



HAL
open science

Produit Beta-Gamma et régularité du signe

Thomas Simon

► **To cite this version:**

| Thomas Simon. Produit Beta-Gamma et régularité du signe. 2012. hal-00721209

HAL Id: hal-00721209

<https://hal.science/hal-00721209>

Preprint submitted on 27 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PRODUIT BETA-GAMMA ET RÉGULARITÉ DU SIGNE

THOMAS SIMON

RÉSUMÉ. On étudie la positivité complète du noyau de convolution multiplicatif T associé au produit de deux variables aléatoires indépendantes $\mathbf{B}(a, b)$ et $\Gamma(c)$. Ce noyau T est complètement positif d'ordre infini si $b \in \mathbb{N}^*$ ou si $d = a + b - c \in \mathbb{N}$. Dans les autres cas la régularité du signe de T a toujours un ordre fini, qui est ici calculé. Plus précisément, pour tout $n \geq 1$ on montre que T est complètement positif d'ordre $n + 1$ si et seulement si (d, b) est situé au dessus d'un certain escalier \mathcal{E}_n dessiné dans le demi-plan supérieur. Cet escalier caractérise aussi la constance du signe de plusieurs déterminants associés à la fonction hypergéométrique confluyente de seconde espèce.

1. INTRODUCTION

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et K un noyau à valeurs réelles défini sur $I \times I$. On dit que K est complètement positif d'ordre n (TP_n selon l'acronyme anglo-américain) si

$$\det [K(x_i, y_j)]_{1 \leq i, j \leq m} \geq 0$$

pour tout $m \in [1, n]$, $x_1 < \dots < x_m$ et $y_1 < \dots < y_m$. Quand la propriété est vraie pour tout n on dit que K est complètement positif d'ordre infini (TP_∞). On dit que K est régulier pour le signe à l'ordre n (SR_n) s'il existe $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ dans $\{-1, 1\}$ tel que

$$\varepsilon_m \det [K(x_i, y_j)]_{1 \leq i, j \leq m} \geq 0$$

pour tout $m \in [1, n]$, $x_1 < \dots < x_m$ et $y_1 < \dots < y_m$. Quand la propriété est vraie pour tout n on dit que K est régulier pour le signe à l'ordre infini (SR_∞). Ces quatre propriétés sont dites strictes lorsque les inégalités correspondantes sont toutes strictes, et on utilise alors la notation $\text{STP}_n, \text{SSR}_n, \text{STP}_\infty$ ou SSR_∞ . Introduites avant-guerre par Krein, Schoenberg et Gantmacher, ces notions ont ensuite connu un développement important qui a abouti à l'ouvrage classique [8]. On renvoie à la monographie [12] pour des avancées plus récentes ainsi qu'un historique du sujet.

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite fréquence de Pólya d'ordre $n \leq \infty$ (PF_n) si le noyau $K(x, y) = f(x - y)$ est TP_n sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les densités de probabilité dans la classe PF_∞ ont été caractérisées par Schoenberg - voir le théorème 7.3.2 (a) p. 345 dans [8] - par leur transformée de Laplace, dont

2000 *Mathematics Subject Classification.* 26D07, 33C15, 60E05.

Mots-clés. Déterminant de Hankel - Fonction hypergéométrique confluyente - Inégalité de Turán - Positivité complète - Produit Beta-Gamma - Régularité du signe - Transformation de Kummer - Wronskien.

l'inverse se factorise sous la forme

$$(1) \quad \frac{1}{\mathbb{E}[e^{sX}]} = e^{-\gamma s^2 + \delta s} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n s) e^{-a_n s}$$

où X est la variable aléatoire associée, avec $\gamma \geq 0, \delta \in \mathbb{R}$, et $\sum a_n^2 < \infty$. L'exemple classique est la densité gaussienne. Le cas des densités sur la demi-droite a également été caractérisé par une factorisation analogue - voir le théorème 7.3.2 (b) dans [8] - qui s'écrit

$$(2) \quad \frac{1}{\mathbb{E}[e^{-sX}]} = e^{\delta s} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n s)$$

