



HAL
open science

Sur le phénomène de Gibbs et les sommes trigonométriques $\sin x + 1/2 \sin 2x + \dots + 1/n \sin nx$

Thomas Hakon Grönwall

► **To cite this version:**

Thomas Hakon Grönwall. Sur le phénomène de Gibbs et les sommes trigonométriques $\sin x + 1/2 \sin 2x + \dots + 1/n \sin nx$. 2012. hal-00724140

HAL Id: hal-00724140

<https://hal.science/hal-00724140>

Preprint submitted on 18 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur le phénomène de Gibbs et les sommes trigonométriques

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx$$

par

T. H. GRONWALL, à Chicago (U.S.A.)

1 Introduction

Soit $f(x)$ une fonction, dont nous supposons par simplicité qu'elle satisfait pour $0 \leq x \leq 2\pi$ aux conditions de Dirichlet, et que $x = a$ en est un point de discontinuité. Le phénomène de Gibbs consiste, comme l'on sait, en ceci que les n -èmes sommes partielles

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

de la série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x) \quad (2)$$

atteignent au voisinage de $x = a$ des maxima et des minima dont les limites pour $n = \infty$ sont situées hors de l'intervalle compris entre $f(a-0)$ et $f(a+0)$. Ce fait se déduit dans le cas général de la considération du cas particulier

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu x, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (3)$$

et des maxima et minima des sommes partielles

$$\varphi_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx. \quad (4)$$

Ces sommes partielles (4) jouent aussi un rôle fondamental dans les exemples donnés par monsieur Fejér* de fonctions continues, dont les séries de Fourier divergent en des points isolés. Il utilise en outre principalement l'assertion selon laquelle, pour tout x réel et tout n entier

$$|\varphi_n(x)| < M,$$

où M désigne une constante $\leq 3,6$ †.

*. L. Fejér, Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, J. f. Math. **138** (1910), 22-53.

†. L'existence d'une telle constante M , toutefois sans estimation de sa valeur numérique, fut démontrée pour la première fois par monsieur Kneser : Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen, Math. Ann **60** (1905), 402-423.

Dans un mémoire ultérieur, monsieur Fejér[‡] remarque que le maximum absolu de $|\varphi_n(x)|$ est vraisemblablement monotone croissant avec n , et de plus tend vers la limite

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = 1,851936 \dots$$

pour $n = \infty$.

Dans le §2 du présent mémoire, on établit par des moyens tout à fait élémentaires quelques propositions sur les maxima et les minima de $\varphi_n(x)$, et on confirme en particulier la conjecture de monsieur Fejér. Le §3 apporte l'application déjà signalée de ces propositions au phénomène de Gibbs, et dans le §4 cette investigation trouve sa conclusion naturelle avec une discussion plus approfondie des minima de $\varphi_n(x)$.

2 Les maxima et les minima de $\varphi_n(x)$

Il découle immédiatement de la définition de $\varphi_n(x)$ que

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= \varphi_n(\pi) = 0, \\ \varphi_n(x) &= \varphi_n(x + 2\pi) = -\varphi_n(-x), \end{aligned} \tag{5}$$

de telle sorte que nous pouvons restreindre l'étude à l'intervalle

$$0 \leq x < \pi.$$

L'équation (4) fournit de plus

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^n \cos \nu x = \frac{\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \tag{6}$$

d'où nous concluons aussitôt que $\varphi_n(x)$ atteint un maximum aux points

$$x = \frac{2m+1}{n+1}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

et de même un minimum aux points

$$x = \frac{2m}{n}\pi, \quad m = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Sur ces maxima et minima nous allons démontrer quelques propositions, dont la première consiste en :

Proposition 1 *Les valeurs correspondant à un entier m des maxima et minima sont des fonctions monotones croissantes de n :*

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} \left(\frac{2m+1}{n+2}\pi \right) &> \varphi_n \left(\frac{2m+1}{n+1}\pi \right); \\ \varphi_{n+1} \left(\frac{2m}{n+1}\pi \right) &> \varphi_n \left(\frac{2m}{n}\pi \right). \end{aligned}$$

[‡]. L. Fejér, Über gewisse Potenzreihen auf der Konvergenzgrenze, Ber. Ak. München 1910, Nr. 3, 1-17.

