



**HAL**  
open science

# Densité des orbites des trajectoires browniennes sous l'action de la transformation de Lévy

Jean Brossard, Christophe Leuridan

► **To cite this version:**

Jean Brossard, Christophe Leuridan. Densité des orbites des trajectoires browniennes sous l'action de la transformation de Lévy. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, 2012, 48 (2), pp.477-517. 10.1214/11-AIHP463 . hal-00722138

**HAL Id: hal-00722138**

**<https://hal.science/hal-00722138>**

Submitted on 1 Aug 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Densité des orbites des trajectoires browniennes sous l'action de la transformation de Lévy

Jean BROSSARD et Christophe LEURIDAN

1<sup>er</sup> août 2012

## Résumé

Etant donné une transformation mesurable  $T$  d'un espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, \pi)$  dans lui-même préservant la mesure, et une partie  $B \in \mathcal{E}$ , nous donnons une condition suffisante pour que l'orbite de  $\pi$ -presque tout point visite  $B$  : il suffit que  $B$  soit accessible depuis  $\pi$ -presque tout point pour une chaîne de Markov de noyau  $K$ , où  $K(\cdot, \cdot)$  est une version régulière de la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $T(X)$  lorsque  $X$  est une variable aléatoire de loi  $\pi$ .

Nous appliquons ensuite ce fait général à la transformation de Lévy, qui à un mouvement brownien  $W$  associe le mouvement brownien  $|W| - L$  où  $L$  est le temps local en 0 de  $W$ . Cela nous permet de démontrer le théorème de Malric : l'orbite de presque toute trajectoire visite tout ouvert non vide de l'espace de Wiener  $\mathbf{W} = \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$  pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

*Classification mathématique* : 37A50, 28D05, 60J65.

*Mots-clés* : mouvement brownien, transformation de Lévy, densité des orbites, récurrence, ergodicité.

## Introduction

Soit  $W$  un mouvement brownien dans  $\mathbf{R}$  issu de 0. Le temps local en 0 de  $W$ , défini par la formule de Tanaka,

$$|W_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) dW_s + L_t$$

est aussi la densité en 0 du temps d'occupation : pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$L_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|W_s| \leq \epsilon\}} ds \quad \text{p.s.}$$

On vérifie que la martingale locale  $\hat{W} = \int_0^\cdot \operatorname{sgn}(W_s) dW_s$  est un mouvement brownien en remarquant que pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\langle \hat{W}, \hat{W} \rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)^2 ds = t \quad \text{p.s.}$$

La transformation de Lévy est la transformation qui au mouvement brownien  $W$  associe le mouvement brownien  $\hat{W}$ .

Plus précisément, soit  $\mathbf{W}$  l'ensemble des trajectoires continues de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , nulles en 0. La transformation de Lévy associe à presque toute trajectoire  $w \in \mathbf{W}$  la trajectoire  $\mathbf{T}(w) = \hat{w}$  définie par

$$\hat{w}(t) = |w(t)| - l(t, w),$$

avec

$$l(t, w) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{I}_{|w(s)| \leq \epsilon} ds.$$

Lorsque l'application  $l(\cdot, w)$  ainsi définie n'est pas continue, on peut poser par exemple  $\hat{w} = 0$  pour que la transformation de Lévy soit bien définie comme application de  $\mathbf{W}$  dans  $\mathbf{W}$ , mais cela est sans importance.

La transformation de Lévy préserve la mesure de Wiener. Dans [7], D. Revuz et M. Yor posent la question de savoir si elle est ergodique. Cette question difficile n'est toujours pas résolue, mais des avancées ont été faites par M. Malric. Dans [1], Malric démontre que pour presque toute trajectoire  $w \in \mathbf{W}$ , l'ensemble des zéros de  $w$  et de ses images successives par la transformation de Lévy est dense dans  $\mathbf{R}_+$ .

Par la suite, Malric a démontré un résultat nettement plus difficile : pour presque toute trajectoire  $w \in \mathbf{W}$ , l'orbite de  $w$  sous l'action de la transformation de Lévy est dense dans  $\mathbf{W}$ , pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Ce résultat s'approche de l'ergodicité et serait une conséquence de l'ergodicité si elle était démontrée. Ce résultat fait l'objet de l'article [5] paru à ESAIM PS.

Entre 2007 et 2009, nous avons écrit une autre démonstration du théorème de Malric, dans laquelle les preuves des résultats intermédiaires sont indépendantes les unes des autres, et qui fait l'objet du présent article. Grâce au caractère très modulaire de notre démonstration, nous avons mis en évidence un procédé d'approximation des trajectoires facile à comprendre, dont les étapes sont résumées sur la figure 8. Même si le procédé est clair sur le dessin, nous nous sommes attachés à écrire en détail les démonstrations des résultats intermédiaires.

Le point de départ est une idée déjà sous-jacente dès les premières versions de l'article de Malric [2, 3, 4]. Il nous a paru intéressant d'en dégager la généralité en établissant dans la première partie un raffinement du théorème de récurrence de Poincaré et son corollaire suivant.

### Corollaire 3 (Condition suffisante de récurrence)

*Soient  $T$  une transformation mesurable d'un espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, \pi)$  dans lui-même préservant la mesure.*

*Supposons que pour toute variable aléatoire  $X$  de loi  $\pi$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $T(X)$  possède une version régulière  $K(\cdot, \cdot)$ .*

*Pour que l'orbite de  $\pi$ -presque tout point visite une infinité de fois une partie  $B \in \mathcal{E}$ , il suffit que  $B$  soit accessible depuis  $\pi$ -presque tout point pour une chaîne de Markov de noyau  $K$ .*

Remarquons que  $K$  est le noyau de transition de la chaîne de Markov stationnaire indexée par  $-\mathbf{N}$  obtenue en retournant la suite de variables aléatoires  $(T^n(X))_{n \in \mathbf{N}}$  pour une variable aléatoire  $X$  de loi  $\pi$ .

Dans le cas où  $T$  est la transformation de Lévy, l'évolution pas à pas de cette chaîne de Markov est simple à décrire : partant d'une trajectoire  $w \in \mathbf{W}$ , on lui retranche son minimum courant  $\underline{w}$  (défini par  $\underline{w}(t) = \min\{w(s) ; s \in [0, t]\}$ ). Puis on multiplie les excursions de la trajectoire positive  $w - \underline{w}$  par des signes pris au hasard.

D'après la condition suffisante de récurrence énoncée ci-dessus, il s'agit de démontrer que si  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbf{W}$ , la chaîne de Markov issue d'une trajectoire typique de  $\mathbf{W}$  visite  $U$  avec probabilité strictement positive. Concrètement, on montre qu'on atteint  $U$  en un nombre fini d'étapes en imposant la valeur d'un nombre fini de signes à chaque étape.

Cette méthode a déjà été utilisée par Malric avec une formulation différente, puisque Malric utilise des « remontées de Lévy » tandis que nous raisonnons avec des chaînes de Markov. Nous expliquons le lien entre ces notions à la section 9. Néanmoins notre démonstration s'écarte nettement de celle de Malric dans la mise en œuvre de cette méthode : à l'aide de la propriété de Markov, nous décomposons l'accessibilité des ouverts en accessibilités successives plus faciles à montrer. La preuve de ces accessibilités intermédiaires utilise essentiellement trois idées nouvelles : l'introduction d'une topologie sur  $\mathbf{W}$  permettant le contrôle des zéros, l'utilisation de transformations sur les mouvements browniens réfléchis, et l'exploitation de leur continuité presque partout. Voyons cela un peu plus en détail.

**Introduction d'une nouvelle topologie sur  $\mathbf{W}$ .** Tout d'abord, nous introduisons une topologie plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts pour pouvoir contrôler les zéros des trajectoires et jouer librement avec les signes. Cette topologie, que nous appelons *topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec contrôle des zéros (CUCZ)* est associée aux écarts  $d_t^{CU}$  et  $d_t^{CZ}$  définis ci-dessous. Pour  $f, g \in \mathbf{W}$ , on note  $Z(f)$ ,  $Z(g)$  les ensembles des zéros de  $f$  et de  $g$  et  $Z_t(f) = Z(f) \cap [0, t]$ ,  $Z_t(g) = Z(g) \cap [0, t]$ . On pose alors

$$d_t^{CU}(f, g) = \|g - f\|_{[0, t]} = \max\{|g(s) - f(s)| ; s \in [0, t]\},$$

$$d_t^{CZ}(f, g) = \inf\{\delta > 0 : Z_{t-\delta}(f) \subset Z(g) + ] - \delta, \delta[ \text{ et } Z_{t-\delta}(g) \subset Z(f) + ] - \delta, \delta[\}.$$

Autrement dit, l'inégalité  $d_t^{CZ}(f, g) < \delta$  signifie que tout zéro de  $f$  antérieur à  $t - \delta$  est à distance inférieure à  $\delta$  d'un zéro de  $g$ , et inversement.

Nous montrons que la topologie CUCZ possède une base dénombrable d'ouverts, de la forme

$$V_t(f, \rho, \delta) = \{g \in V : d^{CU}(f, g) < \rho ; d^{CZ}(f, g) < \delta\}.$$

avec  $f \in \mathbf{W}$ ,  $t > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$ . Nous montrons que ces ouverts sont accessibles depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}$ , ce qui permet de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1. (Densité des orbites pour la topologie CUCZ)**

*L'orbite de presque toute trajectoire sous l'action de la transformation de Lévy est dense pour la topologie CUCZ et a fortiori pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

**Transformations sur les mouvements browniens réfléchis.** En fait, nous travaillons davantage sur les mouvements browniens réfléchis que sur les mouvements browniens.

Nous introduisons une action du groupe  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$  sur  $\mathbf{W} : (e, w) \mapsto e \cdot w$ . L'action d'une famille de signes  $e \in E$  sur une trajectoire  $w \in \mathbf{W}$  consiste, une fois les excursions de  $w$  numérotées à l'aide des rationnels strictement positifs, à multiplier par  $e(q)$  l'excursion numérotée par le rationnel  $q$ .

Mais au lieu de travailler avec la « transformation inverse de Lévy » qui, à un mouvement brownien  $W$  et une famille  $\varepsilon$  de signes choisie au hasard indépendamment de  $W$  associe le mouvement brownien  $\varepsilon \cdot (W - \underline{W})$ , on regarde plutôt la transformation  $F$  qui, à un mouvement brownien réfléchi  $R$  et une famille  $\varepsilon$  de signes choisie au hasard indépendamment de  $R$  associe le mouvement brownien réfléchi  $F(\varepsilon, R) = \varepsilon \cdot R - \underline{\varepsilon \cdot R}$ . Nous montrons que l'accessibilité des ouverts de  $\mathbf{W}$  par la transformation inverse de Lévy se ramène à l'accessibilité des ouverts de  $\mathbf{W}_+$  pour la topologie CUCZ par la transformation  $F$ .

Nous utiliserons aussi la « transformation  $F$  après un instant  $a$  », notée  $F_a$ , qui préserve les trajectoires jusqu'à leur premier zéro après  $a$  et agit comme  $F$  après cet instant. La préservation par  $F_a$  du début des trajectoires (au moins sur l'intervalle  $[0, a]$ ) est extrêmement utile et simplifie bien des démonstrations.

**Utilisation de la continuité presque partout.** Nous montrons que les transformations  $F_a$  sont continues presque partout de  $E \times \mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$ , lorsque  $E$  est muni de la topologie produit et  $\mathbf{W}_+$  de la topologie CUCZ. Cette propriété de continuité est très utile puisqu'elle nous permet de remplacer certains arguments de nature probabiliste par des arguments de nature topologique. Elle nous permet notamment de montrer que si  $b \geq a \geq 0$ , l'accessibilité d'un ouvert de  $\mathbf{W}_+$  par  $F_b$  entraîne son accessibilité par  $F_a$  et son accessibilité par  $F$  (proposition 38).

## Plan de l'article

Dans la première partie, nous démontrons des résultats généraux permettant de montrer que les orbites sous l'action d'une transformation préservant une probabilité sur un espace possédant une base dénombrable d'ouverts sont presque toutes denses.

Dans la deuxième partie, nous appliquons ce résultat à la transformation de Lévy en introduisant la chaîne de Markov stationnaire sur  $\mathbf{W}$  obtenue par inversion de la transformation de Lévy. Nous introduisons aussi une chaîne de Markov stationnaire sur  $\mathbf{W}_+$  associée à la transformation  $F$  décrite plus haut et admettant comme mesure invariante la loi du mouvement brownien réfléchi. Nous verrons par la suite qu'il est plus commode de travailler avec cette seconde chaîne de Markov.

Les trois parties suivantes sont consacrées à l'affûtage des outils permettant de montrer le théorème 1 (densité de presque toute orbite sous l'action de la transformation de Lévy) :

- dans la troisième partie, nous introduisons la topologie de la convergence uniforme avec contrôle des zéros. Nous montrons en particulier que les fonctions positives, continues, affines par morceaux, nulles en 0 sont denses dans  $\mathbf{W}_+$  pour cette topologie. Pour montrer le théorème 1, nous sommes ramenés (grâce au corollaire 14) à montrer que tout ouvert non vide de  $\mathbf{W}_+$  est accessible depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$  par la chaîne de Markov que nous avons construite sur  $\mathbf{W}_+$ .
- dans la quatrième partie, nous établissons des résultats de continuité presque partout pour la topologie de la convergence uniforme avec contrôle des zéros, notamment la continuité des transformations «  $F$  après  $a$  ».
- dans la cinquième partie, nous introduisons la notion d'accessibilité d'un ouvert ou d'un « presque-ouvert » par les transformations «  $F$  après  $a$  ». Nous utilisons ces résultats de continuité presque partout pour établir des propriétés de cette notion qui nous seront très utiles, notamment le résultat de comparaison des accessibilités

(proposition 41).

Dans les trois dernières parties, nous étudions l'accessibilité de certains ouverts depuis presque toute trajectoire d'autres ouverts. Mises bout-à-bout, ces accessibilités constituent avec le corollaire 14 la preuve du théorème 1 :

- dans la sixième partie, nous montrons que tout voisinage de la trajectoire nulle est accessible par  $F$  depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$ . L'utilisation de la transformation  $F_a$  au lieu de la transformation  $F$  permet donc de « remettre à zéro » une trajectoire après son premier zéro après  $a$  en préservant la trajectoire avant cet instant.
- dans la septième partie, nous montrons comment construire des excursions de hauteur voulue dans un intervalle de temps donné, et nous établissons le lemme du vérin, qui permet de soulever une trajectoire d'une hauteur donnée sur un intervalle donné.
- dans la huitième et dernière partie, nous utilisons le lemme de remise à zéro et le lemme du vérin pour montrer comment approcher n'importe quelle fonction positive, continue, affine par morceaux, nulle en 0, ce qui complète la preuve.

## 1 Résultats généraux

### 1.1 Récurrence et accessibilité

Soit  $T$  une transformation d'un espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, \pi)$  dans lui-même préservant la probabilité  $\pi$ .

Supposons que pour toute variable aléatoire  $X$  de loi  $\pi$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $T(X)$  possède une version régulière  $K(\cdot, \cdot)$ .

Pour  $B \in \mathcal{E}$ , notons :

- $U(B)$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que l'orbite de  $x$  sous l'action de  $T$  visite  $B$ ,

$$U(B) = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} T^{-k}(B) ;$$

- $R(B)$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que l'orbite de  $x$  sous l'action de  $T$  visite  $B$  une infinité de fois,

$$R(B) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} T^{-k}(B) ;$$

- $A(B)$  l'ensemble des états depuis lesquels  $B$  est accessible pour une chaîne de Markov de noyau  $K(\cdot, \cdot)$ ,

$$A(B) = \{x \in E : \exists n \in \mathbf{N} : K^n(x, B) > 0\}.$$

Le théorème de récurrence de Poincaré (voir [6]) affirme que  $B \subset R(B)$   $\pi$ -presque sûrement. Comme  $A(B)$  contient  $B$ , la proposition ci-dessous renforce ce résultat.

#### **Proposition 2. (Lien entre récurrence et accessibilité)**

*Sous les hypothèses ci-dessus, la probabilité  $\pi$  est invariante pour le noyau  $K$  et  $A(B) \subset U(B) = R(B)$   $\pi$ -presque sûrement.*

Démonstration. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une chaîne de Markov de loi initiale  $\pi$  et de noyau de transition  $K(\cdot, \cdot)$ .

1. Montrons d'abord que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $X_n$  a pour loi  $\pi$  et  $T^n(X_n) = X_0$  presque sûrement.

Soit  $Y$  une variable aléatoire de loi  $\pi$ . Alors  $T^n(Y), T^{n-1}(Y), \dots, T(Y), Y$  ont pour loi  $\pi$  et pour tout  $k \in [0, \dots, n-1]$ , on a l'égalité des lois conditionnelles

$$\mathcal{L}(T^k(Y)|T^n(Y), \dots, T^{k+1}(Y)) = \mathcal{L}(T^k(Y)|T^{k+1}(Y)) = K(T^{k+1}(Y), \cdot).$$

Par conséquent,  $(T^n(Y), T^{n-1}(Y), \dots, Y)$  a même loi que  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ . En particulier,  $(X_0, X_n)$  a même loi que  $(T^n(Y), Y)$ , ce qui entraîne le résultat annoncé.

2. L'égalité presque sûre  $U(B) = R(B)$  vient du fait que  $R(B)$  est l'intersection des parties

$$R_n(B) = \bigcup_{k \geq n} T^{-k}(B) = \bigcup_{l \in \mathbf{N}} T^{-(n+l)}(B) = T^{-n}(U(B))$$

qui sont emboîtées et de même probabilité.

3. Montrons l'inclusion presque sûre  $A(B) \subset U(B)$ . Comme  $T^n(X_n) = X_0$  presque sûrement,

$$\{X_0 \in U(B)\} \subset \{X_n \in U(B)\} \text{ p.s..}$$

Mais ces événements ont même probabilité, puisque  $X_n$  a même loi que  $X_0$ . Ils sont donc égaux presque sûrement. En particulier,

$$\{X_0 \in U(B)\} \supset \{X_n \in B\} \text{ p.s.,}$$

d'où en conditionnant par rapport à  $X_0$  :

$$\mathbf{1}_{U(B)}(X_0) \geq P[X_n \in B | \sigma(X_0)] = K^n(X_0, B) \text{ p.s.}$$

Ainsi,

$$\mathbf{1}_{U(B)}(X_0) \geq \sup_{n \in \mathbf{N}} K^n(X_0, B) \text{ p.s.,}$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

De la proposition précédente, on déduit immédiatement une condition suffisante de récurrence pour une partie fixée.

### Corollaire 3. (Condition suffisante de récurrence)

*Soient  $T$  une transformation mesurable d'un espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, \pi)$  dans lui-même préservant la mesure.*

*Supposons que pour toute variable aléatoire  $X$  de loi  $\pi$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $T(X)$  possède une version régulière  $K(\cdot, \cdot)$ .*

*Pour que l'orbite de  $\pi$ -presque tout point visite une infinité de fois une partie  $B \in \mathcal{E}$ , il suffit que  $B$  soit accessible depuis  $\pi$ -presque tout point par une chaîne de Markov de noyau  $K$ .*

### Remarques

- Comme  $\pi$  est invariante pour le noyau  $K$ , on peut construire une chaîne de Markov stationnaire indexée par  $\mathbf{Z}$  de noyau  $K$  en munissant l'espace canonique  $S^{\mathbf{Z}}$  d'une probabilité ad hoc. L'opérateur de décalage  $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \mapsto (x_{n-1})_{n \in \mathbf{Z}}$  sur cet espace est l'extension naturelle de  $(E, \mathcal{E}, \pi, T)$  : voir par exemple [6].

- Les « mouvements browniens remontés » introduits par Malric dès la première version [2] sont proches de cette chaîne de Markov. Le corollaire 3 ci-dessus joue dans notre article le même rôle que la proposition 1 dans celui de Malric [2].

Lorsque  $E$  est un espace topologique possédant une base dénombrable d'ouverts, on obtient une condition suffisante de densité des orbites.

**Corollaire 4. (Condition suffisante de densité des orbites)**

*Soient  $E$  un espace topologique possédant une base dénombrable d'ouverts,  $\mathcal{E}$  sa tribu borélienne,  $\pi$  une probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$  et  $T$  une transformation mesurable de  $(E, \mathcal{E}, \pi)$  dans lui-même préservant la mesure.*

*Supposons que pour toute variable aléatoire  $X$  de loi  $\pi$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $T(X)$  possède une version régulière  $K(\cdot, \cdot)$ .*

*Pour que l'orbite de  $\pi$ -presque tout point soit dense dans  $E$ , il suffit que tout ouvert de  $E$  soit accessible depuis  $\pi$ -presque tout point par une chaîne de Markov de noyau  $K$ .*

**1.2 Utilisation de la propriété de Markov**

La propriété de Markov permet d'établir l'accessibilité d'une partie en décomposant la démonstration en plusieurs étapes.

**Lemme 5. (Accessibilités successives)**

*Soit  $K(\cdot, \cdot)$  un noyau de transition sur  $(E, \mathcal{E})$  ayant comme probabilité invariante  $\pi$ .*

*Soient  $B_0, B_1, B_2 \in \mathcal{E}$  de mesure strictement positive pour  $\pi$ .*

*Si  $B_2$  est accessible depuis  $\pi$ -presque tout point de  $B_1$  et  $B_1$  est accessible depuis  $\pi$ -presque tout point de  $B_0$ , alors  $B_2$  est accessible depuis  $\pi$ -presque tout point de  $B_0$ .*

Démonstration. Pour toute probabilité  $\mu$  sur  $E$ , notons  $\mathbf{P}^\mu$  la probabilité sur l'espace canonique  $E^\mathbf{N}$  faisant du processus canonique  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une chaîne de Markov de noyau de transition  $K(\cdot, \cdot)$  et de loi initiale  $\mu$ . Notons  $\tau_1$  et  $\tau_2$  les temps d'atteinte de  $B_1$  et  $B_2$ . Pour  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ , notons  $A_{i,j} = \{x \in B_i : \mathbf{P}^x[\tau_j < +\infty] = 0\}$ . Par hypothèse,  $\pi(A_{0,1}) = 0$  et  $\pi(A_{1,2}) = 0$ . Il s'agit de montrer que  $\pi(A_{0,2}) = 0$ .

On commence par vérifier que la loi de  $X_{\tau_1}$  sous  $\mathbf{P}^\pi[\cdot | \tau_1 < +\infty]$  est absolument continue par rapport à  $\pi$ . En effet, si  $A \in \mathcal{E}$  vérifie  $\pi(A) = 0$ , alors

$$\mathbf{P}^\pi[X_{\tau_1} \in A ; \tau_1 < +\infty] \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}^\pi[X_n \in A] = \sum_{n \in \mathbf{N}} \pi(A) = 0,$$

ce qui montre l'absolue continuité. En particulier,  $\mathbf{P}^{X_{\tau_1}}[\tau_2 < +\infty] > 0$   $\mathbf{P}^\pi$ -presque sûrement sur l'événement  $\{\tau_1 < +\infty\}$  puisque  $X_{\tau_1}$  est à valeurs dans  $B_1$ .