avec $\delta, a_n \geq 0$ et $\sum a_n < \infty$. Ceci montre que les densités PF_∞ sur \mathbb{R}^+ sont toutes, modulo une dérive, des convolées de densités exponentielles de paramètres différents et forment donc une sous-classe des densités dites GGC - voir [3]. Les fonctions PF_2 sont aisément caractérisées par la log-concavité sur leur support - voir le théorème 4.1.9 dans [8], ce qui a pour conséquence utile la stabilité de la propriété PF_2 par multiplication ponctuelle. Une telle propriété n'est plus vraie pour les classes $\text{PF}_n, n \geq 3$, qui sont en général plus difficiles à étudier que les classes PF_2 ou PF_∞ . Toutes les propriétés PF_n sont cependant stables par produit de convolution - voir la proposition 7.1.5 dans [8], ce qui dans le cas $n = 2$ est un cas particulier du théorème de Prékopa, et dans le cas des densités signifie que la somme indépendante de deux variables aléatoires dont les densités sont PF_n a encore une densité PF_n . Cette stabilité par produit de convolution sera importante dans la suite de cet article.

La notion de fonction fréquence de Pólya est donc associée de façon naturelle à l'addition des variables aléatoires. Pourtant, les exemples les plus standard de noyaux complètement positifs sont liés à la convolution multiplicative. Ainsi, le caractère TP_∞ du noyau e^{xy} mentionné au paragraphe 1.2.(i) p. 15 dans [8] est équivalent à la même propriété pour le noyau $f(xy^{-1})$, où

$$f(x) = \frac{x^{c-1} e^{-x}}{\Gamma(c)} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

est la densité de la variable $\Gamma(c)$. Cette propriété qui est équivalente au caractère PF_∞ de $\log \Gamma(c)$, peut aussi se voir par (1) en écrivant les moments fractionnaires de $\Gamma(c)$:

$$\frac{1}{\mathbb{E}[\Gamma(c)^s]} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+s)} = e^{\gamma_c s} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + s(n+c)^{-1}) e^{-s(n+c)^{-1}}$$

pour un certain $\gamma_c > 0$, où la deuxième égalité vient de la formule de Weierstrass - voir par exemple [6] p. 2. De même le caractère TP_∞ du noyau $\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y \leq 1\}}$ mentionné au paragraphe 1.2.(ii) de [8], est précisément celui du noyau de convolution multiplicatif de la variable \mathbf{U} uniforme sur $(0, 1)$. Ceci signifie que $-\log \mathbf{U} \sim \text{Exp}(1)$ a une densité PF_∞ , et est bien sûr une conséquence évidente de (2) et de l'expression des moments fractionnaires de \mathbf{U} .

Le livre [8] fournit plusieurs autres exemples de noyaux complètement positifs reliés à des variables aléatoires, souvent dans le cadre des familles exponentielles. Le cas du noyau multiplicatif associé à la variable $\mathbf{B}(a, b)$ de densité

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

est aussi implicitement traité par le théorème 10.1.1 p. 503, pour $b \in \mathbb{N}^*$. En effet, en choisissant $w_1 \equiv \dots \equiv w_n \equiv 1$ dans (1.4) p. 502, ce théorème montre le caractère TP_∞ du noyau $(x-y)_+^n$ et donc du noyau multiplicatif associé à $\mathbf{B}(a, n+1)$. Ce dernier fait, qui remonte à Schoenberg et Whitney en 1953, se voit aussi à l'aide de l'identité

$$(3) \quad \mathbf{B}(a, n+1) \stackrel{d}{=} \mathbf{U}^{1/a} \times \dots \times \mathbf{U}^{1/(a+n)}$$

obtenue en comparant les moments fractionnaires. Le cas plus délicat $b \notin \mathbb{N}^*$ est une conséquence du théorème 3.4(i) dans [4], où ce problème semble avoir été considéré pour la première fois.