Dans la note : Sur les sommes partielles des séries de Fourier, C. R. 23 mai 1910, le même auteur démontre que $M < \frac{\pi}{2} + 1 = 2,57 \dots$

Pour la démonstration, nous remarquons que le point de maximum $\frac{2m+1}{n+1}\pi$ de $\varphi_n(x)$ se trouve entre les points de minima consécutifs $\frac{2m}{n}\pi$ et $\frac{2m+2}{n}\pi$, de même qu'inversement, le point de minimum $\frac{2m}{n}\pi$ se trouve entre les points de maxima consécutifs $\frac{2m-1}{n+1}\pi$ et $\frac{2m+1}{n+1}\pi$. De plus il résulte de (4) que

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \frac{1}{n+1} \sin(n+1)x,$$

de sorte que $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$ pour $x = \frac{2m+1}{n+1}\pi$ et $x = \frac{2m}{n+1}\pi$. On a maintenant

$$\frac{2m+1}{n+2}\pi < \frac{2m+1}{n+1}\pi < \frac{2m+2}{n+1}\pi,$$

et, comme on l'a remarqué plus haut, les termes extrêmes de cet encadrement sont respectivement un point de maximum, et le point de minimum immédiatement suivant, de $\varphi_{n+1}(x)$; ainsi, de l'un à l'autre, cette fonction décroît de façon monotone, de sorte que

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{2m+1}{n+2}\pi\right) > \varphi_{n+1}\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right) = \varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right).$$

On déduit de même de l'encadrement

$$\frac{2m-1}{n+1}\pi < \frac{2m}{n+1}\pi < \frac{2m}{n}\pi,$$

dont les termes extrêmes sont un point de maximum et le point de minimum immédiatement suivant de $\varphi_n(x)$, que

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{2m}{n+1}\pi\right) = \varphi_n\left(\frac{2m}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right).$$

Nous démontrons de plus la

Proposition 2 *Pour $0 < x < 2\pi$, $\varphi_n(x)$ est constamment positif.*

Il suffit évidemment de montrer que, dans l'intervalle considéré, tous les minima de $\varphi_n(x)$ sont positifs. Soit $\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right)$ l'un quelconque d'entre eux; comme $\frac{2m}{n}\pi < \pi$, c'est-à-dire $2m+1 \leq n$, il découle de la proposition 1 :

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) &\geq \varphi_{2m+1}\left(\frac{2m}{2n+1}\pi\right) = \varphi_{2m+1}\left(\pi - \frac{\pi}{2m+1}\right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{2m+1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2m+1}. \end{aligned}$$

Comme on sait, $\frac{\sin x}{x}$ décroît de façon monotone quand x croît de 0 à π , et par conséquent la somme alternée ci-dessus est positive, puisque ses termes décroissent en valeur absolue.

Proposition 3 *Les maxima de $\varphi_n(x)$ forment une suite décroissante :*

$$\varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+3}{n+1}\pi\right), \quad m = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1.$$

Pour la démonstration nous allons d'abord établir une formule auxiliaire. D'après (6) on a

$$\begin{aligned}
& \varphi'_n(x) - \varphi'_n\left(x + \frac{2\pi}{n+1}\right) \\
&= \frac{\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x + \pi - \frac{\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x + \pi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)} \\
&= \frac{\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x - \frac{\pi}{n+1}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)} \\
&= \frac{\cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)} \left[\sin \frac{n}{2}x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right) - \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{n}{2}x - \frac{\pi}{n+1}\right) \right] \\
&= \frac{\cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)} \left[\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{n+1} + \sin \frac{n}{2}x \cos \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{n+1} \right. \\
&\quad \left. - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{n}{2}x \cos \frac{\pi}{n+1} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{n}{2}x \sin \frac{\pi}{n+1} \right] \\
&= \frac{\cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)} \sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{\pi}{n+1} \\
&= \frac{\sin \frac{\pi}{n+1} \sin(n+1)x}{2 \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)},
\end{aligned}$$

ou finalement

$$\varphi'_n(x) - \varphi'_n\left(x + \frac{2\pi}{n+1}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{n+1} \sin(n+1)x}{\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos\left(\frac{\pi}{n+1} + x\right)}. \quad (7)$$

Dans cette équation nous posons $x = \frac{(2m+2)\pi \pm t}{n+1}$ et nous trouvons facilement

