uso congiuntivo visto sopra di μέν... δέ... in argomenti genuinamente stoici.

Una domanda interessante da porsi è perché la dottrina crisippea prescriva di anteporre un καὶ quando la risorsa del tutto equivalente del τε posposto era già messa a disposizione dal linguaggio ordinario, e quando già la pratica matematica suggerisce fortemente, come abbiamo visto, che tale risorsa fosse pienamente adeguata a prevenire possibili ambiguità. Già un primo motivo può risultare dall'osservazione che τε, in quanto enclitico, conferisce sicuramente meno enfasi di un καὶ anteposto. In secondo luogo, forse gli Stoici vollero che l'uso di formulazioni infrequenti in prosa ordinaria funzionasse da marcatore di un linguaggio formalmente corretto. Possiamo congetturare una terza ragione se guardiamo alla caratteristica comune più saliente dei connettori stoici. Tutti gli asserti non

semplici hanno un connettore anteposto, ed anche la negazione, pur non essendo un connettore, era in posizione canonica solo se anteposta. Interferenze con la pratica corrente devono essere alla radice dell'assenza di un καί anteposto in molti esempi di congiunzione proposti dalle nostre fonti, anche in contesti tecnici. D'altro canto, ἤτοι anteposto non manca mai nelle disgiunzioni attestate negli stessi contesti, ed un paio di eccezioni, in particolare in Apollonio Discolo, *Conj.*, 216.8 e 217.2, sono semplicemente integrazioni maldestre di lacune nel testo: si veda Frede 1974, 94. Inoltre, gli Stoici sembrano aver riconosciuto tre possibili maniere, in qualche modo complementari (ma si ricordi che, se una di queste è da considerarsi la definizione, sarà quella sintattica), per presentare un asserto non semplice. La prima, chiarita di solito da un esempio, è strettamente sintattica e specifica semplicemente quale sia il connettore in gioco; la terza è semantica, e stabilisce le condizioni di verità dell'asserto. La seconda è ancora semantica, ma è introdotta dalla clausola «il connettore annuncia che...», enfatizzandone la posizione anteposta: si vedano D.L. VII.71-72 e Sesto Empirico, *PH* II.148, 162, 189, 191. Il ruolo di questa seconda maniera di presentazione, impiegata correntemente da Apollonio Discolo (*Conj.*, *passim*) e forse in origine distintiva della letteratura grammaticale, non si esaurisce certamente in quanto suggerisco qui e la questione meriterebbe un'analisi più approfondita. Si può insomma azzardare che a dettare la regola del καί anteposto giocò forse una specie di spirito di sistema, tendente ad uniformare la struttura di tutti gli asserti non semplici.

## 2.8. L'AVVERBIO AMA «INSIEME»

L'avverbio ἄμα «insieme» ha un uso assai limitato negli *Elementi*, ma molto caratteristico e connotato logicamente. Il grosso delle occorrenze (311 in tutto) nel *corpus* matematico antico si trova in opere astronomiche, quando si asserisca che certi corpi celesti sorgono o tramontano insieme: questo significato temporale è quello originario dell'avverbio (lo stesso significato temporale prevale nel *corpus* eroniano). Negli *Elementi* (16 occorrenze, in V.def.5 (*ter*), VI.7 (*ter*), IX.8 (*bis*), X.68 (*ter*), 76, 82, 84 (*bis*), 101, più 1 in *Data* 43) è impiegato in accezione più propriamente logica, e denota il sussistere congiunto di una o più proprietà in uno o più oggetti matematici; unica eccezione in X.101 (*EE* III, 183.15), dove qualifica erroneamente la somma di due quadrati. Vediamo la questione in maggiore dettaglio analizzando la definizione di proporzionalità, V.def.5, che rileggiamo (*EE* II, 1.10-15):

ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν ἐκάτερον ἐκατέρου ἢ ἄμα ὑπερέχη ἢ ἄμα ἴσα ἢ ἢ ἄμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα.

Grandezze sono dette essere nello stesso rapporto, prima rispetto a seconda e terza rispetto a quarta, quando, secondo quale si voglia multiplo, gli equimultipli della prima e della terza o eccedano insieme rispettivamente gli equimultipli della seconda e della quarta presi in ordine corrispondente, oppure siano insieme uguali, oppure facciano insieme difetto.

Per capirla può essere utile partire da V.def.7, che stabilisce quando un rapporto sia maggiore di un altro. Osserviamo preliminarmente che, se due rapporti sono differenti, possiamo sempre interpolare tra di essi un rapporto numerico:

$$A : B > C : D \leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} / A/B > n/m \geq C/D.$$

Da questa discende immediatamente V.def.7 (EE II, 2.3-8), più semplice di V.def.5 e quindi dalla formulazione più trasparente:

ὅταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

E quando degli equimultipli, il multiplo della prima ecceda il multiplo della seconda, e il multiplo della terza non ecceda il multiplo della quarta, allora la prima rispetto alla seconda è detta avere rapporto maggiore che la terza rispetto alla quarta.

In simboli

$$A : B > C : D \leftrightarrow \exists m, n \in N / (mA > nB \wedge mC \leq nD);$$

e analogamente per il caso «minore di»:

$$A : B < C : D \leftrightarrow \exists m, n \in N / (mA < nB \wedge mC \geq nD);$$

Negando la disgiunzione logica di queste equivalenze si ottiene da una parte l'identità dei rapporti, dall'altra la richiesta che per ogni coppia di multipli le disuguaglianze debbano andare in versi concordi. Ragioni di completezza suggeriscono di introdurre anche l'uguaglianza, caso che a rigore è superfluo, accanto alle due disuguaglianze. Si ottiene dunque nient'altro che V.def.5, che trascrivo in simboli con connettivi in due varianti: quella in cui ἄμα è letto come congiunzione:

$$A : B :: C : D \leftrightarrow \forall m, n \in N ((mA > nB \wedge mC > nD) \vee (mA = nB \wedge mC = nD) \vee (mA < nB \wedge mC < nD)),$$

e quella in cui ἄμα è letto come bicondizionale:

$$A : B :: C : D \leftrightarrow \forall m, n \in N ((mA > nB \leftrightarrow mC > nD) \vee (mA = nB \leftrightarrow mC = nD) \vee (mA < nB \leftrightarrow mC < nD)).$$

È del tutto evidente che questa definizione è operativa in senso forte: non definisce un oggetto ma una relazione tra oggetti, fornendo una procedura effettiva per stabilire se essa sussiste o meno. È la relazione di proporzionalità ad essere studiata nel libro V, e non quella di rapporto, se non nel senso debole che sono studiate identità di rapporti.

Proviamo a smontare il testo della definizione per capire il significato delle singole espressioni coinvolte. Sono in gioco quattro grandezze,  $A, a, B, b$ , *a priori* non sullo stesso piano: la prima coppia dà origine ad un rapporto, e così la seconda. Di  $A, B$  sono presi multipli uguali (= equimultipli), e così di  $a, b$ . Occorre specificare che tali equimultipli sono arbitrari e indipendenti tra loro: la locuzione καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμόν «secondo quale si voglia multiplo» ha questa funzione; la generalità della definizione è tutta racchiusa qui. Gli equimultipli sono poi messi a confronto tra loro per mezzo delle relazioni «maggiore di», «uguale a» e «minore di». La formulazione è esplicita sul fatto che gli equimultipli di  $A$  e  $B$  (τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια) vanno messi in relazione con gli equimultipli di  $a$  e  $b$  (τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων). Resta il problema del modo in cui la prima coppia sia da confrontarsi con la seconda. In effetti, come vedremo nella sez. 2.10, una costante stilistica di tutto il *corpus* greco è di intendere che sia presa la somma di due grandezze, quando esse siano nominate in congiunzione. Se dunque vogliamo che i

multipli siano comparati singolarmente e non in quanto somma occorre specificarlo: questa è la funzione di ἐκάτερον ἐκατέρου «rispettivamente». La locuzione si accorda con la prima delle relazioni di comparazione elencate, «maggiore di», ed è per questo che il secondo termine è al genitivo (ἴσος richiederebbe il dativo). Ne risulta dunque la formazione di due coppie ordinate, ma resta l'ambiguità se occorra confrontare, ad esempio, i multipli di  $A$  con quelli di  $a$  o con quelli di  $b$ . L'ambiguità è sciolta dall'ultima locuzione: ληφθέντα κατάλληλα «presi in ordine corrispondente»: il primo menzionato della prima coppia di equimultipli,  $A$ , con il primo della seconda,  $a$ , e così per i secondi menzionati<sup>190</sup>.

Nella lettura di ἄμα come «se e solo se», cioè di un connettore che in qualche modo formalizzi il fatto che le due condizioni in gioco sussistono oppure non sussistono insieme, le (dis)uguaglianze in ogni coppia devono essere simultaneamente soddisfatte o non soddisfatte; gli altri termini o connettori non presentano difficoltà<sup>191</sup>. Tre argomenti sono adducibili a sostegno dell'ipotesi che questa fosse la lettura adottata da chi applicava la definizione.

1) Anche se ἄμα non è un connettore canonico in logica peripatetica o stoica, che non avevano un termine per il bicondizionale né risultano averlo formalizzato, leggiamo in Aristotele, *Cat.* 13, 14b27-28<sup>192</sup>, che φύσει δὲ ἄμα ὅσα ἀντιστρέφει μὲν κατὰ τὴν τοῦ εἶναι ἀκολούθησιν «ma sono ἄμα per natura quelle cose che convertono per quanto concerne l'implicazione di esistenza». I termini tecnici impiegati chiariscono il contesto logico<sup>193</sup>, e l'esemplificazione che segue toglie ogni residuo dubbio: «[doppio e metà] convertono in quanto essendoci doppio c'è metà ed essendoci metà c'è doppio» (14b30-31).

2) Le applicazioni della def. 5 si attengono ad un'unica formulazione, differenziata in maniera fine da altri asserti di aspetto simile<sup>194</sup>. Tali applicazioni sono prive di ἄμα, essendo espresse come la congiunzione di una tripla di condizionali; leggiamo ancora V.11 (*EE* II, 18.7-11):

καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ $A$ πρὸς τὸ $B$ , οὕτως τὸ $\Gamma$ πρὸς τὸ $\Delta$ , καὶ εἰληπται τῶν μὲν $A, \Gamma$ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ $H, \Theta$ , τῶν δὲ $B, \Delta$ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ $\Lambda, M$ , εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ $H$ τοῦ $\Lambda$ , ὑπερέχει καὶ τὸ $\Theta$ τοῦ $M$ , καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.	E poiché è come $A$ rispetto a $B$ , così $\Gamma$ rispetto a $\Delta$ , e risultano presi di $A, \Gamma$ equimultipli $H, \Theta$ , di $B, \Delta$ altri, quali càpita, equimultipli $\Lambda, M$ , se quindi $H$ eccede $\Lambda$ , anche $\Theta$ eccede $M$ , e se è uguale, è uguale, e se fa difetto, fa difetto.
--	---

In trascrizione simbolica:

$$A : B :: C : D \rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} ((mA > nB \rightarrow mC > nD) \wedge (mA = nB \rightarrow mC = nD) \wedge (mA < nB \rightarrow mC < nD)).$$

<sup>190</sup> A rigore, i multipli vanno presi in senso proprio, e quindi resterebbe escluso dalla definizione il caso in cui le grandezze siano considerate multipli di se stesse. Ciò non creerebbe difficoltà, se negli *Elementi* non fosse ripetutamente applicata la proprietà che, se  $A:B::C:D$  e  $A > B$ , allora  $C > D$ , e lo stesso per  $=$  e  $<$  (da non confondere con V.14!).

<sup>191</sup> La definizione stessa è un'equivalenza logica: la presenza del relativo ὅταν lo rivela; inoltre, si trovano applicazioni della def. 5 in entrambi i versi (ad esempio in V.11).

<sup>192</sup> Cfr. anche la discussione in *Cat.* 7, 7b15-8a12 e l'uso estensivo ed appropriato del termine nell'argomento portante di *Metaph.* Γ 5. In logica stoica la questione è strettamente legata a quella del significato della nozione cruciale di συνάρτησις. Si veda Castagnoli 2004 per una messa a punto.

<sup>193</sup> Per l'espressione ἀντιστρέφειν τὴν ἀκολούθησιν si veda ad es. *Top.* I 5, 167b1-3. Un passaggio controverso in Galeno, *Inst. log.* IX.5, è discusso in Mates 1961, 56-57, e Frede 1974, 93.

<sup>194</sup> Cfr. ad es. i teoremi sugli equimultipli in V.1-6 e l'enunciato di V.14, dove troviamo «essere maggiore di» invece di «eccedere».

Di norma solo il caso «maggiore di» è verificato esplicitamente. Ciò suggerisce che anche la definizione debba contenere un operatore logico apparentabile all'implicazione. Le implicazioni «solo se» della def. 5 sono in effetti ridondanti, di modo che non si fa danno ad aggiungerle qualora si voglia che la definizione abbia una formulazione più compatta. Si noti poi che la forma  $\epsilon\iota$  + indicativo non comporta automaticamente che ognuno dei condizionali nelle applicazioni sia un'equivalenza. Solo il fatto che tre condizionali sono congiunti in una singola proposizione rende di fatto ognuno di essi un'equivalenza: i tre casi di (dis)uguaglianza esauriscono tutte le possibilità, e se una di esse è verificata dalla prima coppia di grandezze allora solo la (dis)uguaglianza corrispondente può essere verificata dalla seconda coppia. La proposizione congiunta funziona quindi come un'equivalenza logica piuttosto complessa tra le proposizioni che esprimono la prima tripla di (dis)uguaglianze e quelle che esprimono la seconda. Preso da solo, invece, nessuno dei tre condizionali congiunto nella formulazione delle applicazioni può essere un'equivalenza<sup>195</sup>.

La def. 5 e le sue applicazioni sono dunque formulate in maniera differente: oltre alle variazioni nei connettivi che abbiamo visto, nelle applicazioni troviamo sistematicamente «essere minore» ( $\epsilon\lambda\alpha\tau\tau\omicron\nu$   $\epsilon\iota\nu\alpha\iota$ ) invece di «fare difetto» ( $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\epsilon\iota\nu$ )<sup>196</sup>. Perché queste differenze? E perché tali differenze non sussistono nelle traduzioni arabe e nella traduzione di Gerardo da Cremona<sup>197</sup>? Suggerisco di osservare che il *definiens* di V.def.5 è in forma II (si veda la sez. 1.5.1.4): gli equimultipli «dalla stessa parte» di disuguaglianze corrispondenti sono raggruppati insieme (*attenzione*, che questo non risulta dalla scrittura simbolica, ma solo dalla formulazione originale!). Le applicazioni, invece, sono in forma I e quindi adatte all'uso in inferenze per transitività, in quanto ogni condizionale va considerato separatamente. Inferenze di questo genere sono più frequenti di quelle in cui si faccia ricorso alla simmetria della condizione di proporzionalità, che risulta invece evidente in forma II. La scelta tra le due forme di espressione è quindi strettamente connessa all'impiego che ognuna di esse trova nel contesto immediato, definitorio oppure dimostrativo. Sembra quindi ragionevole concludere che la def. 5 sia stata scritta come raffinamento della formula che si riscontra nelle applicazioni. L'uso di  $\acute{\alpha}\mu\alpha$  può essere spiegato come un tentativo di adottare il termine meno inappropriato per denotare un bicondizionale, in assenza di un connettore canonico e considerando che l'intreccio tra le implicazioni logiche e le disuguaglianze tra coppie di equimultipli è piuttosto complesso<sup>198</sup>. Dato che il fenomeno è limitato al libro V, l'identità di definizione e applicazioni in **GAB** potrebbe essere attribuita ad un editore posteriore.

3) Nella prima proposizione di *Spir*. Archimede stabilisce che, se un punto si muove di moto rettilineo uniforme, due segmenti percorsi hanno lo stesso rapporto dei tempi corrispondenti di percorrenza (*AOO* II, 12.13-14.20). La dimostrazione segue lo schema della def. 5. In primo luogo, sono presi equimultipli della prima e della seconda coppia segmento-tempo. Viene poi dimostrato che, se il multiplo scelto di un segmento è maggiore del multiplo dell'altro, allora lo stesso vale anche per i multipli dei tempi corrispondenti. Si tratta di un'applicazione canonica della def. 5: viene scelta una

<sup>195</sup> Si noti l'uso di  $\acute{\alpha}\nu$  + congiuntivo nelle clausole omologhe alla fine di V.14, 17, 20-21 (*EE* II, 23.1-2, 27.6-7, 31.2-3, 32.6-7), dove in effetti i tre condizionali sono considerati separatamente. L'occorrenza mista di  $\epsilon\iota/\acute{\alpha}\nu$  alla fine di V.17 non costituisce un controesempio a quest'affermazione, dal momento che il testo così com'è risulta da una revisione posteriore.

<sup>196</sup> L'unica eccezione si trova in V.11 (*EE* II, 18.11).

<sup>197</sup> La def. 5 è applicata nel libro V nelle prop. 1, 7 (*bis*), 11 (*quater*), 12 (*bis*), 13, 16, 17, 22, 23. In ogni caso **G** (**A** non è affidabile su questo punto) presenta l'applicazione formulata esattamente come la definizione, a sua volta formulata come in **PT**. Lo stesso accade nelle famiglie *A* e *B* della tradizione araba. La terza occorrenza in V.11 manca in **G**, ma l'intera frase è un'interpolazione nella linea greca di tradizione. Fuori dal libro V, la def. 5 è applicata in VI.1 (*bis*) e 33 (*bis*), XI.25 (*bis*), XII.13 (*bis*). Gerardo, in contrasto con quanto fa nel libro V, ricorre quasi sempre ad una formulazione che corrisponde alle applicazioni di **PT**. La sola eccezione è la prima occorrenza in VI.1.

<sup>198</sup> Si noti ad ogni buon conto che la trascrizione con il bicondizionale rende la definizione vuota, se adottiamo ad esempio l'implicazione materiale per definirlo: almeno due dei tre disgiunti sono sempre veri in quanto hanno necessariamente l'antecedente falso.

direzione della disuguaglianza e verificata una ben precisa relazione di implicazione logica. La seconda parte della dimostrazione recita: «E similmente sarà dimostrato che, se anche tempi sono composti dai tempi ZH, HΘ secondo quale si voglia composizione (καθ' ἀντινοῦν σύνθεσιν), così che si eccedano uno l'altro (τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου), anche, delle linee composte dalle linee ΓΔ, ΔΕ secondo la stessa composizione, quella omologa al tempo che eccede eccederà l'altra» (A.O. II, 14.13-18). Questo passaggio mostra che anche la prima parte della dimostrazione deve essere considerata coprire entrambi i casi possibili di disuguaglianza tra i multipli delle linee, essendo chiaramente immateriale quale dei due multipli sia maggiore dell'altro. Quindi, la dimostrazione considera prima l'implicazione da una singola disuguaglianza di (multipli di) linee a una di tempi, poi quella inversa da tempi a linee. (Il caso dell'uguaglianza è marginalmente ovvio ed in realtà una conseguenza degli altri due se ἄμα è letto come equivalenza.) Dobbiamo concluderne che Archimede applica la def. 5 leggendo un'equivalenza logica nel passaggio identificato da ἄμα.

Ci si può chiedere come possa funzionare una condizione che richiede una verifica su una molteplicità illimitata di oggetti, quali sono gli equimultipli della definizione. In realtà, se andiamo a leggere una qualsiasi dimostrazione che applichi la def. 5, osserviamo che le verifiche sono poco più che materia di *routine*. In primo luogo l'applicazione si limita al caso «maggiore di» e a stabilire un'implicazione invece di un'equivalenza logica. Siccome la definizione è simmetrica rispetto al verso delle implicazioni, la verifica è sempre formulata in modo indipendente da quello della disuguaglianza e il caso dell'uguaglianza è automaticamente soddisfatto una volta che lo siano gli altri, questa sola verifica tra le sei possibili è sufficiente. Il vero trucco risiede però nella scelta di equimultipli generici, una mossa che, come d'abitudine, non è sottolineata dalla presenza di qualificazioni atte a esprimere tale genericità.

Nel caso delle applicazioni geometriche di V.def.5, in VI.1, VI.33, XI.25 e XII.13, la prova si riduce al conteggio dei rispettivi multipli e, come conseguenza non dimostrata ma banale di risultati elementari di congruenza, all'asserzione che la (dis)uguaglianza tra multipli di una coppia vale anche per l'altra coppia. Si tratta di dimostrazioni dal contenuto geometrico esiguo ed in cui la verifica della condizione della definizione è immediatamente evidente data la configurazione geometrica.

Un tratto peculiare della teoria del libro V rende semplice il compito nel caso delle applicazioni astratte di V.def.5. Come visto nella sez. 1.5.1.4, buona parte dei teoremi dimostra la stabilità della relazione di proporzionalità sotto opportune manipolazioni dei termini; nei casi in cui ciò non avvenga, V.7 stabilisce un risultato che banalizza la richiesta di genericità e rende immediata la verifica della definizione, V.15 non usa gli equimultipli per verificare la def.5. V.8 e V.13 fanno storia a sé, in quanto vi si trova applicata la definizione 7. Negli altri teoremi del libro V, la maniera di dimostrazione è sempre la stessa, e comporta un'applicazione di V.def.5 nei due versi: una relazione di proporzionalità è già assunta tra le ipotesi, ed è sufficiente che le trasformazioni degli equimultipli indotte da quelle richieste in enunciato per i rapporti non introducano vincoli sulla scelta iniziale di multipli perché la genericità si preservi anche alla fine, quando la definizione 5 è applicata di nuovo in verso opposto a quello iniziale. Che non vengano introdotti ulteriori vincoli è dimostrato nelle cruciali proposizioni V.1-2 e 4, con l'unica eccezione della transitività dell'equimultiplicità, proprietà non dimostrata e che lo fa in maniera da considerarsi evidente.

## 2.9. ORDINALI COME VARIABILI

Gli Stoici adottarono una formulazione schematica dei sillogismi usando ordinali come termini generali per denotare asserti: i cosiddetti τρόποι «modi», λογότροποι «argomodi» nel caso in cui le

abbreviazioni occorressero solo da un certo punto in poi in maniera da accorciare l'esposizione dell'argomento; leggiamo D.L. VII.76-77<sup>199</sup>:

λόγος δέ ἐστιν, ὡς οἱ περὶ τὸν Κρίνιν φασι, τὸ συνεστηκὸς ἐκ λήμματος καὶ προσλήψεως καὶ ἐπιφορᾶς [...] τρόπος δέ ἐστιν οἷον εἰ σχῆμα λόγου, οἷον ὁ τοιοῦτος, "εἰ τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον· ἀλλὰ μὴν τὸ πρῶτον· τὸ ἄρα δεύτερον."  
 77 λογότροπος δέ ἐστι τὸ ἐξ ἀμφοτέρων σύνθετον, οἷον "εἰ ζῆ Πλάτων, ἀναπνεῖ Πλάτων· ἀλλὰ μὴν τὸ πρῶτον· τὸ ἄρα δεύτερον."  
 παρεισήθη δὲ ὁ λογότροπος ὑπὲρ τοῦ ἐν ταῖς μακροτέραις συντάξεσι τῶν λόγων μηκέτι τὴν πρόσληψιν μακρὰν οὔσαν καὶ τὴν ἐπιφορὰν λέγειν, ἀλλὰ συντόμως ἐπενεγκεῖν, "τὸ δὲ πρῶτον· τὸ ἄρα δεύτερον."

