

## hypothèses

$b_1, \dots, b_N, \alpha \in \mathbb{Z}$  ET  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}^D \cup U_D / \forall n, a_n^T c = \frac{n}{\alpha}$  ET  $c = e_D$   
 $K = \{z \in \mathbb{R}^D / \forall n, a_n^T z \geq b_n, c^T z \geq 0\}$  vérifie  $\exists z \in K, cz = 0$

## notations

- $p_n(x) = x - (a_n^T x - b_n)a_n$  ET  $\text{proj}$  est la projection sur un espace vectoriel
- $S(x)$  les indices  $n$  tel que  $\|p_n(x)\|^2$  soit minimal
- $p_-(x), p_s(x)$  sont les points  $x - \lambda c$  qui touche le bord de  $K$  pour  $p_-(x)$  et toucherait le bord s'il n'y avait que les contraintes  $S(x)$  pour  $p_s(x)$
- $O(x)$  est l'ensemble des vecteurs  $v$  ayant même produit scalaire avec les  $a_{S(x)}$
- $d(x, v)$  est le déplacement maximal que peut faire  $x$  dans la direction  $v$  tant que les contraintes actives sont incluses dans  $S(x)$

## algorithme

```
si  $p_-(x) \in K^*$ 
  retourner  $p_-(x)$ 
 $v \leftarrow \text{proj}(-c, O(x))$ 
si  $v \neq 0$  et  $d(x, v) \in K^*$ 
  retourner  $d(x, v)$ 
 $w \leftarrow \text{proj}(a_{S(x)}, O(x) \cap \{z, cz = cx\})$ 
si  $w \neq 0$ 
   $x \leftarrow d(x, w)$ 
  continuer
si  $v = 0$ 
   $x \leftarrow \frac{x + p_-(x)}{2}$ 
  continuer
si  $d(x, v) \in \overset{\circ}{K}$ 
   $x \leftarrow d(x, v)$ 
  continuer
 $x_s \leftarrow d(x, v)$ 
si  $c^T p_-(x) < c^T x_s$ 
   $x \leftarrow p_-(x) + c^T(x_s - p_-(x))c$ 
  continuer
si  $c^T p_s(x) < c^T x_s$ 
   $x \leftarrow d(x, p_s(x) - x_s)$ 
  continuer
si  $c^T p_s(x) = c^T x_s$ 
   $x \leftarrow d(x, \text{solve2D})$ 
  continuer
si  $c^T p_s(x) > c^T x_s$ 
   $x \leftarrow d(x, \text{solve1D})$ 
  continuer
```

## sub routines

- $\text{solve2D}$  : si  $v$  vérifie  $a^T v = 0, c^T v = 0, \mu v > 0$  alors il est possible de trouver facilement  $w = v + \epsilon a + \epsilon c$  tel que  $a^T w = 0, c^T w < 0, \mu w \geq 0$  :  $a^T v = c^T v = 0$  alors  $a^T(v + a - c) > 0$  et  $c^T(v + a - c) < 0$
- $\text{solve1D}$  : si  $c^T p_s(x) > c^T x_s$  mais que  $x_s$  n'est pas optimal, il **semble** que  $\forall n \in S, a_n^T(x - c^T(x - x_s)c) < b_n$  (i.e. ne respecte aucune contrainte de  $S$ ) donc  $w = x_s - x + c^T(x_s - x)c$  est strictement positif avec toutes. On forme alors  $w + \epsilon c$  pour conserver un élément de  $S$  et faire décroître  $c$
- remarque : cas  $c^T p_-(x) \geq c^T x_s$  mais  $c^T p_s(x) \geq c^T x_s$ , on peut commencer par chercher si  $x_s + \lambda(x_s - x + c^T(x_s - x)c) \in \overset{\circ}{K}$