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \left(\varphi_n\left(\frac{(2m+2)\pi - t}{n+1}\right) - \varphi_n\left(\frac{(2m+4)\pi - t}{n+1}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\varphi_n\left(\frac{(2m+2)\pi + t}{n+1}\right) - \varphi_n\left(\frac{(2m+4)\pi + t}{n+1}\right) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi}{n+1} \sin t \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{(2m+3)\pi - t}{n+1}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{(2m+3)\pi + t}{n+1}} \right) \\
&> 0 \quad \text{pour } 0 < t < \pi \quad \text{et } 0 < \frac{2m+3}{n+1}\pi < \pi,
\end{aligned}$$

car, sous ces conditions on a $2m+4 \leq n+1$ et

$$\cos \frac{\pi}{n+1} > \cos \frac{(2m+3)\pi - t}{n+1} > \cos \frac{(2m+3)\pi + t}{n+1} > -1.$$

Par suite, l'ensemble de ces fonctions associées aux φ_n croît de façon monotone avec t pour $0 \leq t \leq \pi$; pour $t = 0$ elles s'annulent, sont donc positives pour $t = \pi$, de sorte que

$$\varphi_n \left(\frac{2m+1}{n+1} \pi \right) - \varphi_n \left(\frac{2m+3}{n+1} \pi \right) > \varphi_n \left(\frac{2m+3}{n+1} \pi \right) - \varphi_n \left(\frac{2m+5}{n+1} \pi \right). \quad (8)$$

Soit enfin $\frac{2m+3}{n+1} \pi$ le dernier point de maximum dans l'intervalle entre 0 et π ; on a alors $\frac{2m+5}{n+1} \pi = \pi + x_0$, où $0 < x_0 < \pi$. Selon (5) on a

$$\varphi_n(\pi + x_0) = \varphi_n(x_0 - \pi) = -\varphi_n(\pi - x_0),$$

de sorte que, d'après la proposition 2, $\varphi_n \left(\frac{2m+5}{n+1} \pi \right)$ est négatif, et il résulte de (8) que

$$\varphi_n \left(\frac{2m+1}{n+1} \pi \right) > \varphi_n \left(\frac{2m+3}{n+1} \pi \right) \quad (9)$$

premièrement pour $m = \left[\frac{n-1}{2} \right] - 1$, et l'application répétée de (8) montre que (9) est valable pour $m = \left[\frac{n-1}{2} \right] - 2, \dots, 1, 0$, ce qui démontre notre proposition.

Nous en venons enfin à la proposition mentionnée dans l'introduction.

Proposition 4 *Le maximum absolu de $|\varphi_n(x)|$ pour x réel est égal à $\varphi_n \left(\frac{\pi}{n+1} \right)$ et croît de façon monotone vers la limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \left(\frac{\pi}{n+1} \right) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

En effet, comme le maximum absolu de $|\varphi_n(x)|$ intervient, par suite de (5), en un point de l'intervalle $0 < x < \pi$, il est à chercher, d'après la proposition 2, parmi les maxima de $\varphi_n(x)$ dans l'intervalle en question. D'après la proposition 3, le plus grand d'entre eux provient de $m = 0$ et sa croissance monotone avec n découle de la proposition 1. La valeur de la limite cherchée résulte alors de l'identité

$$\varphi_n \left(\frac{\pi}{n+1} \right) = \frac{\pi}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n+1}}{\frac{n\pi}{n+1}} \right).$$

Nous passons maintenant à la considération du phénomène de Gibbs; l'investigation quelque peu détaillée des minima de $\varphi_n(x)$, que nous n'utiliserons pas dans ce but, suit au §4.

3 Le phénomène de Gibbs

Soit $f(x)$ une fonction qui satisfait aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ et, par suite, est développable en série de Fourier (2) dans cet intervalle. Nous délimitons autour du point de discontinuité a de $f(x)$ un intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$, qui ne contient aucun autre point de discontinuité de $f(x)$. Nous considérons maintenant la courbe C qui est composée des trois morceaux suivants :

Premier morceau : $y = f(x)$, $\alpha \leq x < a$.

Deuxième morceau : le segment rectiligne vertical qui relie les deux points

$$x = a, \quad y = f(a-0) + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

et

$$x = a, \quad y = f(a+0) - \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx \S.$$

Troisième morceau : $y = f(x)$, $a < x \leq \beta$.

Autour de chaque point de la courbe C , nous traçons un cercle de rayon ε arbitrairement petit ; la totalité des points qui appartiennent à l'intérieur d'au moins un de ces cercles forme un ensemble de points, que nous désignons comme l'entourage ε de la courbe C .