Un argomento, come asserisce Crini, è ciò che risulta composto di una premessa, di una coassunzione e una conclusione [...] Un modo è una specie di schema di argomento, come il seguente: "se il primo, il secondo; ma a dire il vero il primo: quindi il secondo". 77 Un argomodo è un composto di entrambi, come "se Platone vive, Platone respira; ma a dire il vero il primo: quindi il secondo". Gli argomodi furono introdotti per non dover ripetere, nelle formulazioni degli argomenti più lunghi, la coassunzione, se è lunga, e la conclusione, ma procedere in maniera concisa, "e il primo: quindi il secondo".

Questi ordinali sono *abbreviazioni* – e quindi costanti logiche – e non variabili. Il motivo è che nella teoria stoica la formulazione di riferimento era il singolo sillogismo concreto, e non un suo schema ottenuto astruendo una putativa "forma" logica: gli indimostrati, che siano semplici o non semplici, sono argomenti particolari, come risulta dalle loro descrizioni generali (che non impiegano numerali ma riferimenti indefiniti ad oggetti logici) e dal fatto stesso che fosse ritenuto necessario assegnare la denominazione specifica «modo» alle forme che invece tali abbreviazioni impiegano.

Il passaggio da argomento concreto a modo non è univoco, nel caso di argomenti complessi: ed in effetti Crisippo scrisse un trattato in un libro περὶ τοῦ τάττεσθαι τὸν αὐτὸν λόγον ἐν πλείοσι τρόποις «Sul essere lo stesso argomento proposto in più modi» e uno in due libri πρὸς τὰ ἀντειρημένα τῷ τὸν αὐτὸν λόγον ἐν συλλογιστικῷ καὶ ἀσυλλογίστῳ τετάχθαι τρόπῳ «Contro le obiezioni a che lo stesso argomento sia proposto in modo sillogistico e non sillogistico» (D.L. VII.194) – si vedano anche le osservazioni di Galeno a *Inst. log.* XV.8.

In mancanza di teorizzazioni esplicite<sup>200</sup>, il ruolo dei «modi» deve ricavarsi dalla pratica attestata: erano utilizzati per abbreviare argomenti complessi e, in particolare, facilitarne le analisi (Sesto Empirico, *M* VIII.228-243). La forma logica dell'argomento è così resa perspicua, e la struttura schematica rende più facile controllare la validità di argomenti particolari; occorre però sempre presupporre un sillogismo concreto di riferimento, come è in effetti il caso negli esempi attestati e come avveniva sicuramente negli «argomodi». Una spia linguistica dà un'ulteriore conferma: la presenza costante dell'articolo a precedere i numerali nei modi indica che occorre sottintendere ἀξίωμα «asserto», o quantomeno presupporre un'anafora agli asserti particolari contenuti nel sillogismo cui il modo fa riferimento.

Apparentemente analogo impiego di numerali per denotare i termini di rapporti o proporzioni si trova nel V libro degli *Elementi* (ma si veda anche VII.19). Leggiamo l'enunciato di V.13 (*EE* II, 20.18-21):

<sup>199</sup> Esempi di «argomodi» in Sesto Empirico, *M* VIII.242, 306, e nei frammenti delle *Ricerche logiche* di Crisippo in *PHerc.* 307, II.21-26; migliore discussione dell'intera questione in Frede 1974, 136-148. Per i «modi» dei primi tre indimostrati si veda ancora Sesto, *M* VIII.227, e cfr. la sez. 2.2.2.

<sup>200</sup> Anche se Crisippo scrisse almeno sette trattati i cui titoli contengono riferimenti a «modi», come risulta dal catalogo di opere in D.L. VII.193-195.

ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Qualora primo rispetto a secondo e terzo rispetto a quarto abbiano lo stesso rapporto, e terzo rispetto a quarto abbia rapporto maggiore che quinto rispetto a sesto, anche primo rispetto a secondo avrà rapporto maggiore che quinto rispetto a sesto.

I numerali del V libro non sono però preceduti dall'articolo, e sono introdotti senza che all'inizio sia menzionata esplicitamente la molteplicità definita di grandezze in gioco, il che renderebbe l'articolo necessario a causa del riferimento anaforico. Non si tratta quindi di abbreviazioni, o addirittura di brachilogie con un sottinteso μέγεθος «grandezza», ma di una maniera per denotare termini in proporzione che non faccia ricorso a lettere, dato che altrimenti l'enunciato non avrebbe la forma canonica non istanziata.

Considerando che già Aristotele aveva usato lettere per denotare termini e forse anche enunciati<sup>201</sup>, e che le lettere greche venivano anche impiegate come numerali, ci si potrebbe chiedere se, qui come nelle fonti sui modi stoici, non si tratti semplicemente di un copista che legge A ma trascrive πρῶτον. Per il libro V la possibilità è da escludersi in quanto nelle esposizioni gli ordinali sono dotati di lettere (e si trovano espressioni come πρῶτον τὸ A, che costituirebbero delle ripetizioni); inoltre, abbiamo visto che in V.13 si giunge fino al sesto termine, e il numerale per 6 non è ζ, che lo è per 7, ma ς. Sul versante stoico, testimonianze esplicite si riferiscono alle abbreviazioni come «numeri» (Apuleio, *Int.*, 212.10-12 – si veda anche la prescrizione di Galeno, *Ant.*, XIV, 31-32, sulla necessità di scrivere i numerali per disteso nelle ricette mediche). Il ruolo dei numerali è quindi molto diverso da quello delle lettere: sono oggetti matematici astratti di cui si predicano certe proprietà. Gli ordinali senza articolo del libro V sono insomma delle variabili, e l'assenza dell'articolo riflette il carattere indefinito dell'enunciato.

Non tutte le occorrenze nel libro V sono però prive di articolo: prendiamo ad esempio quelle di δεύτερος «secondo» o τρίτος «terzo»<sup>202</sup>. La presenza dell'articolo è forzata da ragioni grammaticali: viene apposto sempre quando i numerali si riferiscano a grandezze già introdotte, vuoi come numerali privi di articolo – enunciato di V.14 (*EE II*, 22.10-13)

ἔὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Qualora primo rispetto a secondo e terzo rispetto a quarto abbiano lo stesso rapporto, e il primo sia maggiore del terzo, anche il secondo sarà maggiore del quarto, e qualora sia uguale, sarà uguale, e qualora minore, minore.

(in simboli: se  $A:B::C:D$ , allora  $A > C$  implica  $B > D$ ,  $A = C$  implica  $B = D$  e  $A < C$  implica  $B < D$ ), vuoi come molteplicità definita di grandezze esplicitamente menzionata all'inizio dell'enunciato, come in V.20-21 o in V.def.9 (*EE II*, 2.10-12), dove occorre sottintendere «grandezza»:

ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ἢ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

E quando siano tre grandezze in proporzione, la prima rispetto alla terza è detta avere rapporto raddoppiato che rispetto alla seconda.

<sup>201</sup> Ad esempio in *Apr.* B 2, 53b20-25.

<sup>202</sup> Le occorrenze senza articolo sono in V.def.5, 2 (*decimens*), 3 (*sexties*), 4 (*ter*), 13 (*sexties*), 14 (*ter*), 24 (*noviens*); quelle con articolo in V.def.5.7(*bis*).9.10.17.18(*bis*), 3 (*ter*), 4 (*bis*), 14 (*bis*), 16, 18, 20 (*bis*), 21 (*bis*).

In tutti questi casi le occorrenze con articolo costituiscono delle abbreviazioni, cioè delle costanti con riferimento ben definito<sup>203</sup>. Quando un teorema è enunciato direttamente a partire da numerali, come abbiamo visto per V.13, l'articolo è invece sempre assente in prima occorrenza. Particolarmente significativa la def. 5, il cui testo abbiamo letto nella sezione precedente. All'inizio della dimostrazione sono nominate «grandezze», non determinate in molteplicità sebbene siano ovviamente quattro. Di conseguenza, quando sono identificate per la prima volta da ordinali, questi non hanno l'articolo, che assumono regolarmente a partire dalla seconda occorrenza, all'interno di un'espressione come τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια «gli equimultipli del primo e terzo».

Anche nei *Data* compaiono ordinali che denotano grandezze: ma davanti all'ordinale troviamo sempre l'articolo, e le occorrenze sono precedute dalla specificazione delle grandezze in gioco (che siano grandezze in generale ma di molteplicità specificata, parallelogrammi, triangoli o rette), come nell'enunciato di *Data 74 (EOO VI, 142.6-10)*:

<p>ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα λόγον ἔχη δεδομένον, ἥτοι ἐν ἴσαις γωνίαις ἢ ἀνίσοις μέν, δεδομέναις δέ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν, οὕτως ἡ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἡν ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου λόγον ἔχει δεδομένον.</p>	<p>Qualora due parallelogrammi, o in angoli uguali oppure disuguali, ma dati, abbiano rapporto dato, sarà come il lato del primo rispetto al lato del secondo, così l'altro lato del secondo rispetto a una «retta» rispetto alla quale quello restante del primo ha rapporto dato.</p>
--	---

Si tratta quindi sempre di abbreviazioni per oggetti già dati.

L'enunciato con ordinali di V.def.5 determina un ordinamento delle quattro grandezze che sono nello stesso rapporto, ma non specifica quali tra esse siano gli antecedenti e quali i conseguenti nei due rapporti che risultano. Parallelamente, la presenza contemporanea di «maggiore» e «minore» nella definizione la rende simmetrica rispetto allo scambio delle grandezze denominate «prima» e «terza» con quelle denominate «seconda» e «quarta», prese nello stesso ordine (ovviamente non sono ammessi scambi di due sole grandezze). Per questo motivo non è necessario dimostrare che vale la proprietà dell'invertendo (cioè che se  $A:B::C:D$  allora  $B:A::D:C$ . Troviamo a dire il vero un porisma che afferma, senza dimostrarlo, che la proprietà discende immediatamente dalla proposizione V.7 che lo precede, ma il porisma è sicuramente spurio), mentre ad esempio il permutando richiede una dimostrazione (il che è fatto in V.16). Essendo inoltre immateriale quale dei due rapporti sia preso per primo, la relazione «essere nello stesso rapporto» è simmetrica. Ne consegue che la definizione si applica automaticamente alle permutazioni delle quattro grandezze in proporzione che preservino la struttura originaria di coppie ordinate. Ci sono solo due possibilità: invertendo 1234/2143 (coppia ordinata 13 scambiata con coppia 24); simmetria 1234/3412 (coppia 12 scambiata con coppia 34). Scambiare la coppia 14 con la coppia 23, cioè i medi con gli estremi, non dà luogo a una nuova permutazione, com'è d'altronde da attendersi. La proporzione letta «da destra a sinistra» corrisponde alla permutazione 1234/4321 e si ottiene componendo le due precedenti.

Dal punto di vista delle possibilità combinatorie, sussiste quindi una differenza di fondo tra i «modi» stoici di presentazione degli indimostrati e l'uso degli ordinali nel libro V. I modi stoici sono infatti indipendenti dal carattere affermativo o negativo delle proposizioni semplici che costituiscono un argomento, ma l'asimmetria tra i ruoli che hanno i vari asserti non permette ovviamente scambi tra asserti denotati da numerali differenti. Ad esempio, un modo di un terzo indimostrato potrebbe essere «non: sia il primo che il secondo; ma certamente il primo: quindi non il secondo», e chiaramente non c'è simmetria tra i due asserti che lo compongono. Le descrizioni degli indimostrati abbracciano

<sup>203</sup> Ordinali di questo genere sono frequentissimi in Diofanto; si veda Acerbi 2011b, sez. 7.1.1.

invece più permutazioni per mezzo di un solo enunciato (Sesto Empirico, *M VIII.226*; cfr. D.L. VII.80 e sez. 2.2.2):

<p>τρίτος δέ ἐστι λόγος ἀναπόδεικτος ὁ ἐξ ἀποφατικοῦ συμπλοκῆς καὶ ἐνὸς τῶν ἐν τῇ συμπλοκῇ, τὸ ἀντικείμενον τοῦ λοιποῦ τῶν ἐν τῇ συμπλοκῇ ἔχων συμπέρασμα.</p>	<p>Terzo argomento indimostrato è quello «composto» da una negazione di una congiunzione e da uno solo dei «congiunti» nella congiunzione «come premesse», e avente come conclusione il contraddittorio di quello che resta di quelli nella congiunzione.</p>
--	---

## 2.10. SOMME DI OGGETTI MATEMATICI; L'AGGETTIVO ΣΥΝΑΜΦΟΤΕΡΟΣ

Quando due o più o oggetti siano messi a confronto con altri insiemi di oggetti, possono sorgere ambiguità riguardo al fatto che debbano essere sommati o presi singolarmente. In quest'ultimo caso, resta ancora da stabilire se il confronto debba avvenire tra enti che occupano lo stesso «numero d'ordine» o no. Il linguaggio matematico greco ricorre all'aggettivo ἐκάτερος «uno e l'altro» per risolvere possibili ambiguità quando siano coinvolti due termini.

Le 695 occorrenze dell'aggettivo nel *corpus* euclideo (553 nel complesso degli *Elementi*) possono essere divise in due categorie: occorrenze isolate e accoppiate. Leggiamo un esempio della prima tipologia in I.1 (*EE I*, 8.1-3):

ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΒΓ ἔσθαι ἴση. ἔκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. ἔκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. una e l'altra delle ΓΑ, ΓΒ è quindi uguale a ΑΒ.

Scrivere αἱ ἄρα ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ εἰσὶν ἴσαι «ΓΑ, ΓΒ sono quindi uguali a ΑΒ» avrebbe invece dichiarato uguale a ἡ ΑΒ la somma di ἡ ΓΑ, ἡ ΓΒ. Occorrenze accoppiate di ἐκάτερος sono distintive degli enunciati dei criteri di congruenza dei triangoli e delle loro applicazioni, come in I.12 (*EE I*, 20.17-19):

<p>ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὲ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἔκατέρα ἔκατέρα.</p>	<p>In effetti, poiché ΗΘ è uguale a ΘΕ, e ΘΓ comune, due «rette» ΗΘ, ΘΓ sono pertanto <u>rispettivamente</u> uguali a due ΕΘ, ΘΓ.</p>
---	---

Ciò significa che (1) le rette in ciascuna coppia vanno prese singolarmente e (2) il loro ordine va mantenuto, in modo che le rette uguali siano quelle che occupano lo stesso numero d'ordine. Le occorrenze accoppiate si trovano nelle proposizioni seguenti, che raccolgo in una tabella recante nella prima colonna le proposizioni dove siano presenti nell'enunciato (e quindi, di norma, anche in esposizione e conclusione), nella seconda quelle in cui i riferimenti sono citazioni degli enunciati corrispondenti nella prima<sup>204</sup>. La clausola è però omessa di frequente, nel corso delle citazioni di teoremi nel cui enunciato è presente, fatto segnalato in accordo con la codifica seguente. Se vi è una sola occorrenza accoppiata nell'enunciato, l'omissione merita una "o" che segue il numero d'ordine della proposizione. Poiché I.4 e I.26 hanno due occorrenze accoppiate nell'enunciato (cfr. sez. 1.5.4 – reputo la seconda clausola in I.26 come autentica), la codifica è più complessa: o = solo la seconda clausola è omessa ma la frase che la contiene è presente; o/ = la prima è omessa ma non la seconda; oo = entrambe omesse; i = manca la frase che contiene la seconda clausola ma la prima è presente (e

<sup>204</sup> Si vedano anche i dati preliminari raccolti in Federspiel 1999, 440-442.

contiene la clausola); oi = manca la frase che contiene la seconda clausola, la prima è presente ma la sua clausola è omessa; ii = entrambe le frasi mancano; i/o = manca la frase che contiene la prima clausola, la seconda è presente ma la sua clausola è omessa.

I.4	I.5 (bis), 6i, 10i, 16, 24i, 26o (bis), 26i, 33o/, 35i, 47i, III.7oi, 8i, 17oo, 25i, 26oi, 29oi, 30oi, 33oi, 33o/, IV.13oo, VI.6oo, XI.4oi (bis), 4ii, 6oi, 8oi, 20oi, 22oi, 23ii, 24oi, 26i, 35oo, 38i/o, XII.3i, XIII.7o, 7oo, 8o/	
I.7		I.8
I.8	I.9, 11-12, 23, 26, 48o, III.1, 3o, 9o, 28o, 37o, IV.12o, VI.5o, XI.4, 4o, 6o, 8, 10o, 23, 23o, 35, XIII.7o, 17o	
I.24		III.7o, 8o, XI.22o
I.25		XI.23o
I.26	I.34, III.3oo, IV.4oo, 12oo, 13oo, XI.4o, 35, 35o, 38oo	
V.1		V.12
V.3		/
XI.35		I.36
XI.35por		/

La frequente omissione deve ritenersi compensata dalla presenza del numerale δύο «due» e dal fatto che la struttura formulare di citazione (non) istanziata sia immediatamente identificabile e quindi non possano prodursi ambiguità.

Se invece gli oggetti devono essere sommati, viene fatto ricorso di norma a una di tre strutture sintattiche: (1) congiunzione semplice (spesso nella forma correlativa ...τε... καί..., come in II.3 e 10 viste nella sez. 2.7); (2) assenza di qualificativi degli oggetti da sommare, menzionati al plurale (questa pratica è esattamente opposta a quella moderna)<sup>205</sup>; (3) uso dell'aggettivo συναμφότερος «l'uno con l'altro». Troviamo tutte queste possibilità attualizzate nell'enunciato e nell'esposizione di II.7 (EE I, 77.2-10):

ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

εὐθεία γὰρ τις ἢ AB τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημείον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

Qualora una linea retta sia secata come càpita, il «quadrato» su quella totale e quello su uno dei segmenti, i quadrati l'uno con l'altro, sono uguali sia a due volte il rettangolo compreso da quella totale e dal detto segmento che al quadrato sul restante segmento.

In effetti, una certa retta AB sia secata, come càpita, secondo il punto Γ: dico che i quadrati su AB, BΓ sono uguali sia a due volte il rettangolo compreso da AB, BΓ che al quadrato su ΓΑ.

I due quadrati da sommare, che nell'enunciato sono elencati in congiunzione (tipologia 1) e la cui somma è ulteriormente determinata dalla clausola rafforzativa contenente συναμφότερα (3), sono semplicemente posti al plurale nell'esposizione (2): l'assenza di qualificativi comporta che non

<sup>205</sup> In una stretta minoranza di casi la somma è formulata esplicitamente per mezzo delle preposizioni μετά (come in II.5) o σύν (come in II.10).

possano essere presi singolarmente. In quest'ultimo caso, avremmo trovato una clausola contenente ἑκάτερος.

L'aggettivo συναμφότερος «l'uno con l'altro» presenta un problema alquanto peculiare (si veda anche Acerbi 2012a). Il termine è tipico del linguaggio scientifico: nel *corpus* degli scritti di carattere matematico si registrano 1544 occorrenze, di cui 229 in Archimede, 139 nel *corpus* euclideo, 24 nelle *Coniche* di Apollonio, 88 negli scritti di Tolomeo, 250 nella *Collectio* di Pappo, 223 in Diofanto, 233 in Eutocio. Una verifica fatta sui maggiori *corpora* prosastici (storici, oratori, filosofi...) anteriori al terzo secolo della nostra era dà solo 128 occorrenze (incluse 9 di ξυναμφότερος), 66 delle quali in Galeno. Nel *corpus* euclideo se ne registrano 53 negli *Elementi*, 85 nei *Data*, 1 nei *Phaenomena*.

L'alto numero di occorrenze dell'aggettivo è spiegato dalla convenzione stilistica, con ovvie ricadute semantiche, cui ho fatto cenno sopra. Quando un oggetto "composto" debba essere prodotto per somma di due enti della stessa specie, una semplice congiunzione o niente del tutto è già sufficiente allo scopo. Accade però che una qualificazione ulteriore sia necessaria. Ciò avviene in particolare, anche se non esclusivamente, se l'oggetto "composto" risultante entra nella costruzione di enti ancora più complessi o figure in uguaglianze dalla formulazione non perspicua, cioè in strutture sintattiche in cui possano sorgere ambiguità quanto al fatto che i due oggetti composti in origine debbano essere presi come somma oppure separatamente. La qualificazione aggiuntiva prende spesso la forma dell'aggettivo συναμφότερος: l'oggetto composto è di solito menzionato al singolare, come per esempio una retta ἡ ΑΓ ottenuta per addizione di due rette adiacenti ἡ ΑΒ e ἡ ΒΓ, ed è qualificato da un'opportuna forma dell'aggettivo, in posizione predicativa. Queste somme "prese come un tutto" figurano spesso come primo passaggio in catene deduttive in cui uguaglianze sono manipolate per sostituzione di termini, inferenze per transitività, ecc, allo scopo di produrre un certo risultato. Di conseguenza, l'espressione che contiene συναμφότερος è spesso ripetuta su molti passaggi.

Ciò spiega l'alto numero di occorrenze ed il fatto che siano concentrate in piccoli *clusters*: sia negli *Elementi* che nei *Data*, solo 18 proposizioni sono coinvolte in ciascun trattato, includendo le dimostrazioni alternative. Vediamone la distribuzione (le dimostrazioni alternative sono elencate dopo le altre; la prima della serie è in grassetto; il numero di libro è il primo di ogni sottostringa):

II.7	10	V.8	VI.29	VII.5	6	8	9	12	28	IX.15	X.17	18	26	XIII.4	11	17	<b>5</b>
2	2	4	1	8	10	2	2	2	3	1	2	4	1	1	2	3	3

10	11	22	45	46	67	85	86	93	<b>45</b>	46	67I	67II	67III	80	87	93I	93II
3	3	2	4	4	5	4	3	14	1	1	2	14	5	5	4	8	3

La situazione è analoga nel *corpus* archimedeo e nelle *Coniche* di Apollonio (le cui 24 occorrenze si distribuiscono su 5 proposizioni, 15 ricorrendo nella sola I.50), così come nella *Collectio*.

L'aggettivo è registrato a tre uscite<sup>206</sup> dai dizionari (e al plurale nel *LSJ*: συναμφότεροι, αι, α), ma i testi matematici rivelano delle anomalie nell'uso del femminile singolare, come vediamo sull'esempio di *Data* 45 (*EOO* VI, 82.10-84.5). Le occorrenze al singolare si riferiscono indubitatamente ad un sostantivo femminile: la retta ἡ ΒΑΓ composta dalla somma dei due lati ἡ ΒΑ e ἡ ΑΓ. Tale somma è regolarmente identificata nell'enunciato dall'uso del plurale αἱ πλευραὶ<sup>207</sup>,

<sup>206</sup> Userò il linguaggio delle "uscite", conciso ma fuorviante, in quanto ciò che è realmente in questione è semplicemente l'uso di una declinazione tematica analogica in -ος per il femminile di un aggettivo.