Théorème (Dette-Munk). *Le noyau de convolution multiplicatif associé à $\mathbf{B}(a, b)$ est $\text{TP}_{[b+1]}$ pour tous $a, b > 0$.*

Pour obtenir l'énoncé ci-dessus, on a fait la correction $n \rightarrow n+1$ dans le résultat de Dette et Munk, ce qui se voit aisément en appliquant correctement le lemme 3.1 dans [4]. Ce même lemme, et des arguments classiques de [8] que nous ne détaillerons pas ici - voir la remarque (c) à la fin de la troisième partie du présent article, montrent que ce même noyau n'est en revanche pas $\text{TP}_{[b+2]}$ ni d'ailleurs $\text{SR}_{[b+2]}$, sauf pour $b \in \mathbb{N}^*$. Quand $b \notin \mathbb{N}^*$, la régularité du signe du noyau multiplicatif de $\mathbf{B}(a, b)$ est ainsi une fonction croissante de $[b]$, et ceci peut se deviner par l'identité

$$(4) \quad \mathbf{B}(a, b+1) \stackrel{d}{=} \mathbf{B}(a, b) \times \mathbf{U}^{1/(a+b)}$$

puisque \mathbf{U} - et donc $\mathbf{U}^{1/(a+b)}$ de manière équivalente - est associée à un noyau TP_∞ . D'une manière générale, on s'attend à ce que le produit indépendant par des variables ayant une telle propriété TP_∞ régularise le signe.

Le but de cet article est d'étudier ce phénomène pour les variables produit

$$\mathbf{T}(a, b, c) = \mathbf{B}(a, b) \times \Gamma(c),$$

dont la densité sur $(0, +\infty)$ s'écrit

$$\frac{\Gamma(a+b)x^{c-1}e^{-x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{t^{b-1}}{(t+1)^d} dt = \frac{\Gamma(a+b)x^{c-1}}{\Gamma(a)\Gamma(c)} e^{-x} \Psi(b, b+1-d, x)$$

avec la notation $d = a + b - c$. Ci-dessus, Ψ désigne la fonction hypergéométrique confluyente de seconde espèce, encore appelée fonction de Tricomi, pour les détails de laquelle on renvoie au

chapitre 6 de [6]. Par le théorème 1.2.1 dans [8], la régularité du signe du noyau de convolution multiplicatif associé à $\mathbf{T}(a, b, c)$ est la même que celle du noyau

$$\mathbf{T}_{b,d}(x, y) = e^{-xy^{-1}} \Psi(b, b+1-d, xy^{-1})$$

sur $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, et ne dépend donc que du couple (b, d) . On sait par le résultat précédent que cette régularité est croissante en $[b]$ et on s'attend à ce qu'elle le soit aussi en $[d]$ en vertu de l'identité

$$(5) \quad \mathbf{T}(a, b, c) \stackrel{d}{=} \mathbf{U}^{1/c} \times \mathbf{T}(a, b, c+1).$$

Introduisons maintenant nos notations. Sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{y \geq 0\}$ on considère le réseau $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{N}\} \cup \{y \in \mathbb{N}^*\}$ et, pour tout $n \geq 1$, l'escalier \mathcal{E}_n constitué des $(n-1)$ marches et n contremarches

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \{n-k-1 \leq x \leq n-k, y = k\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=0}^{n-1} \{x = k, n-k-1 \leq y \leq n-k\},$$

et des deux marches infinies $\{x \leq 0, y = n\}$ et $\{x \geq n-1, y = 0\}$. On considère sur \mathbb{H} la relation $(x, y) \succ (z, t) \Leftrightarrow x \geq z$ ou $y \geq t$. Pour tout $A \subset \mathbb{H}$ et $(x, y) \in \mathbb{H}$ on note $(x, y) \succ A$ si $\forall (z, t) \in A$ on a $(x, y) \succ (z, t)$. Par abus d'écriture on note $(x, y) \prec A$ si $\exists (z, t) \in A$ tel que $x < z$ et $y < t$. Visuellement parlant, pour tout $n \geq 1$ on a $(x, y) \prec \mathcal{E}_n$ quand (x, y) est sous l'escalier et $(x, y) \succ \mathcal{E}_n$ quand (x, y) est au dessus. Notre résultat principal s'énonce comme suit.

Théorème. (i) On a $\mathbf{T}_{b,d} \in \mathbf{TP}_\infty \Leftrightarrow (d, b) \in \mathcal{R}$.

(ii) Si $(d, b) \notin \mathcal{R}$, alors $\forall n \geq 1$ on a $(d, b) \succ \mathcal{E}_n \Leftrightarrow \mathbf{T}_{b,d} \in \mathbf{TP}_{n+1}$ et $(d, b) \prec \mathcal{E}_n \Rightarrow \mathbf{T}_{b,d} \notin \mathbf{SR}_{n+1}$.