Maintenant, pour les sommes partielles (1) de la série de Fourier (2) considérée, le *phénomène de Gibbs* consiste en ceci que, *pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit on peut donner un $n = N(\varepsilon)$ de telle manière que, pour $n \geq N(\varepsilon)$ toutes les courbes*

$$y = s_n(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

sont contenues dans l'entourage ε de la courbe C ; ici, on ne peut remplacer le deuxième morceau de C par aucun segment vertical plus court¶.

Pour la démonstration nous posons

$$\begin{aligned} \varphi(x-a) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu(x-a) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\nu} \sin \nu a \cos \nu x + \frac{1}{\nu} \cos \nu a \sin \nu x \right) \end{aligned} \tag{10}$$

et remarquons d'abord que, en raison de la périodicité du membre de droite de (3)

$$\begin{aligned} \varphi(x-a) &= \frac{1}{2}(\pi + a - x) \quad \text{pour } a < x < 2\pi + a, \\ \varphi(x-a) &= \frac{1}{2}(-\pi + a - x) \quad \text{pour } -2\pi + a < x < a, \end{aligned} \tag{11}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varphi(-0) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \varphi(+0) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Pour les sommes partielles de (10) on a de plus, d'après (5) et la proposition 4

$$-\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx < \varphi_n(x-a) < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \tag{13}$$

pour tout réel x et tout n entier positif, donc on peut choisir un $n = N_1(\varepsilon)$ de telle manière que, pour tout $n \geq N_1(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \varphi_n \left(\left(a - \frac{\pi}{n+1} \right) - a \right) &< -\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{\pi\varepsilon}{4|f(a+0) - f(a-0)|}, \\ \varphi_n \left(\left(a + \frac{\pi}{n+1} \right) - a \right) &> \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi\varepsilon}{4|f(a+0) - f(a-0)|}, \end{aligned} \tag{14}$$

§. On a $\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -0,089490\dots$; par conséquent le segment considéré prolonge le segment joignant $x = a$, $y = f(a-0)$ à $x = a$, $y = f(a+0)$ à partir de chacune des extrémités, et cela dans une même proportion, à savoir environ 9% de sa longueur.

¶. Dans l'exposé de monsieur Bôcher, *Introduction to the theory of Fourier's series*, Annals of mathematics (2) **7** (1906), 81-152, on trouve, il est vrai sous l'hypothèse que $f(x)$ possède en dehors des points de discontinuité une dérivée satisfaisant aux conditions de Dirichlet, une présentation du phénomène de Gibbs par l'estimation des sommes partielles (4) au moyen de l'intégrale de Dirichlet.

Nous posons enfin

$$f(x) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2} + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \varphi(x-a) + f_1(x); \quad (15)$$

on a alors d'après (12) $f_1(a-0) = f_1(a+0) = 0$, et ainsi $f_1(x)$ est continue pour $\alpha \leq x \leq \beta$, de sorte que pour un $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, suffisamment petit,

$$|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{pour} \quad a + \delta \leq x \leq a + \delta.$$

Il est patent que $f_1(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ ^{||}; par conséquent $f_1(x)$ est développable, dans l'intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$, en série de Fourier *uniformément* ^{**} convergente, et soit $s'_n(x)$ sa n -ème somme partielle. Alors on peut trouver un $n = N_2(\varepsilon)$ de telle sorte que, pour tout $n \geq N_2(\varepsilon)$

$$|s'_n(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{pour} \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

et par suite

$$|s'_n(x)| \leq |s'_n(x) - f_1(x)| + |f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour} \quad a - \delta \leq x \leq a + \delta. \quad (16)$$

On a en outre d'après (15)

$$s_n(x) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2} + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \varphi_n(x-a) + s'_n(x), \quad (17)$$

formule que nous pouvons encore écrire

$$\begin{aligned} s_n(x) = f(a-0) + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} & \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \right) \\ & + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \varphi_n(x-a) \right) + s'_n(x), \end{aligned}$$

ou, puisque

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \\ s_n(x) = f(a-0) + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} & \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\ & + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \varphi_n(x-a) \right) + s'_n(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Nous obtenons de même à partir de (17)

$$\begin{aligned} s_n(x) = f(a+0) - \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} & \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\ & + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \left(\varphi_n(x-a) - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \right) + s'_n(x). \end{aligned} \quad (19)$$

||. Car $f(x)$ et $\varphi(x-a)$ peuvent s'écrire, puisqu'elles satisfont aux conditions de Dirichlet, comme différences de deux fonctions monotones, et par conséquent $f_1(x)$ aussi, d'après (15), et l'assertion s'ensuit.