<sup>207</sup> Nell'enunciato si fa riferimento ai lati; da qui il maschile della traduzione.

oltre che da *συναμφότεροι* (femminile plurale di aggettivo a tre uscite) rafforzato dal peculiare sintagma predicativo *ὡς μία* «come uno solo», in cui ovviamente il numerale è al singolare<sup>208</sup>:

*αἱ δὲ περὶ τὴν δεδομένην γωνίαν πλευραὶ* I lati intorno all'angolo dato, l'uno con l'altro come *συναμφότεροι ὡς μία* uno solo

Nelle restanti tre occorrenze nella stessa proposizione (una nell'esposizione, le altre due nella dimostrazione) l'aggettivo è invece trattato al singolare come se fosse a due uscite. Si trovano in effetti le seguenti tre espressioni, dove occorre sottintendere *εὐθεῖα* «retta»:

<i>συναμφότερος ἢ ΒΑΓ ὡς μία</i>	ΒΑΓ, l'una con l'altra come una sola
<i>συναμφότερος ἄρα ἢ ΒΑΓ</i>	ΒΑΓ, l'una con l'altra
<i>συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ</i>	di ΒΑΓ, l'una con l'altra

Particolarmente interessante è la prima occorrenza, in quanto l'esposizione ricalca normalmente la formulazione dell'enunciato. Il testo passa invece dal singolare al plurale – il che non è sorprendente, poiché il soggetto logico dell'asserto è ora una singola retta ottenuta per composizione – e da tre a due uscite in *συναμφότερος*, il che è più sorprendente.

Questo stato di cose schizofrenico è generalizzato. Anche se l'enunciato di *Data* 93 offre un plurale femminile a due uscite (*συναμφότεροι αἱ... περιέχουσai*)<sup>209</sup>, il plurale femminile a tre uscite è molto frequente in Archimede, nella *Collectio* e specialmente in Tolomeo (con 22, 15, 55 occorrenze rispettive), e se ne trovano 4 in Euclide (*El.* X.18 e *Data* 45-46). Per contro, il singolare femminile a due uscite ricorre decine di volte anche solo nel *corpus* euclideo, mentre quello a tre uscite è estremamente raro, specialmente se si pone mente al fatto che il campione statistico potenzialmente adatto a rilevare il fenomeno è piuttosto esteso: molte occorrenze qualificano infatti, come nell'esempio appena visto, una singola retta<sup>210</sup>. Il *corpus* matematico offre solo 5 esempi in Archimede<sup>211</sup>, e 6 in autori tardivi: 5 nel commento di Teone all'*Almagesto* di Tolomeo<sup>212</sup> e 1 in un passaggio dell'*Hypotyposis* di Proclo (V.26). Il vaglio di questi dati permette di ridurre ancora il campione: le prime due e l'ultima in Archimede sono dativi singolari in espressioni che ricorrono spesso in quest'autore, ed in tutti gli altri casi troviamo solo dativi plurali. C'è quindi motivo per sospettare interventi di aggiustamento da parte di copisti, anche se il carattere formulare dello stile archimedeo è meno rigido dei prodotti matematici della scuola alessandrina.

È importante sottolineare dove risieda il problema con il fenomeno linguistico appena descritto. Non si tratta semplicemente del fatto che lo stesso aggettivo sia attestato, in testi di autori differenti ed in epoche differenti, a due o tre uscite. Ci sono innumerevoli esempi di queste variazioni<sup>213</sup>, e il fenomeno più generale del cambiamento del numero di uscite di un aggettivo in testi tardivi è ben noto

<sup>208</sup> L'espressione conta 13 occorrenze nel *corpus* euclideo, in *Data* 45 (*bis*), 46, 67 e in *El.* II.8 (*quater*), 10 (*bis*), XIII.11 (*bis*), e qualifica una retta ottenuta per somma di due altre rette. Unica eccezione in V.def.14, dove è in questione la somma di due grandezze.

<sup>209</sup> Le sole altre occorrenze nel *corpus* matematico di plurali a due uscite sono in Pappo, *Coll.* III.61, e Teodosio, *Sph.* II.17, 82.1. Com'è da attendersi, mani tardive nei manoscritti tendono a regolarizzare la declinazione dell'aggettivo; ciò accade per l'ultima occorrenza.

<sup>210</sup> Cioè un sostantivo femminile cui si può fare riferimento solo al singolare – il fatto che il sostantivo sia spesso sottinteso non causa ambiguità, poiché il suo genere può essere ricostruito dall'articolo che accompagna invariabilmente le lettere denotative.

<sup>211</sup> *AOO* I, 418.19, 424.13, II, 188.21, 194.15, 204.6.

<sup>212</sup> *iA*, 549.3, 551.14, 554.1, 556.1, 687.10.

<sup>213</sup> Si veda Kastner 1967, *passim*, che si concentra sull'origine di aggettivi di questo tipo e sul loro uso nei periodi arcaico e classico; non discute esempi che possano essere apparentati alla peculiare pratica stilistica qui descritta.

e piuttosto comune<sup>214</sup>. Il punto è invece che un aggettivo, che è usato di preferenza in un *corpus* molto circoscritto, sia a tre uscite al plurale ma sia sistematicamente trattato, al singolare, come se ne avesse due – e che i due fatti si verificano in contesti matematici identici, in frasi contigue scritte dallo stesso autore. Questo comportamento è unico tra gli aggettivi che figurano in testi matematici greci. Aggettivi composti (ma senza preverbo) come ὀποσοιδηποτοῦν e simili sono regolarmente a tre uscite, mentre un altro composto con συν– molto diffuso come σύμμετρος è a due uscite sia al singolare che al plurale (lo stesso vale per παράλληλος)<sup>215</sup>.

Rivolgersi a scrittori non matematici non aiuta, dal momento che in questi autori il campione di occorrenze di συναμφότερος al femminile è troppo ristretto<sup>216</sup> per essere statisticamente attendibile. La voce συναμφότεροι nel *LSJ* dà come lemma il plurale a tre uscite, ma poi registra l'uso frequente, in matematica, del singolare. Peccato che offra solo esempi maschili o neutri (da *El.* V.8, VII.5, VII.28, e da Pappo, *Coll.* III.52; sono tutti grandezze o numeri).

Si potrebbe ipotizzare che molte delle occorrenze al singolare (cioè quelle in casi indiretti e senza l'articolo se all'accusativo) non siano dei maschili ma dei neutri, anche se qualificano una singola retta. In questa lettura, tali forme di συναμφότερος servirebbero a qualificare la «grandezza» (μέγεθος – neutro) ottenuta come risultato del processo di composizione. L'ipotesi è falsificata da due fatti. Primo, dalla frequente presenza del nominativo non-neutro συναμφότερος in contesti che non possono essere differenziati da quelli in cui un putativo neutro dovrebbe ricorrere. Secondo, dall'esistenza di frasi come, per esempio, quella che troviamo in Pappo, *Coll.* III.64. In essa, le due forme di συναμφότερος (due uscite) hanno esattamente la stessa funzione sintattica delle forme parallele di ἐκάτερος (tre uscite) – il sostantivo sottinteso è sempre εὐθεῖα, come è chiaro dal contesto; l'articolo τό va con l'infinito δύνασθαι:

καὶ τούτου παραδόξου δοκοῦντος εἶναι τοῖς ἀγεωμετρήτοις ἔτι παραδοξότερον φανεῖται τὸ μὴ μόνον συναμφότερον συναμφοτέρῳ, ἀλλὰ καὶ ἐκατέραν τῶν συνισταμένων ἐντὸς ἐκατέρα τῶν ἐκτὸς καὶ ἴσην εἶναι δύνασθαι καὶ μείζονα κατὰ μίαν.

E se questo pare sorprendente a chi non sa di geometria, ancora più sorprendente sembrerà che uno e l'altro dei «lati» costruiti all'interno possa essere singolarmente sia uguale che maggiore a uno e all'altro di quelli all'esterno, e non solo l'uno con l'altro all'uno con l'altro.

Infine, ben poche occorrenze possono essere trattate come un sostantivo neutro<sup>217</sup>, in quanto l'articolo è sistematicamente assente, eccetto pochi casi<sup>218</sup>.

L'aggettivo è scarsamente attestato prima di Euclide ed Archimede, e nei testi rimasti di prosatori non matematici non qualifica mai sostantivi femminili. Può essere che il plurale fosse percepito come la forma di base, forse perché συναμφότερος è ovviamente un composto di συν– e ἀμφοτέρος, quest'ultimo figurando solo al plurale e a tre uscite nei testi matematici ellenistici<sup>219</sup>. Tuttavia, in

<sup>214</sup> Per i papiri si veda ad esempio Gignac 1976, 105-113, e cf. anche Blass-Debrunner-Rehkopf 1976, § 59.

<sup>215</sup> La preposizione σύν è praticamente assente nei testi matematici: solo 5 occorrenze nel *corpus* euclideo, 1 in Apollonio. Archimede, come al solito, fa eccezione con 31 occorrenze, ma sono contenute in una manciata di espressioni formulari ripetute più volte.

<sup>216</sup> Di fatto è quasi vuoto: l'aggettivo è scarsamente attestato prima di Euclide ed Archimede, e nei testi superstiti di autori non tecnici qualifica sostantivi femminili solo in Aristosseno, *Harm.*, 86.19, ed in un passo di Plutarco registrato come frammento di Eforo (fr. 200, vol. 2A, 102.12).

<sup>217</sup> Un tale impiego, che è piuttosto comune nei prosatori – si veda Humbert 1960, 76 – è registrato nel *LSJ* anche per testi matematici, con riferimento ad Archimede, *Sph. cyl.* I.6.

<sup>218</sup> Si veda ad esempio *Data* 46, *EOO* VI, 84.18 (ma l'articolo dovrebbe essere espunto), e Diofanto, *De polygonis numeris*, *DOO* I, 466.17. Si notino anche le occorrenze di singolare a due uscite preceduto da un articolo femminile in Teone, *iA*, 336.24, e Simplicio, *in Ph.*, 270.31 e 281.26.

<sup>219</sup> La sola eccezione ad Archimede, *Aequil.* II.10, *AOO* II, 204.10, ma si tratta sicuramente di un errore di copia seguito da una scelta editoriale errata, come conferma l'apparato di Heiberg: solo un manoscritto ha ἀμφοτέρῃ, gli altri ἀμφοτέρας.

questi testi συναμφότερος finì per essere impiegato al singolare, come termine tecnico dal significato ben preciso, in contesti molto ristretti, generando una struttura sintattica piuttosto lammiccata. Ciò potrebbe giustificare la mossa di considerare le forme al singolare come una nuova formazione lessicale, la cui morfologia fosse in qualche misura indipendente da quella del plurale. Due uscite invece di tre mettono in linea συναμφότερος con la morfologia degli aggettivi composti, che “normalmente” ne hanno due (si veda Kühner-Blass 1890-92, § 147 c), i quali, tuttavia, elencano tre pagine di eccezioni. Sfortunatamente, συναμφότερος non sembra adattarsi esattamente a nessuna delle rubriche della lista. Si ricordi, d’altro canto, che aggettivi non analogistici a due uscite sono ben attestati (cfr. Schwyzer 1950, II, 32)). Rimane però spazio per interferenze con una concezione maggiorante analogistica della declinazione dell’aggettivo, e ciò potrebbe spiegare la mancata di occorrenze di femminile singolare a tre uscite – anche se scommetterei che quelle attestate, in particolare nei testi archimedei, siano dovute ad errori di copia.

Resta il fatto che passaggi da tre a due uscite in contesti identici e frasi immediatamente contigue, come nel caso di *Data* 45 visto sopra, mi sembrano sfidare ogni tentativo di spiegazione razionale, a meno di non essere disposti a prendere in considerazione l’ipotesi che la riduzione del numero di uscite dell’aggettivo nel passaggio dal plurale al singolare sia stata una mossa deliberata, allo scopo di sottolineare la natura strettamente tecnica, e quindi sintatticamente forzata, delle costruzioni linguistiche dove appare συναμφότερος al singolare.

L’aggettivo ἀμφότερος «entrambi» si registra solo al plurale e funziona da marcatore stilistico del libro X, dove troviamo 33 delle 37 occorrenze nel *corpus* euclideo. Eccone le occorrenze: VII.26 (*bis*), 27 (citaz. della precedente), X.26, 42-43, 45, 71, 75, 78, 79 (*ter*), 80 (*bis*), 81, 82 (*bis*), 83 (*bis*), 84-91, 94-95, 97-102, XI.2. Nel libro X l’aggettivo figura in brevi frasi, spiegazioni posposte o coassunzioni, del tipo «sono infatti entrambi esprimibili / mediali» (solo domini nelle spiegazioni posposte), e «sono entrambe esprimibili» (solo rette nelle coassunzioni, le uniche presenti da X.84 in poi).

## 2.11. I CONNETTORI APA «QUINDI», ΩΣΤΕ «COSÌ CHE», ΔΗ «PERTANTO», ΟΥΝ «DUNQUE»

La scuola stoica e i grammatici fecero rientrare alcuni degli oggetti studiati in questa sezione nelle loro classificazioni dei σύνδεσμοι «connettori»: Dionisio Trace (95.2-100.1) fornisce elenchi di συλλογιστικοὶ e παραπληρωματικοὶ σύνδεσμοι «connettori argomentali» e «completivi»; tra i primi figurano ἄρα e, con una confusione tra particelle coassuntive e conclusive, ἀλλά e ἀλλαμήν; tra i secondi δὴ. Apollonio Discolo (*Conj.*, 252.1-2) riconosce in ἄρα la particella sillogistica di riferimento, facendo anche rimarcare la diversità della terminologia da lui usata in relazione a quella stoica (συλλογιστικοὶ σύνδεσμοι vs. ἐπιφορικοί «conclusivi» ivi, 251.27-29). La funzione di marcatore di iato argomentativo assunta da δὴ è sottolineata da Apollonio tramite il paragone una παραγραφή «segno marginale» (ivi, 251.19-26, e cfr. *Synt.*, 379.8). Si noti infine che οὐκοῦν «e dunque», frequente in Aristotele e in alcune opere euclidee di ottica, è definito da Apollonio ἐπιλογιστικός «consuntivo» a *Conj.*, 257.18.

Il connettore ἄρα «quindi», invariabilmente in seconda posizione, segnala che l'asserto in cui è inserito è la conclusione di un'inferenza; la logica stoica conosce solo questo connettore con la stessa funzione. È di gran lunga il più usato – circa 4000 occorrenze nel complesso degli *Elementi* – ed ha questo ruolo principale, anche se, come abbiamo visto nella sez. 2.4, accompagna non di rado il conseguente di un paracondizionale. Si aggiunga come ultimo esempio a quelli lì addotti un caso in cui ἄρα introduce un asserto che consegue direttamente da una costruzione, come in I.44 (*EE I*, 59.7-14):

ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπίπτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἦχθω ἢ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεία. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΑΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΑΒ, ΒΖ.

Siano prolungate e si incontrino secondo K, e per il punto K parallela a una o all'altra delle EA, ZΘ sia condotta «una retta» ΚΛ, e siano prolungate ΘΑ, ΗΒ fino ai punti Λ, Μ. ΘΑΚΖ è quindi un parallelogrammo, una sua diagonale ΘΚ, intorno a ΘΚ parallelogrammi ΑΗ, ΜΕ, e i cosiddetti completamenti ΑΒ, ΒΖ.

La frequenza di ὥστε «così che» è molto disuguale negli *Elementi*: ben poche occorrenze nei libri III e VII-VIII, 134 sulle 290 totali nel solo libro X, per il quale funziona ovviamente da marcatore linguistico, e frequenze paragonabili a questa, se rapportate al numero di segni, nei libri II, IV e IX. Oltretutto, nel libro X la costruzione delle irrazionali per somma (X.36-72) conta 74 occorrenze, a fronte delle 14 che si registrano nella costruzione delle irrazionali per differenza (X.73-110). Potremmo trovarci di fronte a più mani nella redazione (o nella revisione) dei vari libri, anche se possono pesare i diversi tipi di inferenze in gioco. Vediamo nel prospetto seguente la distribuzione nel testo principale degli *Elementi* (se ne aggiungano 14 nelle dimostrazioni alternative e 1 nella recensione **b**):

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	tot.
# proposiz.	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
% # segni	7,6	3,3	6,9	3,4	4,9	7,6	5,7	5	5,1	26,1	9	8,3	6,9	100
ὥστε	12	12	4	14	8	24	6	4	22	134	16	16	18	290

Nel resto del *corpus* euclideo la frequenza è solo approssimativamente proporzionale all'estensione e alla densità deduttiva del trattato (31 occorrenze nei *Data*). Se ne trovano pochi nei *Phaenomena* (21 in totale), molti meno nella recensione **A** dell'*Ottica* che nella **B** (16 occorrenze contro 39).

Il connettore ha molteplici usi. È impiegato in espressioni consecutive subinferenziali ὥστε «così da» + infinito, dove non ha valore di connettore ma semplicemente specifica una proprietà rilevante dell'oggetto geometrico considerato, come nell'enunciato di II.11 (*EE* I, 86.21-23):

<p>τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.</p>	<p>Secare una retta data <u>così da essere</u> il rettangolo compreso da quella totale e da uno o dall'altro dei segmenti uguale al quadrato sul restante segmento.</p>
--	---

oppure in formulazioni come le seguenti, che rendono questa tipologia particolarmente frequente nel libro X – qui X.48 e 63 (*EE* III, 77.14-18 e 111.5-6):

<p>ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, [...]</p> <p>ἔστω μείζων ἢ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, [...]</p>	<p>Siano fissati due numeri ΑΓ, ΓΒ, <u>così da avere</u> quello composto da essi ΑΒ rispetto a ΒΓ rapporto che un numero quadrato rispetto a un numero quadrato, e <u>da non avere</u> rispetto a ΓΑ rapporto che un numero quadrato rispetto a un numero quadrato, [...]</p> <p>Sia una maggiore ΑΒ che risulti divisa secondo Γ, <u>così da essere</u> ΑΓ maggiore di ΓΒ, [...]</p>
---	---

Nella prima citazione ὥστε è a fattore, e le due consecutive che regge sono coordinate da μέν... δέ....

Il ruolo principale di ὥστε è però inferenziale, e identico a quello di ἄρα come particella introduttiva di una conclusione. Leggiamo un esempio estremamente semplice in IX.17 (*EE* II, 209.10-11):

<p>[...] μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ' ὁ Α τὸν Γ ἐμέτρει· ὥστε ὁ Α καὶ τὸν Δ μετρεῖ.</p>	<p>[...] anche Γ misura quindi Δ. Ma Α misurava Γ: così che Α misura anche Δ.</p>
---	---

Un'analisi dettagliata mostra però che ὥστε trova impiego specifico in contesti “marginali”, e sufficientemente ben definiti, dal punto di vista deduttivo. In particolare ciò avviene quando la conclusione di un'inferenza sia preceduta da una frase che già contiene ἄρα (due ἄρα consecutivi sono fenomeno non molto frequente), come in IX.4 (*EE* III, 191.13-15):

<p>τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί.</p>	<p>Tra Α, Β cadono <u>quindi</u> due numeri medi proporzionali: <u>così che</u> anche tra Δ, Γ cadranno due numeri medi proporzionali.</p>
---	--

Qui come spesso altrove, la coassunzione preterita sarebbe costituita da un riferimento diretto ad un teorema precedente, nel nostro caso VIII.8. Le conclusioni introdotte da ὥστε si caratterizzano a volte per un grado di evidenza o addirittura di banalità tale da rendere inutile l'introduzione di una coassunzione, come in X.81 (*EE* III, 137.17-18):

λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ΕΛ restante è quindi uguale a quello su ΑΒ: così che ἢ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. ΑΒ può ΕΛ.

Più in generale, la seconda di due conclusioni immediatamente susseguentesi è spesso segnalata da ὥστε. All'interno di questa fattispecie, alquanto frequenti sono i casi in cui la prima delle due conclusioni sia il conseguente di un paracondizionale (sez. 2.4), che questo sia non ibrido oppure ibrido, come nelle due occorrenze consecutive in X.60 (EE III, 105.12-17):

καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἢ ΔΚ τῆ ΚΜ σύμμετρός ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἢ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστίν. E poiché quello su ΑΓ è commensurabile con quello su ΓΒ, anche ΔΘ è commensurabile con ΚΛ: così che anche ΔΚ è commensurabile con ΚΜ. E poiché quelli su ΑΓ, ΓΒ sono maggiori di due volte il «rettangolo compreso» da ΑΓ, ΓΒ, anche ΔΛ è quindi maggiore di ΜΖ: così che anche ΔΜ è maggiore di ΜΗ.

In un solo caso ὥστε introduce la conclusione generale dell'intero teorema; si tratta di X.66 (EE III, 115.15-16):

ὥστε ἢ τῆ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῆ τάξει ἢ αὐτῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Così che una «retta» commensurabile in lunghezza con una binomiale è anch'essa binomiale e la stessa in ordine: il che si doveva dimostrare.

Uno dei rarissimi esempi di due ὥστε adiacenti è in X.55 (EE III, 95.2-5):

αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ. ὥστε καὶ ἐκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστίν. ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ sono quindi esprimibili commensurabili in potenza soltanto: così che una e l'altra delle ΑΘ, ΗΚ è mediale. Così che anche uno e l'altro dei ΣΝ, ΝΠ è mediale.

A volte ὥστε introduce una conclusione di portata generale che segue immediatamente una dimostrazione analogica o potenziale, come in I.36 (EE I, 50.10-12):

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστίν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστίν ἴσον. Proprio per gli stessi «motivi» anche ΕΖΗΘ è uguale allo stesso ΕΒΓΘ: così che anche il parallelogrammo ΑΒΓΔ è uguale a ΕΖΗΘ.

Come sottospecie delle tipologie principali, merita dare rilievo a conclusioni in ὥστε precedute da spiegazioni posposte, come in IV.10 per la tipologia inferenziale (EE I, 166.8-11):

καὶ ἢ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῆ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ ἢ ὑπὸ ΒΔΑ τῆ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστίν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἢ ΑΔ τῆ ΑΒ ἐστίν ἴση· ὥστε καὶ ἢ ὑπὸ ΔΒΑ τῆ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστίν ἴση. Anche ΒΔΑ è quindi uguale a ΒΓΔ. Ma ΒΔΑ è uguale a ΓΒΔ, poiché anche un lato ΑΔ è uguale a ΑΒ: così che anche ΔΒΑ è uguale a ΒΓΔ.

oppure ai casi in cui la seconda di due conclusioni comporti un cambio di operatore relazionale, ad esempio quando da un'uguaglianza si deduca immediatamente una disuguaglianza, come in II.13 (*EE* I, 90.23-91.2):

τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῶ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῶ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Quelli su ΓΒ, ΒΑ sono quindi uguali sia a quello su ΑΓ che a due volte quello da ΓΒ, ΒΔ: così che il quadrato su ΑΓ da solo è minore dei quadrati su ΓΒ, ΒΑ per due volte il rettangolo compreso da ΓΒ, ΒΔ.

Insomma, sembra che ὥστε sia impiegato di preferenza quando la deduzione non sia esplicitamente di tipo canonico, a due premesse e conclusione immediatamente susseguentesi, pur non caratterizzando questo tipo di inferenze "entimematiche". L'esempio di X.109 fa capire però che la differenza tra struttura entimematica oppure pienamente inferenziale di un argomento la cui conclusione è introdotta da ὥστε può essere legata semplicemente a scelte stilistiche (*EE* III, 196.21-197.7):

εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῆ, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει τῆ ΖΗ, ἀποτομή δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομῆ πρώτη ἐστίν.