Ce résultat montre en particulier que la variable $\mathbf{\Gamma}(c)$ régularise le signe dans le produit $\mathbf{\Gamma}(c) \times \mathbf{B}(a, b)$ seulement pour $c \leq a + b$. Dans le quadrant positif $\{b > 0, d > 0\}$, il met aussi en évidence une grille de croissance de la propriété \mathbf{TP}_n pour $\mathbf{T}(a, b, c)$, dont l'allure n'est pas sans rappeler celle du nombre de racines positives de Ψ pour les valeurs négatives de ses paramètres - voir la figure p. 290 dans [6]. Malgré le rôle central de Ψ dans notre argument et les diverses manipulations dont cette fonction peut être l'objet, l'analogie entre les deux grilles est sans doute fortuite.

La caractérisation de la propriété \mathbf{TP}_∞ , qui découle sans difficulté du théorème de Schoenberg et d'identités en loi simples, est démontrée dans la deuxième partie de cet article où l'on donne aussi une nouvelle preuve de la transformation de Kummer pour Ψ , laquelle fait apparaître une symétrie dans le quadrant positif pour la caractérisation de la propriété \mathbf{TP}_{n+1} . Dans la troisième partie on démontre le deuxième volet du théorème, qui est bien moins facile que le premier. On ramène d'abord le problème à la constance du signe d'un certain déterminant de Hankel avec poids. On montre ensuite le résultat par divers arguments mêlant algèbre linéaire, analyse asymptotique et

l'identité (5). Cette dernière est cruciale pour réduire le domaine d'étude à deux séries de marches adjacentes situées de part et d'autre de \mathcal{E}_n .

Des déterminants fonctionnels identiques aux nôtres ont été récemment étudiés dans [2, 7] afin d'établir de nouvelles inégalités de type Turán. Notre résultat principal permet de préciser certaines de ces inégalités, ce que nous faisons dans la quatrième partie. Comme dans l'article classique [9] nous nous intéressons aussi à des Wronskiens pour des familles de fonctions Ψ ayant des paramètres contigus, dont nous caractérisons la constance du signe par les frontières \mathcal{E}_n . La forme en escalier de ces dernières est peut-être un peu surprenante, et je n'ai pas trouvé d'exemples de frontière de ce type dans la littérature ancienne ou moderne consacrée aux déterminants fonctionnels.

2. QUELQUES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

2.1. **Le cas TP_∞ .** Dans ce paragraphe on considère la partie (i) du théorème, qui se montre facilement grâce à la caractérisation de Schoenberg. Les moments fractionnaires de $\mathbf{T}(a, b, c)$ sont donnés par

$$(6) \quad \mathbb{E}[\mathbf{T}(a, b, c)^s] = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(c+s)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(c)\Gamma(a+b+s)}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > (-a) \vee (-c)$. On en déduit les identités

$$\mathbf{T}(a, b, a+b) \stackrel{d}{=} \Gamma(a) \quad \text{et} \quad \mathbf{T}(a, b, a+b+n) \stackrel{d}{=} \Gamma(a) \times \mathbf{U}^{1/a} \times \dots \times \mathbf{U}^{1/(a+n-1)}$$

pour tout entier $n \geq 1$ (la première est un des nombreux exemples de formules définissant l'algèbre Beta-Gamma [5]). Ces identités montrent que $\text{T}_{b,d}$ est TP_∞ si $d \in \mathbb{N}$. En vertu de (3) on a d'autre part

$$\mathbf{T}(a, n, c) \stackrel{d}{=} \mathbf{U}^{1/a} \times \dots \times \mathbf{U}^{1/(a+n-1)} \times \Gamma(c)$$

pour tout entier $n \geq 1$, et ceci montre que $\text{T}_{b,d}$ est TP_∞ si $b \in \mathbb{N}^*$. Si $(d, b) \notin \mathcal{R}$, on voit enfin que la fonction

$$s \mapsto \frac{1}{\mathbb{E}[\mathbf{T}(a, b, c)^s]}$$

admet les nombres $\{-(a+b+n), n \in \mathbb{N}\}$ pour pôles simples et n'est donc pas holomorphe sur \mathbb{C} . A fortiori elle n'est pas du type défini dans (1), et le théorème 3.2 (a) p. 345 dans [8] entraîne que la densité de $\log \mathbf{T}(a, b, c)$ n'est pas PF_∞ , autrement dit $\text{T}_{b,d}$ n'est pas TP_∞ . On a donc bien démontré que