Par ailleurs, par en utilisant la définition de  $A_{0,2}$  et la propriété de Markov au temps  $\tau_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{A_{0,2}} \mathbf{P}^x[\tau_1 \leq \tau_2 < +\infty] \pi(dx) \\ &= \mathbf{P}^\pi[X_0 \in A_{0,2} ; \tau_1 \leq \tau_2 < +\infty] \\ &= \mathbf{E}^\pi \left[ \mathbf{I}_{[X_0 \in A_{0,2}]} \mathbf{I}_{[\tau_1 < +\infty]} \mathbf{P}^{X_{\tau_1}}[\tau_2 < +\infty] \right]. \end{aligned}$$



Comme  $\mathbf{P}^{X_{\tau_1}}[\tau_2 < +\infty] > 0$   $\mathbf{P}^\pi$ -p.s. sur l'événement  $\{\tau_1 < +\infty\}$ , on a ainsi

$$\mathbf{P}^\pi[X_0 \in A_{0,2} ; \tau_1 < +\infty] = 0.$$

Autrement dit,  $\pi(A_{0,2} \setminus A_{0,1}) = 0$ , d'où  $\pi(A_{0,2}) = 0$ . □

## 2 Inversion de la transformation de Lévy

### 2.1 Rappels sur la transformation de Lévy

Soit  $\mathbf{W}$  l'ensemble des trajectoires continues de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , nulles en 0. On munit  $\mathbf{W}$  de la tribu  $\mathcal{W}$  engendrée par les applications coordonnées et de la mesure de Wiener. La tribu  $\mathcal{W}$  est aussi la tribu borélienne pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Pour tout  $w \in \mathbf{W}$ , on note  $\underline{w}$  l'application de  $\mathbf{W}$  définie par

$$\underline{w}(t) = \min\{w(s) ; s \in [0, t]\}.$$

La transformation de Lévy est une application mesurable de  $\mathbf{W}$  dans  $\mathbf{W}$ , préservant la mesure de Wiener : si  $W$  est un mouvement brownien dans  $\mathbf{R}$  issu de 0, son image par la transformation de Lévy est le mouvement brownien

$$\hat{W} = \int_0^\cdot \text{sgn}(W_s) dW_s = |W| - L$$

où  $L$  est le temps local en 0 du mouvement brownien  $W$ , qu'on peut définir comme densité de temps d'occupation :

$$L_t = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{I}_{[|W_s| \leq \epsilon]} ds.$$

Pour appliquer les résultats de la première partie, il nous faut déterminer la loi de  $W$  sachant  $\hat{W}$ . L'égalité de processus  $\hat{W} + L = |W|$  et le fait que le temps local  $L$  ne croisse que sur l'ensemble des zéros de  $W$  entraîne l'égalité  $L_t = \max\{-\hat{W}_s ; 0 \leq s \leq t\}$  pour tout  $t$ , d'où

$$|W_t| = \hat{W}_t - \underline{\hat{W}}_t \text{ avec } \underline{\hat{W}}_t = \min\{\hat{W}_s ; 0 \leq s \leq t\}.$$

Cette égalité montre que le mouvement brownien réfléchi  $|W|$  est une fonction mesurable de  $\hat{W}$ . Mais la définition de  $\hat{W}$  montre que  $\hat{W}$  est une fonction mesurable de  $|W|$ . Ces processus engendrent donc la même tribu.

La transformation de Lévy perd donc de l'information, plus précisément les signes des excursions de  $W$ . Nous allons montrer que ces signes sont indépendants et de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$  conditionnellement à  $W$ . Mais pour donner un sens précis à cette affirmation, nous devons numéroter les excursions.

### 2.2 Numérotation des excursions d'une trajectoire de $W$

Dans toute la suite, nous munirons l'ensemble  $\mathbf{Q}_+^*$  des rationnels strictement positifs d'un ordre tel que

- toute partie non vide de  $\mathbf{Q}_+^*$  possède un premier élément ;

– avant tout élément de  $\mathbf{Q}_+^*$ , il n’y a qu’un nombre fini d’éléments.

Par exemple, on ordonne les rationnels suivant la somme du numérateur et du dénominateur puis, pour une somme fixée, par numérateurs croissants :

$$\mathbf{Q}_+^* = \left\{ \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{1}; \frac{5}{1}; \dots \right\}.$$

Si  $A$  est une partie non vide de  $\mathbf{Q}_+^*$ , nous noterons  $q(A)$  son premier élément.

Nous pouvons ainsi numérotter les excursions des trajectoires  $w \in \mathbf{W}$  par des rationnels, en posant  $Q_t(w) = q(\mathbf{Q}_+^* \cap I_t(w))$  si  $w(t) \neq 0$ , où  $I_t(w)$  est l’intervalle ouvert d’excursion enjambant  $t$ . On pose  $Q_t(w) = 0$  si  $w(t) = 0$ . Remarquons que tous les rationnels ne servent pas dans la numérotation.

### 2.3 Action d’une famille de signes sur un trajectoire de $\mathbf{W}$

On définit une action du groupe  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$  sur  $\mathbf{W}$  de la façon suivante : l’action d’une famille de signes  $e \in E$  sur une trajectoire  $w$  est de multiplier chaque excursion de  $w$  par  $e(q)$  où  $q$  est le « numéro de l’excursion ». Plus précisément, pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$(e \cdot w)(t) = e(Q_t(w))w(t),$$

avec la convention  $e(0) = 0$ . On remarque que la trajectoire  $e \cdot w$  ne dépend que de  $w$  et des signes  $e(q)$  pour les rationnels  $q$  numérotant les excursions de  $w$ .

Cette action du groupe va nous servir à construire un mouvement brownien de valeur absolue  $R$  donnée à l’aide d’une famille de signes de loi uniforme sur  $E$ , indépendante de  $R$ . Ce résultat fait l’objet de la proposition 7 ci-dessous. Pour le démontrer, commençons par établir un lemme simple.

#### Lemme 6. (Changement de signe d’une excursion)

*Soit  $W$  un mouvement brownien dans  $\mathbf{R}$  issu de 0. Soit  $q > 0$  fixé. Le processus  $W'$  obtenu à partir de  $W$  en changeant le signe de l’excursion enjambant  $q$  est encore un mouvement brownien.*

Démonstration. Nous donnons une démonstration élémentaire qui ne repose pas sur la théorie des excursions.

Par invariance d’échelle du mouvement brownien, on se ramène au cas où  $q = 1$ . Notons  $]g_1, d_1[$  l’intervalle d’excursion enjambant 1.

Comme  $d_1$  est un zéro du mouvement brownien  $W$  et un temps d’arrêt pour sa filtration naturelle  $\mathcal{F}^W$ , le processus  $W_{d_1+}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_{d_1}^W$ . Par conséquent, le processus obtenu à partir de  $W$  en changeant le signe après l’instant  $d_1$  est encore un mouvement brownien.

En appliquant ce résultat au mouvement brownien  $(tW_{1/t})_{t \geq 0}$ , on voit également que le processus obtenu à partir de  $W$  en changeant le signe avant l’instant  $g_1$  est encore un mouvement brownien. Par composition, le processus obtenu en changeant les signes avant  $g_1$  et après  $d_1$  est encore un mouvement brownien, et son opposé aussi. On en déduit que le processus obtenu à partir de  $W$  en changeant le signe de l’excursion enjambant 1 est encore un mouvement brownien.  $\square$

#### Proposition 7. (Action d’une famille de signes aléatoires sur un mouvement brownien réfléchi indépendant)

Soit  $R$  un mouvement brownien réfléchi. Soit  $\varepsilon$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E$ , indépendante de  $R$  et de loi uniforme sur  $E$ . Alors  $\varepsilon \cdot R$  est un mouvement brownien.

Démonstration. Soient  $W$  un mouvement brownien et  $\eta$  une variable aléatoire indépendante de  $W$  et de loi uniforme sur  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$ . Pour  $q \in \mathbf{Q}_+^*$ , notons  $A_q$  l'événement «  $q$  numérote une excursion de  $|W|$  » (autrement dit,  $q$  est le premier rationnel de  $I_q(R)$ , l'intervalle d'excursion de  $R$  enjambant  $q$ ) et posons

$$\xi(q) = \text{sgn}(W_q) \mathbf{I}_{A_q} + \eta(q) \mathbf{I}_{A_q^c}.$$

La variable aléatoire  $\xi$  ainsi définie peut s'écrire sous la forme  $g(W, \eta)$  où  $g$  est une fonction mesurable de  $\mathbf{W} \times E$  dans  $E$ .

Comme  $|W|$  est un mouvement brownien réfléchi et comme  $\xi \cdot |W| = W$ , il suffit de montrer que la variable aléatoire  $\xi$  est indépendante de  $|W|$  et de loi uniforme sur  $E$ . Il s'agit donc de montrer que pour tout  $q \in \mathbf{Q}_+^*$ , la loi conditionnelle de  $\xi$  sachant  $|W|$  est invariante par  $s_q$ , où  $s_q : E \rightarrow E$  est la symétrie définie par  $s_q(e)(q) = -e(q)$  et  $s_q(e)(q') = e(q')$  pour  $q' \neq q$ . Soit  $W'$  le mouvement brownien obtenu à partir de  $W$  en changeant le signe de l'excursion enjambant  $q$ . Le résultat vient de l'égalité

$$s_q(\xi) = g(W', \eta) \mathbf{I}_{A_q} + g(W, s_q(\eta)) \mathbf{I}_{A_q^c},$$

du fait que  $W'$  a même valeur absolue que  $W$  et du fait que l'événement  $A_q$  est mesurable par rapport à  $\sigma(|W|)$ .  $\square$

### Corollaire 8. (Loi de $W$ connaissant $\hat{W}$ )

Soit  $W$  un mouvement brownien. Soit  $\varepsilon$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E$ , indépendante de  $\hat{W}$  et de loi uniforme sur  $E$ . Alors  $(W, \hat{W})$  a même loi que  $(\varepsilon \cdot (\hat{W} - \underline{\hat{W}}), \hat{W})$ . Par conséquent, une version régulière de la loi de  $W$  sachant  $\hat{W}$  est  $(K(w, \cdot))_{w \in \mathbf{W}}$ , où  $K(w, \cdot)$  est la loi de  $\varepsilon \cdot (w - \underline{w})$ .

Démonstration. En appliquant la propriété précédente à  $R = |W| = \hat{W} - \underline{\hat{W}}$ , on voit que  $\varepsilon \cdot |W|$  et un mouvement brownien. Donc  $(W, |W|)$  a même loi que  $(\varepsilon \cdot |W|, |W|)$ . Comme  $\hat{W} = |W| - L$  est une fonction de  $|W|$ , on en déduit que  $(W, \hat{W})$  a même loi que  $(\varepsilon \cdot (\hat{W} - \underline{\hat{W}}), \hat{W})$ .  $\square$

## 2.4 Construction de deux chaînes de Markov, sur $\mathbf{W}$ et sur $\mathbf{W}_+$

Le corollaire précédent fournit un moyen simple de construire une chaîne de Markov sur  $\mathbf{W}$  stationnaire pour le noyau  $K$  : on se donne un mouvement brownien  $W^{(0)}$  et une suite de variables aléatoires  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  indépendantes et de loi uniforme sur  $E$ , indépendante de  $W$ . On pose

$$\begin{aligned} R^{(0)} &= W^{(0)} - \underline{W^{(0)}}, \\ W^{(1)} &= \varepsilon_1 \cdot R^{(0)}, \\ R^{(1)} &= W^{(1)} - \underline{W^{(1)}}, \\ W^{(2)} &= \varepsilon_2 \cdot R^{(1)}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Notons  $\mathbf{W}_+$  la partie de  $\mathbf{W}$  formée des trajectoires positives et posons

$$F(e, r) = e \cdot r - \underline{e} \cdot r \text{ pour } e \in E, r \in \mathbf{W}_+.$$

La relation de récurrence  $R^{(n)} = F(\varepsilon_n, R^{(n-1)})$  montre que la suite  $(R^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  est une chaîne de Markov sur le sous-ensemble  $\mathbf{W}_+$ . Nous allons voir qu'il est plus commode de travailler avec cette chaîne plutôt qu'avec la chaîne  $(W^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ .

## 2.5 Nécessité de contrôler les zéros

Pour  $f \in \mathbf{W}$ ,  $t > 0$  et  $h > 0$ , notons  $V_t(f, \rho)$  la boule de centre  $f$  et de rayon  $\rho$  pour la norme de la convergence uniforme sur  $[0, t]$  :

$$V_t(f, \rho) = \{g \in V : \|g - f\|_{[0, t]} < \rho\}.$$

Les boules  $V_t(f, \rho)$  pour  $f$  polynôme à coefficients rationnels,  $t \in \mathbf{N}$  et  $\rho \in \mathbf{Q}_+^*$  forment une base dénombrable d'ouverts pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Pour montrer la densité presque sûre des orbites sous l'action de la transformation de Lévy, il suffit d'après le corollaire 4 de montrer que pour tout  $f \in \mathbf{W}$ ,  $t > 0$  et  $h > 0$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $K^n(W^{(0)}, V_t(f, h)) > 0$  presque sûrement, autrement dit que,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} P[W^{(n)} \in V_t(f, \rho) | W^{(0)}] > 0 \text{ p.s.}$$

Mais pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $R^{(n-1)} = |W^{(n)}|$  donc

$$\|R^{(n)} - |f|\|_{[0, t]} \leq \|W^{(n)} - f\|_{[0, t]}.$$

Pour que  $W^{(n)}$  soit proche de  $f$  pour la norme de la convergence uniforme sur  $[0, t]$ , il est donc nécessaire que  $R^{(n)}$  soit proche de  $|f|$  pour la norme de la convergence uniforme sur  $[0, t]$ . Mais le fait que  $R^{(n)}$  soit proche de  $|f|$  ne garantit pas qu'on puisse rendre  $W^{(n)}$  proche de  $f$  par un choix convenable de la famille de signes  $\varepsilon_n$ . En effet, la trajectoire  $W^{(n)} = \varepsilon_n \cdot R^{(n)}$  ne peut changer de signe qu'en un zéro de  $R^{(n)}$ . Si  $f$  possède un zéro isolé  $z_0$  et change de signe en  $z_0$ , il faut donc que  $R^{(n)}$  possède un zéro proche de  $z_0$  pour que  $W^{(n)}$  puisse approcher  $f$ .

C'est pourquoi nous allons introduire une topologie prenant en compte la distance entre les zéros.

## 3 Topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec contrôle des zéros

### 3.1 Construction d'écart définissant la topologie

Pour  $f \in \mathbf{W}$  et  $t > 0$  on note  $Z(f) = \{s \in \mathbf{R}_+ : f(s) = 0\}$  et  $Z_t(f) = Z(f) \cap [0, t]$ .

Un écart naturel sur  $\mathbf{W}$  permettant de s'assurer que les zéros de  $f$  sur  $[0, t]$  sont proches de ceux de  $g$  et inversement, est la distance de Hausdorff entre  $Z_t(f)$  et  $Z_t(g)$  :

$$\begin{aligned} D_t(f, g) &= d_H(Z_t(f), Z_t(g)) \\ &= \max\{\delta > 0 : Z_t(f) \subset Z_t(g) + [-\delta, \delta] \text{ et } Z_t(g) \subset Z_t(f) + [-\delta, \delta]\} \end{aligned}$$

Cet écart présente cependant l'inconvénient d'être sensible aux phénomènes de bord : pour  $t > s > 0$ ,  $D_t(f, g) > t - s$  lorsque  $f(t) = 0$  et  $g$  ne s'annule pas sur  $[s, t]$ , même si  $g$  s'annule peu après  $t$ . On remédie à cet inconvénient en posant

$$d_t^{CZ}(f, g) = \inf\{\delta > 0 : Z_{t-\delta}(f) \subset Z(g) + ] - \delta, \delta[ \text{ et } Z_{t-\delta}(g) \subset Z(f) + ] - \delta, \delta[\}.$$

On remarque que l'inclusion  $Z_{t-\delta}(f) \subset Z(g) + ] - \delta, \delta[$  est d'autant plus facile à réaliser que  $\delta$  est grand, et que si elle est vérifiée pour un réel  $\delta > 0$ , on peut trouver  $\delta' < \delta$  pour lequel elle est encore vérifiée. On a donc l'équivalence

$$d_t^{CZ}(f, g) < \delta \iff Z_{t-\delta}(f) \subset Z(g) + ] - \delta, \delta[ \text{ et } Z_{t-\delta}(g) \subset Z(f) + ] - \delta, \delta[.$$

Autrement dit, l'inégalité  $d_t^{CZ}(f, g) < \delta$  signifie que tout zéro de  $f$  antérieur à  $t - \delta$  est à distance inférieure à  $\delta$  d'un zéro de  $g$ , et inversement. À l'aide de l'équivalence ci-dessus, on vérifie facilement que la formule définit un écart sur  $\mathbf{W}$ .

Notons  $d_t^{CU}$  associé à la norme de la convergence uniforme sur  $[0, t]$  : pour  $f, g \in \mathbf{W}$ ,

$$d_t^{CU}(f, g) = \|f - g\|_{[0, t]} = \max\{|f(s) - g(s)| ; s \in [0, t]\}.$$

### Définition 9. (Topologie CUCZ sur $\mathbf{W}$ )

On appelle topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec contrôle des zéros la topologie associée aux écarts  $d_t^{CU}$  et  $d_t^{CZ}$  pour  $t \geq 0$ .

Comme ces écarts sont croissants par rapport à  $t$ , les ouverts

$$V_t(f, \rho, \delta) = \{g \in V : d_t^{CU}(f, g) < \rho ; d_t^{CZ}(f, g) < \delta\}.$$

pour  $f \in \mathbf{W}$  fixé et  $t > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$  forment une base de voisinages de  $f$ .

## 3.2 Propriétés de la topologie CUCZ

Grâce à la croissance des écarts  $d_t^{CU}$  et  $d_t^{CZ}$  par rapport à  $t$ , on voit que la topologie CUCZ est métrisable. Nous allons voir que  $\mathbf{W}$  est séparable pour cette topologie. Nous allons même montrer un résultat plus précis.

### Lemme 10. (Densité des fonctions continues affines par morceaux)

*Les fonctions continues, nulles en 0, affines par morceaux, ayant des points de subdivision rationnels et prenant des valeurs rationnelles en ces points forment une partie dense de  $\mathbf{W}$  pour la topologie CUCZ.*

*Les fonctions continues, positives, nulles en 0, affines par morceaux, ayant des points de subdivision rationnels et prenant des valeurs rationnelles en ces points forment une partie dense de  $\mathbf{W}_+$  pour la topologie CUCZ.*

Démonstration. Soient  $f \in \mathbf{W}$  et  $t > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$ . Quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer que

$$\text{Osc}_{[0, t]}(f, \delta) := \sup\{|f(s_1) - f(s_2)| ; (s_1, s_2) \in [0, t]^2, |s_1 - s_2| \leq \delta\} < \rho.$$

Choisissons un nombre fini de zéros de  $f$  sur  $[0, t]$ ,  $0 = z_0 < \dots < z_m$ , tels que

$$Z_t(f) \subset \bigcup_{k=0}^m ]z_k - \delta, z_k + \delta[$$

et construisons une subdivision  $0 = t_0 < \dots < t_n = t$  de  $[0, t]$  en intervalles de longueur  $\leq \delta$ , contenant les instants  $z_1 < \dots < z_m$ . Soit  $g$  l'application obtenue en interpolant linéairement  $f$  sur chaque intervalle de subdivision et constante égale à  $f(t)$  sur  $[t, +\infty[$ . On vérifie facilement que  $d_t^{CU}(f, g) < \rho$  grâce à l'inégalité  $\text{Osc}(f|_{[0, t]}, \delta) < \rho$ . Par ailleurs, comme  $g$  s'annule en  $z_0 < \dots < z_m$ , on a

$$Z_{t-\delta}(f) \subset Z_t(f) \subset Z(g) + ] - \delta, \delta[.$$

Inversement, sur chaque intervalle de subdivision,  $g$  est affine et coïncide avec  $f$  aux extrémités. Pour que  $g$  possède un zéro sur un intervalle de subdivision, il faut que  $f$  possède aussi un zéro sur cet intervalle. Comme les intervalles de subdivision sont de longueur  $\leq \delta$ , on a donc

$$Z_{t-\delta}(g) \subset Z_t(g) \subset Z(f) + ] - \delta, \delta[,$$

ce qui montre que  $d_t^{CZ}(f, g) < \delta$ . Ainsi  $g \in V_t(f, \rho, \delta)$ . De plus  $g$  est positive si  $f$  l'est.

Ces propriétés restent valables si l'on remplace les instants de subdivision  $t_1 < \dots < t_n$  et les valeurs non nulles de  $g$  à ces instants par des rationnels proches.  $\square$

**Corollaire 11. (Existence d'une base dénombrable d'ouverts)**

*La topologie CUCZ possède une base dénombrable d'ouverts et engendre la même tribu que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Démonstration. Soit  $D$  une partie partie dénombrable dense de  $\mathbf{W}$ . On vérifie facilement que les ouverts  $V_t(f, \rho, \delta)$  pour  $f \in D$ ,  $t \in \mathbf{N}^*$ ,  $\rho \in \mathbf{Q}_+^*$ ,  $\delta \in \mathbf{Q}_+^*$  forment une base dénombrable d'ouverts.

Il reste à vérifier que ces ouverts sont des boréliens pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Cela se voit en écrivant que  $d_t^{CZ}(f, g) < \delta$  si et seulement si

$$\inf\{|g(s)| ; s \in [0, t - \delta] ; d(s, Z(f)) \geq \delta\} > 0$$

et

$$\exists \delta' \in \mathbf{Q} \cap ]0, \delta[, \sup_{z \in Z_{t-\delta}(f)} \inf\{|g(s)| ; s \in [z - \delta', z + \delta']\} = 0,$$

et en remarquant que les bornes inférieures sur  $s$  et supérieure sur  $z$  ci-dessus se ramènent par continuité à des bornes sur des ensembles dénombrables denses.  $\square$

Donnons un exemple d'ouvert utile pour la suite.

**Lemme 12. (Exemple d'ouvert de la topologie CUCZ)**

*Pour  $b > a \geq 0$ , l'ensemble des trajectoires de  $\mathbf{W}$  possédant au moins un zéro dans  $]a, b[$  est un ouvert de la topologie CUCZ.*

Démonstration. En effet si  $f \in \mathbf{W}$  s'annule en  $z \in ]a, b[$ , alors toute application  $g \in \mathbf{W}$  telle que  $d_b^{CZ}(f, g) < \min(z - a, b - z)$  possède au moins un zéro dans  $]a, b[$ .  $\square$

**3.3 Approximation d'une fonction à partir d'une approximation de sa valeur absolue**

Soient  $f \in \mathbf{W}$ . Le lemme ci-dessous montre que si une trajectoire  $r \in \mathbf{W}_+$  approche  $|f|$  pour la topologie CUCZ, alors en posant un nombre fini de signes de  $e \in E$ , on obtient une trajectoire  $e \cdot r$  approchant  $f$ .

**Lemme 13. (Comment approcher  $f$  à partir d'une approximation de  $|f|$ )**

Soient  $f \in \mathbf{W}$  et  $t > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$  tel que

$$\text{Osc}_{[0,t]}(f, \delta) := \sup\{|f(s_1) - f(s_2)| ; s_1, s_2 \in [0, t] \text{ et } |s_1 - s_2| \leq \delta\} \leq \rho.$$

Soit  $r \in \mathbf{W}_+ \cap V_t(|f|, \rho, \delta)$ . Alors :

1. Si  $s_1 < s_2$  sont deux instants de  $[0, t]$  tels que  $f(s_1)$  et  $f(s_2)$  sont de signes opposés et de valeurs absolues strictement plus grandes que  $\rho$ , alors  $r$  possède un zéro dans  $]s_1, s_2[$ . Par conséquent, si  $I$  est un intervalle d'excursion de  $r$ , le signe de  $f$  est constant sur  $\{s \in I \cap [0, t] : |f(s)| > \rho\}$ .
2. Soit  $e \in E$ . Pour que  $\|e \cdot r - f\|_{[0,t]} < 5\rho$ , il suffit que pour tout  $I$  intervalle d'excursion de  $r$  commencée avant  $t$  tel que  $\sup_{I \cap [0,t]} |r(s)| > 2\rho$ ,  $e(q(I))$  soit égal au signe de  $f$  sur l'ensemble non vide  $\{s \in I \cap [0, t] : |f(s)| > \rho\}$ .