Se dunque ΘΖ può più di ΖΚ per il «quadrato» su «una retta» commensurabile con se stessa, e la «retta» che si adatta ΖΚ è commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata ΖΗ, ΚΘ è apotome seconda. E ΖΗ è esprimibile: così che la «retta» che può ΛΘ, cioè ΕΓ, è apotome prima di una mediale.

εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσυσυμμέτρου, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει τῆ ΖΗ, ἀποτομῆ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Se invece ΘΖ può più di ΖΚ per il «quadrato» su «una retta» incommensurabile, e la «retta» che si adatta ΖΚ è commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata ΖΗ, ΚΘ è apotome quinta: così che la «retta» che può ΕΓ è una «retta» che con un esprimibile fa il totale mediale.

Le due micro-inferenze sono strettamente parallele. La prima ha una struttura deduttiva completa, la seconda è in forma entimematica. Sembra però evidente che la coassunzione, d'altronde del tutto inutile visto che la stessa informazione era stata fornita nella riga precedente, sia stata aggiunta alla prima *après coup*.

Nei prospetti che seguono è indicata la distribuzione degli asserti introdotti da ὥστε in funzione delle tipologie inferenziali appena elencate. Un asterisco \* accompagna occorrenze che ricadono sotto due tipologie; il numero della proposizione è in questo caso ripetuto. Le occorrenze nel libro X sono separate dalle altre ed esposte nel secondo prospetto:

consecutivo (36)	I.7, 23, 44, II.11 ( <i>quater</i> ), III.4, 35, IV.10-12, V.13, 17-18, VI.10, 15, 19 ( <i>bis</i> ), 20, 23, 32 ( <i>bis</i> ), VIII.5, IX.19, 21-22, XI.23, 27, XII.17, XIII.13, 15-17, 18 ( <i>bis</i> )
inferenziale (20)	I.4, 41*, IV.10*, V.8, 11, VI.20por ( <i>bis</i> ), 23, VIII.25, IX.1, 15 <sup>220</sup> , 17, 34, XI.30*, 33, XII.3 ( <i>bis</i> ), 10, 17, 17/18
evita doppio ἄρα (76)	I.3-4, 8, 48, II.4 ( <i>bis</i> ), 9 ( <i>bis</i> ), 10 ( <i>bis</i> ), 12*, 13*, III.8, 12*, IV.8-10, 14-15, V.6, 12, 14, VI.3 ( <i>bis</i> ), 7 ( <i>bis</i> ), 20 ( <i>ter</i> ), 21, 22/23, 27*, VII.4, 9, VII.36-37, VIII.15, 20, IX.4,

<sup>220</sup> La stessa frase è ripetuta identica due volte per un errore di stampa (*EE* II, 206.15-17).

	10-12, 13 ( <i>bis</i> ), 17-19, 29-30, XI.4-5, 8 ( <i>bis</i> ), 11, 18, 23/24*, 28-29, 36, XII.2, 2/3, 4/5, 10, 12 ( <i>bis</i> ), 15, 17, XIII.3-4, 8, 10 ( <i>bis</i> ), 15 ( <i>bis</i> ), 16, 17 ( <i>bis</i> )
evita doppia concl. (8)	I.4*, VII.4, XI.23, 29, XII.2*, 10*, XIII.3, 7
segue analogica (9)	I.35-36, IV.7, 12, VI.31-32, VII.10, IX.24, 26
segue potenziale (3)	IV.5 ( <i>bis</i> ), VI.7
segue posposta (9)	I.4*, 41*, IV.10*, IX.33, XI.28*, 30*, XII.2* ( <i>bis</i> ), 3*, 10*
cambio di op. relaz. (5)	II.12*, 13*, III.12*, VI.27*, 23/24*

Libro X:

consecutivo (49)	12, 13/14, 28/29I ( <i>bis</i> ), 28/29II, 29 ( <i>ter</i> ), 30 ( <i>bis</i> ), 31 ( <i>bis</i> ), 32 ( <i>ter</i> ), 33, 34-35, 42, 43 ( <i>bis</i> ), 44 ( <i>bis</i> ), 45 ( <i>bis</i> ), 46 ( <i>bis</i> ), 47 ( <i>bis</i> ), 48-53, 53/54, 54, 55 ( <i>bis</i> ), 58-60, 62-64, 84, 88-89, 113
inferenziale (15)	4, 9/10 ( <i>ter</i> ), 17, 23/24, 34, 53, 66, 72, 72/73, 93, 109, 110, 112
evita doppio ἄρα (56)	17*, 17 ( <i>bis</i> ), 18 ( <i>ter</i> ), 21, 24, 33 ( <i>bis</i> ), 35 ( <i>bis</i> ), 36, 38 ( <i>bis</i> ), 39 ( <i>bis</i> ), 40, 41/42, 44 ( <i>bis</i> ), 47-49, 51-52, 54 ( <i>bis</i> ), 55 ( <i>bis</i> ), 59/60, 60 ( <i>bis</i> ), 61 ( <i>bis</i> ), 62 ( <i>bis</i> ), 63-65, 71 ( <i>sexties</i> ), 78, 81, 91, 93 ( <i>bis</i> ), 99, 112 ( <i>bis</i> ), 113 ( <i>bis</i> )
evita doppia concl. (9)	4, 28/29II, 41, 55 ( <i>bis</i> ), 60-62, 109
segue analogica (0)	/
segue potenziale (4)	56, 69-70, 106
segue posposta (0)	/
cambio di op. relaz. (1)	17*

Forme più deboli di transizione realizzano i connettori οὖν «dunque» e δῆ «pertanto». Il primo (238 occorrenze nel testo principale degli *Elementi*) ha un carattere eminentemente incipitario e strutturante: è posto di norma all'inizio dell'intera dimostrazione, o di dimostrazioni parziali, oppure di nuove catene deduttive. La sua collocazione largamente maggioritaria è ad accompagnare il connettore del paracondizionale di apertura di una dimostrazione, in espressioni quali ἐπεὶ οὖν «poiché dunque». Il carattere incipitario è mantenuto in espressioni quali εἰ οὖν «se dunque», che introducono divisioni in casi, e in una manciata di espressioni analoghe a questa che vedremo nei prospetti seguenti. Si rintracciano anche (pochi) esempi di asserti semplici o di assunzioni in modo suppositivo introdotte da οὖν: in questo caso ha funzione di marcatore del carattere incipitario dell'unità linguistica.

È bene chiarire cosa si debba intendere per “incipitario”. Come abbiamo visto a più riprese, in effetti, una proposizione matematica “alla greca” ammette una certa elasticità nella determinazione dei confini, *normalmente* piuttosto netti, tra le proprie parti specifiche. L'inizio della catena deduttiva principale, che chiamiamo “dimostrazione”, è però identificabile con sicurezza caso per caso, anche quando la separazione sia meno netta. Incipitario è dunque sicuramente ciò che segue una assunzione in modo imperativo, quali i passaggi che completano la costruzione della configurazione geometrica richiesta, anche se la costruzione contiene qualche passaggio inferenziale come in IV.11, oppure se ha una struttura complessa come in VI.27-28. Stesso criterio va applicato alle inferenze che seguono la costruzione “fittizia” o la presentazione di una dicotomia legata a dimostrazioni per assurdo. In casi come IX.1 o X.25-26 il paracondizionale iniziale va considerato incipitario per logica, anche se a rigore è preceduto da passaggi che sono una conseguenza immediata della costruzione. Leggiamo IX.1 (*EE* II, 188.9-13):

ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω. ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ.

In effetti, A moltiplicando se stesso faccia Δ. Δ è quindi quadrato. Poiché dunque A moltiplicando se stesso risulta fare Δ, e moltiplicando B risulta fare Γ, è quindi come A rispetto a B, così Δ rispetto a Γ.

Per converso, sono certamente non incipitarie le frasi precedute da espressioni omologhe all'interno della stessa parte specifica della proposizione. In particolare, non sono incipitari i paracondizionali che ne seguono altri nel corso della dimostrazione. Questa tipologia è l'unica veramente cospicua che fornisce occorrenze di οὖν in corso di dimostrazione.

La quasi totalità di tali paracondizionali non incipitari ricade però in almeno una di tre sottocategorie, che si caratterizzano tutte per una interruzione più o meno marcata del flusso deduttivo. Asserti introdotti da οὖν servono dunque in generale a introdurre sequenze deduttive indipendenti, ed eventualmente a tirare le fila di un complesso di argomenti e costruzioni fornito in precedenza: il connettore non ha quindi valore inferenziale ma metadeduttivo.

Le tre sottocategorie sono:

1) paracondizionale in fine di dimostrazione, con valore ricapitolativo di più diramazioni dimostrative precedenti ed eventualmente contenente una citazione istanziata, come in X.99 (EE III, 179.18-25):

ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῆ ἑκκειμένη ῥητῆ τῆ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Poiché dunque sono due rette disuguali ΓΜ, ΜΖ, e uguale alla quarta parte del «quadrato» su ΖΜ risulta applicato a ΓΜ «un rettangolo» facendo difetto di una forma quadrata e la divide in «segmenti» commensurabili, ΓΜ può quindi più di ΜΖ per il «quadrato» su «una retta» commensurabile con se stessa. E né una né l'altra delle ΓΜ, ΜΖ è commensurabile in lunghezza con l'esprimibile fissata ΓΔ: ΓΖ è quindi apotome terza.

2) paracondizionale che riavvia il flusso deduttivo dopo lo iato introdotto da una dimostrazione analogica o potenziale, come in VIII.11 (EE II, 167.16-20) – il passaggio è seguito immediatamente da un'altra dimostrazione analogica:

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Α, Ε πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε.

Proprio per gli stessi «motivi» anche Δ moltiplicando se stesso risulta fare Β. Poiché dunque Γ moltiplicando uno e l'altro dei Α, Ε risulta fare uno e l'altro degli Α, Ε, è quindi come Γ rispetto a Δ, così Α rispetto a Ε.

3) paracondizionale che sospende momentaneamente il corso deduttivo per introdurre una citazione istanziata particolarmente esplicita che funge da micro-ricapitolazione locale, come in XI.23 (EE IV, 35.14-17) – citazione di I.25; il passaggio è seguito immediatamente da una dimostrazione potenziale:

ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυοὶ ταῖς ΟΞ, ΕΠ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων

Poiché dunque due «rette» ΑΒ, ΒΓ sono uguali a due ΟΞ, ΕΠ, e ΑΓ come base è maggiore di ΟΠ come base, un

ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνίας τῆς ὑπὸ *angolo ABΓ* è quindi maggiore di un angolo OΞΠ. OΞΠ μείζων ἐστίν.

A queste si aggiunga la tipologia in cui μὲν οὖν introduce un asserto semplice, in forma di coassunzione come in V.10 o di conclusione come in XIII.18 e IX.14 (*EE II*, 205.10-13):

οἱ B, Γ, Δ ἄρα ἕνα τῶν E, Z μετρήσουσιν. τὸν B, Γ, Δ misureranno quindi uno degli E, Z. Dunque, μὲν οὖν E οὐ μετρήσουσιν· ὁ γὰρ E πρῶτος ἐστι non misureranno E: E è infatti primo e lo stesso di καὶ οὐδεὶν τῶν B, Γ, Δ ὁ αὐτός. τὸν Z ἄρα nessuno dei B, Γ, Δ. Misurano quindi Z, che è minore μετροῦσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ A. di A.

Come nel caso di ὥστε, la particella οὖν funziona da netto marcatore stilistico del libro X, dove troviamo quasi metà delle occorrenze. La distribuzione libro per libro nel testo principale degli *Elementi* è fornita nel prospetto seguente (si aggiungano 23 occorrenze nelle dimostrazioni alternative e 9 nella recensione **b**):

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	tot.
# proposiz.	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
% # segni	7,6	3,3	6,9	3,4	4,9	7,6	5,7	5	5,1	26,1	9	8,3	6,9	100
οὖν	15	5	22	7	10	19	14	5	13	104	11	7	6	238

Il resto del *corpus* euclideo è avaro: nei *Data* 28 occorrenze su 96 proposizioni (10 nelle dimostrazioni alternative); la particella funge da marcatore stilistico anche per *Ottica A*, che registra 48 occorrenze a confronto delle 24 della redazione **B**.

Nei prospetti che seguono è indicata la distribuzione delle unità linguistiche introdotte da οὖν in funzione delle tipologie elencate in precedenza. Le occorrenze nel libro X sono separate dalle altre ed esposte nel secondo prospetto. In entrambi i casi, occorrenze marcate con \* si trovano all'interno di paracondizionali ricapitolativi, con + seguono una dimostrazione analogica o potenziale, con § sono in forma di citazione istanziata di teorema o definizione:

paracondizionale incipitario (74)	I.2, 5-7, 14, 16, 19-20, 23-26, II.6-8, 14, III.2, 4, 6, 7-9, 10-12, 13, 14, 18-20, 22-23, 25, 33-34, IV.1-2, 7, 11, V.7-8, 25, VI.9, 11-12, 14-15, 19, 22, 26-28, 31, 33, VII.1, 2, 3, 19, 21, 28, 30, VIII.25, IX.1, 6-7, 32, XI.12, 23/24, XII.6, 11, 14, XIII.4, 6, 13/14
assunzione (6)	VI.28, VII.3, VIII.21, XI.34, XII.2, 17
asserto semplice (4)	V.10 ( <i>bis</i> ), IX.14, XIII.18
εἰ μὲν οὖν (14)	I.13, II.14, III.35, IV.1, VI.28, VII.2, 4, 32-33, IX.19, XI.11, 20, 22, 34
ὅτι μὲν οὖν (6)	VIII.6, IX.9 ( <i>bis</i> ), 32-34
λέγω οὖν (1)	VIII.18
ἦτοι οὖν... ἦ (1)	IX.19
ἐὰν οὖν (1)	XI.23/24
parac. non inc. (27)	I.5*, 43+, III.33§, 35§, IV.10§, 10, V.3*§, 6, 22+§, 23§-24§, VI.1*, 4*-5+, 20, 23*§, VII.27§ ( <i>bis</i> ), VIII.11+, IX.8, XI.15+§, 23§, 35+, XII.12§-13, XIII.11+, 11§ ( <i>bis</i> )

**Libro X:**

paracondizionale incipitario (46)	2, 3 ( <i>bis</i> ), 4 ( <i>bis</i> ), 5-6, 9, 12, 15 ( <i>bis</i> ), 16 ( <i>bis</i> ), 21/22, 23, 25-26, 28/29II, 29, 43, 46, 59/60, 64, 83, 86, 87 ( <i>bis</i> ), 88-89, 90 ( <i>bis</i> ), 91, 92 ( <i>bis</i> ), 93 ( <i>bis</i> ), 94 ( <i>ter</i> ), 96, 102-103,
-----------------------------------	---

		108, 111-113
assunzione (27)	def.3, 1, 4, 48, 50-54, 87-88, 90, 92 (bis), 93 (bis), 94 (ter), 95 (bis), 96 (bis), 99-102	
asserto semplice (0)		/
εἰ μὲν οὖν (6)		3, 66, 103, 109, 112-113
λέγω οὖν (1)		28/29II
δεικτέον οὖν (1)		18
ἦτοι οὖν... ἦ (1)		71
εἴτε οὖν... εἴτε (3)		14, 67, 104
parac. non inc. (19)	38, 63 (bis), 64, 91-92*, 94*, 96-97*§, 98, 98*§, 99*§-101*§, 105, 111 (bis), 111/112, 112*§	

Oltre che a scelte stilistiche, la frequenza più alta di οὖν nel libro X è sicuramente legata alla struttura maggiormente articolata di certe proposizioni, che alternano costruzioni parziali e sequenze deduttive in maniera notevolmente libera e al di là dei vincoli derivanti dall'enunciato, che già impone in queste proposizioni una dimostrazione a più stadi. La "dimostrazione" procede quindi per arresti e riprese successivi, naturalmente marcati da οὖν. Ciò spiega l'alto numero di assunzioni in modo suppositivo (= costruzioni) introdotte dalla particella, fatto confinato nel resto degli *Elementi* a pochissime proposizioni, tre delle quali (VI.28, XII.2, 17) dalla struttura argomentativa altrettanto complessa. Il fenomeno è particolarmente accentuato nel segmento finale del libro X: 50 occorrenze su 104 si distribuiscono nelle 23 proposizioni del segmento X.91-113, con un picco di 24 occorrenze nella sola esade X.91-96 (mentre nell'esade corrispondente delle irrazionali ottenute per somma, X.54-59, si rintracciano solo due occorrenze). Tra l'altro, ciò mostra che i nudi dati delle distribuzioni per libro di certe particelle o sintagmi sono scarsamente significativi se non sono modulati sulla base di almeno tre parametri: il numero di proposizioni per libro, il numero di segni e il grado di articolazione delle proposizioni. Analisi più fini potranno eventualmente introdurre correlazioni con la parte specifica della proposizione dove si situa l'occorrenza, con il tipo logico-grammaticale della frase ospite, con la sua funzione logica locale e con la tipologia delle frasi immediatamente circostanti. Come al solito, nei *Data* la variabilità si riduce drasticamente, e quasi tutti i paracondizionali non incipitari hanno valore ricapitolativo oppure contengono citazioni non istanziate molto esplicite:

parac. inc. (13)		1, 3-4, 40-41, 56, 66, 68, 71, 74, 80, 91-92
εἰ μὲν οὖν (1)		69
parac. non inc. (14)		32§, 35*§-38*§, 43*§, 47§-48, 62*§, 75*§, 77*+, 84§-85§, 89*§

Il connettore δὴ «pertanto», «ora» (703 occorrenze nel testo principale degli *Elementi*), dal valore asseverativo e in caso blandamente risultativo, caratterizza più una constatazione che una deduzione. Spesso si trova semplicemente a segnalare il passaggio a una nuova fase della dimostrazione, specialmente nella ripresa di una tesi da dimostrare. Ciò può avvenire tramite una determinazione ulteriore introdotta da λέγω δὴ «dico ora» (96 occorrenze) o dalla variante δεικτέον δὴ «va ora dimostrato» distintiva del libro X (11 occorrenze, in X.49, 53, 55-56, 57 (bis), 58, 60-63), o da πάλιν δὴ «ora, di nuovo» (9 occorrenze) e ἀλλὰ δὴ «ma ora» (43 occorrenze). La particella ha sfumatura unicamente rafforzativa in certe espressioni formulari come διὰ τὰ αὐτὰ δὴ «proprio per gli stessi «motivi»» (131 occorrenze) o ὁμοίως δὴ «del tutto similmente» (110 occorrenze), che introducono rispettivamente dimostrazioni analogiche o potenziali. In questi sintagmi, essa costituisce un accorgimento stilistico di grado zero, in quanto il greco prevede obbligatoriamente la presenza di una particella in caso di stacchi argomentativi di tal genere. Senso blandamente risultativo ha nella

clausola canonica δει δὴ «si deve pertanto» (71 occorrenze), che introduce la determinazione nei problemi in cui questa è presente. Il senso risultativo più forte si registra nelle constatazioni che certi oggetti geometrici soddisfano le condizioni di applicabilità di un teorema precedente: preponderanti tra queste sono i riferimenti istanzati ai criteri di uguaglianza dei triangoli dimostrati nel libro I. I riferimenti sono di norma introdotti da un numerale seguito dalla particella: δύο δὴ (59 occorrenze, cui vanno aggiunte 1 citazione di VI.6 in XII.1 e 1 di XI.10 in XI.24). Dello stesso genere le 3 citazioni istanziate di I.14 in I.45, 47 e VI.32, introdotte da πρὸς δὴ τιμι εὐθεία.

Come già osservato nella sez. 2.4, il riconoscimento implicito dell'applicabilità dei criteri si riduce in realtà alla presa d'atto di un fatto geometrico del tutto ovvio. Analoga connotazione hanno le 8 occorrenze, in I.41, II.1-3, XI.30, 31 (*bis*), 32, di espressioni introdotte da ἴσον δὴ ἔστι «è pertanto uguale» che seguono immediatamente una costruzione e traggono una conclusione evidente sulla base della configurazione così generata (ad esse va aggiunta la frase con portata esistenziale con cui inizia la dimostrazione di XI.1). Leggiamo II.2 (*EE I*, 69.9-11) – la parallela ἡ ΓΖ divide semplicemente il quadrato τὸ ΑΕ in due domini τὰ ΑΖ, ΓΕ:

ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.  
ἴσον δὴ ἔστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ.

In effetti, sia descritto su ΑΒ un quadrato ΑΔΕΒ, e sia condotta per Γ parallela a una o all'altra delle ΑΔ, ΒΕ «una retta» ΓΖ.  
ΑΕ è pertanto uguale a ΑΖ, ΓΕ.

Carattere di riconoscimento dell'ovvio ha anche una piccola costellazione di asserti (18 occorrenze, in VII.3, 18, 19, 22, X.42, 109, XI.3, 5, 7, 13-14, XII.2, 5, 10 (*bis*), 17 (*ter*)); leggiamo con il loro contesto quelli in VII.22, XI.13, XII.5 (*EE II*, 129.21-130.3, e IV, 19.4-9 e 93.6-9):

ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Α, Β πεποίηκεν.  
ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθείαν.  
καὶ διηρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμῖς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Poiché Γ misura Α secondo le unità in Δ, Γ moltiplicando Δ risulta quindi fare Α. Proprio per gli stessi «motivi» anche Γ moltiplicando Ε risulta fare Β. Un numero Γ moltiplicando due numeri Δ, Ε risulta pertanto fare Α, Β.  
Dallo stesso punto Α si erigano dalla stessa parte due rette ΑΒ, ΑΓ ad «angoli» retti con il piano sottostante, e sia condotto oltre il piano per ΒΑ, ΑΓ: farà pertanto nel piano sottostante una sezione rettilinea per Α.  
E sia divisa la piramide ΔΕΖΘ sia in due piramidi uguali tra loro e simili a quella totale che in due prismi uguali: i due prismi sono pertanto maggiori che la metà della piramide totale.

I riferimenti degli asserti marcati da δὴ negli ultimi due teoremi sono rispettivamente a XI.3 e XII.3. Carattere ancora più marcato di constatazione immediata hanno espressioni come ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος (10 occorrenze, in V.1, 3, 15, VII.5-6, 8-10, 15, 20), il cui contesto leggiamo sull'esempio di VII.20 (*EE II*, 127.8-11):

διηρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ

Sia diviso ΓΔ nelle parti ΓΗ, ΗΔ di Α, e ΕΖ nelle parti ΕΘ, ΘΖ di Β: la molteplicità di ΓΗ, ΗΔ sarà pertanto

ἴσον τὸ πλήθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῶ πλήθει τῶν ΕΘ, uguale alla molteplicità di ΕΘ, ΘΖ.  
ΘΖ.

7 occorrenze sparse dello stesso genere includono constatazioni del raggiungimento di conclusioni assurde come quelle che contraddicono i teoremi I.16 (in I.26-27) o I.17 (in III.16, VI.7, XI.14) o le due asserzioni “archimedee” in V.8 – la seconda delle quali sicuramente spuria (*EE* II, 13.10-11):

τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον La minore di ΑΕ, ΕΒ, se «ne» siano presi multipli,  
ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μείζον. sarà pertanto prima o poi maggiore di Δ.

