

1 hypothèses

$b_1, \dots, b_N, \alpha \in \mathbb{Z}$ ET $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}^D \cup U_D / \forall n, a_n^T c = \frac{n}{\alpha}$ ET $c = e_D$
 $K = \{z \in \mathbb{R}^D / \forall n, a_n^T z \geq b_n, c^T z \geq 0\} / \exists z \in K, cz = 0$ ET $x_{init} \in K$

2 notation

- $p_n(x) = x - (a_n^T x - b_n)a_n$ ET $p_-(x)$ est le point $x - \lambda c$ qui touche le bord de K ET proj est la projection sur un espace vectoriel
- $S(x)$ les indices n tel que $\|p_n(x)\|^2$ soit minimal
- $O(x)$ est l'ensemble des vecteurs v ayant même produit scalaire avec l'ensemble des $a_{S(x)}$
- $d(x, v)$ est le déplacement maximal que peut faire x dans la direction v tant que les contraintes actives sont incluses dans $S(x)$

3 algorithme

```
si  $p_-(x) \in K^*$ 
  retourner  $p_-(x)$ 
 $v \leftarrow \text{proj}(-c, O(x))$ 
si  $v \neq 0$  et  $d(x, v) \in K^*$ 
  retourner  $d(x, v)$ 
 $w \leftarrow \text{proj}(a_{S(x)}, O(x) \cap \{z, cz = cx\})$ 
si  $w \neq 0$ 
   $x \leftarrow d(x, w)$ 
  continuer
si  $v = 0$ 
   $x \leftarrow \frac{x + p_-(x)}{2}$ 
  continuer
si  $d(x, v) \in K$ 
   $x \leftarrow d(x, v)$ 
  continuer
 $x_0 \leftarrow d(x, v)$ 
si ORACLE donne  $y \in K$  avec  $cy < cx_0$ 
   $x \leftarrow y$ 
  continuer
si ORACLE donne  $\omega$  tel que  $a_n^T \omega \geq 0$  et  $c^T \omega > 0$ 
   $x \leftarrow d(x, \omega)$ 
  continuer
echouer
```

toute la question c'est de savoir si on peut échouer... et si non, du nombre d'orthocentre qu'on va rencontrer

4 oracle

l'oracle propose à minima les points

- $x - c^T(x_0 - x)c$
- $(1 - \lambda)x + \lambda p_-(x)$
- $(1 - \lambda)x_0 \pm \lambda c^T((x - x_0) - c^T(x - x_0)c)$

l'oracle propose à minima les vecteurs

- $\pm x_0 - p_-(x)$
- $\pm x_0 + c^T(x - x_0)c - p_-(x)$
- $\pm x_0 - p_n(x)$
- $\pm x_0 + c^T(x - x_0)c - p_n(x)$

5 pretraitement

La forme générale d'un programme linéaire est $\min_{Ax \geq b, A'x \leq b', A''x = b''} c^T x$. Cependant, $A''x = b''$ est équivalent à $A''x \leq b'' \wedge A''x \geq b''$. Et $A'x \leq b'$ est équivalent à $-A'x \geq -b'$. Donc la forme générale peut être $\min_{Ax \geq b} c^T x$. Il est connu que résoudre le primal dual $Ax \geq b \wedge A^T y \geq c \wedge c^T x = b^T y$ permet de résoudre $\min_{Ax \geq b} c^T x$ (si pas de solution au primal dual c'est que le problème était vide ou non borné, sinon si (x, y) est solution du primal dual, x est solution du primal). Notons $A'''x' \geq b'''$ ce nouveau problème. On peut résoudre à la place $\min_{A'''x' + Iz' \geq b'''} z$ ($z \in \mathbb{Q}$). Puis on peut prendre le primal dual de ce nouveau problème (qui a l'avantage d'avoir forcément une solution) : notons le $A''''x'' \geq b''''$. Alors $\min_{A''''x'' + Iz' \geq b''''} z'$ ($z' \in \mathbb{Q}$) valide la plupart des hypothèses (point trivial dans K et possibilité de tester le fait d'être une solution).

Or, la seule vraie exigence de l'algorithme est d'avoir un produit scalaire normalisé différent avec chaque contrainte : en effet, il n'est absolument pas nécessaire d'avoir des vecteurs unitaires pour pouvoir définir les objets définis.

Les vecteurs unitaires servent juste à écrire et raisonner plus facilement. Notons cependant que comme tout nombre s'écrit comme somme de 4 carrés, il est toujours possible de pratiquer le pretraitement suivant : Rajouter 4 variables z et 8 contraintes $\mu z + \rho z \geq 0, -\mu' z + \rho' z \geq 0$ ainsi $z = 0$ force ces nouvelles variables à 0 μ et ρ doivent être choisis de sorte à avoir des triplets de pythagore (e.g. $3^2 + 4^2 = 5^2$) et donc que ces nouvelles contraintes elle-même respectent les hypothèses de vecteur unitaire et avec un produit scalaire avec c différent 2 à 2 pour les anciennes contraintes, il suffit alors de pondérer le z et mettre les coefficients qui vont bien pour que l'ensemble des sommes des carrés soit égales à un carré parfait commun (c'est là qu'on a besoin que tout nombre s'écrit comme somme de 4 carrés)