** . D'après un théorème connu de E. Heine, J. f. Math. **71** (1870), p. 357. Cf. É. Picard, Traité d'analyse, 2ème éd., vol. 1, p. 256.

Les égalités (18) et (19) indiquent maintenant que, si n est supérieur ou égal à la fois à $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ et $\frac{\pi}{\delta} - 1$, toutes les courbes $y = s_n(x)$ se trouvent pour $a - \delta \leq x \leq a + \delta$, par suite de (13) et (16), dans l'entourage ε du deuxième morceau de la courbe C , et de plus, eu égard à (14), leurs ordonnées pour $x = a \pm \frac{\pi}{n+1}$ diffèrent de $\frac{\varepsilon}{2}$ au plus des ordonnées des extrémités du segment en question. Pour régler le cas des deux intervalles $\alpha \leq x \leq a - \delta$ et $a + \delta \leq x \leq \beta$, nous remarquons que, d'après le théorème déjà mentionné de Heine, la série de Fourier (2) converge uniformément dans ces intervalles; on peut donc trouver un $n = N_3(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geq N_3(\varepsilon)$, toutes les courbes $y = s_n(x)$ pour $\alpha \leq x \leq a - \delta$ (resp. $a + \delta \leq x \leq \beta$) soient incluses dans l'entourage ε du premier (resp. troisième) morceau de C . En posant $N(\varepsilon)$ égal au plus grand de $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$, $N_3(\varepsilon)$, $\frac{\pi}{\delta} - 1$, notre assertion est donc établie.

4 Étude supplémentaire des minima de $\varphi_n(x)$

Pour revenir maintenant à l'examen des minima de $\varphi_n(x)$ nous écrivons (7) avec $n - 1$ au lieu de n :

$$\varphi'_{n-1}(x) - \varphi'_{n-1}\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{n} \sin nx}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} + x\right)}.$$

De l'identité

$$\begin{aligned} \varphi'_n(x) - \varphi'_n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) &= \varphi'_{n-1}(x) + \cos nx - \varphi'_{n-1}\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \varphi'_{n-1}(x) - \varphi'_{n-1}n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

il découle donc

$$\varphi'_n(x) - \varphi'_n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{n} \sin nx}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} + x\right)}, \quad (20)$$

égalité que nous intégrons $\dagger\dagger$ de $x = \frac{2m\pi}{n}$ à $x = \frac{(2m+2)\pi}{n}$:

$$\begin{aligned} &\varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \left(\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+4}{n}\pi\right)\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{n} \int_{\frac{2m\pi}{n}}^{\frac{2m+2}{n}\pi} \frac{\sin nx \, dx}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} + x\right)} \\ &= -\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \, dx}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{(2m+1)\pi+x}{n}} \\ &= -\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \int_0^\pi \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{(2m+2)\pi-x}{n}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{(2m+2)\pi+x}{n}} \right) \sin x \, dx. \end{aligned}$$

$\dagger\dagger$. Ici aussi, comme pour la proposition 3, on pourrait présenter l'argumentation d'une manière plus élémentaire, en évitant le recours à l'intégration; cela aurait cependant peu de sens, puisque nous allons bientôt faire appel à la formule sommatoire d'Euler, qui n'est plus élémentaire.

Lorsque $0 < \frac{(2m+2)}{n}\pi < \pi$, on a $2m + 3 \leq n$ et

$$\cos \frac{\pi}{n} > \cos \frac{(2m+2)\pi - x}{n} > \cos \frac{(2m+2)\pi + x}{n} > -1 \quad \text{pour } 0 < x < \pi.$$

Partant, l'intégrale est positive et donc

$$\varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) < \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+4}{n}\pi\right). \quad (21)$$

Ainsi, lorsque la différence $\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right)$ est positive pour une certaine valeur de m , alors elle l'est encore pour chaque valeur supérieure de m , jusqu'à $\left[\frac{n-1}{2}\right] - 1$. Par conséquent, deux cas sont possibles : soit les minima forment une suite décroissante pour $m = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, soit il existe un plus grand minimum $\varphi_n\left(\frac{2m_0}{n}\pi\right)$ de sorte que les minima pour $m = 1, 2, \dots, m_0$ forment une suite croissante, et au contraire pour $m = m_0, m_0 + 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$ une suite décroissante. La proposition que nous allons maintenant démontrer fournit une information plus précise.