$$\text{T}_{b,d} \in \text{TP}_\infty \Leftrightarrow (d, b) \in \mathcal{R}.$$

2.2. La transformation de Kummer et deux applications. Supposons maintenant $c < a + b$, autrement dit $d > 0$. La formule (6) entraîne l'identité

$$\mathbf{T}(a, b, c) \stackrel{d}{=} \mathbf{T}(c, d, a)$$

et en comparant les densités de part et d'autre on trouve

$$(7) \quad \Psi(b, b + 1 - d, x) = x^{d-b} \Psi(d, d + 1 - b, x)$$

pour tout $b, d, x > 0$. Cette égalité est connue sous le nom de transformation de Kummer pour la fonction de Tricomi et est obtenue dans le chapitre 6 de [6] pp. 256-257 en comparant différentes représentations de Mellin-Barnes de Ψ . Cette dernière méthode est plus élaborée que l'argument précédent reposant sur une bête identification de moments fractionnaires, mais son avantage est de pouvoir étendre la transformation à des valeurs négatives de b et d - voir le haut de la page 257 dans le chapitre 6 de [6]. On renvoie à [5] pour d'autres relations entre représentations de Mellin-Barnes et identités en loi multiplicatives.

La formule (7) entraîne que

$$\mathbf{T}_{b,d} \in \mathbf{TP}_{n+1} \Leftrightarrow \mathbf{T}_{d,b} \in \mathbf{TP}_{n+1}$$

pour tout $b, d > 0$ et $n \geq 1$. Cette symétrie par rapport à la première bissectrice sur le quadrant positif est bien sûr compatible avec celle de la frontière \mathcal{E}_n . Combinée avec le résultat de Dette et Munk, elle montre que

$$\mathbf{T}_{b,d} \in \mathbf{TP}_{n+1} \quad \text{si} \quad \inf(b, d) \geq n.$$

On verra par la suite qu'on peut aussi obtenir ce résultat directement en considérant un certain déterminant de Hankel associé à la fonction Ψ .

On donne maintenant, en passant, une deuxième application de la transformation de Kummer indépendante de tout le reste de cet article. Soit la variable aléatoire positive $\mathbf{K}^2(a, b, c)$ ayant pour densité

$$\frac{x^{a-1}(1+x)^{-(a+b)}e^{-cx}}{\Gamma(a)\Psi(a, 1-b, c)}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

où $a, c > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Cette variable apparaît en statistique bayésienne de réseaux de file d'attente où elle porte le nom de variable de Kummer de type 2. On suppose maintenant $b > 0$ et on calcule

la transformée de Laplace de $\mathbf{K}^2(a+b, -b, c)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \mathbf{K}^2(a+b, -b, c)} \right] &= \frac{\Psi(a+b, 1+b, c+\lambda)}{\Psi(a+b, 1+b, c)} \\ &= \frac{\Psi(a, 1-b, c+\lambda)}{\Psi(a, 1-b, c)} \left(\frac{c}{c+\lambda} \right)^b = \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \mathbf{K}^2(a, b, c)} \right] \mathbb{E} \left[e^{-\lambda c^{-1} \Gamma(b)} \right], \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient immédiatement de (7). On en déduit l'égalité en loi additive

$$\mathbf{K}^2(a+b, -b, c) = \mathbf{K}^2(a, b, c) + c^{-1} \Gamma(b)$$

pour tous $a, b, c > 0$, récemment obtenue par Koudou et Vallois - voir (2.24) dans [10] - comme conséquence d'une certaine propriété d'indépendance caractérisant le couple $(\mathbf{K}^2(a, b, c), \Gamma(b))$. Le calcul direct des transformées de Laplace, plus immédiat, avait déjà été fait par Letac - voir le théorème 4.1 de [11] - avec un argument un peu différent du nôtre utilisant sur la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce - voir la formule 6.6(7) dans [6].