Démonstration. Montrons les deux points.

1. Montrons le résultat par contraposition. Soient  $s_1 < s_2$  deux instants de  $[0, t]$  tels que  $f(s_1)$  et  $f(s_2)$  soient de signes opposés et de valeurs absolues strictement plus grandes que  $\rho$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  possède au moins un zéro  $z \in ]s_1, s_2[$ . Comme  $\text{Osc}_{[0,t]}(f, \delta) \leq \rho$ , on a  $s_1 + \delta \leq z \leq s_2 - \delta \leq t - \delta$ . Mais comme  $d_t^{CZ}(|f|, r) < \delta$ , la trajectoire  $r$  possède un zéro dans l'intervalle  $]z - \delta, z + \delta[$ , qui est inclus dans  $]s_1, s_2[$ . Donc  $s_1$  et  $s_2$  appartiennent à des intervalles d'excursion de  $r$  disjoints.
2. Supposons que  $e$  est choisi comme ci-dessus. Soit  $s \in [0, t]$ . De deux choses l'une :  
 – soit  $r(s) > 2\rho$ , et alors  $|f(s)| > 2\rho - \|f - r\|_{[0,t]} > \rho$ . Par conséquent, si  $q$  est le rationnel numérotant l'excursion de  $r$  enjambant  $s$ , le signe  $e(q)$  est celui de  $f(s)$ , si bien que

$$|(e \cdot r)(s) - f(s)| = |r(s) - |f(s)|| < \rho.$$

– soit  $r(s) \leq 2\rho$ , et alors  $|f(s)| \leq 2\rho + \|f - r\|_{[0,t]} < 3\rho$ , d'où

$$|(e \cdot r)(s) - f(s)| \leq r(s) + |f(s)| < 5\rho.$$

Dans tous les cas,  $|(e \cdot r)(s) - f(s)| < 5\rho$ .

□

**Corollaire 14. (Passage de la chaîne  $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à la chaîne  $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ )**

Pour montrer que l'orbite de presque toute trajectoire  $w \in \mathbf{W}$  est dense  $\mathbf{W}$  pour la topologie CUCZ, il suffit de montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbf{W}_+$  pour la topologie CUCZ,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} P[R^{(n)} \in U | R^{(0)}] > 0 \quad p.s.$$

Démonstration. En effet, grâce au corollaire 4 et à l'existence d'une base dénombrable d'ouverts, il suffit de montrer que pour tout  $f \in \mathbf{W}_+$ ,  $t > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$ ,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} P[W^{(n)} \in V_t(f, 5\rho, \delta) | W^{(0)}] > 0 \quad p.s.$$

Quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer que  $\text{Osc}_{[0,t]}(f, \delta) \leq \rho$ .

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors  $W^{(n+1)} = \varepsilon_{n+1} \cdot R^{(n)}$ . Notons  $\mathcal{I}(R^{(n)})$  l'ensemble des intervalles  $I$  d'excursion de  $R^{(n)}$  commençant avant  $t$  tels que  $\sup_{I \cap [0, t]} |R^{(n)}(s)| > 2\rho$ . L'ensemble aléatoire  $\mathcal{I}(R^{(n)})$  est fini par continuité des trajectoires de  $R^{(n)}$ .

D'après le lemme précédent, pour que l'événement  $[W^{(n+1)} \in V_t(f, 5\rho, \delta)]$  soit réalisé, il suffit que  $R^{(n)} \in V_t(|f|, \rho, \delta)$  et que pour tout  $I \in \mathcal{I}(R^{(n)})$ ,  $\varepsilon_{n+1}(q(I))$  soit égal au signe de  $f$  sur  $\{s \in I \cap [0, t] : |f(s)| > \rho\}$ . Comme  $\varepsilon_{n+1}$  est indépendante de  $R^{(n)}$  et suit la loi uniforme sur  $\{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$ , on a donc

$$P[W^{(n+1)} \in V_t(f, \rho, \delta) | R^{(n)}] \geq \mathbf{1}[R^{(n)} \in V_t(|f|, \rho, \delta)] \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{Card } \mathcal{I}(R^{(n)})}.$$

Par conséquent, si  $P[R^{(n)} \in V_t(|f|, \rho, \delta) | R^{(0)}] > 0$  presque sûrement, alors

$$P[W^{(n+1)} \in V_t(f, 5\rho, \delta) | R^{(0)}] > 0 \text{ presque sûrement.}$$

On obtient ainsi le résultat voulu en remarquant que  $\sigma(R^{(0)}) = \sigma(W^{(0)})$  puisque  $R^{(0)} = |W^{(1)}|$  et  $W^{(0)} = \widehat{W^{(1)}}$  (voir les rappels du paragraphe 2.1).  $\square$

Un des intérêts de travailler avec la chaîne de Markov  $(R^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  plutôt qu'avec la chaîne de Markov  $(W^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  est qu'il est possible de préserver, ou presque, le début des trajectoires par un choix convenable des familles de signes.

En effet, la famille de signes  $\mathbf{1} \in E$ , constante égale à 1, vérifie  $F(\mathbf{1}, r) = r - \underline{r} = r$  pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$ . La difficulté est qu'on ne peut imposer qu'un nombre fini de signes dans les familles  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  pour avoir des probabilités strictement positives. Nous allons donc utiliser le fait que  $F(e, r)$  est proche de  $r$  en norme uniforme sur un intervalle  $[0, t]$  dès que  $e(q) = 1$  pour tout rationnel  $q$  numérotant une excursion de  $r$  de hauteur  $\geq \eta$  commençant avant  $t$ , avec  $\eta > 0$  petit.

Cela nous amène à établir des propriétés de continuité presque partout.

## 4 Résultats de continuité presque partout

Sauf mention explicite du contraire, on munira toujours  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$  de la topologie produit et  $\mathbf{W}_+$  de la topologie induite par la topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec contrôle des zéros.

### 4.1 Continuité de l'action de $E$ sur $\mathbf{W}$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer la continuité de l'application  $(e, w) \mapsto e \cdot w$  de  $E \times \mathbf{W}$  dans  $\mathbf{W}$  pour la topologie CUCZ pourvu qu'on se restreigne aux trajectoires sans zéro rationnel.

#### Lemme 15. (Continuité de la numérotation des excursions)

Soit  $w_0 \in \mathbf{W}$  une trajectoire sans zéro rationnel autre que 0. Soit  $t > 0$  tel que  $w_0(t) \neq 0$ . Il existe deux réels  $T > t$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $w \in \mathbf{W}$ ,

$$d_T^{CZ}(w_0, w) < \delta \Rightarrow Q_t(w) = Q_t(w_0).$$

Démonstration. Notons  $q_0 = Q_t(w_0)$  et  $]a, b[ = I_t(w_0)$  l'intervalle d'excursion de  $w_0$  enjambant  $t$ . Soit  $F$  l'ensemble (fini) des éléments de  $\mathbf{Q}_+^*$  précédant  $q_0$  pour l'ordre



introduit au début du paragraphe 3.2, y compris  $q_0$ . Pour que  $Q_t(w) = q_0$ , il faut et il suffit que  $q_0$  soit le seul élément de  $F$  dans  $I_t(w)$ . Cela se produit dès que  $d_{b+\delta}^{CZ}(w_0, w) < \delta$  où

$$\delta = \min_{q \in F \cup \{t\}} \min(|q - a|, |q - b|).$$

En effet, l'inégalité  $d_{b+\delta}^{CZ}(w_0, w) < \delta$  assure que les bornes de l'intervalle d'excursion  $I_t(w)$  sont dans  $]a - \delta, a + \delta[$  et  $]b - \delta, b + \delta[$ .  $\square$

**Lemme 16. (Comparaison des modules de continuité de  $w$  et  $e \cdot w$ )**

Soient  $e \in E$ ,  $w \in \mathbf{W}$  et  $t > 0$ . Pour tout  $\delta > 0$ , notons

$$\text{Osc}_{[0,t]}(w, \delta) = \sup\{|w(s_1) - w(s_2)| ; s_1, s_2 \in [0, t] \text{ et } |s_1 - s_2| \leq \delta\}.$$

Alors  $\text{Osc}_{[0,t]}(e \cdot w, \delta) \leq 2 \text{Osc}_{[0,t]}(w, \delta)$ .

Démonstration. Il suffit de remarquer que  $|e \cdot w| = |w|$  et d'utiliser les inégalités

$$\text{Osc}(|w|) \leq \text{Osc}(w) \leq \text{Osc}(w_+) + \text{Osc}(w_-) \leq 2\text{Osc}(|w|)$$

dans lesquelles on a omis d'écrire l'intervalle  $[0, t]$  et la variable  $\delta$ .  $\square$

**Proposition 17. (Continuité de l'action de  $E$  sur  $\mathbf{W}$ )**

Si l'on munit  $E$  de la topologie produit et  $\mathbf{W}$  de la topologie CUCZ, l'application  $(e, w) \mapsto e \cdot w$  de  $E \times \mathbf{W}$  dans  $\mathbf{W}$  est continue en tout couple  $(e_0, w_0)$  où  $e_0 \in E$  et  $w_0 \in \mathbf{W}$  est une trajectoire sans zéro rationnel.

Démonstration. Soient  $(e_n)_{n \geq 1}$  une suite convergant vers  $e_0$  pour la topologie produit et  $(w_n)_{n \geq 1}$  une suite convergant vers  $w_0$  pour la topologie CUCZ. Comme les trajectoires  $e_n \cdot w_n$  et  $w_n$  ont les mêmes zéros, il suffit de montrer que la suite  $(e_n \cdot w_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur les compacts.

Comme la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $w_0$  uniformément sur tout segment  $[0, t]$ , elle est uniformément équicontinue sur  $[0, t]$ . D'après le lemme précédent, il en est de même pour la suite  $(e_n \cdot w_n)_{n \geq 1}$ . Il suffit donc de vérifier que  $(e_n \cdot w_n)(t) \rightarrow (e_0 \cdot w_0)(t)$  pour  $t \geq 0$  fixé.

Si  $w_0(t) = 0$ , alors on remarque simplement que  $|(e_n \cdot w_n)(t)| = |w_n(t)| \rightarrow |w_0(t)| = 0$ .

Si  $w_0(t) \neq 0$ , on montre la convergence de  $(e_n(Q_t(w_n)))_{n \geq 1}$ . Cette convergence découle de la convergence ponctuelle de  $(e_n)_{n \geq 1}$  et du fait que  $Q_t(w_n) = Q_t(w_0)$  à partir d'un certain rang, grâce au lemme 15.  $\square$

## 4.2 Continuité de l'application $w \mapsto w - \underline{w}$ de $\mathbf{W}$ dans $\mathbf{W}_+$

Pour  $w \in \mathbf{W}$ , on note  $N(w)$  l'ensemble des instants de records négatifs de  $w$ , qui est aussi l'ensemble des zéros de  $w - \underline{w}$

$$N(w) = \{t \in \mathbf{R}_+ : \underline{w}(t) = w(t)\} = Z(w - \underline{w}).$$

**Proposition 18. (Continuité de l'application  $w \mapsto w - \underline{w}$  de  $\mathbf{W}$  dans  $\mathbf{W}_+$ )**

Soit  $w_0 \in \mathbf{W}$ . Si pour tout  $z \in N(w_0)$  et  $\delta > 0$ ,  $\underline{w_0}(z - \delta) > \underline{w_0}(z + \delta)$  avec la convention  $\underline{w_0}(t) = 0$  pour  $t < 0$ , alors l'application  $w \mapsto w - \underline{w}$ , de  $\mathbf{W}$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts dans  $\mathbf{W}_+$  muni de la topologie CUCZ, est continue en  $w_0$ .

Démonstration. Soient  $w_0 \in \mathbf{W}$  vérifiant les hypothèses et  $w \in \mathbf{W}$ . Notons  $r_0 = w_0 - \underline{w}_0$  et  $r = w - \underline{w}$ . Soient  $t > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta \in ]0, t[$ . Pour avoir  $r \in V_t(r_0, \rho, \delta)$ , il suffit que

1.  $\|r - r_0\|_{[0,t]} < \rho$ ;
2.  $Z_{t-\delta}(r) \subset Z_t(r_0) + ] - \delta, \delta[$ ;
3.  $Z_{t-\delta}(r_0) \subset Z_t(r) + ] - \delta, \delta[$ .

Montrons que ces trois conditions sont vérifiées si  $\|w - w_0\|_{[0,t]}$  est suffisamment petit.

On commence par remarquer que  $\|\underline{w} - \underline{w}_0\|_{[0,t]} \leq \|w - w_0\|_{[0,t]}$ , d'où

$$\|r - r_0\|_{[0,t]} \leq 2\|w - w_0\|_{[0,t]}.$$

Donc la condition 1 est réalisée dès que  $\|w - w_0\|_{[0,t]} < \rho/2$ .

Par continuité de  $r_0$  et compacité de  $K = \{s \in [0, t] : d(s, Z_t(r_0)) \geq \delta\}$ , la borne  $\alpha = \inf\{r_0(s) ; s \in K\}$  est atteinte et strictement positive. La condition 2 est réalisée dès que  $\|w - w_0\|_{[0,t]} < \alpha/2$  puisque cette inégalité entraîne  $\|r - r_0\|_{[0,t]} < \alpha$ , ce qui interdit à  $r$  de s'annuler sur  $K$ .

Enfin, l'hypothèse faite sur  $w_0$ , la continuité de  $\underline{w}_0$  et compacité de  $Z_t(r_0)$ , assurent que la borne

$$\beta = \inf\{\underline{w}_0(z - \delta) - \underline{w}_0(z + \delta) ; z \in Z_t(r_0)\}$$

est strictement positive. La condition 2 est réalisée dès que  $\|w - w_0\|_{[0,t]} < \beta/2$  puisque cette inégalité entraîne, pour tout  $z \in Z_t(r_0)$ ,

$$\underline{w}(z - \delta) - \underline{w}(z + \delta) > \underline{w}_0(z - \delta) - \underline{w}_0(z + \delta) - \beta \geq 0,$$

ce qui implique l'existence d'un record négatif de  $w$ , donc d'un zéro de  $r$  dans l'intervalle  $]z - \delta, z + \delta[$ .  $\square$

Par composition, on obtient ainsi la continuité presque partout de  $F$ .

### Proposition 19. (Continuité presque partout de $F$ )

L'application  $F : (e, r) \mapsto e \cdot r - \underline{e} \cdot r$  de  $E \times \mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  est continue presque partout pour  $P_\varepsilon \otimes P_R$  où  $P_\varepsilon$  est la loi uniforme sur  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}^+}$  et  $P_R$  la loi du mouvement brownien réfléchi.

### 4.3 Définition de la transformation $F$ après un instant $a \geq 0$

Pour pouvoir préserver le début des trajectoires, nous allons définir une transformation  $F_a$  de  $E \times \mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  qui se comporte comme l'identité de  $\mathbf{W}_+$  avant un instant  $a \geq 0$  et comme  $F$  ensuite. Nous avons besoin d'introduire quelques notations.

#### Définition 20. (Familles hybrides de signes)

Pour  $t \geq 0$  et  $e_1, e_2 \in E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}^+}$ , on définit la famille hybride «  $e_1$  puis  $e_2$  à l'instant  $t$  » notée  $e_1 \overset{t}{\curvearrowright} e_2$  par

$$(e_1 \overset{t}{\curvearrowright} e_2)(q) = e_1(t) \text{ si } q \leq t,$$

$$(e_1 \overset{t}{\curvearrowright} e_2)(q) = e_2(t) \text{ si } q > t.$$

**Définition 21. (Définition de  $D_a$  et  $F_a$ )**

Pour  $a \geq 0$  et  $w \in \mathbf{W}$ , on note  $D_a(w) = \inf(Z(w) \cap [a, \infty[)$  le premier zéro de  $w$  après l'instant  $a$ .

On définit la transformation «  $F$  après  $a$  » de  $E \times \mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  en posant

$$F_a(e, r) = F(\mathbf{1}^{\overset{D_a(r)}{\curvearrowright}} e, r).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} &\text{pour } t \leq D_a(r), F_a(e, r)(t) = r(t), \\ &\text{pour } t > D_a(r), F_a(e, r)(t) = (e \cdot r)(t) - \min_{[D_a(r), t]}(e \cdot r). \end{aligned}$$

On remarque que  $F_0 = F$  puisque  $D_0(r) = 0$  pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$ . Voyons quelques propriétés immédiates de la transformation  $F_a$ .

**Lemme 22. (Préservation de  $D_a$  par  $F_a$ )**

Quels que soient  $e \in E$  et  $r \in \mathbf{W}_+$ ,  $D_a(F_a(e, r)) = D_a(r)$ .

Démonstration. Par construction, la trajectoire  $F_a(e, r)$  coïncide avec  $r$  sur  $[0, D_a(r)]$ , donc  $D_a(r)$  est le premier zéro de  $F_a(e, r)$  sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .  $\square$ .

Nous allons voir que la transformation  $F_a$  dans laquelle les signes sont choisis au hasard se comporte après l'instant  $D_a$  comme la transformation  $F$ . Pour donner un sens précis à cette affirmation, nous avons besoin d'introduire l'opérateur de translation  $\theta_{D_a}$ .

**Définition 23. (Opérateur de translation  $\theta_{D_a}$ )**

Pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$  tel que  $D_a(r) < +\infty$ , on note  $\theta_{D_a}(r)$  la trajectoire de  $\mathbf{W}_+$  définie par

$$\theta_{D_a}(r)(t) = r(D_a(r) + t) \text{ pour } t \geq 0.$$

Par récurrence du mouvement brownien réfléchi, l'opérateur  $\theta_{D_a}$  est défini  $P_R$ -presque partout et la propriété forte de Markov nous dit que  $\theta_{D_a}$  préserve la loi  $P_R$ .

**Lemme 24. (Lien entre  $F$  et  $F_a$ )**

Soient  $r \in \mathbf{W}_+$  tel que  $D_a(r) < +\infty$  et  $\varepsilon$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $E$ . Alors

$$\theta_{D_a}(F_a(\varepsilon, r)) \text{ a même loi que } F(\varepsilon, \theta_{D_a}(r)).$$

Démonstration. Par définition de  $F$ ,  $F_a$  et de  $\theta_{D_a}$ , on a pour tout  $t \geq 0$  :

$$F(\varepsilon, \theta_{D_a}(r))(t) = \varepsilon(Q_t(\theta_{D_a}(r))) r(D_a(r) + t),$$

et grâce au fait que  $D_a(F_a(e, r)) = D_a(r)$ ,

$$\theta_{D_a}(F_a(\varepsilon, r))(t) = \varepsilon(Q_{D_a(r)+t}(r)) r(D_a(r) + t).$$

Il suffit donc de montrer que

$$(\varepsilon(Q_{D_a(r)+t}(r)))_{t \geq 0} \text{ a même loi que } (\varepsilon(Q_t(\theta_{D_a}(r))))_{t \geq 0}.$$

Soit  $s$  une permutation (déterministe) de  $\mathbf{Q}_+$  telle que  $s(0) = 0$  et telle que pour tout rationnel numérotant une excursion de  $\theta_{D_a}(r)$ ,  $s(q)$  soit le rationnel numérotant l'excursion correspondante de  $r$ . Par construction de  $s$ , on a donc  $Q_{D_a(r)+t}(r) = s(Q_t(\theta_{D_a}(r)))$  pour tout  $t \geq 0$ . Le résultat découle du fait que  $\varepsilon \circ s$  a même loi que  $\varepsilon$ .  $\square$

Le résultat ci-dessous montre que la transformation  $F_a$  où les signes sont choisis au hasard préserve la loi du mouvement brownien réfléchi.

**Corollaire 25. (Effet de la transformation  $F_a$ )**

Soient  $R$  un mouvement brownien réfléchi et  $\varepsilon$  une variable aléatoire indépendante de  $R$  et de loi uniforme sur  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$ . Alors

1. Le processus  $\theta_{D_a}(F_a(\varepsilon, R))$  est indépendant de  $(R_t)_{0 \leq t \leq D_a(R)}$  et a même loi que  $F(\varepsilon, \theta_{D_a}(R))$ .
2. Le processus  $F_a(\varepsilon, R)$  est un mouvement brownien réfléchi qui coïncide avec  $R$  jusqu'à l'instant  $D_a(R)$ .

Démonstration. D'après le lemme précédent et par indépendance de  $\varepsilon$  et de  $R$ ,

$$\mathcal{L}(\theta_{D_a}(F_a(\varepsilon, R)) | R) = \mathcal{L}(F(\varepsilon, \theta_{D_a}(R)) | R).$$

On en déduit, grâce à la propriété de Markov et à la préservation de la loi du mouvement brownien réfléchi par  $F(\varepsilon, \cdot)$  et  $\theta_{D_a}$ ,

$$\mathcal{L}(\theta_{D_a}(F_a(\varepsilon, R)) | (R_t)_{0 \leq t \leq D_a(R)}) = \mathcal{L}(F(\varepsilon, \theta_{D_a}(R))) = P_R,$$

ce qui montre le point 1.

On en déduit le point 2 par la propriété de Markov en remarquant que le processus  $F_a(\varepsilon, R)$  s'obtient en concaténant  $(R_t)_{0 \leq t \leq D_a(R)}$  et  $\theta_{D_a}(F_a(\varepsilon, R))$ .  $\square$

#### 4.4 Continuité presque partout de la transformation $F_a$

Nous allons montrer que  $F_a$  est continue presque partout sur  $E \times \mathbf{W}_+$ .

**Lemme 26. (Continuité de  $D_a$  et de  $\theta_{D_a}$ )**

Soit  $w_0 \in \mathbf{W}_+$ . Si l'instant  $a$  n'est pas le début d'une excursion de  $w_0$ , l'application  $D_a : \mathbf{W}_+ \rightarrow [0, +\infty]$  est continue en  $w_0$ . Si de plus  $D_a(w_0) < +\infty$ , alors la fonction  $\theta_{D_a} : \mathbf{W}_+ \rightarrow \mathbf{W}_+$  est continue en  $w_0$ .

Démonstration. Pour montrer la continuité de  $D_a$ , on distingue trois cas.

1. Cas où  $D_a(w_0) = a$  (autrement dit  $w_0(a) = 0$ ).

Soit  $b > a$ . Comme  $a$  n'est pas un début d'excursion de  $w_0$ ,  $w_0$  possède au moins un zéro dans  $]a, b[$ . L'ensemble  $O_{a,b} = \{w \in \mathbf{W}_+ : w \text{ possède un zéro dans } ]a, b[\}$  est donc un voisinage de  $w_0$  (grâce au lemme 12) et pour tout  $w \in O_{a,b}$ , on a  $a \leq D_a(w) < b$ .

2. Cas où  $a < D_a(w_0) < +\infty$ .

Notons  $d = D_a(w_0)$  et notons  $g$  le dernier zéro de  $w_0$  avant l'instant  $a$ . Alors  $g < a < d$ . Soit  $\delta \in ]0, \min(a - g, d - a)[$ . Pour tout  $w \in \mathbf{W}$  tel que  $d_{d+\delta}^{CZ}(w_0, w) < \delta$ ,  $w$  possède un zéro dans  $]d - \delta, d + \delta[$  mais n'en possède pas dans  $]g + \delta, d - \delta[$ , donc  $d - \delta < D_a(w) < d + \delta$ .