A questa tipologia vanno infine aggregate anche le 13 occorrenze (III.33, IV.5, VII.3-4, 36, IX.18 (*bis*), 20, X.4, 103, 108-110) in disgiunzioni esaustive ed esclusive, di cui leggiamo gli esempi in III.33, VII.4 e X.109 (*EE* I, 140.18-19, II, 110.15, III, 196.17-20):

ἡ δὴ πρὸς τῷ Γ [γωνία] ἦτοι ὀξεῖά ἐστιν ἢ ὀρθή L'[angolo] su Γ è pertanto o acuto oppure retto oppure  
ἢ ἀμβλεῖα. ottuso.  
ὁ δὴ ΒΓ τὸν Α ἦτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. Pertanto ΒΓ o misura oppure non misura Α.  
ἦτοι δὴ ἢ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ Pertanto o ΘΖ può più di ΖΚ per il «quadrato» su una  
συμμέτρου ἐαυτῆ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. «retta» commensurabile con se stessa oppure per quello  
su una incommensurabile.

Al primo corno della dicotomia in X.110 risponde nella dimostrazione uno *hapax* come εἰ μὲν δὴ.

A queste vanno aggiunte 22 occorrenze della clausola introduttiva di porismi ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι «da ciò è pertanto manifesto che» (porismi a I.15, II.4, III.1, 16, 31, IV.15, V.7, 19, VI.8, 19, VII.2, VIII.2, X.3-4, 6, 23, XI.33, 35, XII.7-8, XIII.16-17); 14 di richiami all'evidenza φανερόν δὴ (ἐστι) ὅτι «è pertanto manifesto che» all'interno di dimostrazioni o lemmi (VIII.9, 15, IX.3, 13, 15, X.13/14, 28/29II, 42, 44, 54-55, 57-59; 1 variante δηλον δὴ in X.44); 3 di espressioni διὰ δὴ τοῦτο «proprio per questo» in IX.30, X.42 e XI.38; 1 di κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ «proprio secondo gli stessi «motivi» in X.44; 6 a introdurre la lunga formula tipica del procedimento di esaustione (XII.2, 10 (*bis*), 11-12, 16; si tratta della frase a *incipit* participiale letta nella sez. 1.5.2). Più interessanti sono le 44 occorrenze in frasi in modo suppositivo, cioè col verbo all'imperativo. Ne troviamo in III.20, 35, IV.11, 13-14, V.9-10, 17, VI.9, 28, VII.3-4, 19, 28, 34, 36, VIII.2, 4, 16, 18-19, IX.19, 36, X.3-4, 16, 18, 38, 49-50, 53-54, 91, XI.23, 31 (*bis*), 34 (*ter*), XII.10, 12, XIII.11, 17-18, e identificano prescrizioni, come quelle in ἐπιτετάχθω(σαν) «sia prescritto» in VI.9 e VIII.2, o costruzioni di norma non incipitarie come in XI.23 (*EE* IV, 36.3-7):

ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΑΜΝ Sia ora eretta dal punto Ξ ad «angoli» retti con il piano  
κύκλου ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἢ ΞΡ, καὶ ᾧ μείζον del cerchio ΑΜΝ «una retta» ΞΡ, e ciò per cui il  
ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς quadrato su ΑΒ è maggiore di quello su ΑΞ, uguale a  
ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ quello sia il «quadrato» su ΞΡ, e siano congiunte ΡΑ,  
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ. ΡΜ, ΡΝ.

Correlative di una costruzione sono certe clausole introdotte da ὅσάκις «quante volte» (7 occorrenze, in VII.21, 24, VIII.8, 20 (*bis*), 21 (*bis*)); leggiamo VIII.8 (*EE* II, 162.3-4):

ὅσάκις δὴ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ Ora, quante volte Η misura Ε, tante volte anche uno e

ἐκάτερος τῶν Θ, Κ ἐκάτερον τῶν Μ, Ν μετρεῖτω· Ἄλλο dei Θ, Κ misuri uno e ἄλλο dei Μ, Ν:

Quest'ultimo giro di frase, che ricorre in tutto 26 volte, ammette varianti, ad esempio con καί che sostituisce δή. Si notino anche le 4 occorrenze di verifica di V.def.5 in VI.1, 33, XI.25, XII.13, introdotte da un genitivo assoluto canonico come quello in XI.25 (EE IV, 42.1-3) – altri 4 genitivi assoluti con δή, questa volta in esecuzione di costruzioni, compaiono in I.4, 8, VII.4, 31:

τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, [...] Essendo pertanto quattro grandezze, due basi ΑΖ, ΖΘ, e due solidi ΑΥ, ΥΘ, [...]

Degni di nota i 4 condizionali in ἐὰν δὴ in XII.16-17, XIII.13, 15. Le ultime due occorrenze descrivono la generazione di una sfera tramite rotazione di un semicerchio, in accordo con XI.def.14 (ἐὰν sostituisce οὐκ ὅταν); le prime due sono caratterizzate da forme personali (si veda la sez. 1.5.2) e descrivono una costruzione in maniera particolarmente sintetica, come in XII.16 (EE IV, 126.12-16):

ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἄρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ. Qualora pertanto nel cerchio ΑΒΓΔ adattiamo senza soluzione di continuità «rette» uguali alla retta ΛΔ, risulterà inscritto nel cerchio ΑΒΓΔ un poligono, sia equilatero che parilatero, che non tocca il cerchio minore ΕΖΗΘ.

Le occorrenze libro per libro rivelano che la frequenza di δὴ è un marcatore stilistico negativo per il libro X, mentre lo è in positivo per VII-VIII, XI e specialmente per il libro IV, che abbonda di dimostrazioni analogiche o potenziali, oltre ad essere composto interamente di problemi:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	tot
# proposiz.	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
% # segni	7,6	3,3	6,9	3,4	4,9	7,6	5,7	5	5,1	26,1	9	8,3	6,9	100
δὴ	57	11	53	61	27	43	53	45	41	125	88	51	48	703



## CONCLUSIONE

### PERCHÉ UNA LOGICA «PROPOSIZIONALE» NON QUANTIFICATA?

**L**A domanda è oziosa, e serve solo per introdurre alcune elucubrazioni finali che si discostano dalla condotta metodologicamente assennata che ho cercato di perseguire nel corso di tutto il libro. La risposta è semplice: perché non c'è niente su cui quantificare. Il fatto è che le figure non sono insiemi di punti, se non nel senso che sono insiemi *discreti e finiti* di punti: una retta è univocamente determinata da una coppia di punti, un  $n$ -gono dai suoi  $n$  vertici. Gli oggetti primari della ricerca geometrica sono in realtà le linee (e in una configurazione data compaiono necessariamente un numero finito di linee), e quasi sempre i punti menzionati nelle dimostrazioni sono dati come intersezioni o come estremi di queste. Punti, rette e figure sono però correlati tra loro molto meno che nella visione moderna degli “stessi” oggetti: si pensi solo al fatto che i luoghi geometrici *non* sono insiemi di punti. Abbiamo anche visto che la configurazione geometrica è in senso forte rappresentata da un grafo che convoglia solo le informazioni topologicamente rilevanti (quali il numero di intersezioni), e dove gli oggetti fondamentali sono le linee componenti.

Quello della matematica greca è insomma un universo discreto: non è quindi necessario quantificare su oggetti geometrici nel corso della dimostrazione. D'altra parte, abbiamo visto Aristotele, che pure elabora la prima teoria logica in cui la quantificazione gioca un ruolo essenziale, proporre una teoria della generalità matematica che mette in campo oggetti arbitrari e che riflette la pratica a lui coeva, come la troviamo ad esempio dispiegata in tutta la sua raffinatezza nel V libro degli *Elementi*. Tutto ciò “spiega” perché non ci sia nessuna necessità di introdurre una logica di tipo predicativo, e dunque perché la matematica greca abbia soltanto bisogno di un tipo apparentabile a quella proposizionale.

Ovviamente, ciò accade una volta che sia tagliata fuori la componente incontrollabile (ma non euristica!) costituita dalle costruzioni ausiliarie. Esse sono però ribelli a qualsiasi tipo di formalizzazione, e non a caso gli autori antichi, *in primis* Aristotele, tennero rigidamente separata la parte specificamente costruttiva da quella dimostrativa, ritenendo che solo quest'ultima costituisse il cuore argomentativo della dimostrazione. Eliminate le costruzioni ausiliarie, però, il resto è costituito da una serie di regole d'inferenza rigidamente regolamentate, la cui ristrettezza e semplicità rende il tutto un sistema *decidibile*, come mostrò Tarski (1951, 1969) offrendo una formalizzazione della geometria elementare che fa a meno di ricorrere alla teoria degli insiemi esattamente perché in essa le linee e in generale tutte le figure sono univocamente determinate da insiemi discreti di punti (uno dei due nuclei della dimostrazione di Tarski consiste appunto in una procedura che permette di eliminare i quantificatori dalle formule della teoria, che *prima facie* è una logica del primo ordine).

Non deve dunque sorprendere che alcuni pensatori antichi abbiano sfiorato ciò che oggi viene denominato il “problema del carattere (non) ampliativo della conoscenza deduttiva”, di cui la geometria restava l'esempio principe (Hempel 1945). In *Metaph.* Θ 9, 1051a21-33, Aristotele osserva senza ambiguità che una dimostrazione è completa e diventa manifesta (e quindi inutile) esattamente quando tutte le linee rilevanti siano state tracciate. La deduzione non porta dunque nessuna informazione ulteriore a quelle già contenute nella configurazione geometrica completata dalle linee ausiliarie. Certo, la sua posizione è resa ancora più cogente dalla prospettiva che gli è propria di considerare le deduzioni matematiche come formalizzabili all'interno della sillogistica, il cui preteso carattere non ampliativo sembra leggibile nella definizione di sillogismo perfetto (Hintikka 1977, cui fa gioco disconnettere la costruzione dalla dimostrazione in vista della propria rivisitazione del concetto di analiticità), trova applicazione pratica nei gradi di libertà concessi dalla possibilità di una scelta opportuna delle premesse (*APr.* A 30, 46a22-27), ed è legato all'introduzione della «necessità

del dire» in *APo.* A 6, 75a18-27 (Fait 2004). In *de An.* Γ 7 e *Mem.* 449b30-450a7 questa idea si riverbera, e ne costituisce l'esemplificazione più calzante, nella concezione stessa del processo di pensiero. D'altra parte, una definizione di «dimostrazione» da attribuire agli Stoici è sottoposta da parte di Sesto Empirico a vari attacchi intesi negarne l'esistenza (*PH* II.134-184, *M* VIII.301-462), due dei quali, quello per «ridondanza» e quello basato sul carattere di «relativo» di una dimostrazione, finiscono per porre la conclusione sullo stesso piano logico o epistemico delle premesse. Resta dunque il dubbio che tutta la macchina logica che mi sono sforzato di studiare in queste pagine sia soltanto un'immane quinta di cartapesta eretta a mascherare da argomentazione razionale la sola, irriducibile, forza motrice della ricerca geometrica: l'intuizione del matematico.

## BIBLIOGRAFIA

- ACERBI F. 2003, Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's *Elements*, with Special Emphasis on Prop. 8, *Archive for History of Exact Sciences* 57, 175-242.
- ACERBI F. 2008a, In What Proof Would a Geometer Use the ποδιαία?, *Classical Quarterly* 58, 120-126.
- ACERBI F. 2008b, Conjunction and Disjunction in Euclid's *Elements*, *Histoire, Épistémologie, Langage* 30, 21-47.
- ACERBI F. 2008c, Euclid's *Pseudaria*, *Archive for History of Exact Sciences* 62, 511-551.
- ACERBI F. 2009a, The Meaning of πλασματικόν in Diophantus' *Arithmetica*, *Archive for History of Exact Sciences* 63, 5-31.
- ACERBI F. 2009b, Transitivity Cannot Explain Perfect Syllogisms, *Rhizai* 6, 23-42.
- ACERBI F. 2010, Homeomeric Lines in Greek Mathematics, *Science in Context* 23, 1-37.
- ACERBI F. 2011a, The Language of the "Givens": its Forms and its Use as a Deductive Tool in Greek Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences* 65, 119-153.
- ACERBI F. 2011b, *Diofanto, De polygonis numeris*. Introduzione, testo critico, traduzione italiana e commento di F.A. *Mathematica Graeca Antiqua* 1. Pisa-Roma, Fabrizio Serra Editore.
- ACERBI F. 2011c, Perché una dimostrazione geometrica greca è generale, in G. Micheli, F. Franco Repellini (ed.), *La scienza antica e la sua tradizione*. Milano, Cisalpino, 25-80.
- ACERBI F. 2012a, The Number of Endings of the Adjective συναμφοτερος, *Glotta*, in stampa
- ACERBI F. 2012b, I codici stilistici della matematica greca: dimostrazioni, procedure, algoritmi, *Quaderni Urbinati di Cultura Classica*, in stampa.
- AUJAC G. 1986, Le rapport di' isou (Euclide V, définition 17): Définition, utilisation, transmission, *Historia Mathematica* 13, 370-386,
- BARNES J. 1990, Logical Form and Logical Matter, in A. Alberti (ed.), *Logica, mente e persona*. Accademia toscana di Scienze e Lettere «La Colombaria». «Studi» CX. Firenze, Leo S. Olschki, 7-119.
- BARNES J. 1993, "A third sort of syllogism": Galen and the logic of relations, in R.W. Sharples (ed.), *Modern thinkers and ancient thinkers*. London, UCL Press, 172-194.
- BARNES J. 2005, What is a Disjunction?, in D. Frede, B. Inwood (ed.), *Language and Learning: Philosophy of Language in the Hellenistic Age*. Cambridge, Cambridge University Press, 274-298.
- BARNES J. 2007, *Truth, etc.* Oxford, Clarendon Press.
- BERKELEY, G. 1734, *Principles of Human Knowledge*. London.
- BETH E.W. 1953/54, Kants Einteilung der Urteile in analytische und synthetische, *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie* 46, 253-264.
- BETH E.W. 1956/57, Über Lockes „allgemeines Dreieck", *Kant-Studien* 48, 361-380.
- BLASS F., DEBRUNNER A. 1976, *Grammatik des neutestamentlichen Griechisch*. Bearbeitet von F. Rehkopf. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht.
- BOBZIEN S. 1997, The Stoics on Hypotheses and Hypothetical Arguments, *Phronesis* 42, 299-312.
- BOBZIEN S. 1999, The Stoics, in K. Algra, J. Barnes, J. Mansfeld, M. Schofield (ed.), *The Cambridge History of Hellenistic Philosophy*, parte II, *Logic and Language*. Cambridge, Cambridge University Press, 92-157.
- BOBZIEN S. 2004, Peripatetic Hypothetical Syllogistic in Galen – Propositional logic off the rails?, *Rhizai. Journal for Ancient Philosophy and Science* 2, 57-102.
- BRUNSWIG J. 1967 (ed.), *Aristote, Topiques. Tome I: Livres I-IV*. Paris, Les Belles Lettres.
- BUSARD H.L.L. 1967-1972, The Translation of the *Elements* of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?), *Janus* 54, 1-140; *Janus* 59, 125-187.
- BUSARD H.L.L. 1983, *The First Latin Translation of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath*. Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies.

- BUSARD H.L.L. 1984, *The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona*. Leiden, E.J. Brill.
- BUSARD H.L.L. 1987, *The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements made directly from the Greek*, Boethius, Band 15, Stuttgart, Franz Steiner Verlag.
- BUSARD H.L.L., Folkerts M. 1992, *Robert of Chester's (?) redaction of Euclid's Elements the so-called Adelard II Version*. 2 vol. Boston/Basel/Berlin, Birkhäuser.
- BUSARD H.L.L. 2001, *Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard III Version*. Boethius, Band 45, 2 vol. Stuttgart, Franz Steiner Verlag.
- BUSARD H.L.L. 2005, *Campanus of Novara and Euclid's Elements*. Boethius, Band 51, 2 vol. Stuttgart, Franz Steiner Verlag.
- CASTAGNOLI L. 2004, Il condizionale crisippeo e le sue interpretazioni moderne, *Elenchos* 25, 353-395.
- CASTON V. 1999, Something and Nothing: The Stoics on Concepts and Universals, *Oxford Studies in Ancient Philosophy* 17, 145-213.
- CAVINI W. 1985, *La negazione di frase nella logica greca*, in M.C. Donnini Macciò, M.S. Funghi, D. Manetti (ed.), *Studi su papiri greci di logica e di medicina*. Firenze, Leo S. Olschki, 7-126.
- CLAGETT M. 1953, The Medieval Latin Translations from the Arabic of the Elements of Euclid, with Special Emphasis on the Versions of Adelard of Bath, *Isis* 44, 16-42.
- CRIVELLI P. 1994, Indefinite Propositions and Anaphora in Stoic Logic, *Phronesis* 39, 187-206.
- CURTZE M. 1899 (ed.), *Anarithi in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata*. Leipzig, B.G. Teubner.
- DE MORGAN A. 1966, *On the Syllogism, and Other Logical Writings*. Edited, with an Introduction by P. Heath. London, Routledge & Kegan Paul.
- DE YOUNG G. 1981, *The Arithmetic Books of Euclid's Elements in the Arabic Tradition: an Edition, Translation, and Commentary*. Cambridge (Mass.), Harvard University PhD Dissertation (non pubblicata).
- DECORPS-FOULQUIER M. 2000, *Recherches sur les Coniques d'Apollonios de Pergé et leurs commentateurs grecs*. Paris, Klincksieck.
- DENNISTON J.D. 1950, *The Greek Particles*. 2<sup>nd</sup> Edition revised by K.J. Dover. Oxford, Clarendon Press.
- DI LASCIO E.V. 2002, *L'ἐκθεσις di Aristotele tra Metafisica e Logica*. Tesi Università di Bologna (non pubblicata).
- DJEBBAR A. 1996, Quelques Commentaires sur les Versions arabes des *Eléments* d'Euclide et sur leur Transmission à l'Occident Musulman, in M. Folkerts (ed.), *Mathematische Probleme im Mittelalter. Der lateinische und arabische Sprachbereich*. Wiesbaden, Otto Harrassowitz, 91-114.
- EINARSON B. 1936, On Certain Mathematical Terms in Aristotle's Logic, *The American Journal of Philology* 57, 33-54; 151-172.
- ENGROFF J.W. 1980, *The Arabic Tradition of Euclid's Elements, Book V*. Cambridge (Mass.), Harvard University PhD Dissertation (non pubblicata).
- FAIT P. 2004, Aristotle on a Puzzle about Logical Consequence: Necessity of Being vs. Necessity of Saying, *Topoi* 23, 101-112.
- FEDERSPIEL M. 1992, Sur la locution  $\epsilon\phi' \omicron\upsilon/ \epsilon\phi' \hat{\omega}$  servant a désigner des êtres géométriques par des lettres, in J.-Y. Guillaumin (ed.), *Mathématiques dans l'Antiquité*. Centre Jean-Palmerne, Mémoires 11. Saint-Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, 9-25.
- FEDERSPIEL M. 1995, Sur l'opposition « défini/indéfini » dans la langue des mathématiques grecques, *Les Études Classiques* 63, 249-293.
- FEDERSPIEL M. 1999, Notes linguistiques et critiques sur le Livre II des *Coniques* d'Apollonius de Pergè (Première partie), *Revue des Études Grecques* 112, 409-443.

- FEDERSPIEL M. 2000, Notes linguistiques et critiques sur le Livre II des *Coniques* d'Apollonius de Pergè (Deuxième partie), *Revue des Études Grecques* 113, 359-391.
- FEDERSPIEL M. 2002, Notes linguistiques et critiques sur le Livre III des *Coniques* d'Apollonius de Pergè (Première partie), *Revue des Études Grecques* 115, 110-148.
- FEDERSPIEL M. 2005, Sur l'expression linguistique du rayon dans les mathématiques grecques, *Les Études Classiques* 73, 97-108.
- FEDERSPIEL M. 2006a, Sur la formation de quelques expressions de la théorie euclidienne des proportions, *Revue des études anciennes* 108, 471-481.
- FEDERSPIEL M. 2006b, Sur le sens et l'emploi de la locution δι' ἰσου dans les mathématiques grecques, *Mélanges Germaine Ajujac, PALLAS* 72, 171-185.
- FEDERSPIEL M. 2008, Le problèmes des livres grecs des *Coniques* d'Apollonius de Perge. Des propositions mathématiques en quête d'auteur, *Les Études Classiques* 76, 321-360.
- FEDERSPIEL M. 2010, Sur l'élocution de l'ecthèse dans la géométrie grecque classique, *L'Antiquité Classique* 79, 95-116.
- FREDE M. 1974, *Die stoische Logik*. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen Philologisch-Historische Klasse, Dritte Folge, Nr. 88. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.
- GIGNAC F.TH. 1976, *A Grammar of the Greek Papyri of the Roman and Byzantine Periods. Vol. I: Phonology*. Milano, Cisalpino-Goliardica.
- GOLDSCHMIDT V. 1972, Ὑπάρχειν et ὑφίστασθαι dans la philosophie stoïcienne, *Revue des Études Grecques* 85, 331-344.
- GOMEZ-LOBO A. 1977, Aristotle's Hypotheses and Euclid's Postulates, *Review of Metaphysics* 30, 430-439.
- HADOT P. 1980, Sur divers sens du mot *pragma* dans la tradition philosophique grecque, in P. Aubenque (ed.), *Concepts et catégories dans la pensée antique*. Paris, Vrin, 309-319.
- HANKINSON R.J. 1994, Galen and the Logic of Relations, in L. Schrenk (ed.), *Aristotle in Late Antiquity*. Studies in Philosophy and the History of Philosophy 27. Washington, The Catholic University of America Press, 57-75.
- HEATH T.L. 1949, *Mathematics in Aristotle*. Oxford, Clarendon Press.
- HEIBERG J.L. 1884, Die arabische Tradition der Elemente Euklids, *Zeitschrift für Mathematik und Physik (hist.-lit. Abth.)* 29, 1-22.
- HEMPEL C.G. 1945, Geometry and Empirical Science, *The American Mathematical Monthly* 52, 7-17.
- HINTIKKA J., 1973, *Logic, Language-Games and Information*. Oxford, Oxford University Press.
- HINTIKKA J. 1977, Aristotle's Incontinent Logician, *Ajatus* 77, 48-65.
- HINTIKKA J., REMES U. 1974, *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its general Significance*. Dordrecht/Boston, Reidel.
- HOGENDIJK, J.P. 1986, Arabic Traces of Lost Works of Apollonius, *Archive for History of Exact Sciences* 35, 187-253.
- HULTSCH F. 1876-78 (ed.), *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*. 3 vol. Berlin, Weidmann.
- HUMBERT J. 1960, *Syntaxe grecque*. Paris, Klincksieck.
- HUSSERL E. 1922, *Logische Untersuchungen*. 2 Bde. III ed. Halle, M. Niemeyer.
- HUSSEY E. 1991, Aristotle on Mathematical Objects, in I. Mueller (ed.) ΠΙΕΠΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ, Edmonton, Academic Printing & Publishing (= *Apeiron* 24,4), 105-133.
- KAHN CH.H. 1973, *The Verb 'be' in Ancient Greek*. Indianapolis/Cambridge, Hackett Publishing Company.
- KANT I. 1787<sup>2</sup>, *Kritik der reinen Vernunft*. Riga, Hartknoch.
- KASTNER W. 1967, *Die griechischen Adjektive zweier Endungen auf -ΟΣ*. Heidelberg, Carl Winter – Universitätsverlag.