Proposition 5 *Pour $n \leq 42$ les minima de $\varphi_n(x)$ dans l'intervalle $0 < x < \pi$ forment une suite décroissante. Mais à partir de $n = 43$, il existe un nombre entier m_0 tel que*

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) < \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots, m_0 - 1,$$

alors que

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{pour } m = m_0, m_0 + 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1.$$

Pour ce m_0 , on a l'encadrement^{‡‡}

$$\left[\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\right] \leq m_0 \leq \left[\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\right] + 1,$$

et le plus grand minimum $\varphi_n\left(\frac{2m_0}{n}\pi\right)$ est asymptotiquement égal à

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2n}} + \dots.$$

On a en effet

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) = \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} \sin \frac{2\mu m}{n}\pi = \sum_{\mu=0}^n \frac{1}{\mu} \sin \frac{2\mu m}{n}\pi - \frac{2m\pi}{n},$$

et nous allons appliquer la formule sommatoire d'Euler à cette expression. Celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^n f(a + \mu b) &= \int_0^n f(a + xb) dx + \frac{1}{2}(f(a) + f(a + nb)) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^p \frac{(-1)^{\nu-1} B_\nu}{(2\nu)!} (f^{(2\nu-1)}(a + nb) - f^{(2\nu-1)}(a)) b^{2\nu-1} + R_{p+1}, \end{aligned}$$

‡‡. Des bornes plus précises seront données par les équations (27) et (28).

avec le terme reste

$$R_{p+1} = \Theta \cdot B_{p+1} \frac{b^{2p+1}}{(2p+2)!} M_{2p+2}, \quad -1 < \Theta < 1,$$

où $M_{2p+2} \geq |f^{(2p+2)}(x)|$ pour $a \leq x \leq a + nb$.

Dans la formule ci-dessus, nous posons maintenant $a = 0$, $b = \frac{2m}{n}\pi$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. On aura

$$\int_0^n f(a+xb)dx = \int_0^n \frac{\sin \frac{2mx}{n}\pi}{\frac{2mx}{n}\pi} dx = \frac{n}{2m\pi} \int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

et

$$f^{(2\nu-1)}(a+nb) - f^{(2\nu-1)}(a) = \left(\frac{d^{2\nu-1}}{dx^{2\nu-1}} \frac{\sin x}{x} \right)_0^{2m\pi}.$$

La fonction $\frac{d^{2\nu-1}}{dx^{2\nu-1}} \frac{\sin x}{x}$ est une fonction entière impaire de x , c'est pourquoi elle s'annule pour $x = 0$; de plus on a d'après la formule de Leibnitz

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x^{\lambda+1}} \sum_{\alpha=0}^{\lambda} \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-\alpha+1)}{\alpha!} \cdot (-1)^\alpha \frac{\alpha!}{x^{\alpha+1}} \sin\left(x + (\lambda-\alpha)\frac{\pi}{2}\right),$$

si bien que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^{2\nu-1}}{dx^{2\nu-1}} \frac{\sin x}{x} \right)_0^{2m\pi} &= \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\cdots(2\nu-\alpha)}{(2m\pi)^{\alpha+1}} (-1)^{\alpha+\nu+1} \cos \alpha \frac{\pi}{2} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\cdots(2\nu-2\alpha)}{(2m\pi)^{2\alpha+1}} \cdot (-1)^{\alpha+\nu+1}. \end{aligned}$$

Pour l'estimation du terme reste nous remarquons que

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x^{\lambda+1}} \int_0^x x^\lambda \sin\left(x + \frac{\lambda+1}{2}\pi\right) dx,$$

ce qui est évident, tout simplement par intégration par parties et par induction de λ à $\lambda+1$. Cette formule fournit pour chaque réel $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \frac{\sin x}{x} \right| &\leq \frac{1}{|x|^{\lambda+1}} \int_0^{|x|} |x|^\lambda \left| \sin\left(x + \frac{\lambda+1}{2}\pi\right) \right| dx \\ &< \frac{1}{|x|^{\lambda+1}} \int_0^{|x|} |x|^\lambda dx = \frac{1}{\lambda+1}, \end{aligned}$$

de sorte que nous pouvons prendre simplement $\frac{1}{2p+3}$ pour M_{2p+2} .