3. Cas où  $D_a(w_0) = +\infty$ .

Notons  $g$  le dernier zéro de  $w_0$  avant l'instant  $a$ . Alors  $g < a$ . Soit  $t > a$ . Pour tout  $w \in \mathbf{W}$  tel que  $d_{t+a-g}^{CZ}(w_0, w) < a - g$ ,  $w$  ne possède pas de zéro dans  $[a, t]$ , donc  $D_a(w) > t$ .

Dans les trois cas,  $D_a$  est continue en  $w_0$ .

Pour montrer la continuité de  $\theta_{D_a}$ , on étend la topologie CUCZ à  $\tilde{\mathbf{W}} = \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$  en posant  $Z(w) = \{t \in \mathbf{R}_+ : w(t) = 0\} \cup \{0\}$  pour tout  $w \in \mathbf{W}$  puis en définissant les écarts  $d_t^{CU}$  et  $d_t^{CZ}$  comme sur  $\mathbf{W}$ . Le fait de mettre systématiquement 0 dans  $Z(w)$  ne change rien pour les trajectoires qui s'annulent en 0 mais permet d'éviter les problèmes de bord en 0.

Sur l'ensemble des trajectoires  $w$  telles que  $a$  n'est pas un début d'excursion de  $w$  et  $D_a(w) < +\infty$ , on écrit alors  $\theta_{D_a}$  comme la composée de l'application  $w \mapsto (\theta_{D_a}(w), w)$  et de  $(t, w) \mapsto \theta_t(w) = w(t + \cdot)$ . La première de ces applications est continue par continuité de  $D_a$ . La continuité de la seconde découle des inégalités suivantes pour  $0 \leq a \leq b \leq T$ ,  $u, v \in \mathbf{W}$  et  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} d_t^{CU}(\theta_a(u), \theta_b(v)) &\leq d_t^{CU}(\theta_a(u), \theta_a(v)) + d_t^{CU}(\theta_a(v), \theta_b(v)) \\ &\leq d_{T+t}^{CU}(u, v) + \text{Osc}_{[0, T+t]}(v, b - a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_t^{CZ}(\theta_a(u), \theta_b(v)) &\leq d_t^{CZ}(\theta_a(u), \theta_a(v)) + d_t^{CZ}(\theta_a(v), \theta_b(v)) \\ &\leq d_{T+t}^{CZ}(u, v) + b - a. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.  $\square$ .

Notons  $W_{+,a}$  l'ensemble des trajectoires de  $\mathbf{W}$  qui sont positives sur  $[0, a]$ . De la continuité de  $D_a$  et de la continuité de l'action de  $E$  sur  $\mathbf{W}$  (proposition 17), on déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 27. (Continuité de l'action après  $D_a$  de  $E$  sur  $\mathbf{W}$ )**

Soient  $e_0 \in E$  et  $w_0 \in \mathbf{W}$ . Si l'instant  $a$  n'est pas le début d'une excursion de  $w_0$  et  $D_a(w_0) \notin \mathbf{Q}$ , les applications

$$\begin{aligned} (e, r) &\mapsto \mathbf{1}^{\overset{D_a(r)}{\curvearrowright}} e \text{ de } E \times \mathbf{W}_+ \text{ dans } E, \\ (e, r) &\mapsto (\mathbf{1}^{\overset{D_a(r)}{\curvearrowright}} e) \cdot r \text{ de } E \times \mathbf{W}_+ \text{ dans } \mathbf{W}_{+,a} \end{aligned}$$

sont continues en  $(e_0, w_0)$ .

La proposition ci-dessous se démontre comme la proposition 18.

**Proposition 28. (Continuité de l'application  $w \mapsto w - \underline{w}$  de  $\mathbf{W}_{+,a}$  dans  $\mathbf{W}_+$ )**

Soit  $w_0 \in \mathbf{W}_{+,a}$  telle que pour tout  $z \in N(w_0) \cap [a, +\infty[$  et  $\delta > 0$ ,  $\underline{w_0}(z - \delta) > \underline{w_0}(z + \delta)$  avec la convention  $\underline{w_0}(t) = 0$  pour  $t < 0$ . L'application  $w \mapsto w - \underline{w}$  de  $\mathbf{W}_{+,a}$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts dans  $\mathbf{W}_+$  muni de la topologie CUCZ est continue en  $w_0$ .

Par composition, on obtient finalement la continuité presque partout de  $F_a$ .

**Proposition 29. (Continuité presque partout de  $F_a$ )**

L'application

$$F_a : (e, r) \mapsto (\mathbf{1}^{\overset{D_a(r)}{\curvearrowright}} e) \cdot r - \underline{(\mathbf{1}^{\overset{D_a(r)}{\curvearrowright}} e) \cdot r}$$

de  $E \times \mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  est continue presque partout.

## 5 Accessibilités d'ouverts

Dans toute cette partie, nous introduisons la notion d'accessibilité par  $F_a$  qui est un outil essentiel de la démonstration.

On garde les notations introduites dans la partie 2.4. On notera  $P_R$  la loi du mouvement brownien réfléchi (qui est donc une probabilités sur  $\mathbf{W}_+$ ) et  $P_\varepsilon$  la loi uniforme sur  $E = \{-1, 1\}^{\mathbf{Q}_+^*}$ .

### Définition 30. (Accessibilité par $F_a$ )

Soient  $a > 0$ ,  $r \in \mathbf{W}_+$  et  $B$  une partie mesurable de  $\mathbf{W}_+$ . On dira que  $B$  est accessible par  $F_a$  depuis  $r$  s'il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que

$$P[F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \cdots \circ F_a(\varepsilon_1, \cdot)](r) \in B > 0.$$

Le corollaire 14 nous dit que pour démontrer le théorème 1, il suffit de vérifier que tout ouvert non-vide de  $\mathbf{W}_+$  est accessible par  $F_0 = F$  depuis  $P_R$ -presque toute trajectoire  $r \in \mathbf{W}_+$ .

Nous allons démontrer que si  $b \geq a \geq 0$ , l'accessibilité d'un ouvert (ou même d'un presque-ouvert, notion définie à la sous-section 5.2) par la transformation  $F_b$  entraîne son accessibilité par  $F_a$ .

### 5.1 Conséquences de la continuité presque partout de $F_a$

Pour tout  $a \geq 0$  et tout borélien  $B$  de  $\mathbf{W}_+$ , notons  $A_{a,1}(B)$  l'ensemble des trajectoires de  $\mathbf{W}_+$  d'où l'on accède par  $F_a$  en un coup avec probabilité strictement positive :

$$A_{a,1}(B) = \{r \in \mathbf{W}_+ : P[F_a(\varepsilon_1, r) \in B] > 0\}.$$

Notons  $F_a^{-1}(B)$  l'image réciproque de  $B$  par  $F_a$  :

$$F_a^{-1}(B) = \{(e, r) \in E \times \mathbf{W}_+ : F_a(e, r) \in B\}.$$

Notons  $O_{a,1}(B)$  la projection de l'intérieur de  $F_a^{-1}(B)$  sur  $\mathbf{W}_+$  :

$$O_{a,1}(B) = \{r \in \mathbf{W}_+ : \exists e \in E, (e, r) \in (F_a^{-1}(B))^\circ\}.$$

### Lemme 31. (Conséquence de la continuité de $F_a$ )

Fixons  $a \geq 0$ . Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbf{W}_+$  pour la topologie CUCZ. Alors  $O_{a,1}(V)$  est un ouvert contenu dans  $A_{a,1}(V)$  et  $P_R[A_{a,1}(V) \setminus O_{a,1}(V)] = 0$ .

Démonstration. Le fait que  $O_{a,1}(V)$  soit un ouvert contenu dans  $A_{a,1}(V)$  est immédiat. En effet, si  $r_0 \in O_{a,1}(V)$ , alors on peut choisir  $e_0 \in E$  tel que  $(e_0, r_0) \in (F_a^{-1}(V))^\circ$  et :

- pour tout  $r$  dans un certain voisinage de  $r_0$ ,  $(e_0, r) \in (F_a^{-1}(V))^\circ$  donc  $r \in O_{a,1}(V)$  ;
- l'ensemble des  $e \in E$  tels que  $(e, r_0) \in F_a^{-1}(V)$  est un voisinage de  $e_0$ , donc est de mesure positive pour  $P_\varepsilon$ .

Par ailleurs, notons

$$A = \{(e, r) \in E \times (A_{a,1}(V) \setminus O_{a,1}(V)) : F_a(e, r) \in V\}.$$

Alors par définition de  $O_{a,1}(V)$ ,

$$A \subset F_a^{-1}(V) \setminus (F_a^{-1}(V))^\circ.$$

Donc  $A$  est contenu dans l'ensemble des points de discontinuité de  $F_a$ . Comme  $F_a$  est continue presque partout sur  $E \times \mathbf{W}_+$ , on a donc

$$0 = (P_\varepsilon \otimes P_R)(A) = \int_{A_{a,1}(V) \setminus O_{a,1}(V)} P[F_a(\varepsilon_1, r) \in V] P_R(dr).$$

Mais  $P[F_a(\varepsilon, r) \in V] > 0$  pour tout  $r \in A_{a,1}(V)$ , donc  $P_R[A_{a,1}(V) \setminus O_{a,1}(V)] = 0$ .  $\square$

Signalons quelques propriétés immédiates de l'application qui à un borélien  $B$  associe le borélien  $A_{a,1}(B)$ . Ces propriétés nous seront utiles par la suite.

**Lemme 32. (Propriétés de  $A_{a,1}$ )**

1. Pour toute suite  $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de boréliens de  $\mathbf{W}$ ,

$$A_{a,1}\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_{a,1}(B_n)$$

2. Si  $P_R(B) = 0$ , alors  $P_R(A_{a,1}(B)) = 0$ .

3. Si  $B_1 \subset B_2$   $P_R$ -presque sûrement, alors  $A_{a,1}(B_1) \subset A_{a,1}(B_2)$   $P_R$ -presque sûrement.

Démonstration. Montrons les différents points

Le premier point découle immédiatement des inégalités

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} P[F_a(\varepsilon_1, r) \in B_n] \leq P[F_a(\varepsilon_1, r) \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n] \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} P[F_a(\varepsilon_1, r) \in B_n].$$

Le deuxième point vient du fait que  $F_a(\varepsilon_1, R^{(0)})$  a même loi que  $R^{(0)}$  (corollaire 25), d'où

$$\int_{\mathbf{W}_+} P[F_a(\varepsilon_1, r) \in B] P_R(dr) = P[F_a(\varepsilon_1, R^{(0)}) \in B] = P_R(B) = 0.$$

Donc  $P[F_a(\varepsilon_1, r) \in B] = 0$  pour  $P_R$ -presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$ , c'est-à-dire  $P_R(A_{a,1}(B)) = 0$ .

Le troisième point se déduit des deux premiers en remarquant que

$$A_{a,1}(B_2) \cup A_{a,1}(B_1 \setminus B_2) = A_{a,1}(B_1 \cup B_2) \supset A_{a,1}(B_1)$$

et que  $P_R(A_{a,1}(B_1 \setminus B_2)) = 0$ .  $\square$

## 5.2 Ensembles presque ouverts dans $\mathbf{W}_+$

Nous introduisons ici une notion commode pour la suite.

**Définition 33. (Parties presque ouvertes)**

Soit  $V$  une partie de  $\mathbf{W}_+$ . On dit que  $V$  est presque ouvert dans  $\mathbf{W}_+$  et que  $V$  est un presque-ouvert de  $\mathbf{W}_+$  lorsque  $V \setminus V^\circ$  est négligeable pour  $P_R$ . De façon équivalente, un presque-ouvert de  $\mathbf{W}_+$  est la réunion d'un ouvert de  $\mathbf{W}_+$  et d'un négligeable pour  $P_R$ .

Autrement dit,  $V$  est presque ouvert dans  $\mathbf{W}_+$  si  $P_R$ -presque tout point de  $V$  est intérieur à  $V$ . Voyons quelques propriétés des presque-ouverts.

**Lemme 34. (Propriétés immédiates de stabilité des presque-ouverts)**

- Toute union dénombrable de presque-ouverts est un presque-ouvert.
- Toute intersection finie de presque-ouverts est un presque-ouvert.
- L'image réciproque d'un ouvert par une application continue presque partout de  $\mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  est un presque-ouvert.
- L'image réciproque d'un presque-ouvert par une application continue presque partout de  $\mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  et préservant la mesure  $P_R$  est un presque-ouvert.

**Proposition 35. (Autres propriétés de stabilité)**

Soient  $V$  un presque-ouvert de  $\mathbf{W}_+$  et  $a > 0$ . Les ensembles ci-dessous sont presque ouverts.

- le translaté  $\theta_{D_a}^{-1}(V)$ ;
- l'ensemble des trajectoires d'où l'on peut accéder à  $V$  par  $F_a$  en un coup :

$$A_{a,1}(V) = \{r \in \mathbf{W}_+ : P[F_a(\varepsilon_1, r) \in V] > 0\};$$

- l'ensemble des trajectoires d'où l'on peut accéder à  $V$  par  $F_a$  en  $n$  coups, avec  $n \in \mathbf{N}$  :

$$A_{a,n}(V) = \{r \in \mathbf{W}_+ : P[F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \cdots \circ F_a(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in V] > 0\};$$

- le domaine d'accessibilité de  $V$  par  $F_a$  :

$$A_a(V) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_{a,n}(V).$$

Démonstration. Le fait que  $\theta_{D_a}^{-1}(V)$  est presque ouvert vient de ce que  $\theta_{D_a}$  est continue presque partout sur  $\mathbf{W}_+$  et préserve la mesure  $P_R$ .

Par ailleurs,  $A_{a,1}(V)$  est la réunion de  $A_{a,1}(V^\circ)$ , qui est presque-ouvert d'après le lemme 31 (Conséquence de la continuité de  $F_a$ ), et de  $A_{a,1}(V \setminus V^\circ)$ , qui est négligeable d'après le lemme 32 (Propriétés de  $A_{a,1}$ ). Donc  $A_{a,1}(V)$  est presque ouvert.

Pour montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A_{a,n}(V)$  est presque ouvert, il suffit d'établir la relation de récurrence  $A_{a,n}(V) = A_{a,1}(A_{a,n-1}(V))$  pour  $n \geq 2$ . On établit cette égalité en remarquant que pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$ ,

$$P[F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \cdots \circ F_a(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in V] = \int_E P[F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \cdots \circ F_a(\varepsilon_2, \cdot)(F_a(e, r)) \in V] P_\varepsilon(de),$$

d'où

$$r \in A_{a,n}(V) \iff P_\varepsilon\{e \in E : F_a(e, r) \in A_{a,n-1}(V)\} > 0 \iff r \in A_{a,1}(A_{a,n-1}(V)),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Les presque-ouverts se prêtent bien à l'étude de leur accessibilité. Mais l'intérêt principal des presque-ouverts apparaît dans les deux paragraphes suivants.

### 5.3 Comparaison des accessibilités pour différentes valeurs de $a$

Commençons par démontrer le lemme suivant.

**Lemme 36. (Comparaison des accessibilités en un coup)**

Soient  $b > a \geq 0$  et  $V$  un presque-ouvert de  $\mathbf{W}_+$ . Pour  $P_R$ -presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$ ,

$$P[F_b(\varepsilon, r) \in V] > 0 \implies P[F_a(\varepsilon, r) \in V] > 0.$$

Autrement dit, avec les notations du lemme 31,  $A_{b,1}(V) \subset A_{a,1}(V)$  presque sûrement.



Démonstration. Grâce aux propriétés de  $A_{a,1}$  (lemme 32, points 1 et 2), on peut se contenter de montrer le résultat dans le cas où  $V$  est ouvert.

Fixons une trajectoire  $r \in \mathbf{W}_+$  sans zéro isolé et sans zéro rationnel telle que  $P[F_b(\varepsilon, r) \in V] > 0$ . Notons  $d_t = D_t(r)$  pour  $t \geq 0$ . Nous allons démontrer que

$$P[F_a(\varepsilon, r) \in V \mid \mathbf{1}^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} \varepsilon] > 0 \text{ avec probabilité strictement positive.}$$

Par indépendance des signes, la loi conditionnelle de  $\varepsilon$  sachant  $\mathbf{1}^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} \varepsilon$  admet la version régulière donnée par

$$\mathcal{L}(\varepsilon \mid \mathbf{1}^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} \varepsilon = e) = \mathcal{L}(\varepsilon^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} e).$$

pour toute famille  $e$  de l'ensemble  $E_{d_b} = \{e \in E : \forall q \leq d_b, e(q) = 1\}$ .

Par hypothèse, on a avec probabilité positive

$$F(\mathbf{1}^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} \varepsilon, r) = F_b(\varepsilon, r) \in V,$$

et presque sûrement

$$\liminf_{t \rightarrow d_b^+} (\mathbf{1}^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} \varepsilon)(Q_t(r)) = \liminf_{t \rightarrow d_b^+} \varepsilon(Q_t(r)) = -1.$$

grâce au fait que  $r$  possède une infinité d'excursions immédiatement après l'instant  $d_b$ .

Il suffit donc de montrer que si  $e \in E_{d_b}$  vérifie  $F(e, r) \in V$  et  $\liminf_{t \rightarrow d_b^+} e(Q_t(r)) = -1$ , alors

$$P[F_a(\varepsilon, r) \in V \mid \mathbf{1}^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} \varepsilon = e] > 0,$$

autrement dit

$$P[F_a(\varepsilon^{\overset{d_b}{\curvearrowright}} e, r) \in V] > 0.$$

Soient  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $V_\infty(F(e, r), \rho, \delta) \subset V$ , où l'on note

$$V_\infty(f, \rho, \delta) = \{g \in V : \|f - g\|_{[0, \infty[} < \rho ; Z(f) \subset Z(g) + ] - \delta, \delta[ ; Z(g) \subset Z(f) + ] - \delta, \delta[ \}.$$

Choisissons un instant  $t_0$  réalisant le minimum d'une excursion négative de  $e \cdot r$  de hauteur  $< \rho/4$  contenue dans  $]d_b, d_b + \delta[$ .

Grâce aux hypothèses sur  $r$ , on peut choisir également des instants  $t_1 > \dots > t_n$  de  $]d_a, d_b[$ , réalisant les maxima d'excursions de  $r$ , tels que  $r(t_n) < \dots < r(t_1) < r(t_0)$  et

$$Z(r) \cap ]d_a, d_b[ \subset \bigcup_{i=1}^n ]t_i - \delta, t_i + \delta[.$$

Notons  $q_0 > \dots > q_n$  les rationnels numérotant ces excursions. Soit  $C$  l'ensemble des familles de signes  $f \in E$  telles que

$$\begin{aligned} f(q) &= -1 \text{ si } q \in \{q_0, \dots, q_n\}, \\ f(q) &= 1 \text{ si } q \notin \{q_0, \dots, q_n\} \text{ et } q \text{ numérote une excursion de hauteur } \geq r(t_n) \text{ avant } t_0, \\ f(q) &= 1 \text{ si } q \notin \{q_0, \dots, q_n\} \text{ et } q \text{ numérote une excursion de longueur } \geq \delta \text{ avant } d_b + \delta. \end{aligned}$$

L'appartenance à  $C$  ne dépend que d'un nombre fini de signes, donc l'événement  $\{\varepsilon \in C\}$  est de probabilité strictement positive. Si  $\varepsilon \in C$ , on peut faire les observations suivantes.

1. Pour tout rationnel  $q$  numérotant une excursion de hauteur  $\geq \rho/4$ ,

$$(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e)(q) = e(q).$$

Donc

$$\|(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e) \cdot r - e \cdot r\|_{[0, +\infty[} < \rho/2$$

d'où

$$\|F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r) - F(e, r)\|_{[0, +\infty[} = \|F(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r) - F(e, r)\|_{[0, +\infty[} < \rho.$$

2. Les trajectoires  $F_a(\varepsilon, r)$  et  $F(e, r)$  coïncident avec  $r$  sur  $[0, d_a]$  donc ont les mêmes zéros sur  $[0, d_a]$ . Par ailleurs, pour tout  $s \geq t_0$ ,

$$\underline{(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e) \cdot r}(s) = \min_{[d_a, s]} ((\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e) \cdot r) = \min_{[t_0, s]} (e \cdot r) = \underline{e \cdot r}(s),$$

donc  $F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r) = F(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r)$  et  $F(e, r)$  ont aussi les mêmes zéros sur  $[t_0, \infty[$  puisque leurs zéros sont les instants de records négatifs de  $(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e) \cdot r$  et de  $e \cdot r$ .

3. Les instants  $t_n < \dots < t_0$  sont des instants de records négatifs de  $(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e) \cdot r$  donc des zéros de  $F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r) = F(\mathbf{1} \overset{d_a}{\curvearrowright} \varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r)$ . Comme  $F(e, r)$  coïncide avec  $r$  sur  $[0, d_b]$  et comme  $d_b < t_0 < d_b + \delta$ ,

$$\begin{aligned} Z(F(e, r)) \cap ]d_a, t_0[ &\subset (Z(r) \cap ]d_a, d_b]) \cup [d_b, t_0[ \\ &\subset \bigcup_{i=0}^n ]t_i - \delta, t_i + \delta[. \\ &\subset Z(F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r)) + ] - \delta, \delta[. \end{aligned}$$

Compte tenu du point 2, on a donc

$$Z(F(e, r)) \subset Z(F_a(\varepsilon, r)) + ] - \delta, \delta[.$$

4. Inversement, si  $s$  est un zéro de  $F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r)$  dans  $]d_a, t_0[$ , alors :  
– soit  $d_b \leq s < t_0$  et alors  $0 \leq s - d_b < \delta$  ;  
– soit  $s < d_b$  ; comme  $s$  est dans une excursion négative de  $\varepsilon \cdot r$ , cette excursion est de longueur  $< \delta$  puisque  $\varepsilon \in C$ .

Dans tous les cas,  $s$  est à distance  $< \delta$  d'un zéro de  $r$  antérieur à  $d_b$ , donc d'un zéro de  $F(e, r)$ , ce qui compte tenu du point 2 montre l'inclusion

$$Z(F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r)) \subset Z(F(e, r)) + ] - \delta, \delta[.$$

Sur l'événement de probabilité strictement positive  $\{\varepsilon \in C\}$ , on a ainsi

$$F_a(\varepsilon \overset{d_b}{\curvearrowright} e, r) \in V_\infty(F(e, r), \rho, \delta) \subset V,$$

ce qui achève la démonstration. □

Signalons un corollaire intéressant bien qu'il ne soit pas utilisé dans la suite.

**Corollaire 37. (Accessibilité en un coup d'un presque-ouvert depuis lui-même)**

*Sous les hypothèses du lemme 31, on a  $A_{a,1}(V) \supset V$  presque sûrement.*

Démonstration. Grâce au lemme 32, il suffit de vérifier l'inclusion pour un ouvert de la forme  $V_t(f, \rho, \delta)$  puisque  $V$  peut s'écrire comme réunion dénombrable de tels ouverts. Mais si  $V = V_t(f, \rho, \delta)$  avec  $t > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\delta > 0$ , alors  $V$  est accessible en un coup par  $F_{\max(a,t)}$  depuis tout  $w \in V$  puisque  $F_{\max(a,t)}$  préserve les trajectoires sur  $[0, t]$ . Donc  $V$  est accessible en un coup par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in V$ .  $\square$

Nous pouvons enfin démontrer la proposition ci-dessous, qui sera extrêmement utile par la suite.