- KLAMROTH M. 1881, Die arabische Tradition der Elemente Euklid's, *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft* 35, 270-326, 788.
- KNORR W.R. 1983, Construction as Existence Proof in Ancient Geometry, *Ancient Philosophy* 3, 125-148.
- KNORR W.R. 1996, The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's Text e its Alternatives, *Centaurus* 38, 208-276.
- KÜHNER R., BLASS F. 1890-92, *Ausführliche Grammatik der griechischen Sprache*, erster Teil: *Elementar- und Formenlehre*. 2 vol. 3. Auflage. Hannover, Verlag Hahnsche Buchhandlung.
- KÜHNER R., GERTH B. 1898-1904, *Ausführliche Grammatik der griechischen Sprache*, zweiter Teil: *Satzlehre*. 2 vol. 3. Auflage. Hannover und Leipzig, Verlag Hahnsche Buchhandlung.
- LEAR J. 1980, *Aristotle and Logical Theory*. Cambridge, Cambridge University Press.
- LEE H.D.P. 1935, Geometrical Method and Aristotle's Account of First Principles, *Classical Quarterly* 29, 113-124.
- LOCKE J. 1700, *An Essay Concerning Human Understanding*. London.
- LÖWENHEIM L. 1946, On making Indirect Proofs Direct, *Scripta Mathematica* 12, 125-139.
- ŁUKASIEWICZ J. 1957, *Aristotle's Syllogistic*. Oxford, Oxford University Press.
- MALINK M. 2008,  $\tau\Omega\text{I}$  vs  $\tau\Omega\text{N}$  in *Prior Analytics* 1.1-22, *Classical Quarterly* 58, 519-536.
- MATES B. 1953, *Stoic Logic*. Berkeley/Los Angeles, University of California Press.
- MENN S. 1999, The Stoic Theory of Categories, *Oxford Studies in Ancient Philosophy* 17, 215-247.
- MIGNUCCI M. 1988, The Stoic Notion of Relatives, in J. Barnes, M. Mignucci (eds.), *Matter and Metaphysics. Fourth Symposium Hellenisticum*. Napoli, Bibliopolis, 131-221.
- MOORHOUSE A.C. 1959, *Studies in the Greek Negatives*. Cardiff, University of Wales Press.
- MUELLER I. 1974, Greek Mathematics and Greek Logic, in J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and its Modern Interpretations*. Dordrecht/Boston, D. Reidel, 35-70.
- MUELLER I. 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's «Elements»*. Cambridge (Mass.) and London, MIT Press.
- MUELLER I. 1991, On the Notion of a Mathematical Starting Point in Plato, Aristotle, and Euclid, in A.C. Bowen (ed.), *Science and Philosophy in Classical Greece*. New York and London, Garland Publishing, 59-97.
- MURDOCH J. 1966, Euclides Graeco-Latinus: A Hitherto Unknown Medieval Latin Translation of the elements Made Directly from the Greek, *Harvard Studies in Classical Philology* 71, 249-302.
- NIKULIN D. 2008, Imagination and Mathematics in Proclus, *Ancient Philosophy* 28, 153-172.
- PASQUALI G. 1998, *Filologia e storia* (1920). Firenze, Felice Le Monnier.
- PATZIG G. 1968, *Aristotle's Theory of the Syllogism*. A Logico-Philosophical Study of Book A of the *Prior Analytics*. Dordrecht, D. Reidel.
- PEIRCE, Ch.S. 1931-1935, *Collected Papers*, vols. I-VI, Edited by Ch. Hartshorne and P. Weiss. Cambridge (Mass.), Harvard University Press.
- RASHED R. 1984 (ed.), *Diophante, Les arithmétiques. Tome III: Livre IV; Tome IV: Livres V-VI-VII*. Paris, Les Belles Lettres.
- ROBERTSON D.G. 2004, Chrysippus on Mathematical Objects, *Ancient Philosophy* 24, 169-191.
- ROMMEVAUX S., DJEBBAR A., VITRAC B. 2001, Remarques sur l'Histoire du Texte des *Éléments* d'Euclide, *Archive for History of Exact Sciences* 55, 221-295.
- RUIJGH C.J. 1979, A review of: Ch. H. Kahn, *The Verb 'be' in Ancient Greek*, *Lingua* 48, 43-83.
- RUIJGH C.J. 1984, Sur la valeur fondamentale de  $\epsilon\lambda\upsilon\alpha\iota$ : une réplique, *Mnemosyne* 37, 264-270.
- RUSSELL B. 1908, Mathematical Logic as Based on the Theory of Types, *American Journal of Mathematics* 30, 222-262 (ristampato in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1967, 150-182).
- SCHWYZER E., *Griechische Grammatik*. Erster Band: *Allgemeiner Teil. Lautlehre. Wortbildung. Flexion*. Zweite, unveränderte Auflage (1953). Zweiter Band: *Syntax und syntaktische Stilistik*. Vervollständigt und

- herausgegeben von A. Debrunner (1950). Dritter Band: *Register*, von D.J. Georgacas (1953). München, Beck'sche Verlagsbuchhandlung.
- SIMSON R. 1811, *The Elements of Euclid*... Philadelphia, Published by C. & A. Conrad & Co.
- SMITH R. 1982, What is Aristotelian Ecthesis?, *History and Philosophy of Logic* 3, 113-127.
- STRIKER G. 1979, Aristoteles über Syllogismen »aufgrund einer Hypothese«, *Hermes* 107, 33-50.
- TARSKI A. 1951, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. 2<sup>nd</sup> Edition. Berkeley and Los Angeles, University of California Press.
- TARSKI A. 1969, What is Elementary Geometry?, in L. Henkin, P. Suppes, A Tarski (eds.), *The Axiomatic Method*. Amsterdam/Mew York/ London, North Holland 1959, 16-29 (ristampato in J. Hintikka (ed.), *The Philosophy of Mathematics*. Oxford, Oxford University Press, 164-175).
- TUMMERS P.M.J.E. 1994 (ed.), *Anaritius' Commentary on Euclid. The Latin Translation I-IV*. Artistarium Supplementa IX. Nijmegen, Ingenium Publishers.
- VITRAC B. 1990-2001 (ed.), *Euclide, Les Éléments. Vol. 1. Introduction générale. Livres I à IV* (1990); *Vol. 2. Livres V à IX* (1994); *Vol. 3. Livre X* (1998); *Vol. 4. Livres XI à XIII* (2001). Paris, Presses Universitaires de France.
- WHITESIDE D.T. 1967-81 (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. 8 vol. Cambridge, Cambridge University Press.
- ZEUTHEN H.G. 1896, Die geometrische Construction als "Existenzbeweis" in der antiken Geometrie, *Mathematische Annalen* 47, 222-228.



# INDICI



## INDICE DEI NOMI

Acerbi Fabio,  
Adelardo di Bath,  
Alessandro di Afrodisia,  
Ammonio,  
Apollonio di Perga,  
Apollonio Discolo,  
Apuleio,  
Arcesilao,  
Archimede,  
Aristotele,  
Aujac Germaine,  
Aulo Gellio,  
Autolico,  
  
Barnes Jonathan,  
Berkeley George,  
Beth Evert Willem,  
Blass Friedrich,  
Bobzien Susanne,  
Boezio,  
Brunschwig Jacques,  
Busard Hubertus Lambertus Ludovicus,  
  
Campano da Novara,  
Carmandro,  
Castagnoli Luca,  
Caston Victor,  
Cavini Walter,  
Cicerone,  
Clagett Marshall,  
Clavio Cristoph,  
Cleomede,  
Crini,  
Crivelli Paolo,  
Crisippo,  
Curtze Maximilian,  
  
De Morgan Augustus,  
De Young Gregg,  
Debrunner Albert,  
Decorps-Foulquier Micheline,  
Denniston John Dewar,  
Di Lascio Ermelinda Valentina,  
Diocle,  
  
Diodoro Crono,  
Diofanto,  
Diogene Laerzio,  
Dionisio Trace,  
Djebbar Ahmed,  
  
Einarson Benedict,  
Engroff John William,  
Epitteto,  
Ermanno di Carinzia,  
Erone,  
Erykinos,  
Euclide,  
Eudemo,  
Eutocio,  
  
Fait Paolo,  
Federspiel Michel,  
Filopono Giovanni,  
Frede Michael,  
  
Galeno,  
Gemino,  
Gerardo da Cremona,  
Gerth Bernhard,  
Gignac Francis Thomas,  
Goldschmidt Victor,  
Gomez-Lobo Alfonso,  
  
Hadot Pierre,  
al-Ḥajjāj,  
Hankinson Robert James,  
Heath Thomas Little,  
Hintikka Jaakko,  
Heiberg Johan Ludvig,  
Hempel Carl Gustav,  
Hintikka Jaakko,  
Hogendijk Jan Pieter,  
Hultsch Friedrich,  
Humbert Jean,  
Husserl Edmund,  
Hussey Edward,  
  
Kahn Charles H.,

Kant Immanuel,  
Kastner Wolfgang,  
Klamroth Martin,  
Knorr Wilbur Richard,  
Kühner Raphael,

Ishāq ibn Hunayn,

Lear Jonathan,  
Lee Henry Desmond Pritchard,  
Leonardo Pisano,  
Locke John,  
Löwenheim Leopold,  
Łukasiewicz Jan,

Malink Marko,  
Mates Benson,  
Menelao,  
Menn Stephen,  
Mignucci Mario,  
Moorhouse Alfred Charles,  
Mueller Ian,  
Murdoch John,

an-Nayrīzī,  
Nicomaco,  
Nikulin Dimitri,

Pappo,  
Pasquali Giorgio,  
Patzig Günther,  
Peirce Charles Sanders,  
Platone,  
Plutarco,  
Posidonio,  
Proclo,  
Protagora,

Rashed Roshdi,  
Robertson David G.,  
Rommevaux Sabine,  
Ruijgh Cornelis Jord,  
Russell Bertrand,

Schwyzer Eduard,  
Serenio,

Sesto Empirico,  
Simplicio,  
Simson Robert,  
Smith Robin,  
Striker Gisela,

Tarski Alfred,  
Temistio,  
Teodosio,  
Teofrasto,  
Teone di Alessandria,  
Thābit ibn Qurra,  
Tolomeo,  
Tummers Paul Marie Josef Emanuel,

Vitrac Bernard,

Witheside Derek Thomas,

Zeuthen Hieronymus Georg,

# INDICE DEI MANOSCRITTI E DEI PAPIRI

## *Manoscritti*

Bologna, Biblioteca dell'Archiginnasio

*Bon. A 18-9 (b)*:

Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana

*Vat. gr. 190 (P)*:

*Vat. gr. 204*:

*Vat. gr. 1038 (v)*:

El Escorial, Real Biblioteca

*Scorial. Φ III 5 (S)*:

*Scorial. 907*:

Firenze, Biblioteca Medicea Laurenziana

*Laur. Plut. 28.3 (F)*:

*Laur. Plut. 28.6 (ϕ)*:

Oxford, Bodleian Library

*Bodl. D'Orville 301 (B)*:

Paris, Bibliothèque Nationale de France

*Par. gr. 2344 (q)*:

*Par. gr. 2466 (p)*:

Teheran, Kitābhāna-i Millī-i Malik

*Malik 3585*:

Wien, Österreichische Nationalbibliothek

*Vindob. phil. gr. 31 (V)*:

## *Papiri*

*PHerc. 307*:

*PPar. 2*:



## INDICE DEI PASSI CITATI

SONO escluse le semplici menzioni di proposizioni nel *corpus* archimedeo e negli *Elementi*.

<p>Adelardo di Bath</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Liber Euclidis</i> (ed. Busard)</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 158.342:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 173.209-212:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 217.509-510:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 302.106-110:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 312.335-337:</p> <p>Alessandro di Afrodisia</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>in Analyticorum priorum I</i> (ed. Wallies)</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 13.7-11:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 21.28-22.23:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 31.4-9:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 34.13-15:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 53.28-54.2:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 68.21-69.4:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 99.19-100.26:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 177.25-178.4:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 260.20-261.19:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 344.9-346.6:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 344.14-15:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 344.32-34:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 345.6-7:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 379.14-380.27:</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 401.16-405.16:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 402.16-18:</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>in Topica</i> (ed. Wallies)</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 14.18-15.14:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 14.21-22:</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>De fato</i> (ed. Bruns)</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 207.5-211.4:</p> <p>Ammonio</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>in De interpretatione</i> (ed. Busse)</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 2.31:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 2.32:</p> <p>[Ammonio]</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>in Analyticorum priorum I</i> (ed. Wallies)</p> <p style="padding-left: 40px;">pp. 70.1-71.6:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 70.11-12:</p> <p>Apollonio</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Conica</i> (ed. Heiberg in AGE I-II)</p> <p style="padding-left: 40px;">vol. I</p> <p style="padding-left: 60px;">intr., p. 4.5-8:</p>	<p style="padding-left: 20px;">intr., p. 4.7:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.4-5:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.4, p. 16.2:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.5, p. 18.13:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 20.2-7:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.6:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.7, p. 26.25:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.11, pp. 36.27-38.14:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.41:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.50:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.52:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.52, p. 158.21:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 158.24:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 158.25:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 160.18:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.53, p. 164.7-12:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.54, p. 166.19:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 168.14:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.56, p. 174.28:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 176.11:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 178.12:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.59, pp. 184.28-186.1:</p> <p style="padding-left: 20px;">I.60, p. 188.24:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.7:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.10, p. 208.13:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.28-29:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.35:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.40, p. 258.13:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.46, p. 266.18:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.48, pp. 272.28-274.2:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.49, p. 276.23:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.50, p. 290.21:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.51, p. 300.4:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 300.27:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.52, p. 308.1:</p> <p style="padding-left: 20px;">II.53, p. 310.22:</p> <p style="padding-left: 40px;">p. 312.18:</p> <p style="padding-left: 20px;">III.4, p. 324.23:</p> <p style="padding-left: 20px;">III.47:</p> <p style="padding-left: 20px;">vol. II</p> <p style="padding-left: 40px;">intr., p. 4.10:</p> <p style="padding-left: 20px;"><i>Conica</i> (ed. Toomer)</p>
--	--

- VI.1-3:  
VI.1-2:
- Apollonio Discolo
- Syntaxis* (ed. Uhlig)
- I.12, p. 14.6:  
I.25:  
I.43-44:  
I.48:  
I.78:  
I.87:  
I.97-98:  
I.111, p. 94.7-17:  
I.133-135:  
I.144:  
II.9:  
III.127, p. 379.8:
- De conjunctionibus* (ed. Schneider)
- p. 216.8:  
p. 216.14-16:  
pp. 216.17-217.15:  
p. 217.2:  
pp. 217.16-218.7:  
p. 218.7-19:  
pp. 218.20-219.11:  
p. 218.22-26:  
p. 218.22-23:  
pp. 219.12-220.22:  
p. 220.10-13:  
p. 220.13-22:  
pp. 220.23-221.15:  
pp. 221.16-222.23:  
pp. 222.24-223.4:  
p. 223.4-22:  
p. 250.12-27:  
p. 250.12-17:  
p. 251.19-26:  
p. 251.27-29:  
p. 252.1-2:  
p. 257.18:
- Apuleio
- De interpretatione* (ed. Moreschini)
- 277, p. 209.9-14:  
p. 212.10-12:
- Archimede
- De sphaera et cylindro* (ed. Heiberg in AOO I)
- intr., p. 2.20:  
intr., p. 4.10:  
I.5, p. 18.14:  
I.18, pp. 76.18-78.2:  
I.32, p. 118.2:  
I.34, p. 126.10:  
II.1, p. 170.13:  
II.7, p. 208.13:  
p. 208.13-14:  
*De conoidibus et sphaeroidibus* (ed. Heiberg in AOO I)
- intr., p. 246.8:  
intr., p. 248.11:  
intr., p. 250.24:  
intr., p. 254.21:  
intr., p. 258.13:  
7, p. 286.18:  
9, p. 304.6:  
p. 304.9:  
16, p. 328.8:  
22, p. 358.19:  
29, p. 418.19:  
30, p. 424.13:  
32, p. 444.16:  
*De lineis spiralibus* (ed. Heiberg in AOO II)
- intr., p. 4.29:  
intr., p. 6.1:  
intr., p. 6.11:  
intr., p. 6.18:  
1, pp. 12.13-14.20:  
p. 14.13-18:  
16, p. 56.9:  
*De planorum aequilibriis* (ed. Heiberg in AOO II)
- II.4, p. 176.11:  
II.5, p. 180.2:  
II.7, p. 188.21:  
II.9, p. 194.15:  
II.10, p. 204.6:  
p. 204.10 e app.:  
*Arenarius* (ed. Heiberg in AOO II)
- p. 232.18:  
p. 234.20:  
p. 244.5-6:  
p. 256.31:

- Quadratura parabolae* (ed. Heiberg in *AOO*  
II)  
5, p. 270.9:  
6, p. 272.24:  
14, p. 286.21:  
    p. 288.18:  
15, p. 290.21:  
    p. 292.19:  
16, p. 298.9:  
20, p. 304.7:
- De corporibus fluitantibus* (ed. Heiberg in  
*AOO* II)  
I.2, p. 320.19:  
II.2, p. 350.3:  
II.9, p. 384.25-26:
- Methodus* (ed. Heiberg in *AOO* II)  
p. 438.18-19:
- Aristosseno  
*Harmonica* (ed. Da Rios)  
p. 86.19:
- Aristotele  
*Categoriae*  
7:  
7, 7b15-8a12:  
13, 14b27-28:  
13, 14b30-31:
- De interpretatione*  
7, 17a35-17b16:
- Analytica priora*  
A 2, 25a14-19:  
A 2, 25a16:  
A 6, 28a17-26:  
A 6, 28a24:  
A 6, 28b14-15:  
A 6, 28b20-21:  
A 8, 30a6-14:  
A 10, 30b31:  
A 24, 41b13-22:  
A 23, 41a21-32:  
A 24, 41b13-22:  
A 26:  
A 26, 41a30-40:  
A 29, 45a23-b20:  
A 30, 46a22-27:  
A 34, 48a1-48a8:  
A 34, 48a25:
- A 35, 48a29:  
A 39, 49b6:  
A 41, 49b33-50a4:  
A 44, 50a29-38:  
B 4, 57a35:  
B 11, 61a21-25:  
B 11, 61a32-33:  
B 11-14:  
B 14, 62b29-38:
- Analytica posteriora*  
A 2:  
A 2, 72a18-24:  
A 3:  
A 4-5:  
A 4, 73b32-33:  
A 6, 75a18-27:  
A 9, 75b37-76a3:  
A 10:  
A 10, 76b20-21:  
A 10, 76b23-77a4:  
A 10, 76b35-39:  
A 10, 76b39-77a3:  
A 11, 77a26-31:  
A 26:  
A 33, 89a29-30:  
B 11, 94a28-34:
- Topica*  
A 4:  
A 15, 106a38-b1:  
A 18, 108b12-19:  
B 3, 110a32-b7:  
Γ 6, 119b35-120a2:  
Δ 4:  
Z 6, 143b11-32:  
H 2, 157b34-158a2:  
H 2, 157b34-38:  
Θ 13, 163a11-13:  
I 5, 167b1-3:
- Sophistici elenchi*  
11:  
15, 174b8-11:
- Physica*  
Δ 12, 221b24-25:
- Meteorologica*  
Γ 5, 376a29:
- De anima*

- Γ 7:  
*De memoria et reminiscentia*  
 449b30-450a7:  
*De generatione animalium*  
 B 6, 742b27:  
*Metaphysica*  
 B 2, 997b35-998a4:  
 Γ 5:  
 Δ 12, 1019b21-27:  
 Δ 15:  
 Δ 15, 1021a8-14:  
 Δ 15, 1021b6-8:  
 Θ 9, 1051a21-33:  
 I 1, 1052b31-33:  
 I 1, 1053a17-18:  
 M 3, 1078a17-21:  
 N 2, 1089a21-26:  
*Ethica nicomachea*  
 Γ 5, 1112a21-23:  
*Rhetorica*  
 B 24, 1400b34-1401a6:  
 [Aristotele]  
*Problemata*  
 XV.9-10:  
 Aulo Gellio  
*Noctes atticae* (ed. Marshall)  
 XVI.8.13-14:  
 Autolico  
*De sphaera mota* (ed. Mogenet)  
 2-3:  
 12:  
 Boezio  
*De interpretatione* (ed. Meiser)  
 2.11, p. 234.27-235.4:  
*Institutio musica* (ed. Friedlein)  
 III.11:  
 Cicerone  
*De fato* (ed. Ax)  
 11-15:  
 15:  
 15-16:  
 Cleomede  
*Caelestia* (ed. Todd)  
 I.1.228-232:  
 I.5.23-28:  
 I.6.1-7:  
 Crisippo  
*Ricerche logiche* (PHerc. 307)  
 II.21-26:  
 Diocle  
*Sugli specchi ustori* (ed. Toomer)  
 1-3:  
 Diofanto  
*Arithmetica* (ed. Tannery in *DOO I*)  
 intr., p. 14.1-20:  
 intr., p. 16.6-7:  
 I.14, pp. 34.28-36.2:  
 p. 34.28:  
 p. 36.6:  
 I.19 *aliter*, p. 46.2-3:  
 I.26, p. 60.17-18:  
 I.27, pp. 60.23-62.2:  
 I.29, p. 64.22-24:  
 II.21, p. 116.8-9:  
 II.34, p. 136.4-5:  
 IV.16, p. 220.23-24:  
 IV.19, p. 232.2:  
 IV.22, p. 238.21-22:  
 IV.24, p. 244.22:  
 IV.38, p. 298.1:  
 V.10, pp. 336.17-338.10:  
 p. 336.11:  
 p. 338.3:  
 p. 340.9-10:  
 VI.14, p. 424.14:  
 VI.15, p. 428.21:  
*Arithmetica* (ed. Rashed)  
 vol. III  
 p. 1.2:  
 p. 98.14:  
 vol. IV  
 p. 1.2:  
 p. 34.6:  
 p. 35.2:  
 p. 80.5:  
 p. 81.2:  
 p. 120.1:  
*De polygonis numeris* (ed. Tannery in *DOO I*)