Tout cela étant reporté dans la formule sommatoire d'Euler, on obtient après multiplication par $\frac{2m}{n}\pi$:

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) &= \int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{m\pi}{n} \\ &+ \sum_{\nu=1}^p \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^\alpha B_\nu}{(2\nu)! n^{2\nu}} (2\nu-1)(2\nu-2)\cdots(2\nu-2\alpha) \cdot (2m\pi)^{2\nu-2\alpha-1} \\ &+ \Theta \frac{B_{p+1}}{(2p+3)!} \cdot \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^{2p+2}, \quad -1 < \Theta < 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Dans cette formule, posons d'abord $p = 2$, $m = 1$ puis $p = 2$, $m = 2$; en tenant compte des valeurs [†]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1,418158 \dots,$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1,492164 \dots$$

un simple calcul numérique nous apprend que

$$\varphi_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{4\pi}{n}\right) > 0 \quad \text{pour } n \leq 42,$$

$$\varphi_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{4\pi}{n}\right) < 0 \quad \text{pour } n \geq 43.$$

L'existence du nombre entier m_0 pour $n \geq 43$ découle déjà des considérations qui suivent la formule (21), et pour obtenir un premier renseignement concernant l'ordre de grandeur de m_0 en termes de n , nous posons $p = 1$ dans (22), et formons la différence

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) &= \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{n} + \\ &+ \frac{\pi}{6n^2} + \frac{\pi^4}{225n^4} (\Theta_1(m+1)^4 - \Theta_2 m^4), \\ &-1 < \Theta_1, \Theta_2 < 1. \end{aligned} \tag{23}$$

On a de plus

$$\int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2m\pi + x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{(2m\pi + x)((2m+1)\pi + x)},$$

d'où découle aussitôt que

$$\frac{1}{\pi(m+1)(2m+1)} < \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{\pi m(2m+1)},$$

et a fortiori

$$\frac{1}{2\pi(m+1)^2} < \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2\pi m^2} - \frac{1}{4\pi m^3} + \frac{1}{8\pi m^4}. \tag{24}$$

De (23) et (24) il résulte que

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \frac{1}{2\pi(m+1)^2} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} - \frac{2\pi^4(m+1)^4}{225n^4},$$

de sorte que, pour $m < \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} - 1$,

†. Extraites de : S. A. Corey, The evaluation of $\int_0^x \frac{\sin mx}{x} dx$, Am. Math. Monthly **13** (1906), 12-13.

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \frac{\pi}{6n^2} + \frac{2\pi^4}{225n^4} \cdot \frac{4n^2}{16\pi^4} = \frac{\pi}{6n^2} \left(1 - \frac{3}{225\pi}\right) > 0.$$

D'autre part, d'après (23) et (24), et comme $(m+1)^4 < 16m^4$

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) < \frac{1}{2\pi m^2} - \frac{1}{4\pi m^3} + \frac{1}{8\pi m^4} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} - \frac{17\pi^4(m+1)^4}{225n^4},$$

de sorte que, pour $\frac{\sqrt{2n}}{2\pi} < m < \frac{\sqrt{n}}{2\pi}$,

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) &< \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^2}{4n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi^3}{2n^2} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} + \frac{17}{225n^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{4n^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \left(2\pi + \frac{2}{3\pi} + \frac{68}{225\pi^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0 \\ &\text{pour } n \geq 43. \end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) < \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} \right\rfloor - 1,$$

ainsi que

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{pour } m = \left\lceil \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} \right\rceil + 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

et, par suite, m_0 se trouve entre les limites données dans la proposition 5. Si nous tentons d'établir une série asymptotique pour m_0 , le terme principal doit par conséquent être égal à $\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}$. Pour obtenir d'autres termes, nous remarquons que