**Proposition 38. (Comparaison des accessibilités)**

*Soient  $b \geq a \geq 0$  et  $V$  un presque-ouvert de  $\mathbf{W}_+$ . Pour  $P_R$ -presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$ , si  $V$  est accessible par  $F_b$  depuis  $r$ , alors  $V$  est accessible par  $F_a$  depuis  $r$ .*

Démonstration. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A_{b,n}(V) \subset A_{a,n}(V)$  presque sûrement. Le résultat est trivial pour  $n = 0$  et déjà établi pour  $n = 1$  (lemme 36). Une fois l'inclusion  $A_{b,n}(V) \subset A_{a,n}(V)$  presque sûrement établie pour un entier  $n \in \mathbf{N}$ , on écrit

$$A_{b,n+1}(V) = A_{b,1}(A_{b,n}(V)) \underset{\text{p.s.}}{\subset} A_{b,1}(A_{a,n}(V)) \underset{\text{p.s.}}{\subset} A_{a,1}(A_{a,n}(V)) = A_{a,n+1}(V),$$

grâce au fait que  $A_{b,n}(V)$  et  $A_{a,n}(V)$  sont des presque-ouverts et grâce au point 3 du lemme 32.  $\square$

## 5.4 Boréliens stables par $F_a$

L'intérêt de la transformation  $F_a$  est de préserver les trajectoires jusqu'à l'instant  $D_a$ , ce qui nous amène à nous intéresser aux boréliens stables par  $F_a$ .

**Définition 39. (Parties stables par  $F_a$ )**

*Soit  $a \geq 0$ . On dit qu'une partie  $B$  de  $\mathbf{W}_+$  est stable par  $F_a$  si pour tout  $e \in E$  et  $r \in B$ , on a  $F_a(e, r) \in B$ .*

**Lemme 40. (Exemples de parties stables par  $F_a$ )**

*Est stable par  $F_a$  :*

- tout borélien antérieur à  $D_a$  dans la filtration naturelle canonique de  $\mathbf{W}_+$  ;
- l'ouvert  $O_{a,b} = \{w \in \mathbf{W}_+ : w \text{ possède un zéro dans } ]a, b[\}$  pour  $b > a$  ;
- toute intersection de parties stables par  $F_a$ .

Démonstration. Montrons les deux premiers points.

Remarquons que  $D_a$  est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle  $\mathcal{F}^0$  associée au processus canonique sur  $\mathbf{W}_+$ . Si  $B \in \mathcal{F}_{D_a}^0$  et  $r \in B$ , alors pour tout  $e \in B$ , la trajectoire  $F_a(e, r)$  coïncide avec  $r$  jusqu'à l'instant  $D_a(r)$ , donc  $F_a(e, r) \in B$  grâce au critère de Galmarino (voir [7], chapitre I, exercice 4.21).

Montrons que pour  $b > a$ ,  $O_{a,b}$  est stable par  $F_a$ . Soient  $r \in O_{a,b}$  et  $e \in E$ . Alors  $D_a(r) < b$ . De deux choses l'une :

- soit la trajectoire  $e \cdot r$  reste positive ou nulle sur  $]D_a(r), b[$ . Dans ce cas  $e \cdot r = r$  sur  $]D_a(r), b[$ , d'où  $F_a(e, r) = r$  sur  $]D_a(r), b[$ , et même sur  $[0, b]$ . En particulier,  $F_a(e, r)$  possède un zéro dans  $]a, b[$ .
- soit la trajectoire  $e \cdot r$  prend des valeurs strictement négatives sur  $]D_a(r), b[$  et alors tout instant de record strictement négatif sur  $]D_a(r), b[$  est un zéro de  $F_a(e, r)$ .

Dans tous les cas,  $F_a(e, r) \in O_{a,b}$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

L'intérêt de la notation de borélien stable par  $F_a$  apparaît dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 41. (Accessibilités successives et intersection)**

Soient  $b > a \geq 0$  et  $B_0, B_1, B_2$  des boréliens de  $\mathbf{W}_+$  tels que

- $B_1$  est accessible par  $F_a$  depuis presque toute trajectoire de  $B_0$  ;
- $B_1$  est stable par  $F_b$  ;
- $B_2$  est accessible par  $F_b$  depuis presque toute trajectoire de  $B_1$ .

Alors  $B_1 \cap B_2$  est accessible par  $F_b$  depuis presque tout  $r \in B_1$ . Si de plus,  $B_1$  et  $B_2$  sont presque ouverts, alors  $B_1 \cap B_2$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in B_0$ .

Démonstration. Soit  $r \in B_1$ . Comme  $B_1$  est stable par  $F_b$ , on a pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $F_b(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F_b(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in B_1$  sûrement, d'où

$$P[F_b(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F_b(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in B_1 \cap B_2] = P[F_b(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F_b(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in B_2].$$

Donc  $B_1 \cap B_2$  est accessible par  $F_b$  depuis  $r$  puisque  $B_2$  l'est, ce qui montre la première affirmation.

Si de plus  $B_1$  et  $B_2$  sont presque ouverts, alors  $B_1 \cap B_2$  aussi, donc par comparaison des accessibilités (proposition 38),  $B_1 \cap B_2$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in B_1$ . Par accessibilités successives (proposition 5),  $B_1 \cap B_2$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in B_0$ .  $\square$

## 5.5 Accessibilité et translation

Nous allons maintenant relier l'accessibilité d'un ouvert  $V$  par  $F$  à l'accessibilité d'un translaté  $\theta_{D_a}^{-1}(V)$  par  $F_a$ .

**Lemme 42. (Translation et accessibilité)**

Soient  $a \geq 0$ , et  $V$  un presque-ouvert de  $\mathbf{W}_+$ . Il y a équivalence entre

1.  $V$  est accessible depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$ .
2.  $\theta_{D_a}^{-1}(V)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$ .

Démonstration. Soit  $r \in \mathbf{W}_+$  telle que  $D_a(r) < +\infty$ . Une application répétée du lemme 24 (Lien entre  $F$  et  $F_a$ ) montre que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\theta_{D_a} \circ F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F_a(\varepsilon_1, \cdot)(r) \text{ a même loi que } F(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F(\varepsilon_1, \cdot) \circ \theta_{D_a}(r),$$

d'où,

$$\begin{aligned} P[F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F_a(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in \theta_{D_a}^{-1}(V)] &= P[\theta_{D_a} \circ F_a(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F_a(\varepsilon_1, \cdot)(r) \in V] \\ &= P[F(\varepsilon_n, \cdot) \circ \dots \circ F(\varepsilon_1, \cdot) \circ \theta_{D_a}(r) \in V], \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\theta_{D_a}^{-1}(V)$  est accessible par  $F_a$  depuis  $r$  si et seulement si  $V$  est accessible par  $F_a$  depuis  $\theta_{D_a}(r)$ . Comme  $D_a(r) < +\infty$  pour presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$ , on a donc

$$A_a(\theta_{D_a}^{-1}(V)) = \theta_{D_a}^{-1}(A_0(V)) \text{ p.s.}$$

Comme  $\theta_{D_a}$  préserve la loi  $P_R$ , on a ainsi

$$P_R[A_a(\theta_{D_a}^{-1}(V))] = P_R(A_0(V)),$$

ce qui entraîne l'équivalence annoncée.  $\square$

Voyons maintenant un exemple d'application de ce lemme et de la proposition 41, qui anticipe sur les résultats qui vont être obtenus dans la section suivante : en utilisant le fait que pour tout  $t > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$ , l'ouvert  $V_t(0, \rho, \delta)$  est accessible par  $F$  depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$  (d'après la proposition 44), on obtient le résultat suivant qui montre qu'on peut « remettre à zéro » une trajectoire après un instant  $D_a$  en préservant la trajectoire avant cet instant.

**Proposition 43. (Remise à zéro après l'instant  $D_a$ )**

Soient  $a \geq 0$ ,  $B$  un borélien de  $\mathbf{W}_+$  antérieur à  $D_a$  et  $t > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$ . Alors le borélien  $B \cap \theta_{D_a}^{-1}(V_t(0, \rho, \delta))$ , égal à

$$\{r \in B : D_a(r) < +\infty ; \|r\|_{[D_a(r), D_a(r)+t]} < \rho ; \max_{s \in [D_a(r), D_a(r)+t-\delta]} d(s, Z_r) < \delta\}$$

est accessible par  $F_a$  depuis presque toute trajectoire de  $B$ .

## 6 Approximation de la trajectoire nulle

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

**Proposition 44. (Approximation de la trajectoire nulle en topologie CUCZ)**

Soient  $t > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$ . L'ouvert  $V_t(0, \rho, \delta)$  est accessible depuis presque toute trajectoire de l'ouvert  $\mathbf{W}_+$ .

La démonstration se fait en deux grandes étapes. La première consiste à approcher zéro uniformément sur le segment  $[0, t]$ , la seconde consiste à densifier les zéros sur l'intervalle  $[0, t]$ .

### 6.1 Approximation uniforme de la trajectoire nulle

Pour approcher la trajectoire nulle, l'idée est la suivante : notons  $-\mathbf{1} \in E$  la famille de signes dans laquelle tous les signes valent  $-1$ . La transformation  $F(-\mathbf{1}, \cdot)$ , de  $\mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$ , associe à toute trajectoire  $r$  la trajectoire  $(-r) - \overline{(-r)} = \bar{r} - r$ . Nous allons montrer que les images itérées de toute trajectoire par cette transformation convergent uniformément sur les compacts vers la trajectoire nulle, puis utiliser des arguments de continuité.

L'outil de la démonstration est le comptage du nombre d'oscillations de hauteur fixée.

**Définition 45. (Amplitude d'une application d'un intervalle dans  $\mathbf{R}$ )**

Si  $f$  est une application d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbf{R}$ , on appelle amplitude de  $f$  sur  $I$  le diamètre de  $f(I)$ , c'est-à-dire la différence  $\text{amp}_I f = \sup_I f - \inf_I f$ .

**Définition 46. (Nombre d'oscillations de hauteur  $h$ )**

Soit  $h > 0$  fixé. Pour  $w \in \mathbf{W}$ , notons  $(T_n(w))$  la suite d'instant définie par  $T_0(w) = 0$  et

$$T_{n+1}(w) = \inf\{t \geq T_n(w) : \text{amp}_{[T_n(w), t]} w \geq h\}.$$

Pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ , on appelle nombre d'oscillations de  $w$  hauteur  $h$  avant l'instant  $t$  l'entier  $N_t(w, h) = \sup\{n \in \mathbf{N} : T_n(w) \leq t\}$ .

Remarquons que par continuité de  $w$ , la suite  $(T_n(w))$  est strictement croissante et tend vers  $+\infty$ , si bien que le nombre d'oscillations sur un segment  $(0, t]$  est fini.

**Lemme 47. (Caractérisation de  $N_t(w, h)$ )**

Quels que soient  $w \in \mathbf{W}$  et  $h > 0$ ,  $t \geq 0$  et  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$N_t(w, h) \geq n + 1 \iff \sup_{0=a_0 \leq \dots \leq a_{n+1}=t} \min_{0 \leq i \leq n} \text{amp}_{[a_i, a_{i+1}]} w \geq h.$$

Démonstration. On remarque que l'amplitude de  $w$  sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  dépend continûment de  $a_1, \dots, a_n$ , si bien que le sup pour  $0 = a_0 \leq \dots \leq a_{n+1} = t$  est en fait un maximum.

L'implication  $\Rightarrow$  est évidente : si  $N_t(w, h) \geq n + 1$ , il suffit de prendre  $a_1, \dots, a_n$  égaux à  $T_1(w), \dots, T_n(w)$ . L'amplitude de  $w$  sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  est supérieure ou égale à  $h$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe une subdivision  $0 = a_0 \leq \dots \leq a_{n+1} = t$  telle que l'amplitude de  $w$  sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  soit supérieure ou égale à  $h$ . Alors une récurrence immédiate montre que  $T_i(w) \leq a_i$  pour tout  $i \in [0 \dots n + 1]$ . En particulier,  $T_{n+1}(w) \leq t$ , d'où  $N_t(w, h) \geq n + 1$ .  $\square$

**Corollaire 48. (Semi-continuité supérieure de  $N_t(w, h)$  par rapport à  $w$ )**

Quels que soient  $h > 0$ ,  $t \geq 0$  et  $n \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $\{w \in \mathbf{W} : N_t(w, h) \leq n\}$  est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme sur  $[0, t]$ .

Démonstration. D'après le lemme précédent, pour tout  $w \in \mathbf{W}$ ,

$$N_t(w, h) \leq n \iff \sup_{0=a_0 \leq \dots \leq a_{n+1}=t} \min_{0 \leq i \leq n} \text{amp}_{[a_i, a_{i+1}]} w < h.$$

Il suffit de remarquer que pour tout segment  $[a, b] \subset [0, t]$  l'application  $w \mapsto \text{amp}_{[a, b]} w$  est lipschitzienne de rapport 2, lorsque  $\mathbf{W}$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{[0, t]}$ , et que cette propriété est stable par passage aux bornes supérieure et inférieure.  $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'effet de la transformation  $F(-1, \cdot)$  sur le nombre d'oscillations. Commençons par un lemme simple.

**Lemme 49. (Effet de la transformation  $w \mapsto \bar{w} - w$  sur l'amplitude)**

Pour tout  $w \in \mathbf{W}$  et pour tout segment  $[a, b] \subset \mathbf{R}_+$ , l'amplitude de  $\bar{w} - w$  sur  $[a, b]$  est majorée par celle de  $w$ .

Démonstration. Il y a deux cas à considérer.

Si  $\sup_{[a, b]} w = \bar{w}(b)$ , alors pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$0 \leq \bar{w}(t) - w(t) \leq \bar{w}(b) - \inf_{[a, b]} w = \sup_{[a, b]} w - \inf_{[a, b]} w,$$

d'où  $\text{amp}_{[a, b]}(\bar{w} - w) \leq \text{amp}_{[a, b]} w$ .

Si  $\sup_{[a, b]} w < \bar{w}(b)$ , alors  $\bar{w}$  est constant sur  $[a, b]$ , d'où  $\text{amp}_{[a, b]}(\bar{w} - w) = \text{amp}_{[a, b]} w$ .

Dans les deux cas,  $\text{amp}_{[a, b]}(\bar{w} - w) \leq \text{amp}_{[a, b]} w$ .  $\square$

Ce lemme montre que le nombre d'oscillations de hauteur fixée de  $\bar{w} - w$  avant  $t$  est au plus égal à celui de  $w$ . Pour les trajectoires positives, on a un résultat meilleur.

**Proposition 50. (Réduction du nombre d'oscillations)**

Fixons  $h > 0$  et reprenons les notations de la définition 46. Alors pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$  et  $n \geq 1$ ,  $T_n(\bar{r} - r) \geq T_{n+1}(r)$ . Par conséquent, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$N_t(\bar{r} - r, h) \leq \max(N_t(r, h) - 1, 0).$$

Démonstration. L'inégalité  $T_n(\bar{r} - r) \geq T_{n+1}(r)$  se démontre par récurrence.

On commence par remarquer que pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$ , et  $t \geq 0$ ,  $\text{amp}_{[0,t]} r = \bar{r}(t)$ , si bien que  $T_1(r)$  est le temps d'atteinte du niveau  $h$  par  $\bar{r}$  et par  $r$ . De même,  $T_1(\bar{r} - r)$  est le temps d'atteinte du niveau  $h$  par  $\bar{r} - r$ .

Pour montrer que  $T_1(\bar{r} - r) \geq T_2(r)$ , il suffit donc de vérifier que si  $0 \leq t < T_2(r)$ , alors  $\bar{r}(t) - r(t) < h$ . Il y a trois cas à considérer :

- si  $0 \leq t < T_1(r)$ , alors  $0 \leq r(t) \leq \bar{r}(t) < h$ ;
- si  $t = T_1(r)$ , alors  $r(t) = \bar{r}(t) = h$ ;
- si  $T_1(r) < t < T_2(r)$ , alors  $\bar{r}(t) = \sup_{[T_1(r),t]} r$  et  $r(t) \geq \inf_{[T_1(r),t]} r$ , d'où par différence  $\bar{r}(t) - r(t) \leq \text{amp}_{[T_1(r),t]} r < h$ .

Dans tous les cas  $\bar{r}(t) - r(t) < h$ , ce qui montre que  $T_1(\bar{r} - r) \geq T_2(r)$ .

Soit  $n \geq 1$  tel que  $T_n(\bar{r} - r) \geq T_{n+1}(r)$ . Montrons que  $T_{n+1}(\bar{r} - r) \geq T_{n+2}(r)$ . De deux choses l'une :

- si  $T_n(\bar{r} - r) \geq T_{n+2}(r)$ , il n'y a rien à montrer puisque  $T_{n+1}(\bar{r} - r) \geq T_n(\bar{r} - r)$ ;
- si  $T_n(\bar{r} - r) < T_{n+2}(r)$ , on remarque que pour tout  $t$  tel que  $T_{n+1}(r) \leq t < T_{n+2}(r)$ ,

$$\text{amp}_{[T_n(\bar{r}-r),t]} (\bar{r} - r) \leq \text{amp}_{[T_n(\bar{r}-r),t]} r \leq \text{amp}_{[T_{n+1}(r),t]} r < h.$$

Dans tous les cas,  $T_{n+1}(\bar{r} - r) \geq T_{n+2}(r)$ , ce qui achève la récurrence.  $\square$

**Corollaire 51. (Des ouverts en cascade)**

Pour tout  $h > 0$ ,  $t \geq 0$  et  $n \in \mathbf{N}$ , l'ensemble  $V_{t,n}(h) = \{r \in \mathbf{W}_+ : N_t(r, h) \leq n\}$  est un ouvert de  $\mathbf{W}_+$  pour la topologie de la convergence uniforme sur  $[0, t]$  et est accessible par  $F$  en un coup depuis toute trajectoire de  $V_{t,n+1}(h)$ .

Démonstration. Le fait que  $V_{t,n}(h)$  est ouvert découle immédiatement de la semi-continuité supérieure de  $N_t(w, h)$  par rapport à  $w$  (corollaire 48).

Soit  $r \in V_{t,n+1}(h)$ . D'après la proposition,  $F(-\mathbf{1}, r) \in V_{t,n}(h)$ . Mais l'application  $F(\cdot, r) : e \mapsto F(e, r) = e \cdot r - \underline{e} \cdot r$  de  $E$  (muni de la topologie produit) dans  $\mathbf{W}$  (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts) est continue. L'ensemble des  $e \in E$  tels que  $F(e, r) \in V_{t,n}(h)$  est donc un ouvert non vide de  $E$ , de probabilité strictement positive pour  $P_\varepsilon$ .  $\square$

Nous savons maintenant comment approcher la trajectoire nulle uniformément sur un segment  $[0, t]$ .

**Proposition 52. (Approximation uniforme de la trajectoire nulle)**

Tout voisinage de la trajectoire nulle pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est accessible depuis toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$ .

Démonstration. Comme les ouverts  $(V_{t,n}(h))_{n \in \mathbf{N}}$  recouvrent  $\mathbf{W}_+$ , le corollaire précédent et le lemme 5 (Accessibilités successives) montrent que  $V_{t,0}(h)$  est accessible par  $F$  depuis toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$ . Mais  $V_{t,0}(h)$  n'est autre que la trace sur  $\mathbf{W}_+$  de la boule de centre 0 et de rayon  $h$  pour la norme  $\|\cdot\|_{[0,t]}$ . D'où le résultat.

## 6.2 Approximation de la trajectoire nulle en topologie CUCZ

Le but de cette partie est de montrer que tout voisinage de la trajectoire nulle (pour la topologie CUCZ) est accessible depuis presque toute trajectoire pour la chaîne de Markov  $(R^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ . En utilisant l'accessibilité de tout voisinage de la trajectoire nulle pour la topologie de la convergence uniforme et le lemme 5 (Accessibilités successives), il nous suffit de montrer le résultat suivant.

### Proposition 53. (Densification des zéros)

Soient  $t > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$ . L'ouvert  $V_t(0, \rho, \delta)$  est accessible depuis presque toute trajectoire de l'ouvert  $V_t(0, \rho)$ .

L'idée de la démonstration est la suivante : pour  $\delta > 0$  fixé, notons  $f_\delta$  la transformation de  $\mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  définie par

$$f_\delta(r) = F(\mathbf{1}^{\overset{g(r)}{\curvearrowright}}(-\mathbf{1}), r),$$

où  $g(r)$  est le début de la première excursion de  $r$  de longueur  $\geq \delta$  et  $\mathbf{1}^{\overset{g(r)}{\curvearrowright}}(-\mathbf{1})$  la famille hybride de signes valant 1 jusqu'à l'instant  $g(r)$  et  $-1$  après (voir définition 20).

La transformation  $f_\delta$  préserve le début de la trajectoire  $r$  jusqu'à l'instant  $g(r)$  et agit ensuite comme la transformation  $F(-\mathbf{1}, \cdot)$  introduite dans la précédente partie. On vérifie facilement que pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$  et pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $\|f_\delta(r)\|_{[0, t]} \leq \|r\|_{[0, t]}$  et  $g(f_\delta(r)) > g(r)$ . Si  $r$  ne possède pas d'intervalle de constance, on montre que la suite d'instant  $(g(f_\delta^n(r)))_{n \in \mathbf{N}}$  tend vers  $+\infty$ . Les images successives d'une trajectoire proche de 0 en norme uniforme sur un segment  $[0, t]$  restent donc proches de 0 pour l'écart  $d_t^{CU}$  et finissent donc par être à distance inférieure à  $\delta/2$  de 0 pour l'écart  $d_t^{CZ}$ .

La démonstration comporte toutefois deux difficultés supplémentaires par rapport à la précédente. D'une part, on maîtrise moins facilement le nombre d'itérations nécessaires pour que la première excursion de longueur  $\geq \delta$  commence après un instant  $t$  fixé. D'autre part, pour une trajectoire « typique »  $r_0 \in \mathbf{W}_+$ , la trajectoire  $r_1 = f_\delta(r_0)$  possède de nombreux maxima locaux de même hauteur (provenant de zéros de  $r_0$  entre lesquels le maximum courant depuis  $g(r_0)$  n'a pas varié), si bien que l'application  $F$  n'est pas continue en  $(\mathbf{1}^{\overset{g(r_1)}{\curvearrowright}}(-\mathbf{1}), r_1)$ .

C'est pourquoi la démonstration que nous proposons passe par la construction d'une suite  $(e_n)_{n \geq 1}$  de familles de signes telle que les trajectoires  $F(e'_n, \cdot) \circ \dots \circ F(e'_1, \cdot)(r)$  soient proches de  $f_\delta^n(r)$  pour toute famille  $(e'_n)_{n \geq 1}$  suffisamment proche de  $(e_n)_{n \geq 1}$ .

Commençons par établir un lemme simple. Par commodité, nous notons  $F_e = F(e, \cdot)$  l'application de  $\mathbf{W}_+$  dans  $\mathbf{W}_+$  obtenue à partir de  $F$  en fixant une famille de signes  $e \in E$ .