- p. 466.17:
- Diogene Laerzio  
*Vitae philosophorum* (ed. Marcovich)  
 VII.63-67:  
 VII.65-68:  
 VII.66:  
 VII.69-70:  
 VII.70:  
 VII.71-72:  
 VII.71:  
 VII.72-73:  
 VII.72:  
 VII.74:  
 VII.75:  
 VII.76:  
 VII.76-77:  
 VII.77:  
 VII.80:  
 VII.80-81:  
 VII.82:  
 VII.85:  
 VII.190:  
 VII.193-195:  
 VII.194:  
 VII.196:
- Dionisio Trace  
*Ars grammatica* (ed. Uhlig)  
 p. 89.1:  
 p. 89.2:  
 p. 91.1:  
 p. 92.2-3:  
 pp. 95.2-110.1:
- Eforo  
*Fragmenta* (ed. Jacoby)  
 fr. 200, vol. 2A, p. 102.12:
- Epitteto  
*Dissertationes* (ed. Schenkl)  
 I.7.22:  
 I.25.11:  
 I.25.13:
- Erone  
*De speculis* (ed. Schmidt in *HOO* II)  
 6-8:  
 10:
- [Erone]
- Definitiones* (ed. Heiberg in *HOO* IV)  
 39, p. 38.9-11:  
 64, p. 46.8-10:  
 124, p. 78.22-80-25:
- Euclide  
*Elementa* (ed. Heiberg in *EE* I-IV)  
 vol. I  
 I.def.9, p. 3.9-12:  
 I.def.15, p. 2.9-13:  
 I.def.18, p. 3.5-8:  
 I.post.1-3, pp. 4.14-5.2:  
 I.post.1, p. 4.14-15:  
 I.post.2, p. 4.16-17:  
 I.post.3-4, p. 5.1-3:  
 I.1, p. 7.2-6:  
   p. 8.1-4:  
   p. 8.1-3:  
 I.2, p. 8.11-12:  
   p. 8.13-14:  
   p. 8.16-20:  
   p. 8.18-19:  
   p. 9.13-14:  
 I.5, pp. 12.19-13.2:  
   p. 12.19-21:  
 I.6, p. 13.23-25:  
   p. 14.1-3:  
   p. 14.4-5:  
   p. 14.14-15:  
 I.7, p. 14.20-23:  
   p. 15.14-16:  
 I.8, pp. 15.23-16.8:  
 I.9, p. 17.14-19:  
   p. 17.14-16:  
 I.11, pp. 18.20-19.8:  
   p. 19.1-3:  
 I.12, p. 20.17-19:  
 I.13, p. 21.2-3:  
   p. 21.8-11:  
 I.14, p. 22.15-16:  
   p. 22.17-18:  
 I.15, p. 23.11-12:  
 I.16, p. 24.15-17:  
   p. 25.6-10:  
 I.17, p. 26.2-6:  
   p. 26.8-11:  
   p. 26.13-16:

- I.18, p. 26.20-21:  
 p. 27.1-9:
- I.19, p. 27.14-15:  
 p. 27.20-21:  
 p. 28.1-5:
- I.21, p. 29.9-12:  
 p. 30.5-10:  
 p. 30.14:
- I.22, pp. 30.23-31.3:  
 p. 31.4-8:  
 p. 31.9:
- I.23, p. 32.12-14:
- I.24, p. 34.1-2:  
 p. 34.2-3:
- I.26, p. 36.22-23:  
 p. 37.10-11:  
 p. 37.16-20:
- I.27, p. 38.21-23:  
 p. 39.3:
- I.28, p. 40.2-5:
- I.29, p. 41.6-11:  
 p. 41.6-9:
- I.30, p. 42.17-20:  
 p. 42.17-18:  
 p. 42.19-20:
- I.31, p. 43.11-12:
- I.32, p. 44.7-10:  
 p. 44.17-18:
- I.34, p. 46.20-22:  
 p. 48.1:
- I.36, p. 49.14-19:  
 p. 50.10-12:
- I.41, 54.20-22:
- I.43, p. 57.14-15:  
 p. 57.14 *app.*:
- I.44, pp. 58.19-59.11:  
 p. 59.2-4:  
 p. 59.3 *app.*:  
 p. 59.7-14:
- I.46, p. 62.2:  
 p. 62.15-17:  
 p. 62.5-9:
- I.47, p. 63.4-7:
- II.def.1-2, p. 67.2-7:
- II.def.1, p. 67.2-4:
- II.1, p. 67.9-10:  
 p. 67.13-14:  
 p. 68.3-7:
- II.2, p. 69.2-6:  
 p. 69.9-11:
- II.3, p. 70.2-5:
- II.4, 71.5-8:  
 p. 72.12-14:
- II.5, p. 74.20-75.2:
- II.6, p. 75.8-9:  
 p. 75.13-15:
- II.7, p. 77.2-10:
- II.8, pp. 78.15-81.2:  
 pp. 79.15-80.1:
- II.9, p. 82.3-83.1:
- II.10, pp. 83.19-84.2:  
 pp. 85.10-86.7:
- II.11, p. 86.21-23:  
 p. 87.7-8:  
 p. 87.14-17:
- II.13, pp. 90.23-91.2:
- II.14, p. 91.11-18:
- III.def.1, p. 93.2-3:
- III.2, pp. 95.18-96.24:  
 p. 96.1-2:  
 p. 96.5-7:  
 p. 96.10-13:
- III.8, p. 103.14:  
 p. 105.4-5:  
 p. 107.3:  
 p. 107.8-9:
- III.9, p. 107.14-20:
- III.10, p. 108.17:  
 p. 108.18-19:  
 p. 109.21-22:
- III.11, pp. 109.24-110.7:
- III.13, p. 112.5-6:
- III.16, p. 117.2-5:
- III.18, pp. 120.22-121.16:
- III.21, p. 123.23-24:  
 p. 124.1-3:  
 p. 124.7-13:  
 p. 124.14-15:
- III.25, p. 127.9-10:  
 p. 127.16-17:  
 p. 129.2:
- III.28, p. 132.2-4:

- III.29, p. 133.11-12:  
 III.33, p. 140.18-19:  
 III.35, p. 145.21-25:  
     p. 145.25-146.14:  
     p. 146.2-3:  
 IV.4, p. 156.3-10:  
 IV.5por, p. 159.15:  
 IV.10, p. 166.8-11:  
 IV.11, pp. 167.13-168.2:  
     p. 167.13-20:  
 IV.12, p. 169.2-3:  
     p. 169.7-12:  
 IV.13, p. 171.20-21:  
     p. 172.1-3:  
     p. 173.14:  
     p. 173.21-22:  
 IV.15, p. 175.17-21:  
     p. 176.11-12:  
 IV.16, p. 178.17-18:  
 vol. II  
 V.def.5, p. 1.10-15:  
 V.def.7, p. 2.3-8:  
 V.def.9, p. 2.10-12:  
 V.def.17, p. 3.12-17:  
 V.3, p. 6.7-11:  
     p. 6.13-20:  
     p. 7.3-9:  
 V.6, p. 10.16-19:  
     pp. 10.26-11.13:  
     p. 11.10-13:  
 V.7, p. 11.21:  
     p. 12.3-4:  
     p. 12.5:  
     p. 12.13:  
 V.8, p. 13.6:  
     p. 13.10-11:  
     p. 14.2-7:  
     p. 15.22:  
 V.10, p. 17.1-7:  
 V.11, p. 18.7-11:  
     p. 18.11:  
 V.12, p. 20.11:  
 V.13, p. 20.18-21:  
     p. 21.7-16:  
     p. 21.23-26:  
 V.14, p. 22.10-13:  
     p. 23.1-2:  
 V.17, p. 26.21:  
     p. 26.21 *app.*:  
     pp. 26.22-27.7:  
     pp. 26.24-27.5:  
     p. 27.6-7:  
 V.18, p. 28.3-6:  
 V.20, p. 30.2-5:  
     p. 30.14:  
     p. 31.2-3:  
 V.21, p. 31.24:  
     p. 32.6-7:  
 V.22, p. 32.14-20:  
     p. 32.17-21:  
     p. 33.1-4:  
 V.23, p. 35.15:  
 VI.def.4, p. 39.12-13:  
 VI.2, p. 42.15-18:  
     p. 43.16-19:  
 VI.7, p. 52.14-19:  
     pp. 53.22-54.1:  
 VI.8por, pp. 56.19-57.3:  
 VI.9, p. 57.6-14:  
 VI.11, p. 59.14-17:  
 VI.12, p. 60.1-7:  
 VI.14, pp. 62.21-63.2:  
 VI.19por, p. 72.5-7:  
 VI.22/23, p. 80.6 *app.*:  
 VI.27, p. 88.13-18:  
 VI.28, 90.6:  
 VII.def.3-4, p. 103.5-7:  
 VII.def.3, p. 103.5-6:  
 VII.def.5, p. 103.8-9:  
 VII.def.21, pp. 104.25-105.2:  
     p. 105.1 *app.*:  
 VII.1, p. 106.10-11:  
 VII.4, p. 110.5-6:  
     p. 110.11-13:  
     p. 110.15:  
     p. 111.3-4:  
 VII.5, p. 111.23-24:  
     p. 112.3-7:  
 VII.9, pp. 115.20-116.2:  
 VII.13, p. 120.1-7:  
 VII.18, p. 124.11-16:  
     p. 124.11-13:

- p. 124.14-16:  
 p. 124.23-25:  
 VII.19, p. 125.15-19:  
 VII.20, p. 127.8-11:  
 VII.22, pp. 129.21-130.3:  
 VII.26, p. 133.6-8:  
 VII.31, p. 138.12-17:  
 p. 138.15 *app.*:  
 VII.32, p. 139.2-3:  
 p. 139.6-8:  
 VII.34, p. 141.11-13:  
 VII.37, p. 146.14-15:  
 p. 146.18-19:  
 VII.38, p. 147.9-11:  
 VIII.1, p. 149.7-10:  
 VIII.4, p. 154.13-14:  
 p. 155.3-6:  
 pp. 156.17-157.4:  
 p. 157.1-4:  
 VIII.6, p. 159.15-19:  
 p. 159.20-23:  
 VIII.8, p. 162.3-4:  
 VIII.9, p. 163.1-5:  
 VIII.11, p. 167.16-20:  
 VIII.13, p. 171.3-11:  
 VIII.15, p. 173.1-5:  
 VIII.16, pp. 173.22-174.12:  
 p. 173.22-25:  
 IX.1, p. 188.9-13:  
 IX.4, 191.13-15:  
 IX.12, p. 200.5-11:  
 IX.13, p. 202.5-8:  
 p. 203.10:  
 p. 204.16-17:  
 IX.14, p. 205.10-13:  
 IX.15, p. 206.15-17:  
 IX.17, p. 209.10-11:  
 IX.18, p. 209.16-20:  
 p. 209.16-17:  
 IX.19, p. 210.22-26:  
 p. 210.22-23:  
 p. 211.1 *app.*:  
 p. 211.11 *app.*:  
 IX.31, p. 220.12-14:  
 IX.34, p. 222.2-17:  
 IX.35, p. 223.2-11:  
 IX.36, p. 224.13-23:  
 p. 224.18-23:  
 p. 226.1-3:  
 vol. III  
 X.def.1, p. 1.2-4:  
 X.def.4, p. 2.3:  
 X.1, p. 2.6-10:  
 X.10, p. 18.6:  
 X.14, p. 23.16-20:  
 X.16, p. 25.6-8:  
 p. 25.12-13:  
 X.26, p. 41.2-7:  
 X.39, p. 64.13-19:  
 X.42, p. 68.17-20:  
 p. 68.17-18:  
 p. 68.19-22:  
 p. 69.3-11:  
 X.44, p. 71.4 *app.*:  
 p. 71.7:  
 X.defII, pp. 76.19-77.11:  
 X.48, p. 77.14-18:  
 X.54, p. 90.6-8:  
 X.55, p. 95.2-5:  
 X.60, pp. 103.19-104.1:  
 p. 103.19-20:  
 p. 105.12-17:  
 X.62, p. 108.22:  
 X.63, p. 111.5-6:  
 X.66, p. 113.18-19:  
 p. 113.20-22:  
 p. 115.9-14:  
 p. 115.15-16:  
 X.70, p. 120.14-18:  
 X.71, p. 120.21-23:  
 X.72, p. 124.10:  
 X.81, p. 137.17-18:  
 X.91, p. 155.17-18:  
 X.97, p. 172.12-13:  
 X.99, p. 179.18-25:  
 X.101, p. 183.15:  
 X.103, p. 187.7-8:  
 X.105, p. 190.20 *app.*:  
 X.108, p. 194.6-14:  
 X.109, p. 196.17-20:  
 pp. 196.21-197.7:  
 X.11por, p. 201.20:

- X.13 *vulgo*, p. 216.1-9:  
vol. IV
- XI.def.3, p. 1.4-6:  
XI.def.11, p. 2.9-14:  
XI.1, p. 4.20:  
XI.4, pp. 6.21-7-4:  
    p. 7.10-15:  
    p. 7.23-24:  
    p. 8.1-7:  
    p. 8.10-20:  
XI.9, p. 14.12-13:  
    p. 14.14-18:  
XI.10, p. 15.10-15:  
XI.11, p. 17.1-2:  
XI.12, p. 18.15-18:  
XI.13, p. 19.2-3:  
    p. 19.4-9:  
    p. 19.4-7:  
XI.14, pp. 19.24-20.3:  
XI.18, p. 25.16-20:  
    p. 26.21-23:  
XI.19, pp. 27.23-28.2:  
XI.22, p. 31.7-10:  
XI.23, p. 33.7-10:  
    p. 33.9 *app.*:  
    p. 35.14-17:  
    p. 36.3-7:  
XI.25, p. 42.1-3:  
XI.26, p. 44.9-10:  
XI.34, pp. 60.8-61.3:  
    p. 60.9:  
    p. 61.8-10:  
XII.2, p. 81.1-8:  
    p. 81.4:  
    p. 81.14-15:  
    pp. 81.21-82.1:  
    p. 82.1-6:  
XII.3, p. 88.1:  
XII.4, p. 91.17:  
XII.5, p. 92.20-25:  
    p. 93.1-5:  
    p. 93.6-9:  
    p. 93.9-13:  
XII.6, pp. 96.12-97.9:  
XII.8, pp. 100.26-101.5:  
XII.10, p. 104.16-19:  
    pp. 104.22-105.1:  
    p. 105.11:  
    p. 106.7:  
    p. 106.12-14:  
    p. 106.21-27:  
    p. 107.23:  
    p. 107.24:  
    p. 108.1:  
    pp. 108.22-109.1:  
XII.11, p. 110.11:  
    p. 111.1-5  
XII.12, p. 115.6-12:  
    pp. 117.19-22:  
XII.16, p. 126.4-6:  
    p. 126.12-16:  
XII.17, p. 127.5:  
    p. 127.8:  
    p. 130.7:  
XII.18, p. 135.1-4:  
XIII.3, p. 141.1-3:  
XIII.4, p. 142.10-11:  
XIII.6, p. 144.19 *app.*:  
XIII.11, p. 155.8:  
XIII.13, p. 162.2-5:  
    p. 162.3:  
XIII.15, p. 167.5-12:  
    p. 167.21:  
XIII.16, p. 170.23:  
    p. 171.8:  
    p. 171.24:  
    p. 172.4:  
XIII.17, p. 174.24-26:  
    p. 175.11-13:  
    p. 178.7:  
    p. 178.11-13:  
    p. 179.16-17:  
XIII.18, p. 180.19-21:  
    p. 184.7:  
XI.22 *aliter*, pp. 187.2-188.24:  
XI.38 *vulgo*, p. 192.16 *app.*:  
XI.37b, p. 209.8-11:  
XII.2b, p. 213.1:  
XII.5b, p. 217.12-15:  
XII.9b, p. 221.17-18:  
    p. 222.10-11:  
XII.10b, p. 223.1-5:

- p. 223.16:  
 p. 225.13:  
 XII.11b, p. 227.11-12:  
 XII.15b: pp. 232.34-233.2:  
 XII.16b: p. 236.10:  
*Data* (ed. Menge in *EOO* VI)  
 def. 1-2:  
 def. 6, p. 2.13-15:  
 1-23:  
 3:  
 10-11:  
 25-27:  
 28-30:  
 28:  
 29:  
 30:  
 44:  
 45:  
 pp. 82.10-84.5:  
 46:  
 p. 84.18:  
 49:  
 51:  
 63:  
 67:  
 74, p. 142.6-10:  
 77:  
 78:  
 p. 150.2-8:  
 83:  
 90:  
 93:  
 94:  
 30 *aliter*:  
*Optica A* (ed. Heiberg in *EOO* VII)  
 18-21:  
 23:  
 28:  
 35, p. 64.23-27:  
*Phaenomena* (ed. Menge in *EOO* VIII)  
 intr.: p. 2.8-14:  
*Sectio canonis* (ed. Heiberg in *EOO* VIII)  
 3:  
 6:  
 Eutocio  
 in *Conica* (ed. Heiberg in *AGE* II)
- p. 178.4-15:  
 p. 208.7-10:  
 pp. 208.10-15:  
 pp. 208.17-210.7:  
 in *Archimedis opera* (ed. Heiberg in *AOO* III)  
 pp. 6.4-14.30:  
 pp. 12.18-14.4:  
 p. 150.15:
- Filopono  
 in *Analytica priora* (ed. Wallies)  
 p. 36.10-11:  
 p. 48.11-18:  
 p. 243.15-24:  
 p. 246.3-4:  
 pp. 321.7-322.18:  
 p. 321.8:  
 p. 321.10-11:  
 p. 321.22-24:
- Galeno  
*De antidotis* (ed. Kühn)  
 vol. XIV, pp. 31-32:  
*Institutio logica* (ed. Kalbfleisch)  
 I:  
 I.2-3:  
 I.3:  
 I.5:  
 IV.2:  
 IV.3:  
 IV.4:  
 V.1:  
 V.2:  
 V.3:  
 IX.5:  
 XII.5-8:  
 XII.7:  
 XII.8:  
 XIV.5:  
 XIV.7:  
 XV.8:  
 XVI-XIX:  
 XVI.1-3:  
 XVI.1:  
 XVI.3:

XVI.4:	<i>Collectio</i> (ed. Hultsch)
XVI.5-10:	III.52:
XVI.5:	III.58-74:
XVI.6:	III.58:
XVI.7-8:	III.59:
XVI.9:	III.60-73:
XVI.10:	III.60:
XVI.11-12:	III.61:
XVI.11:	III.62:
XVI.12:	III.64:
XVII:	III.72:
XVII.1:	V.10-11:
XVII.1-2:	VII.9:
XVII.4-9:	VII.11:
XVII.7:	VII.16:
XVIII.1:	VII.23:
XVIII.5-7:	VII.24:
XVIII.5:	VII.143:
XVIII.6:	VII.237:
XVIII.8:	
Gerardo da Crenoma	Platone
<i>Liber Euclidis</i> (ed. Busard)	<i>Phaedo</i>
c. 63.41:	100A-101E:
c. 118.38-43:	<i>Theaetetus</i>
cc. 129.59-130.4:	147D:
c. 131.22:	<i>Meno</i>
c. 131.58:	86D-87B:
c. 133.22:	<i>Respublica</i>
cc. 144.53-145.4:	VI, 510B-511E:
c. 155.6-20:	VII, 527A6:
c. 182.17-20:	
cc. 215.48-216.7:	Plutarco
c. 340.48-53:	<i>De communibus notitiis adversus Stoicos</i>
c. 348.16-17:	(ed. Pohlenz-Westman)
c. 348.27-29:	39, 1080C:
	45, 1084C-D:
an-Nayrīzī ( <i>Anariti</i> us, ed. Tummers)	Porfirio
pp. 39.4-41.19:	<i>in Ptolemaei Harmonica</i> (ed. Düring)
p. 40.18-24:	pp. 91.4-95.23:
an-Nayrīzī ( <i>Anariti</i> us, ed. Curtze in <i>EOO</i> suppl.)	Proclo
p. 168.3-7:	<i>Hypotyposis astronomicarum positionum</i>
Nicomaco	(ed. Manitius)
<i>Introductio arithmetica</i> (ed. Hoche)	V.26:
I.16:	<i>in primum Euclidis Elementorum librum</i> (ed. Friedlein)
	p. 66.14-18:
Pappo	p. 66.22-67.1:
	pp. 76.4-77.6:

- p. 178.1-8:  
 p. e 202.2-5:  
 pp. 203.1-207.25:  
 p. 203.17-18:  
 p. 204.5-13:  
 pp. 204.20-205.12:  
 p. 207.4-25:  
 p. 208.16-17:  
 p. 211.18-23:  
 pp. 218.12-219.17:  
 pp. 224.5-232.9:  
 p. 240.27:  
 p. 252.5-24:  
 pp. 262.7-263.4:  
 p. 327.8-24:  
 p. 373.5-23:  
 p. 349.21:  
*in Rempublicam* (ed. Kroll)  
 vol. I, p. 29.1:  
*in Cratylum* (ed. Pasquali)  
 p. 53.28:
- Scholìa in Aristotelis De interpretatione* (ed. Brandis)  
 p. 93b28:  
 p. 93b30-31:
- Scholìa in Euclidis Elementa* (ed. Heiberg in *EE*)  
 vol. V,2, p. 83.1-15:  
 vol. V,2, p. 139.7-15:  
 vol. V,2, pp. 285.15-286.19:
- Scholìa in Euclidis Data* (ed. Menge in *EOO VI*)  
 pp. 296.2-297.8:
- Sereno  
*De sectione cylindri* (ed. Heiberg in *Opuscula*)  
 4, p. 16.2-18:
- Sesto Empirico  
*Aduersus mathematicos* (ed. Mutschmann, Mau)  
 I.173:  
 I.221-227:  
 III.7-17:  
 VII.157:  
 VIII.26:  
 VIII.89-90:  
 VIII.108-112:
- VIII.224-226:  
 VIII.225-227:  
 VIII.225:  
 VIII.226:  
 VIII.227:  
 VIII.228-243:  
 VIII.242:  
 VIII.301-462:  
 VIII.301:  
 VIII.306:  
 VIII.308:  
 VIII.313:  
 VIII.415:  
 VIII.434:  
 IX.139:  
 X.85-101:  
 XI.8-11:  
 XI.8:  
*Pyrrhoneiai hypotyposeis* (ed. Mutschmann, Mau)  
 I.69:  
 II.134-184:  
 II.135:  
 II.137:  
 II.141:  
 II.148:  
 II.150:  
 II.162:  
 II.189:  
 II.191:  
 II.231:  
 II.241:  
 II.249:
- Simplicio  
*in Categoriais* (ed. Kalbfleisch)  
 p. 165.32-166.29:  
*in Physica* (ed. Diels)  
 p. 270.31:  
 p. 281.26:  
*in De caelo* (ed. Heiberg)  
 p. 284.28-285.2:  
 p. 552.31-553.5:
- [Temistio]  
*in Analyticorum priorum I* (ed. Wallies)  
 p. 121.20-123.8:

p. 121.23-24:

p. 122.3-4:

Teodosio

*Sphaerica* (ed. Heiberg)

I.1:

I.1, p. 4.19-21:

I.2:

I.5:

I.18, p. 32.6-24:

II.16:

II.17, p. 82.1:

Teone di Alessandria

*in Almagestum* (ed. Rome)

p. 333.3:

p. 336.24:

p. 492.7-8:

I.13:

p. 549.3:

p. 551.14:

p. 554.1:

p. 556.1:

p. 687.10:



## INDICE ANALITICO

- alternando (ἐναλλάξ),  
ampliatività della deduzione,  
«anafora»,  
    e teorema mediatore,  
    incipitaria,  
    non incipitaria,  
anafora,  
anaforica, rete,  
«annunciare» (ἐπαγγέλλειν),  
aoristo, uso dell',  
apotome (ἀποτομή),  
    sottospecie della,  
apotome prima di una mediale (μέσης ἀποτομή  
πρώτη),  
apotome seconda di una mediale (μέσης ἀποτομή  
δευτέρα),  
apposizione,  
argomentale, flusso,  
argomento,  
    ametodicamente    concludente    (ἀμεθόδως  
    περαίνων),  
    ed inferenze relazionali,  
    nozione generale di,  
    posposto,  
argomodo (λογότροπος)  
articolo,  
    ed espressioni indefinite,  
    e generalità,  
    nella denominazione delle linee irrazionali,  
    valore anaforico dell',  
asserto (ἀξίωμα),  
    denegativo (ἀρνητικόν),  
    negativo (ἀποφατικόν),  
    non-semplICE,  
    privativo (στερητικόν),  
    semplICE,  
    supernegativo (ὑπεραποφατικόν),  
assunzione,  
    scaricata,  
assurdo, argomenti per,  
    condizionali negli,  
        con antecedente ellittico,  
    delimitati da frasi canoniche,  
    in Aristotele,  
        trasformati in dimostrazioni dirette,  
bicondizionale,  
binomiale (ἐκ δύο ὀνομάτων),  
casi “mancanti”,  
chiastica, disposizione,  
citazione,  
    di problema,  
    di teorema,  
    istanziata,  
    non istanziata,  
coassunzione (πρόσληψις),  
codice stilistico,  
commensurabile (σύμμετρος),  
    in lunghezza (μήκει),  
    in potenza (δυνάμει),  
componendo (συνθέντι),  
«condurre oltre» (διάγειν)  
coordinante, particella,  
conclusione (συμπέρασμα),  
    assenza dalla tradizione,  
    ed enunciato,  
    istanziata,  
condizionale (συνημμένον),  
    annidati,  
    ibrido,  
    indefinito stoico,  
condizionalizzazione, principio di,  
conflitto (μάχη),  
congiuntivo, modo,  
congiunzione (συμπεπλεγμένον),  
    con καί anteposto,  
    forme di,  
    dualità con la disgiunzione,  
    e formazione di predicati,  
    in forma correlativa,  
    in matematica,  
    negli enunciati,  
    nella forma μέν... δέ...  
    stoica,  
    con τε posposto,  
connettore (σύνδεσμος),  
    anteposto,

- argomentale (συλλογιστικός),  
 coassuntivo,  
 completivo (παραπληρωματικός),  
 conclusivo (ἐπιφορικός),  
 consuntivo (ἐπιλογιστικός),  
 «così che» (ὥστε),  
 «dunque» (οὖν),  
 «in effetti» (γάρ strutturante)  
 «infatti» (γάρ esplicativo)  
 nella tradizione grammaticale,  
 «pertanto» (δή),  
     e constatazioni banali,  
 stoico,  
 «quindi» (ἄρα),  
 connettivo,  
 contrapposizione, argomenti per,  
     e secondo indimostrato stoico,  
     e quinto indimostrato stoico,  
 controesempio,  
 convalidazione per identità di forma,  
     in Aristotele,  
     in Galeno,  
     nello stile matematico,  
 convertendo (ἀναστρέφαντι),  
 correlative, espressioni,  
 costruttive, assunzioni non,  
 costruttivismo della geometria greca,  
 costruzione (κατασκευή),  
     aritmetica,  
     ausiliaria,  
     in *Elementi* V,  
     in formulazione modale,  
     in «trovare» (εὕρεῖν)
- dativum judicantis*,  
 «dato» (δοθέν, δεδομένον),  
     preceduto o no dall'articolo,  
     uso differenziato dei participi,
- Definitionsstil*,  
 deduzione, teorema di,  
 definizione (ὅρος),  
 determinativi,  
     di arbitrarietà,  
         di oggetti geometrici,  
         in *Elementi* V,  
         ripartiti per parti specifiche,
- di indefinitezza,  
         loro connotazione particolarizzante,  
         assenti nelle traduzioni arabe,  
 determinazione (διορισμός),  
     come parte specifica di una proposizione,  
     delle condizioni di risolubilità,  
     di un problema,  
     di un teorema,  
     inglobata nell'enunciato,  
     locale,  
     parziale,  
     negli *Arithmetica*,  
 diagramma (διάγραμμα),  
     assente,  
     distorto,  
     falsa particolarizzazione nei,  
     pretesi richiami ai,  
 dicibile (λεκτόν)  
 «dico che» (λέγω ὅτι),  
     come segno di asserzione,  
 dimostrazione (ἀπόδειξις),  
     analogica,  
     potenziale,  
 disgiunzione (διεζευγμένον),  
     con ἤτοι anteposto,  
     dicotomica,  
     dualità con la congiunzione,  
     esaustiva,  
     esclusiva,  
     in Apollonio Discolo,  
     in argomenti per assurdo,  
     in Galeno,  
     in Pappo,  
     quadricotomica,  
     tricotomica,  
 dividendo (διελόντι),  
 enunciato (πρότασις),  
     ambiguo,  
     complesso  
         nella *Collectio*,  
         nelle *Coniche*,  
     condizionale,  
     di un problema,  
     di unicità,  
     e conclusione,

- forma “naturale” di un,  
 in forma assertoria,  
 misto,  
 negativo,  
 equimultipli, teoria degli,  
 equimultiplicità,  
 equipartizione,  
 equivalenza, relazione di,  
 esade,  
 esemplificazione,  
   esistenziale,  
   universale,  
 esistenziale, asserto,  
 esposizione (ἐκθεσις),  
   aristotelica,  
     e linee irrazionali,  
   assente,  
   come trasformata dell’enunciato,  
   locale,  
   matematica,  
   parziale,  
   suo carattere indefinito,  
 «essere», verbo,  
   incipitario,  
   valore copulativo,  
   valore esistenziale,  
   valore espositivo,  
   valore locativo,  
   valore presenziale,  
 esprimibile, retta,  
 evidenza, richiami all’,  
   in δηλον,  
     archimedei,  
   in φανερόν,  
  
 falso (ψευδος)  
 figura (σχῆμα, καταγραφή),  
 «fissare» (ἐκτιθέναι),  
   e “attualizzare”  
   e determinativi di indefinitezza,  
   e suoi rimpiazzanti,  
   grandezze geometriche,  
   numeri,  
 forma (εἶδος),  
   e generalità matematica,  
 forma logica,  
  
 formalismo e rigidità formulare,  
 formulazione (σύστασις),  
   e convalidazione,  
  
 generalità matematica,  
   posizione di Proclo,  
   interpretazione vulgata,  
   sovradeterminazione della,  
 genitivo assoluto,  
  
 «immaginazione» (φαντασία) procliana,  
 imperativo, uso dell’,  
 incipitaria, posizione,  
 indefinita, struttura,  
 indimostrato (ἀναπόδεικτος),  
   primo,  
   secondo,  
   quarto,  
     a disgiunti multipli,  
     e *reductiones*,  
   quinto,  
     a disgiunti multipli,  
     e *reductiones*,  
   terzo,  
 «insieme» (ἄμα),  
   e bicondizionale,  
 invertendo (ἀνάπαλιν),  
 iussiva, connotazione,  
  
 καί avverbiale,  
  
 lemmi,  
 lettere denotative,  
   e determinazione di figure geometriche,  
   e falsa particolarizzazione,  
   in posizione appositiva,  
   introdotte alfabeticamente,  
   necessariamente precedute dall’articolo,  
   nella designazione degli angoli,  
 luogo (τόπος),  
   di Carmandro,  
  
 marcatore linguistico,  
   di intenzionalità autoriale,  
   di libri degli *Elementi*,  
   di parti specifiche della proposizione,

- metamatematico,  
 matriciale, forma di una costruzione,  
 mediale (μέση),  
 metalinguistica, espressione,  
 metamatematici, livelli,  
 modale,  
     connotazione degli enunciati,  
     operatore  
 «modo» (τρόπος)  
  
 necessario (ἀναγκαῖον, ἀνάγκη),  
     come segno di asserzione,  
 necessità, operatore di,  
 negazione (ἀποφατικόν),  
     ambigua quanto all'ambito,  
     anteposta,  
     di frase,  
     di una disgiunzione,  
     doppia,  
     nella tradizione dialettica,  
     nelle argomentazioni per assurdo,  
     oggettiva,  
     soggettiva,  
 neutralizzazione dell'opposizione definito /  
 indefinito,  
 numero  
     perfetto,  
     piano,  
     poligonale,  
     solido,  
 nunazione,  
  
 ontologico, disimpegno,  
 operatore relazionale,  
     costituito dal nome del predicato,  
     sua posizione,  
 ordinali,  
     come abbreviazioni,  
     come variabili,  
     in *Elementi* V,  
     nella logica stoica,  
     preceduti o no dall'articolo,  
 ottativo, modo,  
  
 paracondizionale (παρασυστημμένον),  
     come *modus ponens* abbreviato,  
  
 con antecedente  
     in forma congiuntiva,  
     postposto,  
 definizione di,  
 e anafora,  
 forma verbale nel conseguente di un,  
 ibrido,  
 incipitario,  
 non incipitario,  
 puro,  
 paradisi giunzione (παραδιεζευγμένον),  
 parallela, disposizione,  
 parte e parti,  
 particella,  
     coassuntiva,  
     coordinante,  
     conclusiva,  
     strutturante,  
 perifrastica, forma,  
     e connotazione presenziale,  
 perfetto, uso del,  
     resultativo,  
     stativo,  
 poiché (ἐπεὶ),  
     solitario,  
     con altra particella,  
 porisma (πόρισμα),  
 posposti, argomenti,  
 postulato (αἴτημα),  
     sua forma,  
 predicato,  
     e saturazione di relazioni,  
 principi,  
     aristotelici e matematici,  
 problema (πρόβλημα),  
     con enunciato in «trovare»,  
     e disputa dialettica,  
     portata esistenziale di un,  
         apparente nei problemi enunciati con  
         sfumatura modale di Erykinos,  
 proporzionalità, definizione di,  
 proporzioni,  
     manipolazione di termini nelle,  
     teoria delle,  
         in ambito numerico,  
 proposizione, parti specifiche di una,

- proprietà caratteristica (σύμπτωμα),  
 pseudo-esistenziale, asserto,  
*Pseudaria*,
- qualificativi generalizzanti,  
 mantenuti nell'esposizione,  
 quantificazione,  
 quarto proporzionale,  
 assenza di,  
 e struttura indefinita,  
 sostituzionale,  
 quasi-disgiunzione (παραπλήσιον  
 διεξυγμένους),  
 rapporto (λόγος),  
 raddoppiato,  
 triplicato,  
 rappresentativo, ruolo,  
 recensione teonina degli *Elementi*:  
 referenziale, ruolo,  
 relazioni,  
 asimmetriche,  
 binarie,  
 composizione di,  
 criterio di identificazione delle,  
 e problemi testuali,  
 espressioni canoniche delle,  
 formulazione di,  
 in Aristotele,  
 in Galeno,  
 logica delle,  
 quaternarie,  
 come binarie annidate,  
 saturazione di,  
 simmetria,  
 e teoria del sillogismo,  
 ed asserti in forma II,  
 ternarie assenti,  
 transitività di,  
 e disposizione dei termini,  
 e forma sillogistica,  
 ed asserti in forma I,  
 formulazione canonica della,
- Satzadverbium*,  
 sillogismo,
- da un'ipotesi (ἐξ ὑποθέσεως),  
 relazionale (κατὰ τὸ πρὸς τι),
- simbolica, scrittura,  
 somma,  
 di oggetti matematici,  
 sostantivata, locuzione,  
 sostantivo, fenomeno della preterizione del,  
 stabilità di relazioni,  
 stile matematico,  
 canonico,  
 συναμφότερος, sintassi di,  
 suppositivo, modo,  
 supposizione (ὑπόθεσις),  
 e valori di verità,  
 nei commentatori tardivi,  
 stoica,
- tableaux* semantici,  
 teorema (θεώρημα),  
 testuali, problemi,  
*themata* stoici,  
 e contrapposizione,  
 tradizione arabo-latina degli *Elementi*:  
 traduzione "massimalista"  
 tramite uguale (δι' ἴσου),  
 tramite uguale in proporzione perturbata (δι' ἴσου  
 ἐν τετραγαμνή ἀναλογία),
- uguaglianza,  
 unità,
- verbali,  
 aggettivi,  
 forme,  
 partecipiali,  
 personali,  
 verifica su infinite istanze,  
 e dimostrazione potenziale,  
 e «proprietà caratteristica»,  
 nell'applicazione delle definizioni,



## GLOSSARIO GRECO-ITALIANO

ἀδύνατος impossibile	βιάζειν forzare
ἄγειν condurre	βίβλιον libro
αἴτημα richiesta, postulato	
αἰτῆσθαι richiedere	γάρ infatti, in effetti
ἀκολούθησις implicazione	γε certamente
ἀκολουθία conseguenza	γεγονέτω si trovi a essere
ἀληθής vero	γεγονὸς ἂν εἶη τὸ ἐπιταχθέν si troverebbe ad
ἀλλά ma	essere quanto prescritto
ἀλλαμὴν ma a dire il vero	γενικός generico
ἄλλος altro	γίγνεσθαι risultare, essere
ἄλογος irrazionale	γνώμων gnomone
ἅμα insieme, se e solo se	γωνία angolo
ἀμεθόδως περαίνων ametodicamente concludente	
ἀμφοτέροι entrambi	δέ e, mentre, invece
ἀνὰ λόγον proporzionale, in proporzione	δεδομένος dato
ἀναγκαῖος necessario	δεῖ si deve, occorre
ἀνάγκη necessario	δεικνύναι dimostrare
ἀναλογία proporzione	δεικτέον va dimostrato
ἀναπόδεικτος indimostrato	δέον (ἔστω) si debba
ἄνισος disuguale	δεύτερος secondo
ἀντικείμενος contraddittorio	δή pertanto, ora
ἀντιπεποιθέναι trovarsi in relazione inversa	δηλαδὴ chiaramente
ἀντιστρέφειν convertire	δηλον chiaro
ἄξιωμα asserto	δηλονότι è chiaro che
ἀπάγειν ridurre	δι' ἴσου tramite uguale
ἅπας ogni, tutti (se plurale)	διὰ τὰ αὐτὰ δέ e per gli stessi <motivi>
ἀπὸ κοινοῦ a fattore	διὰ τὰ αὐτὰ δὴ proprio per gli stessi <motivi>
ἀπόδειξις dimostrazione	διὰ τό per il fatto di
ἀποζευγνύναι disgiungere	διάγειν condurre oltre
ἀπολαμβάνειν staccare	διάγραμμα diagramma
ἀποτομή apotome	διαλείπειν tralasciare
ἀποφαντικόν <frase> dichiarativa	διασαφητικός dissertivo
ἀποφατικόν negazione	διάστημα intervallo, rapporto, raggio
ἄρα quindi	διδύσθαι essere dato
ἀριθμός numero	διεζευγμένον disgiunzione
ἀρνητικός denegativo	διορίζεσθαι determinare
ἀρχή principio, origine	διορισμός determinazione
ἀσύμμετρος incommensurabile	διπλάσιος doppio
ἄτοπος assurdo	δοθεὶς dato
αὐτοτελής completo	δύναμις potenza
ἄφαιρῆν sottrarre	δύνασθαι potere
	δυνατός possibile
βάσις base	δύο due
βεβηκέναι trovarsi a insistere	

ἐάν qualora	ἢ ο, oppure
εἰ se	ἢ πρὸς τῷ A <l'angolo> su A
εἰ γὰρ / δὲ μή se (infatti) no	ἢ ὑπὸ ABΓ <l'angolo> ABΓ
εἶδος forma, specie	ἡγούμενον antecedente
εἶναι essere	ἥτοι ο (esclusivo e anteposto)
εἷς uno solo	
εἴτε... εἴτε... sia che... sia che...	θέσις posizione
ἐκ δύο μέσων bimediale	θετέον va posto
ἐκ δύο ὀνομάτων binomiale	θεωρεῖν esaminare
ἐκ τοῦ κέντρου raggio	θεώρημα teorema
ἕκαστος ciascuno	
ἐκάτερος uno e l'altro	ἰσάκεις πολλαπλάσιον equimultiplo
ἐκβάλλειν prolungare	ἰσογώνιος equiangolo
ἔκθεσις esposizione	ἰσόπλευρος equilatero
ἐκκεῖσθαι essere fissato	ἴσος uguale
ἐκτιθέναι fissare	ἰσότης uguaglianza
ἐκτός all'esterno	
ἐλάσσων minore	κάθετος perpendicolare
ἐλλείπειν fare difetto	καθολικός generale
ἔλλειψις difetto	(τὸ) καθόλου in generale, generalità
ἐμπίπτειν incidere	καί e, anche
ἔμπροσθεν in precedenza	καὶ ἐπεὶ e poiché
ἐνεστῶς συντελικός presente compiuto	καὶ ἔτι e ancora
ἐνθύμημα entimema	καλεῖν chiamare
ἐντός all'interno	κατὰ secondo
ἐξῆς di séguito	καταγραφή figura
ἐπαγγέλλειν annunciare	κατάλληλος in ordine corrispettivo
ἐπάνω sopra	καταμετρεῖν misurare completamente
ἐπεὶ poiché	κατασκευή costruzione
ἐπειδὴ poiché appunto	καταφατικόν asserzione
ἐπειδὴ περ poiché appunto... proprio	κεῖσθαι essere posto
ἐπεὶ περ poiché... proprio	κεκλίσθαι trovarsi inclinato
ἐπιζευγύναι congiungere	κοινὰ ἔννοιαι nozioni comuni
ἐπιλογίζειν concludere	κύκλος cerchio
ἐπιλογιστικός consuntivo	κύλινδρος cilindro
ἐπίπεδος piano	κῶνος cono
ἐπίσκεψις investigazione	
ἐπιτάττειν sopraordinare	λαμβάνειν prendere, assumere
ἐπιφορικός conclusivo	λαμβανόμενον assunzione
ἕτερος l'uno o l'altro (esclusivo)	λέγω ὅτι dico che
ἔτι ancora	λεκτόν dicibile
εὐθεῖα retta	λείπειν far restare
εὐρεῖν trovare	λείπεσθαι restare
	λήγον consequente
ζητεῖν cercare	λήμμα premessa
	λόγος rapporto, argomento

λογότροπος argomodo	ὄσάκις quante volte
μᾶλλον più	ὅσδηποτοῦν quale mai si voglia
μανθάνειν imparare	ὄσοιδηποτοῦν quanti mai si voglia
μάχη conflitto	ὄταν quando
μέγεθος grandezza	ὄτε... ὄτε... ora... ora...
μείζων maggiore	οὐ(κ) non
μέρη parti	οὐδέ neanche
μέρος parte	οὐδέ... οὐδέ... né... né...
μέσης ἀποτομή πρώτη apotome prima di una mediale	οὐδὲ ἄρα neanche si dà quindi il caso che
μέσης ἀποτομή δευτέρα apotome seconda di una mediale	οὐδέτερος né uno né l'altro
(τὸ) μεταλαμβανόμενον ciò che è sostituito	οὐκ ἄρα non si dà quindi il caso che
μετρῆν misurare	οὐκοῦν e dunque
μή non	οὖν dunque
μηδέτερος né uno né l'altro	οὔτε... οὔτε... né... né...
μῆν a dire il vero	οὔτος costui
μονολήματος ad una premessa	οὐχ ἔχει δέ e non <lo> è
μοχθηρός invalido	οὐχί non
νεώτερος moderno	πάλιν di nuovo
νοεῖν concepire	παραγραφή segno marginale
ὅμοιος simile	παραδιεζευγμένον paradisiunione
ὁμοιότης similitudine	παράδοξος sorprendente
ὁμοίως (δὲ) (e) similmente	παράλληλος parallelo
ὁμοίως (δὲ) δείξομεν (e) similmente dimostreremo	παραπληρωματικός completo
ὁμοίως δὴ δείξομεν del tutto similmente dimostreremo	παραπλήσιον διεζευγμένους quasi-disgiunzione
ὁμοίως (δὲ) δειχθήσεται (e) similmente sarà dimostrato	παρασυνημμένον paracondizionale
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται del tutto similmente sarà dimostrato	πάντως in ogni caso
ὄπερ ἀδύνατον il che è impossibile	πᾶς ogni, tutti (plurale)
ὄπερ ἄτοπον il che è assurdo	περαίνειν concludere validamente
ὄπερ ἔδει δεῖξαι il che si doveva dimostrare	περαντικός valido
ὅποιοσοῦν quale si voglia	περιέχειν comprendere
ὅποσοιδηποτοῦν quanti mai si voglia	πίπτειν cadere
ὅποσοιοῦν quanti si voglia	πλάτος larghezza
ὄπότερος uno o l'altro (inclusivo)	πλευρά lato
ὄποτεροσοῦν uno o l'altro, quale si voglia	πλήν eccetto
ὄπωσδηποτοῦν come mai si voglia	ποδιαία <linea> di un piede
ὄπωσοῦν come si voglia	ποιεῖν fare
ὄρος definizione, termine	πορίζειν produrre
	πόρισμα porisma, corollario
	ποτε prima o poi
	ποτε... ποτε... talora... talora...
	πότε quando
	πράγμα stato di cose
	προβάλλειν proporre
	πρόβλημα problema
	προδεδειγμένος dimostrato prima

προδεικνύναι dimostrare prima  
 προκεῖσθαι essere proposto  
 προσαναγράφειν descrivere oltre  
 προσδιορισμός determinazione aggiuntiva  
 προσεκβάλλειν prolungare avanti  
 προσευρεῖν trovare  
 προσληπτικός coassuntivo  
 πρόσληψις coassunzione  
 προστακτικόν imperativo  
 πρότασις enunciato  
 προτάπτειν anteporre  
 πρότερον in primo luogo, prima  
 προτιθέναι proporre  
 προχωρεῖν avere luogo  
 πρῶτος primo

ῥητή esprimibile

σημεῖον punto  
 στερεός solido  
 στερητικός privativo  
 συλλογισμός sillogismo, argomento  
 συλλογιστικός argomentale  
 σύμμετρος commensurabile  
 σύμπασις totale  
 συμπεπλεγμένον congiunzione  
 συμπεράσμα conclusione  
 συμπλεκτικός congiuntivo  
 συμπλοκή congiunzione  
 σύμπωμα proprietà caratteristica  
 συνάγειν concludere validamente  
 συνακτικός concludente  
 συναμφότερος l'uno con l'altro  
 συνάρτησις connessione  
 σύνδεσμος connettore  
 σύνδυο due a due  
 συνημμένον condizionale  
 σύνθεσις composizione  
 συντιθέναι comporre  
 συνωνύμως sinonimicamente  
 σύστασις formulazione  
 σχῆμα figura

τε... καί... sia... che...

τέμνειν secare  
 τετμήσθαι trovarsi secato  
 τετράγωνον quadrato  
 τετραπλάσιος quadruplo  
 τιθέναι porre  
 τις certo, un certo  
 τμήμα segmento  
 τὸ ἀπὸ τῆς AB il «quadrato descritto» su AB  
 τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ il «rettangolo compreso» da AB, ΒΓ  
 τουτέστι cioè  
 τρίγωνον triangolo  
 τριπλάσιος triplo  
 τρίτος terzo  
 τρόπος modo  
 τυγχάνειν capitare  
 τυχόντως come cāpita

ὑγιής valido  
 ὑπαρξίς esistenza  
 ὑπάρχειν sussistere  
 ὑπεραποφατικός supernegativo  
 ὑπερέχειν eccedere  
 ὑπεροχή eccesso  
 ὑπό sotto  
 ὑπόθεσις supposizione  
 ὑποκείμενος soggiacente  
 ὑποκεῖσθαι essere supposto  
 ὑποτάπτειν subordinare  
 ὑποτείνειν sottendere, tendersi sotto  
 ὑποτιθέναι supporre  
 ὑφιστάναι sussistere

φανερός manifesto  
 φαντασία immaginazione  
 φύσις natura

ψευδής falso  
 ψεῦδος falso

ὡς come  
 ὡσαύτως allo stesso modo  
 ὥστε così che