$$\begin{aligned} &\int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{(2m+1)\pi - x} dx \\ &= \sum_{\nu=1}^2 k \frac{1}{(2m+1)^\nu \pi^\nu} \int_{-\pi}^{\pi} x^{\nu-1} \sin x dx + \frac{1}{(2m+1)^{2k} \pi^{2k}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{2k} \sin x}{(2m+1)\pi - x} dx \\ &= \sum_{\nu=1}^2 k \frac{1 + (-1)^\nu}{(2m+1)^\nu \pi^\nu} \int_0^{\pi} x^{\nu-1} \sin x dx + \frac{1}{(2m+1)^{2k} \pi^{2k}} \int_0^{\pi} \frac{2x^{2k+1} \sin x}{(2m+1)^2 \pi^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est plus petite que

$$\frac{2\pi^{2k}}{(2m+1)^2 \pi^2 - \pi^2} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{2\pi^{2k-1}}{(2m+1)^2 - 1} < \frac{\pi^{2k}}{(2m+1)^2};$$

tandis que nous posons de plus

$$c_\nu = \int_0^{\pi} x^{2\nu-1} \sin x dx$$

donc

$$\begin{aligned} c_1 &= \pi \\ c_\nu &= \pi^{2\nu-1} - (2\nu-1)(2\nu-2)c_{\nu-1}, \end{aligned}$$

et nous obtenons finalement

$$\int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{\nu=1}^k \frac{2c_\nu}{(2m+1)^{2\nu}\pi^{2\nu}} + \frac{\Theta}{(2m+1)^{2k+2}}, \quad 0 < \Theta < 1. \quad (25)$$

Avec $p = 2$, nous formons à partir de (22) la différence

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right),$$

remplaçons l'intégrale qui se présente au moyen de l'expression (25) avec $k = 2$, et posons

$$(2m+1)^2\pi^2 = 2n+h. \quad (26)$$

Il vient alors, par un calcul intermédiaire rapide

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) &= \frac{2\pi}{2n+h} + \frac{2\pi^2-12\pi}{(2n+h)^2} + \frac{\Theta\pi^6}{(2n+h)^3} \\ &\quad - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} + \frac{\pi}{360n^4}(3(2n+h) + \pi^2 - 3) \\ &\quad + \frac{\Theta_1}{4320} \frac{(2n+h)^3}{n^6}, \quad 0 < \Theta < 1, \\ &\quad -1 < \Theta_1 < 1. \end{aligned}$$

En développant suivant les puissances de h , on se rend compte facilement de l'existence d'une constante A telle qu'on ait

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > 0$$

pour

$$h \leq \frac{3\pi-17}{3} - \frac{A}{n},$$

c'est-à-dire, d'après (26), pour

$$m \leq \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} - \frac{1}{2} - \frac{17-3\pi}{12\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{A_1}{2n\sqrt{2n}}, \quad (27)$$

où A_1 est une constante convenablement choisie, ainsi que

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) < 0$$

pour

$$h \leq \frac{3\pi-17}{3} + \frac{A}{n},$$

c'est-à-dire, d'après (26), pour

$$m \geq \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} - \frac{1}{2} - \frac{17 - 3\pi}{12\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{A_1}{2n\sqrt{2n}}, \quad (28)$$

Les termes communs aux membres de droite de (27) et (28) constituent évidemment le début de la série asymptotique pour m_0 , et la méthode se généralise à un ordre arbitraire, mise à part la difficulté rapidement croissante des calculs.

Enfin, pour déduire l'expression asymptotique du plus grand minimum, nous partons de l'égalité

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_{2m\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

d'où découle, par des intégrations par parties répétées

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{(2m\pi)^{2\nu+1}} + (-1)^k (2k+1)! \int_{2m\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{2k+2}} dx,$$

et au moyen d'une estimation adéquate de la dernière intégrale

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{(2m\pi)^{2\nu+1}} + \frac{(-1)^{k-1} \Theta \cdot (2k)!}{(2m\pi)^{2k+1}}, \quad 0 < \Theta < 1. \quad (29)$$

En reportant cela pour $k = 2$ dans la formule (22) avec $p = 2$, et en y posant le résultat $m = m_0 = \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} + \varepsilon$, où $-1 < \varepsilon < 1$ d'après ce qui a été démontré plus haut, nous trouvons par conséquent

$$\varphi_n \left(\frac{2m_0}{n} \pi \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2n}} + \frac{\delta_n}{n}, \quad (30)$$

où δ_n est borné pour tout n .

Chicago, Ill., le 12 avril 1911.

TITRE ORIGINAL

Über die Gibbsche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx$

JOURNAL

Mathematische Annalen **72** (1912), 228-243

Traduit de l'allemand par Michel Balazard