### Lemme 54. (Obtention d'une partie presque sûre stable presque tous les $F_e$ )

Soit  $\Lambda$  une partie de  $\mathbf{W}_+$  de probabilité 1 pour la loi du mouvement brownien réfléchi. Alors la partie

$$\tilde{\Lambda} = \{r \in \mathbf{W}_+ : \forall n \in \mathbf{N}, \text{ pour presque tout } e_1, \dots, e_n \in E, F_{e_n} \circ \dots \circ F_{e_1}(r) \in \Lambda\}$$

est encore de probabilité 1 pour la loi du mouvement brownien réfléchi. De plus, si  $r \in \tilde{\Lambda}$ , alors  $F_e(r) \in \tilde{\Lambda}$  pour presque tout  $e \in E$



Démonstration. Soient  $R$  un mouvement brownien réfléchi et  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur  $E$ , indépendante de  $R$ . Comme pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la variable aléatoire  $F_{\varepsilon_n} \circ \dots \circ F_{\varepsilon_1}(R)$  a même loi que  $R$ , on a

$$1 = P[\forall n \in \mathbf{N}, F_{\varepsilon_n} \circ \dots \circ F_{\varepsilon_1}(r) \in \Lambda] = \int_{\mathbf{W}_+} P[\forall n \in \mathbf{N}, F_{\varepsilon_n} \circ \dots \circ F_{\varepsilon_1}(r) \in \Lambda] P_R(dr),$$

d'où  $P[\forall n \in \mathbf{N}, F_{\varepsilon_n} \circ \dots \circ F_{\varepsilon_1}(r) \in \Lambda] = 1$  pour  $P_R$ -presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$ .  $\square$

Voyons maintenant la démonstration de la proposition 53.

Démonstration. Nous allons appliquer le lemme précédent à la partie  $\Lambda$  de  $\mathbf{W}_+$  formée des trajectoires  $r$  sans zéro isolé, sans intervalle de constance et telles que l'application  $e \mapsto F_e(r)$  est continue presque partout sur  $E$ .

Soit  $r_0 \in \tilde{\Lambda}$  vérifiant  $\max_{[0,t]} r_0 < \rho$ . Nous allons montrer que  $V_t(0, \rho, \delta)$  est accessible depuis  $r_0$ . La démonstration comporte trois étapes.

**Première étape :** on construit par récurrence une suite  $(e_n)_{n \geq 1}$  bien choisie.

Notons  $\eta = \rho - \max_{[0,t]} r_0 > 0$ . Notons  $g_0$  le début de la première excursion de longueur  $\geq \delta$ . Soient  $0 = z_0 < \dots < z_d = g_0$  des zéros de  $r_0$  espacés de moins de  $\delta$ . Posons  $t_0 = 0$ . Soit  $t_{d+1} \in ]g_0, g_0 + \delta[$  un instant tel que  $r_0(t_{d+1}) = \max_{[g_0, t_{d+1}]} r_0$ .

Comme  $r_0 \in \Lambda$ , on peut choisir des petites excursions de  $r_0$  dont les maxima soient réalisés en des instants  $t_1 < \dots < t_d$  proches de  $z_1 < \dots < z_d$ , espacés de moins de  $\delta$ , tels que  $t_d + \delta > z_d = g_0$  et dont les hauteurs vérifient

$$r_0(t_1) < \dots < r_0(t_d) < \min(\eta, r_0(t_{d+1})).$$

Soit  $C(r_0) \subset E$  l'ensemble des familles de signes telles que l'action  $e \mapsto e \cdot r_0$  affecte

- du signe + les excursions de hauteur  $\geq \eta$  antérieures à  $g_0$  ;
- du signe – les excursions de hauteur  $\geq \eta$  postérieures à  $g_0$  ;
- du signe – l'excursion commençant à  $g_0$  ;
- du signe – les excursions enjambant  $t_1, \dots, t_{d+1}$  ;
- du signe + les excursions antérieures à un instant  $t_i$  et de hauteur  $> r(t_i)$ .

La partie  $C(r_0)$  est un ouvert de  $E$  de probabilité strictement positive. On peut donc choisir  $e_1 \in C(r_0)$  tel que  $F$  est continue en  $(e_1, r_0)$  et  $r_1 := F_{e_1}(r_0) = e_1 \cdot r_0 - \underline{e_1 \cdot r_0} \in \tilde{\Lambda}$ .

Par construction, les instants  $t_1 < \dots < t_{d+1}$  sont des records négatifs de  $e_1 \cdot r_0$  et donc des zéros de  $r_1$  ; par conséquent la première excursion de  $r_1$  de longueur  $\geq \delta$  débute à un instant  $g_1 > g_0$ . Par ailleurs,  $r_1$  est majorée strictement par  $\rho$  sur  $[0, t]$ . En effet,

- si  $s \in [0, g_0]$ ,  $(e_1 \cdot r_0)(s) \leq \max r_0([0, t])$  et  $-\underline{e_1 \cdot r_0}(s) < \eta$  ;
- si  $s \in [g_0, t]$ ,  $(e_1 \cdot r_0)(s) < \eta$  et  $-\underline{e_1 \cdot r_0}(s) \leq \max r_0([0, t])$ .

Dans tous les cas,  $r_1(s) < \max r_0([0, t]) + \eta = \rho$ .

Comme  $r_1$  vérifie les mêmes hypothèses que  $f$ , on peut donc continuer la construction en choisissant  $e_2 \in C(r_1)$  tel que  $F$  est continue en  $(e_2, r_1)$  et  $r_2 := F_{e_2}(r_1) \in \tilde{\Lambda}$ , puis  $e_3 \in C(r_2)$  tel que  $F$  est continue en  $(e_3, r_2)$  et  $r_3 := F_{e_3}(r_2) \in \tilde{\Lambda}$ , etc...

**Deuxième étape :** on montre que le début de la première excursion de longueur  $\geq \delta$  des trajectoires  $r_n = F_{e_n} \circ \dots \circ F_{e_1}(r)$  tend vers  $+\infty$ .

Notons  $g_n$  le début de la première excursion de  $r_n$  de longueur  $\geq \delta$ . La suite croissante  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  possède une limite  $g_\infty$ . Montrons que  $g_\infty = +\infty$ .

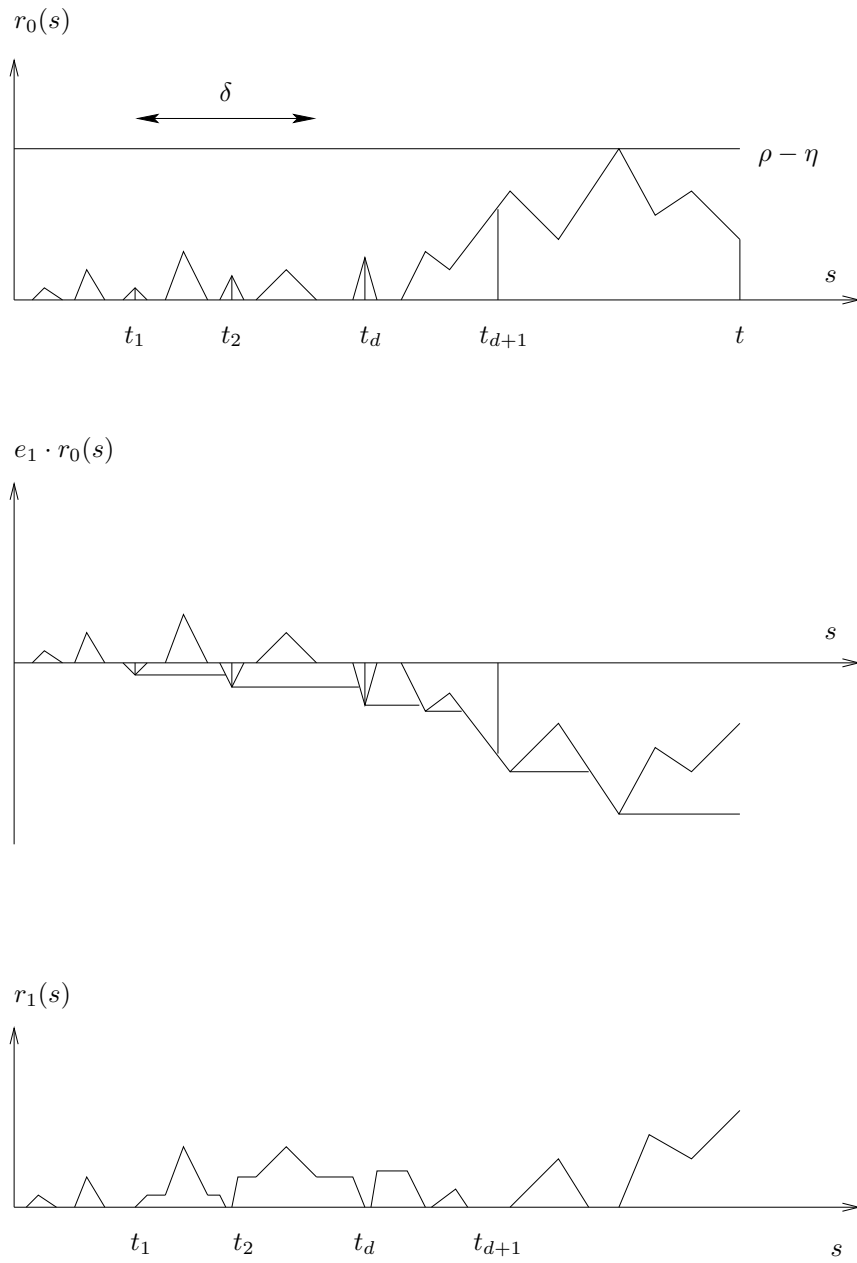


Figure 6.2. — Passage de  $r_0$  à  $r_1 = F(e_1, r_0)$ .

On raisonne par l'absurde en supposant que  $g_\infty < +\infty$ . Fixons alors  $m \in \mathbf{N}$  tel que  $g_m > g_\infty - \delta$ . Pour tout  $n \geq m$ ,  $e_{n+1} \cdot r_n$  est de signe constant sur  $[g_n, g_n + \delta]$  et *a fortiori* sur le sous-intervalle  $[g_{n+1}, g_m + \delta]$ , négatif puisque  $g_{n+1}$  est un instant de record négatif de  $e_{n+1} \cdot r_n$ . Ce record dure au moins une durée  $\delta$  puisque  $r_{n+1}$  ne s'annule pas entre  $g_{n+1}$  et  $g_{n+1} + \delta$ . Donc pour tout  $t \in [g_{n+1}, g_m + \delta]$ ,

$$r_{n+1}(t) = (e_{n+1} \cdot r_n)(t) - \underline{(e_{n+1} \cdot r_n)}(t) = -r_n(t) + r_n(g_{n+1}).$$

Cette égalité a deux conséquences : pour tout  $n \geq m$ ,

1. l'application  $r_{n+1} + r_n$  est constante sur  $[g_{n+1}, g_m + \delta]$  ;
2. pour tout  $t \in [g_{n+1}, g_m + \delta]$ ,  $r_n(t) \leq r_n(g_{n+1})$ .

On en déduit par récurrence que pour tout  $n \geq m$  et  $t \in [g_\infty, g_m + \delta]$ ,

$$\begin{aligned} r_m(t) &\geq r_m(g_n) && \text{si } n - m \text{ est pair} \\ r_m(t) &\leq r_m(g_n) && \text{si } n - m \text{ est impair.} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on voit que cela entraîne que  $r_m$  est constante (égale à  $r_m(g_\infty)$ ) sur  $[g_\infty, g_m + \delta]$ , ce qui contredit le fait que  $r_m \in \tilde{\Lambda}$ .

**Troisième étape :** on utilise la continuité de  $F$  aux points  $(e_n, r_{n-1})$ .

Les deux premières étapes montrent que  $r_n \in V_t(0, \rho, \delta)$  à partir d'un certain rang. Mais pour tout  $n \in \mathbf{N}$  l'application  $G_n : (e'_n, \dots, e'_1, r) \mapsto F_{e'_n} \circ \dots \circ F_{e'_1}(r)$  de  $E^n \times \mathbf{W}_+$  est continue au point  $(e_n, \dots, e_1, r_0)$ . Cela se montre par récurrence en remarquant que c'est évident pour  $n = 0$  et que pour tout  $n \geq 1$ ,  $G_n$  est la composée de

$$(e'_n, \dots, e'_1, r) \mapsto (e'_n, G_{n-1}(e'_{n-1}, \dots, e'_1, r))$$

et de  $F$  qui continue en  $(e_n, r_{n-1})$ . Comme  $r_n \in V_t(0, \rho, \delta)$  pour  $n$  suffisamment grand,  $F_{e'_n} \circ \dots \circ F_{e'_1}(r_0) \in V_t(0, \rho, \delta)$  pour tout  $(e'_1, \dots, e'_n)$  dans un certain voisinage de  $(e_n, \dots, e_1)$ , ce qui montre que  $V_t(0, \rho, \delta)$  est accessible depuis  $r_0$ .  $\square$

## 7 Construction d'excursions de hauteur prescrite et lemme du vérin

Dans cette partie nous montrons comment, à partir d'une trajectoire proche la trajectoire nulle en topologie CUCZ, construire une trajectoire ayant une excursion de hauteur voulue localisée près d'un instant donné. De telles excursions sont l'outil permettant de soulever la trajectoire brownienne d'une hauteur donnée entre deux instants donnés, ce qui est l'objet du lemme du vérin. Dans toute la suite, nous noterons pour  $b > a \geq 0$ ,

$$O_{a,b} = \{r \in \mathbf{W}_+ : \exists t \in ]a, b[, r(t) = 0\}$$

l'ensemble des trajectoires de  $\mathbf{W}_+$  possédant au moins un zéro dans  $]a, b[$ . Cet ensemble est un ouvert de  $\mathbf{W}_+$  d'après le lemme 12, stable par  $F_a$  d'après le lemme 40.

### 7.1 Préliminaires

**Lemme 55. (Continuité des paramètres d'une excursion)**

Pour  $t > 0$  et  $r \in \mathbf{W}_+$ , notons  $G_t(r)$ ,  $D_t(r)$ ,  $H_t(r)$  l'extrémité gauche, l'extrémité droite et la hauteur de l'excursion de  $r$  enjambant  $t$  :

$$G_t(r) = \sup(Z(r) \cap [0, t]), \quad D_t(r) = \inf(Z(r) \cap ]t, +\infty[),$$

$$H_t(r) = \max\{r(s) ; s \in [G_t(r), D_t(r)]\}.$$

Les fonctionnelles  $G_t$ ,  $D_t$  et  $H_t$  sont continues en toute trajectoire  $r_0 \in \mathbf{W}_+$  telle que  $r_0(t) > 0$ .

Plus généralement, si  $b \geq a \geq 0$ , les fonctionnelles qui à une trajectoire  $r \in \mathbf{W}_+$  associent son maximum sur les intervalles  $[G_a(r), G_b(r)]$ ,  $[G_a(r), b]$ ,  $[G_a(r), D_b(r)]$ ,  $[a, G_b(r)]$ , etc... (avec la convention  $[c, d] = [d, c]$  si  $c > d$ ) sont continues en toute trajectoire  $r_0 \in \mathbf{W}_+$  telle que  $r_0(a) > 0$  et  $r_0(b) > 0$ .

Démonstration. Soit  $r_0 \in \mathbf{W}_+$  tels que  $r_0(t) > 0$ . Notons  $g = G_t(r_0)$ ,  $d = D_t(r_0)$ . Par hypothèse  $g < t < d$ . Fixons  $\delta > 0$  tel que  $\delta < \min(t - g, d - t)$ . Pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$  tel que  $d_{a+\delta}^{CZ}(r_0, r) < \delta$ ,  $G_t(r) \in ]g - \delta, g + \delta[$  et  $D_t(r) \in ]d - \delta, d + \delta[$ , ce qui montre la continuité de  $G_t$  et  $D_t$ .

On en déduit les autres points par continuité de l'application  $(r, s, t) \mapsto \max_{[s, t]} r$  de  $\mathbf{W}_+ \times \mathbf{R}_+^2$  dans  $\mathbf{R}_+$ .  $\square$

Le lemme ci-dessous reprend un lemme similaire de l'article de Malric [3, 4].

**Lemme 56. (Somme des hauteurs des excursions)**

Soient  $b > a \geq 0$  fixés. Pour presque tout  $r \in O_{a,b}$ , la somme des hauteurs des excursions de  $r$  commencées après  $a$  et achevées avant  $b$  est infinie.

Démonstration. Notons  $N_h(r)$  le nombre d'excursions de  $r$  de hauteur  $> h$  pendant l'intervalle  $[a, b]$  et  $(H_n(r))_{n \geq 1}$  la suite des hauteurs rangées par ordre décroissant. Notons  $L_t(r)$  le temps local de  $r$  en 0 à l'instant  $t$ . Alors pour presque tout  $r \in O_{a,b}$ ,

$$hN_h(r) \rightarrow L_b(r) - L_a(r) \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ et } L_b(r) - L_a(r) \in \mathbf{R}_+^*,$$

Par conséquent, pour presque tout  $r \in O_{a,b}$ ,  $H_n(r) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et

$$\sum_{n \geq 1} H_n(r) = \int_0^\infty N_h(r) dh = +\infty.$$

ce qui montre le résultat annoncé.  $\square$

**7.2 Obtention d'une trajectoire dont le maximum sur un segment dépasse une hauteur fixée.**

Dans ce paragraphe et le suivant, nous montrons deux lemmes faisant intervenir les excursions. La preuve de ces lemmes s'inspire de la démonstration de la densité à un temps par Malric [2, 3, 4] en la simplifiant à l'aide des résultats vus sur l'accessibilité des ouverts.

**Lemme 57. (Obtention d'un maximum dépassant  $h$ )**

Soient  $b > a \geq 0$  et  $h > 0$ . Alors l'ouvert  $\{r \in O_{a,b} : \max_{[D_a(r), b]} r > h\}$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a,b}$ .

Démonstration. Pour  $n \geq 1$  et  $t_1 < \dots < t_n$  rationnels de  $]a, b[$ , notons  $V_{t_1, \dots, t_n}$  l'ensemble des trajectoires  $r \in O_{a,b}$  ne s'annulant pas en  $t_1, \dots, t_n$  et telles que

$$a < G_{t_1}(r) < D_{t_1}(r) < \dots < G_{t_n}(r) < b$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_{t_k}(r) + \max_{[G_{t_n}(r), D_{t_n}(r) \wedge b]} r > h.$$

Notons  $U_n$  la réunion des  $V_{t_1, \dots, t_n}$  pour  $t_1 < \dots < t_n$  rationnels de  $]a, b[$ . Autrement dit,  $U_n$  est l'ensemble des trajectoires possédant  $n$  excursions commençant dans  $]a, b[$  dont les intervalles fermés d'excursion sont disjoints et dont la somme des hauteurs dépasse  $h$ , en ne comptant que la hauteur maximale avant  $b$  si la dernière excursion se termine après l'instant  $b$ . En particulier,  $U_1 = \{r \in O_{a,b} : \max_{[D_a(r), b]} r > h\}$ .

D'après le lemme 55, tous ces ensembles sont des presque-ouverts de  $\mathbf{W}_+$ . D'après le lemme 56 et le fait que presque sûrement, les zéros ne sont pas isolés,  $O_{a,b}$  est presque sûrement égal à la réunion des  $U_n$  pour  $n \geq 1$ . En effet, pour presque tout  $r \in O_{a,b}$ , on peut choisir un nombre fini d'excursions de  $r$  complètement réalisées dans l'intervalle  $]a, b[$  et dont la somme des hauteurs dépasse  $h$ .

Il suffit donc de montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $U_{n-1}$  est accessible par  $F_a$  depuis toute trajectoire  $r \in U_n$ . Pour ce faire, nous allons démontrer que si  $t_1 < \dots < t_n$  sont des rationnels de  $]a, b[$ , alors  $U_{n-1}$  est accessible par  $F_{t_{n-2}}$  (avec la convention  $t_0 = a$  si  $n = 2$ ) depuis toute trajectoire de  $V_{t_1, \dots, t_n}$ .

Soient  $r \in V_{t_1, \dots, t_n}$ ,  $e \in E$  et  $\tilde{r} = F_{t_{n-2}}(e, r)$ . Alors  $\tilde{r} \in V_{n-1}$  dès que l'action de  $e$  sur  $r$  affecte du signe  $+$  l'excursion enjambant  $t_n$  et du signe  $-$  l'excursion enjambant  $t_{n-1}$ . En effet,  $\tilde{r}$  a les mêmes excursions que  $r$  avant l'instant  $D_{t_{n-2}}$ , tandis que pour tout  $s \in [G_{t_n}(r), D_{t_n}(r)]$ ,

$$\tilde{r}(s) = r(s) - \min_{[t_{n-2}, s]}(e \cdot r) \geq r(s) + H_{t_{n-1}}(r) > 0,$$

donc  $[G_{t_n}(\tilde{r}), D_{t_n}(\tilde{r})] \supset [G_{t_n}(r), D_{t_n}(r)]$  et

$$\max_{[G_{t_n}(\tilde{r}), D_{t_n}(\tilde{r}) \wedge b]} \tilde{r} \geq \max_{[G_{t_n}(r), D_{t_n}(r) \wedge b]} \tilde{r} \geq \max_{[G_{t_n}(r), D_{t_n}(r) \wedge b]} r + H_{t_{n-1}}(r).$$

Ainsi,  $\tilde{r} \in V_{t_1, \dots, t_{n-2}, t_n}$ . □

### 7.3 Obtention d'une trajectoire dont la plus grande excursion sur un segment approche une hauteur fixée

**Lemme 58.** (Obtention d'une plus grande excursion de hauteur voulue)

Soient deux instants  $b > a \geq 0$ , une hauteur  $h > 0$ , une précision  $\Delta h \in ]0, h/2[$  et un réel  $\delta > 0$ . Alors l'ensemble des trajectoires de  $O_{b, b+\delta}$  telles que

$$\max_{[G_b(r), D_b(r)]} r < \max_{[D_a(r), G_b(r)]} r \in ]h - \Delta h, h[$$

est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a,b}$ .

Autrement dit, de presque toute trajectoire de  $O_{a,b}$ , on peut accéder par  $F_a$  à une trajectoire possédant un zéro entre  $b$  et  $b + \delta$  et, pendant l'intervalle  $]a, b[$ , une excursion complète de hauteur dans  $]h - \Delta h, h[$  qui réalise le maximum sur l'intervalle  $[D_a, D_b]$ .

Démonstration. La démonstration de l'accessibilité se décompose en plusieurs étapes.

**Première étape :** Obtention d'une trajectoire dont le maximum sur  $[D_a, b]$  est  $< h$ , et existence d'un nombre fini d'excursions dont la dernière réalise un record et dont la somme des hauteurs approche  $h$  par défaut.

Par remise à zéro après l'instant  $D_a$ , l'ensemble des trajectoires  $r \in O_{a,b}$  telles que  $\max_{[D_a(r), b]} r < \Delta h$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a,b}$ .

Pour  $n \geq 1$  et  $t_1 < \dots < t_n$  rationnels de  $]a, b[$ , notons  $V_{t_1, \dots, t_n}$  l'ensemble des trajectoires  $r \in O_{a,b}$  ne s'annulant pas en  $t_1, \dots, t_n$  et telles que

$$a < G_{t_1}(r) < D_{t_1}(r) < \dots < G_{t_n}(r) < D_{t_n}(r) < b,$$

$$\sum_{k=1}^n H_{t_k}(r) \in ]h - \Delta h, h[,$$

$$H_{t_n}(r) > \max_{[D_a(r), G_{t_n}(r)]} r.$$

Alors l'ensemble de trajectoires  $r \in O_{a,b}$  telles que  $\max_{[D_a(r), b]} r < \Delta h$  est presque sûrement inclus dans la réunion des  $V_{t_1, \dots, t_n}$  pour  $n \geq 1$  et  $t_1 < \dots < t_n$  rationnels de  $]a, b[$ . En effet, si  $r \in O_{a,b}$  et  $\max_{[D_a(r), b]} r < \Delta h$ , alors pour  $n$  bien choisi, la somme des hauteurs de la plus haute excursion de  $r$  sur  $]a, b[$  et des  $n - 1$  plus hautes excursions de  $r$  sur  $]a, b[$  qui la précèdent est dans  $]h - \Delta h, h[$ , grâce au lemme 56 et au fait que les hauteurs des excursions sont  $< \Delta h$ .

**Deuxième étape :** Pour  $n \geq 2$  et  $t_1 < \dots < t_n$  rationnels de  $]a, b[$ ,  $V_{t_1, \dots, t_{n-2}, t_n}$  est accessible par  $F_{t_{n-2}}$  depuis presque toute trajectoire de  $V_{t_1, \dots, t_n}$ , avec la convention  $t_0 = a$ . Cette étape est illustrée par la figure 7.3

Comme  $V_{t_1, \dots, t_n}$  est antérieur à  $D_{t_n}$ , le lemme 57 appliqué à l'intervalle  $[t_n, b]$  et à la hauteur  $H_{t_{n-1}(r)}$  montre que le presque-ouvert  $\{r \in V_{t_1, \dots, t_n} : \max_{[D_{t_n}(r), b]} r > H_{t_{n-1}(r)}\}$  est accessible par  $F_{t_n}$  depuis presque toute trajectoire de  $V_{t_1, \dots, t_n}$ .

Il suffit donc de montrer que  $V_{t_1, \dots, t_{n-2}, t_n}$  est accessible par  $F_{t_{n-2}}$  depuis presque toute trajectoire de  $V_{t_1, \dots, t_n}$  telle que  $\max_{[D_{t_n}(r), b]} r > H_{t_{n-1}(r)}$ .

Soient  $r \in V_{t_1, \dots, t_n}$  telle que  $\max_{[D_{t_n}(r), b]} r > H_{t_{n-1}(r)}$ ,  $e \in E$  et  $\tilde{r} = F_{t_{n-2}}(e, r)$ . Supposons que l'action de  $e$  sur  $r$  affecte

- du signe – l'excursion enjambant  $t_{n-1}$  ;
- du signe + l'excursion enjambant  $t_n$  ;
- du signe – la première excursion de hauteur  $\geq H_{t_{n-1}(r)}$  après l'instant  $D_{t_n}(r)$ .
- du signe + les autres excursions de hauteur  $\geq H_{t_{n-1}(r)}$  entre  $D_{t_{n-2}}(r)$  et  $G_{t_n}(r)$ .

Nous allons montrer que  $\tilde{r} \in V_{t_1, \dots, t_{n-2}, t_n}$ .

Notons  $g$  le dernier instant réalisant le maximum de l'excursion enjambant  $t_{n-1}$  et  $d = \min\{t \geq D_{t_n}(r) : r(t) \geq H_{t_{n-1}(r)}\}$ . Alors  $t_{n-2} < g < G_{t_n}(r) < D_{t_n}(r) < d < b$ . Pour tout  $t \in [D_{t_{n-2}}(r), d]$ ,  $(e \cdot r)_t \geq -H_{t_{n-1}(r)}$ , avec égalité si et seulement si  $t \in \{g, d\}$  et inégalité stricte si  $t \in ]g, d[$ . Donc  $[g, d]$  est un intervalle d'excursion de  $\tilde{r}$ .

De plus, pour tout  $t \in [g, d]$ ,  $\tilde{r}(t) = (e \cdot r)(t) + H_{t_{n-1}(r)}$ , et le maximum de  $e \cdot r$  sur  $[g, d]$  est atteint sur  $[G_{t_n}(r), D_{t_n}(r)]$  et vaut  $H_{t_n}(r)$ . Donc  $H_{t_n}(\tilde{r}) = H_{t_n}(r) + H_{t_{n-1}(r)}$ .

Comme  $\tilde{r}$  coïncide avec  $r$  jusqu'à l'instant  $D_{t_{n-2}}$  et comme pour tout  $t \in [D_{t_{n-2}}(r), g]$ ,  $\tilde{r}(t) \leq (e \cdot r)_t + H_{t_{n-1}(r)} < H_{t_n}(r) + H_{t_{n-1}(r)}$ , on a ainsi  $\tilde{r} \in V_{t_1, \dots, t_{n-2}, t_n}$ .

Les deux premières étapes montrent que la réunion des  $V_t$  pour  $t$  rationnel de  $]a, b[$  est accessible par  $F_a$  depuis presque toute trajectoire de  $O_{a,b}$ . Une fois qu'on a obtenu

une trajectoire appartenant à l'un des  $V_t$ , on souhaite obtenir une trajectoire qui en outre s'annule entre  $b$  et  $b + \delta$  et telle que l'excursion enjambant  $t$  réalise le maximum sur  $[D_a, D_b]$ . Nous allons obtenir ce résultat par remise à zéro après l'instant  $D_t$ .

**Troisième étape :** Pour tout rationnel  $t \in ]a, b[$ , l'ensemble des trajectoires de  $O_{b, b+\delta}$  telles que  $\max_{[G_b(r), D_b(r)]} r < \max_{[D_a(r), G_b(r)]} r \in ]h - \Delta h, h[$  est accessible par  $F_a$  depuis presque toute trajectoire de  $V_t$ .

Soient  $t \in ]a, b[$  et  $r \in V_t$ . Alors l'excursion enjambant  $t$  est entièrement contenue dans l'intervalle  $]a, b[$ , de hauteur  $H_t(r) \in ]h - \Delta h, h[$  vérifiant  $H_t(r) > \max_{[D_a(r), G_t(r)]} r$ .

Par remise à zéro après l'instant  $D_t$ , le presque-ouvert  $V_t \cap \theta_{D_t}^{-1}(V_{b-t+\delta}(0, H_t(r), \delta))$  est accessible par  $F_t$  donc par  $F_a$  depuis  $r$ . Les trajectoires de cet ensemble vérifient les inégalités voulues.  $\square$

## 7.4 Lemme du vérin

Dans la suite, on s'intéresse à l'accessibilité d'ouverts de la forme

$$U_{a,b}(f, \rho, \delta) = \{r \in O_{a, a+\delta} \cap O_{b-\delta, b} : \|r - f\|_{[a,b]} < \rho\}$$

pour  $b > a \geq 0$ ,  $f \in \mathbf{W}_+$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $\rho > 0$  et  $0 < \delta < b - a$ .

Le lemme du vérin montre comment soulever une trajectoire brownienne d'une hauteur  $h$  sur un intervalle fixé.

### Lemme 59. (Lemme du vérin)

Considérons des instants  $b > b' > a' > a \geq 0$ , une hauteur  $h > 0$  et une trajectoire  $g \in \mathbf{W}_+$ , nulle hors de  $[a', b']$ . Définissons une trajectoire  $f \in \mathbf{W}_+$  par

$$f(t) = \begin{cases} h \times \frac{t-a}{a'-a} & \text{si } a \leq t \leq a' \\ g(t) + h & \text{si } a' \leq t \leq b' \\ h \times \frac{b-t}{b-b'} & \text{si } b' \leq t \leq b \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b]. \end{cases}$$

Soient  $\rho > \rho' > 0$  et  $\delta > 0$  vérifiant  $\text{Osc}(f, \delta) < \rho'/4$  et  $\delta < \min(a - a', b' - a', b - b')$ .

Si l'ouvert  $U_{a', b'}(g, \rho', \delta)$  est accessible par  $F_{a'}$  depuis presque tout  $r \in O_{a', a'+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a', D_{a'}(r)]} < \rho'$ , alors l'ouvert  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a, a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho$ .

Démonstration. On commence par remarquer que grâce aux hypothèses faites sur  $\delta$ ,

$$a < a + \delta < a' < b' - \delta < b' < b - \delta < b.$$

#### 1. Démonstration dans le cas où $h < \rho/2$ .

Fixons  $\Delta h \in ]0, \rho - \rho'[$  tel que  $\Delta h < h/2$  et notons

$$\begin{aligned} V_0 &= \{r \in O_{a, a+\delta} : \|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho\}, \\ V_1 &= \{r \in O_{a', a'+\delta} : \|r\|_{[G_{a'}(r), D_{a'}(r)]} < \|r\|_{[D_a(r), G_{a'}(r)]} \in ]h - \Delta h, h[ \}, \\ V_2 &= \{r \in O_{b'-\delta, b'} : \|r - g\|_{[D_{a'}(r), D_{b'-\delta}(r)]} < \rho'\}, \\ V_3 &= \{r \in O_{b-\delta, b} : \|r\|_{[D_{b'-\delta}(r), D_{b-\delta}(r)]} < \rho'/2\}, \\ V_4 &= \{r \in O_{b-\delta, b} : h < \|r\|_{[D_{b-\delta}(r), b]} < \rho/2\}. \end{aligned}$$

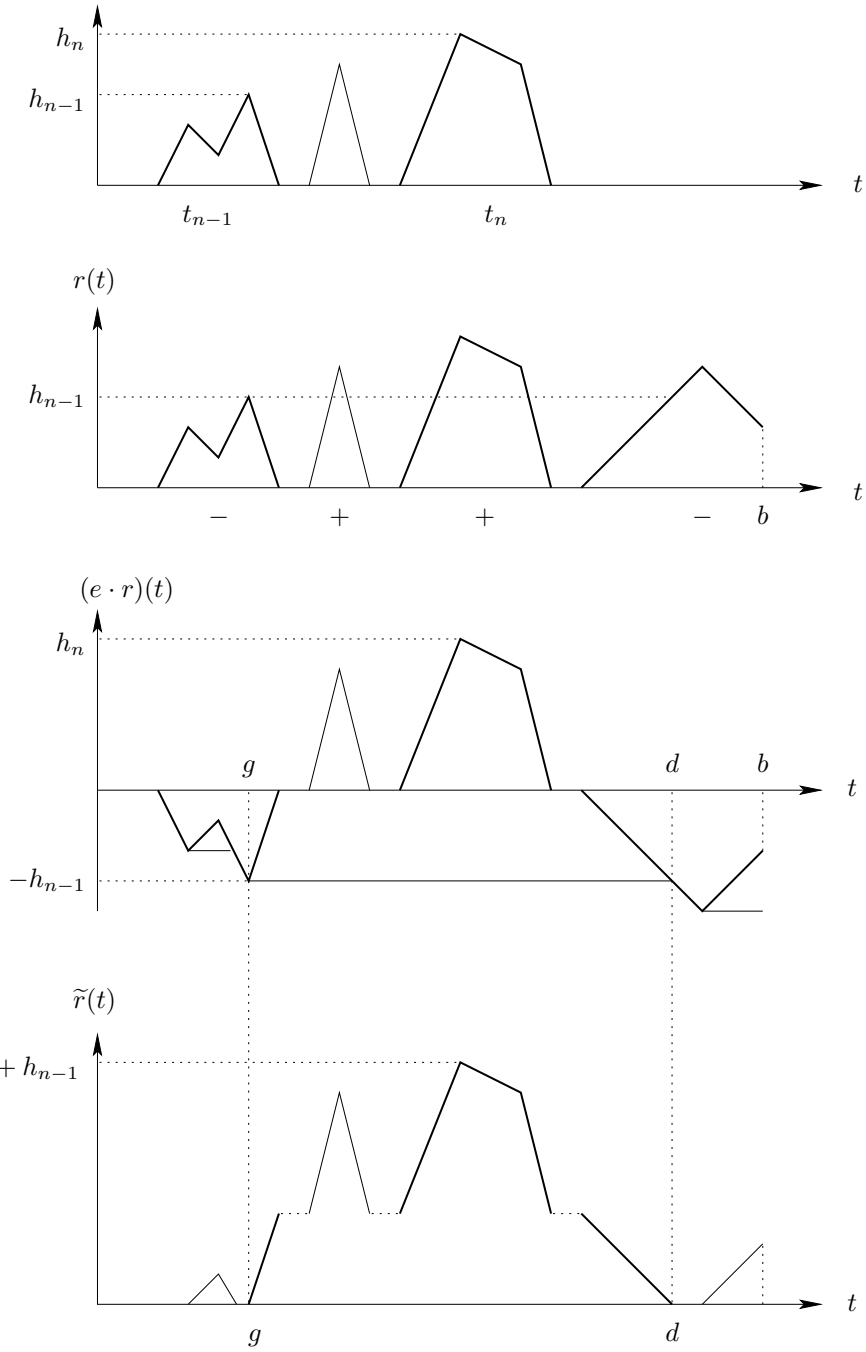


Figure 7.3. — Passage de  $V_{t_1, \dots, t_n}$  à  $V_{t_1, \dots, t_{n-2}, t_n}$  par  $F_{t_{n-2}}$ .



Alors  $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4$  sont des presque-ouverts (grâce au lemme 55) et :

- $V_1$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in V_0$ , grâce au lemme 58 (obtention d'une plus grande excursion de hauteur voulue) ;
- $V_2$  est accessible par  $F_{a'}$  depuis presque tout  $r \in V_1$ , d'après l'hypothèse du lemme et l'inclusion  $U_{a',b'}(g, \rho', \delta) \subset V_2$  ;
- $V_3$  est accessible par  $F_{b'-\delta}$  depuis presque tout  $r \in V_2$ , grâce au lemme 43 (on remet la trajectoire à zéro après l'instant  $D_{b'-\delta}$ ).
- $V_4$  est accessible par  $F_{b-\delta}$  depuis presque tout  $r \in V_3$ , grâce au lemme 58 (obtention d'une plus grande excursion de hauteur voulue) ;

Comme  $V_0, V_1, V_2, V_3$ , sont stables par  $F_a, F_{a'}, F_{b'-\delta}, F_{b-\delta}$  respectivement, le presque-ouvert  $V_0 \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in V_0$ . Il suffit donc de montrer que  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis toute trajectoire de  $V_0 \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$ .

Soient donc  $r \in V_0 \cap V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$ ,  $e \in E$  et  $\tilde{r} = F_a(e, r)$ . Nous allons montrer que  $\tilde{r} \in U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  dès que l'action de  $e$  sur  $r$  affecte

- du signe – la plus grande excursion sur  $[D_a(r), G_{a'}(r)]$ ,
- du signe – l'excursion réalisant le maximum de  $r$  sur  $[D_{b-\delta}(r), b]$ ,
- du signe + les autres excursions de hauteur  $\geq \min(\rho - \rho' - \Delta h, \rho')/2$  avant  $D_b(r)$ .

Pour cela, notons  $h_1$  la hauteur de la plus grande excursion de  $r$  sur  $[D_a(r), G_{a'}(r)]$  et  $h_2$  le maximum de  $r$  sur  $[D_{b-\delta}(r), b]$ . Alors  $h - \Delta h < h_1 < h < h_2$ .

On a bien sûr  $\tilde{r} \in O_{a,a+\delta}$  puisque  $D_a(\tilde{r}) = D_a(r)$ . Par ailleurs,  $\tilde{r} \in O_{b-\delta,b}$  puisque d'après le choix des signes, l'instant réalisant le maximum de  $r$  sur  $[D_{b-\delta}(r), b]$  est un instant de record négatif de  $e \cdot r$  à partir de l'instant  $D_a(r)$ , et donc un zéro de  $\tilde{r}$ .

Il reste à montrer que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $|\tilde{r}(t) - f(t)| < \rho$ . On distingue quatre cas.

1. Si  $t \in [a, D_a(r)]$ , alors  $\tilde{r}(t) = r(t) < \rho$  puisque  $r \in V_0$ , donc

$$|\tilde{r}(t) - f(t)| \leq \max(\tilde{r}(t), f(t)) \leq \max(r(t), h) < \rho.$$

2. Si  $t \in [D_a(r), D_{a'}(r)]$ , alors

$$0 \leq \tilde{r}(t) \leq 2\|r\|_{[D_a(r), D_{a'}(r)]} < 2h < \rho \text{ car } r \in V_1,$$

$$0 \leq f(t) \leq h + \text{Osc}(f, \delta) < \rho/2 + \rho'/4 < \rho,$$

donc

$$|\tilde{r}(t) - f(t)| \leq \max(\tilde{r}(t), f(t)) < \rho.$$

3. Si  $t \in [D_{a'}(r), b']$ , alors  $|r(t) - g(t)| < \rho'$ . En effet, pour  $t \in [D_{a'}(r), D_{b'-\delta}(r)]$  cela vient du fait que  $r \in V_2$  ; pour  $t \in [D_{b'-\delta}(r), b']$  cela vient du fait que  $r \in V_3$  et  $\text{Osc}(g, \delta) < \rho'/4$  d'où  $0 < r(t) < \rho'/2$  et  $0 < g(t) < \rho'/4$ . D'après le choix des signes, on a donc

$$\begin{aligned} |\tilde{r}(t) - f(t)| &= |(e \cdot r)(t) + h_1 - g(t) - h| \\ &\leq |(e \cdot r)(t) - r(t)| + |r(t) - g(t)| + |h_1 - h| \\ &< (\rho - \rho' - \Delta h) + \rho' + \Delta h \\ &= \rho. \end{aligned}$$

4. Si  $t \in [b', b]$ , alors  $r(t) < \rho/2$ . En effet, pour  $t \in [b', D_{b-\delta}(r)]$  cela vient du fait que  $r \in V_3$  et de l'inégalité  $\rho'/2 < \rho/2$  ; pour  $t \in [D_{b-\delta}(r), b]$  cela vient du fait que  $r \in V_4$ . Comme  $e \cdot r$  est minoré par  $-\rho/2$  sur  $[a, D_b]$ , on a donc

$$|\tilde{r}(t) - f(t)| \leq \max(\tilde{r}(t), f(t)) \leq \max(r(t) + \rho/2, h) < \rho.$$

Dans tous les cas,  $|\tilde{r}(t) - f(t)| < \rho$ , ce qui achève la preuve dans le cas où  $h < \rho/2$ .

2. Démonstration dans le cas où  $h \geq \rho/2$ .

Choisissons  $h' \in [\rho/4, \rho/2[$  et  $n \geq 2$  entier tels que  $h = nh'$ . Soient  $\rho_0 = \rho'$  et  $\rho_1, \dots, \rho_n$  tels que

$$\max(\rho_0, 2h') < \rho_1 < \dots < \rho_n = \rho.$$

Soient

$$a = a_n < \dots < a_0 = a',$$

$$b' = b_0 < \dots < b_n = b.$$

les deux subdivisions régulières de  $[a, a']$  et  $[b', b]$  en  $n$  sous-intervalles. Pour  $k \in [0 \dots n]$ , notons  $f_k$  la trajectoire définie par

$$f_k(t) = [f(t) - (n - k)h']_+$$

et  $\mathcal{H}_k$  l'affirmation : « l'ouvert  $U_{a_k, b_k}(f_k, \rho_k, \delta)$  est accessible par  $F_{a_k}$  depuis presque tout  $r \in O_{a_k, a_k + \delta}$  tel que  $\|r\|_{[a_k, D_{a_k}(r)]} < \rho_k$  ». Par construction,  $f_k$  est nulle en dehors de  $[a_k, b_k]$ . Comme  $f_0 = g$  et  $f_n = f$ , il s'agit de démontrer que  $\mathcal{H}_0 \Rightarrow \mathcal{H}_n$ .

Il suffit de montrer que pour tout  $k \in [0 \dots n - 1]$ ,  $\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$ . Pour cela, on remarque que  $f_{k+1}$  se déduit de  $f_k$  par levage de la hauteur  $h' < \eta/2$  sur l'intervalle  $[a_k, b_k]$  et interpolation linéaire sur les intervalles  $[a_{k+1}, a_k]$  et  $[b_k, b_{k+1}]$ . Comme

$$\text{Osc}(f_k, \delta) \leq \text{Osc}(f, \delta) < \rho'/4 < \rho_k/4,$$

$b_k - a_k \geq b' - a' > \delta$ ,  $a_k - a_{k+1} > \delta$  et  $b_{k+1} - b_k > \delta$  compte tenu des inégalités

$$f(a_k) - f(a_{k+1}) = f(b_{k+1}) - f(b_k) = h' \geq \rho/4 > \text{Osc}(f, \delta),$$

il suffit d'appliquer le lemme du vérin dans le cas où il est déjà démontré.  $\square$

## 8 Approximation des fonctions continues affines par morceaux

Dans cette partie, nous allons voir comment approcher les trajectoires affines par morceaux pour la topologie CUCZ. La démonstration, résumée par la figure 8 repose sur les propositions 41 (Accessibilité successives et intersection) et 43 (Remise à zéro après l'instant  $D_a$ ) et sur le lemme 59 (Lemme du vérin).

Le lemme suivant montre que pour approcher une trajectoire  $f$  entre deux de ses zéros, il suffit de savoir approcher les morceaux obtenus en découpant  $f$  à un nombre finis de zéros intermédiaires.

Pour  $b > a \geq 0$ ,  $f \in \mathbf{W}_+$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $\rho > 0$  et  $0 < \delta < b - a$ , on note toujours

$$U_{a,b}(f, \rho, \delta) = \{r \in O_{a, a+\delta} \cap O_{b-\delta, b} : \|r - f\|_{[a,b]} < \rho\}.$$

Si  $a = z_0 < \dots < z_n = b$  et  $\delta < \min(z_1 - z_0, \dots, z_n - z_{n-1})$ , on note également

$$U_{z_0, \dots, z_n}(f, \rho, \delta) = \bigcap_{k=0}^{n-1} U_{z_k, z_{k+1}}(f, \rho, \delta),$$

On remarque que cet ouvert est contenu dans  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$ .

**Lemme 60. (Concaténation d'un nombre fini de ponts)**

Soit  $f \in \mathbf{W}_+$ . Soient  $a = z_0 < \dots < z_n = b$  des zéros de  $f$ . Soient  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $\text{Osc}(f|_{[a,b]}, \delta) < \rho$  et  $\delta < \min(z_1 - z_0, \dots, z_n - z_{n-1})$ .

Supposons que pour tout  $k \in [0 \dots n-1]$ , l'ouvert  $U_{z_k, z_{k+1}}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_{z_k}$  depuis presque toute trajectoire  $r \in O_{z_k, z_k + \delta}$  telle que  $\|r\|_{[z_k, D_{z_k}(r)]} < \rho$ .

Alors l'ouvert  $U_{z_0, \dots, z_n}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a, a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho$  (et donc depuis presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$  lorsque  $a = 0$ ).

Démonstration. Le lemme se démontre par récurrence sur le nombre  $n$  de ponts.

Pour  $n = 1$  il n'y a rien à montrer.

Soit  $n \geq 2$ . Supposons la propriété établie pour  $n-1$  ponts. Soient  $f \in \mathbf{W}_+$ ,  $a = z_0 < \dots < z_n = b$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$  comme dans l'énoncé. On remarque que

$$U_{z_0, \dots, z_n}(f, \rho, \delta) = V_1 \cap V_2 \cap V_3$$

où

$$V_1 = U_{z_0, \dots, z_{n-2}}(f, \rho, \delta) \cap \{r \in O_{[z_{n-2}, z_{n-2} + \delta]} \cap O_{[z_{n-1} - \delta, z_{n-1}]} : \|r\|_{[z_{n-2}, D_{z_{n-1} - \delta}(r)]} < \rho\},$$

$$V_2 = \{r \in O_{z_{n-1}, z_{n-1} + \delta} : \|r\|_{[D_{z_{n-1} - \delta}(r), D_{z_{n-1}}(r)]} < \rho\}$$

$$V_3 = U_{z_{n-1}, z_n}(f, \rho, \delta)$$

Le presque-ouvert  $V_1$  contient  $U_{z_0, \dots, z_{n-1}}(f, \rho, \delta)$ , donc par hypothèse de récurrence,  $V_1$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a, a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho$ . De plus,  $V_1$  est stable par  $F_{z_{n-1} - \delta}$ .

Par remise à zéro après l'instant  $D_{z_{n-1} - \delta}$ , l'ouvert  $V_2$  est accessible par  $F_{z_{n-1} - \delta}$  depuis presque toute trajectoire de  $O_{[z_{n-1} - \delta, z_{n-1}]}$ . De plus,  $V_2$  est stable par  $F_{z_{n-1}}$ .

Enfin, par hypothèse, l'ouvert  $V_3$  est accessible par  $F_{z_{n-1}}$  depuis presque toute trajectoire  $r \in O_{z_{n-1}, z_{n-1} + \delta}$  telle que  $\|r\|_{[z_{n-1}, D_{z_{n-1}}(r)]} < \rho$  et donc de presque toute trajectoire de  $V_1 \cap V_2$ .

Ainsi,  $U_{z_0, \dots, z_n}(f, \rho, \delta) = V_1 \cap V_2 \cap V_3$  est accessible depuis presque tout  $r \in O_{a, a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho$ .  $\square$

À l'aide du lemme précédent, du lemme de remise à zéro et du lemme du vérin, nous allons démontrer l'accessibilité des ouverts de la forme  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$ .

**Proposition 61. (Approximation d'un pont affine par morceaux)**

Soient  $b > a \geq 0$ ,  $f \in \mathbf{W}_+$  une trajectoire affine par morceaux sur  $[a, b]$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Soient  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$ . Alors l'ouvert  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a, a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho$ .

Démonstration. Par hypothèse, on peut trouver une subdivision  $a = c_0 < \dots < c_n = b$  tels que  $f \in \mathbf{W}_+$  soit affine sur chaque segment  $[c_{k-1}, c_k]$ . De plus, l'image réciproque de tout réel par la restriction de  $f$  à  $[a, b]$  est une union finie de singletons et d'intervalles de subdivision. Quitte à raffiner la subdivision, on peut donc supposer que pour tout point  $c$  de subdivision, l'image réciproque de  $f(c)$  par  $f$  restreinte à  $[a, b]$  est formée uniquement de points de subdivision et d'intervalles de subdivision. Nous dirons alors que la subdivision de  $[a, b]$  est complète relativement à  $f$ .

Quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer de plus que  $\delta < \min(c_1 - c_0, \dots, c_n - c_{n-1})$  et que  $\text{Osc}(f|_{[a,b]}, \delta) < \rho/4$ .

Sous ces restrictions, on effectue alors une récurrence sur le nombre  $n$  d'intervalles pour une subdivision complète.

Remarquons d'abord que si  $\|f\|_{[a,b]} < \rho$ , alors

$$\{r \in \mathbf{W}_+ : \|r\|_{[a,b]} < \rho\} \subset \{r \in \mathbf{W}_+ : \|r - f\|_{[a,b]} < \rho\}$$

puisque  $\|r - f\|_{[a,b]} \leq \max(\|r\|_{[a,b]}, \|f\|_{[a,b]})$  pour tout  $r \in \mathbf{W}_+$ . Dans ce cas, il suffit d'appliquer le théorème de remise à zéro après l'instant  $D_a$ .

1. Le cas où  $n = 1$  rentre dans ce cas particulier puisque  $f$  est alors la fonction nulle.

2. Le cas où  $n = 2$  est une application directe du lemme du vérin.

En effet, supposons que  $\|f\|_{[a,b]} \geq \rho$  (sans quoi il n'y a rien à montrer). Choisissons un réel  $\rho'$  tel que  $4\text{Osc}(f|_{[a,b]}, \delta) < \rho' < \rho$  et posons  $h = f(c_1) - \rho'/2$ . Alors  $0 < \rho'/2 < \rho - \rho'/2 \leq h < f(c_1)$ . Notons  $a' < b'$  les antécédents de  $h$  par  $f$  et  $g = (f - h)_+$ .

Comme  $g$  est majorée par  $f(c_1) - h = \rho'/2$ , l'ouvert  $U_{a',b'}(g, \rho', \delta)$  est accessible par  $F_{a'}$  depuis presque tout  $r \in O_{a',a'+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a',D_{a'}(r)]} < \rho$ , d'après la remarque préliminaire.

L'application  $f$  s'obtient à partir de  $g$  par levage de la hauteur  $h$  et par interpolation linéaire sur  $[a, a']$  et  $[b', b]$ . Par ailleurs  $\delta$  vérifie  $\text{Osc}(g|_{[a',b']}, \delta) \leq \text{Osc}(f|_{[a,b]}, \delta) < \rho'/4$  et  $\delta < \min(a' - a, c_1 - a', b' - c_1, b - b')$  puisque  $f(a') - f(a) = f(b') - f(b) = h > \rho'/4$  et  $f(c_1) - f(a') = f(c_1) - f(b') = \rho'/2 > \rho'/4$ .

Les hypothèses du lemme du vérin sont satisfaites, ce qui montre que  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a,a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a,D_a(r)]} < \rho$ .

3. Montrons la propriété pour  $n \geq 3$  en la supposant établie pour un nombre d'intervalles au plus égal à  $n - 1$ . Soit  $h = \min\{f(c_k) ; 1 \leq k \leq n - 1\}$ . On distingue deux cas.

Soit  $h = 0$ . Dans ce cas, il existe  $m \in [1 \dots n - 1]$  tel que  $f(c_m) = 0$ . Les subdivisions  $a = c_0 < \dots < c_m = z$  et  $z = c_m < \dots < c_n = b$  sont complètes relativement à  $f$ . Par hypothèse de récurrence, l'ouvert  $U_{a,z}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a,a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a,D_a(r)]} < \rho$  et l'ouvert  $U_{z,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_z$  depuis presque tout  $r \in O_{z,z+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[z,D_z(r)]} < \rho$ . D'après le lemme de concaténation de ponts,  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a,a+\delta}$  tel que  $\|r\|_{[a,D_a(r)]} < \rho$ .

Soit  $h > 0$ . Comme la subdivision  $a = c_0 < \dots < c_n = b$  de  $[a, b]$  est complète relativement à  $f$ , on a nécessairement  $f(c_1) = f(c_{n-1}) = h$ . On pose  $a' = c_1$ ,  $b' = c_{n-1}$  et  $g = (f - h)_+$ . La trajectoire  $g$  est affine par morceaux sur  $[a', b']$  et vérifie  $g(a') = g(b') = 0$ . De plus, la subdivision  $a' = c_1 < \dots < c_{n-1} = b'$  est complète relativement à  $g$  et vérifie  $\delta < \min(c_2 - c_1, \dots, c_{n-1} - c_{n-2})$ . Si l'on fixe  $\rho' \in ]4\text{Osc}(f, \delta), \rho[$ , on a alors

$$\text{Osc}(g|_{[a',b']}, \delta) \leq \text{Osc}(f|_{[a,b]}, \delta) < \rho'/4.$$

Par conséquent, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $g$ ,  $\rho'$ ,  $\delta$  et à la subdivision  $a' = c_1 < \dots < c_{n-1} = b'$ , ce qui montre que l'ouvert  $U_{a',b'}(g, \rho', \delta)$  est

accessible par  $F_{c_1}$  depuis presque tout  $r \in O_{c_1, c_1 + \delta}$  tel que  $\|r\|_{[c_1, D_{c_1}(r)]} < \rho$ . Mais  $f$  s'obtient à partir de  $g$  par levage de la hauteur  $h$  et par interpolation linéaire sur  $[a, a']$  et  $[b', b]$ . Comme  $\delta < \min(a' - a, b' - a', b - b')$ , on peut appliquer le lemme du vérin. Ainsi, l'ouvert  $U_{a,b}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_a$  depuis presque tout  $r \in O_{a, a + \delta}$  tel que  $\|r\|_{[a, D_a(r)]} < \rho$ .  $\square$

**Proposition 62. (Approximation CUCZ d'une fonction affine par morceaux)**

*Soit  $f \in \mathbf{W}_+$ , affine par morceaux. Pour tout  $t > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\delta > 0$ , l'ouvert  $V_t(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F$  depuis presque toute trajectoire de  $\mathbf{W}_+$ .*

Démonstration. Quitte à modifier  $f$  après l'instant  $t$  et à augmenter  $t$ , on peut se limiter au cas où  $f(t) = 0$ . Quitte à réduire  $\delta$ , on peut supposer que  $\delta$  est strictement inférieur à la longueur des excursions de  $f$  sur  $[0, t]$ , puisque ces excursions sont en nombre fini. On choisit alors un nombre fini de zéros de  $f$ ,  $0 = z_0 < \dots < z_n = t$  de telle sorte que  $\delta < \min(z_1 - z_0, \dots, z_n - z_{n-1})$  et que tout zéro de  $f$  avant  $t$  soit à distance  $< \delta$  d'un de ces zéros.

Le résultat d'approximation des ponts appliqué à  $f$  sur chaque intervalle  $[z_k, z_{k+1}]$  montre que l'ouvert  $U_{z_k, z_{k+1}}(f, \rho, \delta)$  est accessible par  $F_{z_k}$  depuis presque toute trajectoire  $r \in O_{z_k, z_k + \delta}$  telle que  $\|r\|_{[z_k, D_{z_k}(r)]} < \rho$ .

Par concaténation d'un nombre fini de ponts, l'ouvert

$$U_{z_0, \dots, z_n}(f, \rho, \delta) = \bigcap_{k=0}^{n-1} U_{z_k, z_{k+1}}(f, \rho, \delta),$$

est accessible par  $F_0$  depuis presque tout  $r \in \mathbf{W}_+$ . On termine en remarquant que  $U_{z_0, \dots, z_n}(f, \rho, \delta)$  est inclus dans  $V_t(f, \rho, \delta)$ .  $\square$

Cette proposition achève la démonstration du théorème 1 compte tenu de la proposition 14 (Passage de la chaîne  $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à la chaîne  $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ) et de la densité des fonctions continues, positives, nulles en 0 et affines par morceaux dans  $\mathbf{W}_+$  (lemme 10).

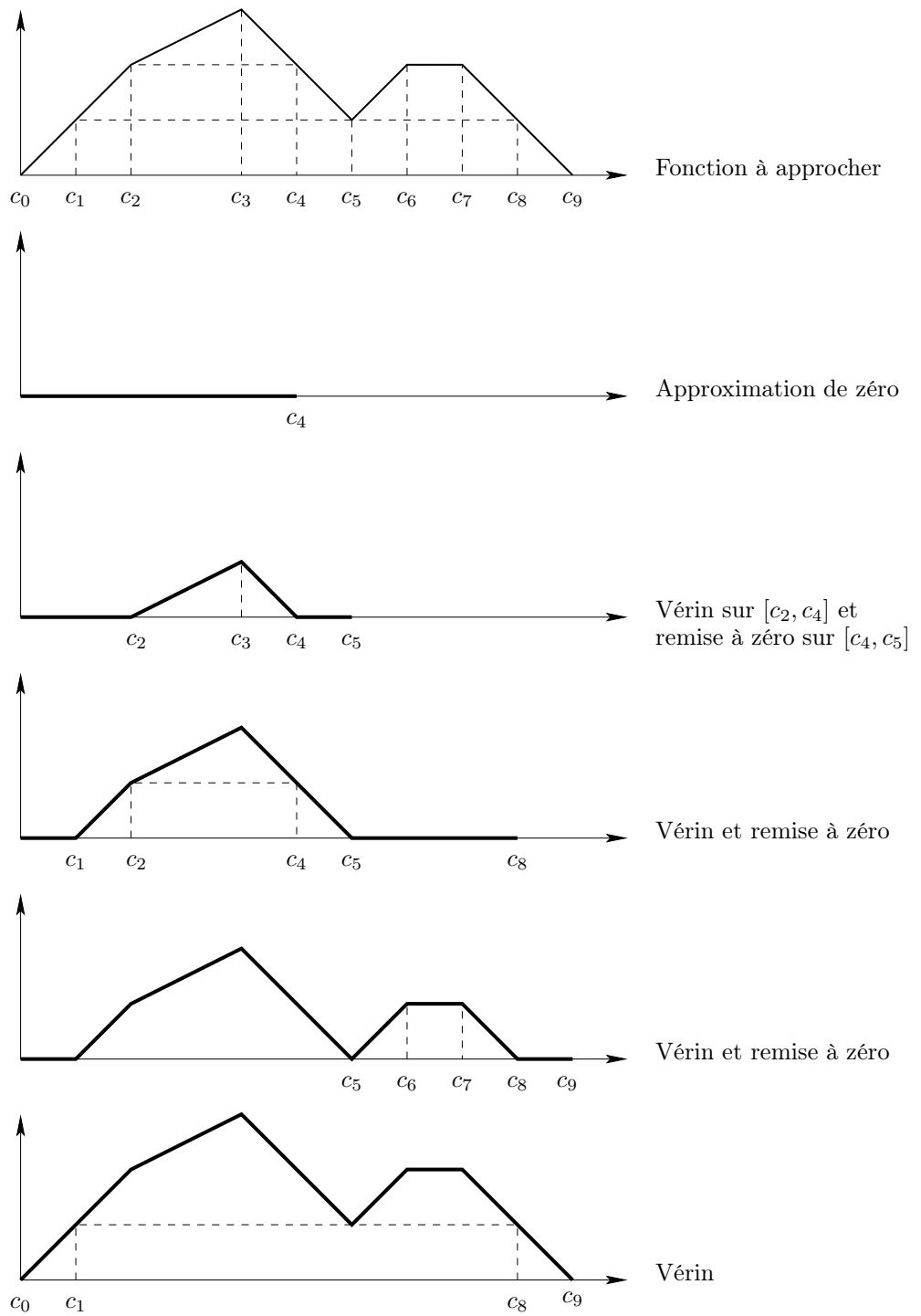


Figure 8. — Étapes de l'approximation d'une fonction continue affine par morceaux.

## 9 Comparaison avec les outils de Malric

### 9.1 Parties atteignables

Nous avons utilisé dans cet article la notion d'accessibilité. Malric utilise dans [5] une notion voisine, mais moins souple, dont nous adaptons la définition à toute transformation mesurable  $T$  d'un espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, \pi)$  dans lui-même préservant la mesure.

**Définition 63. (Atteignabilité)** *Une partie mesurable  $G \in \mathcal{E}$  est dite atteignable si pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  et une probabilité  $\nu$  sur  $(E, \mathcal{E})$  tels que :*

1.  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\pi$ .
2.  $T^n(\nu) = \pi$ .
3.  $\nu(G) > 1 - \eta$ .

La proposition 1 de [5], énoncée dans le cas de la transformation de Lévy, s'étend sans difficulté au cas général : si  $G$  est atteignable, alors pour  $\pi$ -presque tout  $x \in E$ , l'orbite  $\{T^n(x) ; n \in \mathbf{N}\}$  visite  $G$ .

Dans le cas où l'espace probabilisé  $(E, \mathcal{E})$  est un espace polonais muni de la tribu borélienne, ce résultat peut être vu comme une conséquence de notre corollaire 3. En effet, l'atteignabilité de  $G$  équivaut à une condition forte d'accessibilité que nous allons définir.

**Définition 64. (Accessibilité, accessibilité forte)**

*Soient  $X$  une variable aléatoire de loi  $\pi$ , définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $K(\cdot, \cdot)$  une version régulière de la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $T(X)$ .*

- *On dit que  $G$  est accessible depuis  $x \in E$  s'il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $K^n(x, G) > 0$ .*
- *On dit que  $G$  est fortement accessible si  $\sup_{n \in \mathbf{N}} \pi\{x \in G : K^n(x, G) > 0\} = 1$ .*

L'accessibilité de  $G$  depuis  $\pi$ -presque tout  $x \in E$  constitue l'hypothèse de notre corollaire 3. Pour déduire de ce corollaire la proposition 1 de [5], il suffit de démontrer les implications contenues dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 65. (Lien entre atteignabilité et accessibilité)**

1.  $G$  est atteignable si et seulement si  $G$  est fortement accessible.
2. Si  $G$  est fortement accessible, alors  $G$  est accessible depuis  $\pi$ -presque tout  $x \in E$ .

Démonstration. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , notons  $A_n = \{x \in E : K^n(x, G) > 0\}$ . Le point 2 découle immédiatement des inégalités

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \pi(A_n) \leq \pi\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) \leq 1.$$

Montrons le point 1.

Supposons que  $G$  est fortement accessible et montrons que  $G$  est atteignable. Fixons  $\eta > 0$ . Par hypothèse, on peut trouver  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $\pi(A_n) > 1 - \eta$ . Définissons un noyau de transition  $L$  et une mesure  $\nu$  sur  $(E, \mathcal{E})$  par

$$\begin{aligned} L(x, B) &= K^n(x, B \cap G) / K^n(x, G) \text{ si } x \in A_n, \\ L(x, B) &= K^n(x, B) \text{ sinon,} \end{aligned}$$

Alors pour  $\pi$ -presque tout  $x \in E$ , la probabilité  $L(x, \cdot)$  est absolument continue par rapport à  $K^n(x, \cdot)$ , qui est portée par  $(T^n)^{-1}(\{x\})$ . De plus  $L(x, G) = 1$  si  $x \in A_n$ ,  $L(x, G) = 0$  sinon.

Soit  $\nu$  la mesure sur  $(E, \mathcal{E})$  définie par

$$\nu(B) = \int_E L(x, B) d\pi(x).$$

Alors

1. Si  $\nu(B) = 0$ , alors pour  $\pi$ -presque tout  $x \in E$ ,  $L(x, B) = 0$  d'où  $K^n(x, B) = 0$ , et donc

$$\pi(B) = \int_E K^n(x, B) d\pi(x) = 0.$$

Donc  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\pi$ .

2. Comme pour  $\pi$ -presque tout  $x \in E$ , la mesure image de  $L(x, \cdot)$  par  $T^n$  est  $\delta_x$ , on a  $T^n(\nu) = \pi$ .
3. Enfin,  $\nu(G) = \pi(A_n) > 1 - \eta$ .

Cela montre que  $G$  est atteignable.

Réciproquement, supposons que  $G$  est atteignable. Fixons  $\eta > 0$ . Choisissons  $n \in \mathbf{N}$  et  $\nu$  vérifiant les points 1, 2 et 3 de la définition. Soient  $Y$  une variable aléatoire de loi  $\nu$  et  $L_n(\cdot, \cdot)$  une version régulière de la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $T^n(Y)$ . Alors

$$\pi[G \cap (T^n)^{-1}(A_n^c)] = P[X \in G ; T^n(X) \in A_n^c] = \int_{A_n^c} K^n(x, G) d\pi(x) = 0,$$

donc par absolue continuité,

$$0 = \nu[G \cap (T^n)^{-1}(A_n^c)] = P[Y \in G ; T^n(Y) \in A_n^c] = \int_{A_n^c} L_n(x, G) d\pi(x).$$

Donc  $L_n(x, G) = 0$  pour  $\pi$ -presque tout  $x \in A_n^c$ . Par conséquent, pour  $\pi$ -presque tout  $x \in E$

$$\mathbf{I}_{A_n}(x) \geq \mathbf{I}_{[L_n(x, G) > 0]} \geq L_n(x, G),$$

d'où en intégrant par rapport à  $\pi$ ,

$$\pi(A_n) \geq \int_E L_n(x, G) d\pi(x) = P[Y \in G] > 1 - \eta.$$

Comme  $\eta > 0$  est arbitraire, on en déduit que  $G$  est fortement accessible.  $\square$

Remarque : avec les notations de la démonstration précédente, on a pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A_n \subset T^{-1}(A_{n+1})$   $\pi$ -presque sûrement, d'où  $\pi(A_n) \leq \pi(T^{-1}(A_{n+1})) = \pi(A_{n+1})$ . La suite  $(\pi(A_n))_{n \in \mathbf{N}}$  est donc croissante. Pour montrer cette inclusion presque sûre, on écrit

$$\pi(A_n \setminus T^{-1}(A_{n+1})) = P[X \in A_n ; T(X) \in A_{n+1}^c] = \int_{A_{n+1}^c} K(x, A_n) d\pi(x).$$

Mais pour tout  $x \in E$ , si  $K(x, A_n) > 0$ , alors

$$K^{n+1}(x, G) \geq \int_{A_n} K(x, dy) K^n(y, G) > 0$$

puisque  $K^n(y, G) > 0$  pour tout  $y \in A_n$ , donc  $x \in A_{n+1}$ . Donc  $\pi(A_n \setminus T^{-1}(A_{n+1})) = 0$ .



## 9.2 Remontées de Lévy et remontées partielles

Alors que nous utilisons des chaînes de Markov définies à l'aide de la transformation inverse de Lévy, la définition de l'atteignabilité conduit Malric à introduire les remontées de Lévy.

Lorsque  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{W}$ , de loi absolument continue par rapport à la mesure de Wiener, telles que  $\mathbf{T}(V) = U$ , Malric dit que  $V$  est un remonté de Lévy de  $U$ . Une façon simple de construire un remonté de Lévy de  $U$  est la suivante (proposition 3 de [5]) : retrancher à  $U$  son minimum courant, multiplier les excursions hors de 0 du processus obtenu par les signes fournis par un jeu de pile ou face indépendant dont on a modifié les signes pour ensemble fini (mais aléatoire) d'indices.

Étant donné un ouvert  $G$  de  $\mathbf{W}$  et un mouvement brownien  $W$ , Malric cherche à construire des remontés de Lévy successifs de sorte que, pour un entier  $n$  bien choisi, le  $n$ -ième remonté tombe dans  $G$  avec probabilité proche de 1. Cette méthode semble plus rigide que l'utilisation de notre corollaire 3 puisque le nombre  $n$  de remontées successives est déterministe.

Malric contourne cette difficulté par l'introduction de la notion de remonté partiel de Lévy : si  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{W}$ , de loi absolument continue par rapport à la mesure de Wiener,  $V$  est un remonté de partiel de Lévy de  $U$  s'il existe un temps aléatoire  $T$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$  tels que

1.  $T$  est une fin d'excursion de  $U$  sur l'événement  $[0 < T < +\infty]$ .
2.  $U$  et  $V$  coïncident sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ .
3. Pour  $t \geq T$ ,  $|V_t| = U_t - \min\{U_s ; s \in [T, t]\}$ .

Un résultat-clé de Malric (proposition 5 de [5]) affirme que toute suite finie de remontés partiels successifs de Lévy peut être approchée uniformément par une suite de remontés de Lévy. Ce résultat permet de s'affranchir de la contrainte du nombre déterministe de remontées dans la définition de l'atteignabilité. Il permet aussi de préserver le début des trajectoires. Il joue finalement le même rôle que notre proposition 38 (Comparaison des accessibilités par  $F_a$  pour différentes valeurs de  $a$ ), dans laquelle les transformations  $F_a$  jouent le rôle des remontées partielles de Lévy.

Les autres différences marquantes, déjà notées dans l'introduction, sont que nous travaillons avec des transformations sur les mouvements browniens réfléchis en utilisant des propriétés de continuité dans la topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec contrôle des zéros.

## Références

- [1] Malric M., *Densité des zéros des transformés de Lévy itérés d'un mouvement brownien* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Mathématiques - Vol. 336 - N° 6 - p. 499-504 (2003).
- [2] Malric M., *Density of paths of iterated Levy transforms of Brownian motion*, arXiv :math/0511154v2 (2005).
- [3] Malric M., *Density of paths of iterated Levy transforms of Brownian motion*, arXiv :math/0511154v3 (2007).
- [4] Malric M., *Density of paths of iterated Levy transforms of Brownian motion*, arXiv :math/0511154v4 (2009).
- [5] Malric M., *Density of paths of iterated Levy transforms of Brownian motion*, ESAIM Probability and Statistics DOI :10.1051/ps/2010020, published on line (03 février 2011).
- [6] Petersen K., *Ergodic Theory*. Cambridge University Press (1989).
- [7] Revuz D., Yor M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer (1991).

Jean BROSSARD et Christophe LEURIDAN  
INSTITUT FOURIER  
Laboratoire de Mathématiques  
UMR5582 (UJF-CNRS)  
BP 74  
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)  
Christophe.Leuridan@ujf-grenoble.fr