2.3. Résultats d'algèbre linéaire. On énonce dans ce paragraphe quatre lemmes évaluant des déterminants, qui serviront dans la réciproque de la partie (ii) du théorème. On utilise la notation $0^0 = 1$ et $\det_n [a_{ij}] = \det [a_{ij}]_{0 \leq i, j \leq n}$ pour tout tableau de nombres $\{a_{ij}\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle aussi l'écriture usuelle du symbole de Pochhammer : $(z)_0 = 1$ et $(z)_k = z(z+1) \dots (z+k-1)$. Enfin, le dernier lemme reprend les mêmes notations matricielles que celles du chapitre 0 de [8].

Lemme 1. *On a $\det_n [(d-n+j)_i] = \prod_{k=0}^n k!$ pour tout $d \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve : Chaque ligne d'indice i du déterminant est une fonction polynomiale en d de degré i , dont la dérivée est une combinaison linéaire à coefficients constants des lignes d'indice $0, \dots, i-1$. Ceci entraîne que $d \mapsto \det_n [(d-n+j)_i]$ est constante, et vaut donc $\det_n [(j-n)_i] = \prod_{k=0}^n k!$ comme souhaité. □

Remarque. (a) Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on peut aussi voir directement la relation de récurrence $\det_n [(d-n+j)_i] = n! \times \det_{n-1} [(d-n+1+j)_i]$ et conclure avec la condition initiale $\det_0 [(d+j)_i] = 1$.

(b) Ce déterminant a quelque cousinage avec celui étudié dans [9] p. 31, qui s'écrit $\det_n [\{d+j\}_i]$ avec la notation $\{z\}_0 = 1$ et $\{z\}_k = z(z-1) \dots (z+1-k)$, et qui est aussi un premier terme dans un développement asymptotique. Ce dernier est cependant un Vandermonde et dépend de d .

Lemme 2. *Pour tout entier $q \geq 0$ et tous réels μ, ν tels que $\mu > \nu + q$, on a*

$$\det_q [(\nu - q + j)_i \Gamma(\mu - \nu + q - i - j)] = \prod_{k=0}^q k! \Gamma(\mu - \nu - k) (\mu - k - 1)^{q-k}.$$

Preuve : On commence par mettre $\prod_{k=0}^q \Gamma(\mu - \nu - k)$ en facteur puis, en ajoutant successivement la $(q - i)$ -ième ligne à la $(q - i + 1)$ -ième pour $i = 1, \dots, q$ on factorise par $(\mu - 1)^q$. On répète l'opération pour $i = 1, \dots, q - 1$ et on factorise par $(\mu - 2)^{q-1} \dots$. Ainsi de suite jusqu'à trouver

$$\det_q [(\nu - q + j)_i \Gamma(\mu - \nu + q - i - j)] = \det_q [(\mu - \nu - q + j)_i] \prod_{k=0}^q \Gamma(\mu - \nu - k) (\mu - k - 1)^{q-k},$$

et on conclut par le lemme 1. □

Lemme 3. *Pour tous entiers $n \geq q \geq 0$ et tous réels μ, ν tels que $\rho = \nu + n - \mu - 2q > 0$, on a*

$$\det_q \left[\left(\frac{\Gamma(\rho + i + j)}{\Gamma(\rho + \mu + i + j)} \right) (\nu - q + j)_{n-q+i} \right] = F_q(\rho) \prod_{k=0}^q \left(\frac{(\nu - k)_{n-q}}{\Gamma(\nu + n - k - q)} \right)$$

avec $F_q(\rho) = \det_q [\Gamma(\rho + i + j)] > 0$.

Preuve : En utilisant $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$ on factorise

$$\det_q \left[\left(\frac{\Gamma(\rho + i + j)}{\Gamma(\rho + \mu + i + j)} \right) (\nu - q + j)_{n-q+i} \right] = \prod_{k=0}^q \left(\frac{(\nu - k)_{n-q}}{\Gamma(\nu + n - k - q)} \right) \det_q [\Gamma(\rho + i + j)].$$

Enfin, la stricte positivité de $\det_q [\Gamma(\rho + i + j)]$ découle par exemple du théorème 5 de [2] et de la représentation intégrale usuelle de la fonction Γ sur $(0, +\infty)$, que l'on peut utiliser ici puisque $\rho > 0$. □

Lemme 4. *Soit $A = \{a_{ij}\}_{0 \leq i, j \leq n}$ une matrice réelle dont tous les coefficients sont non nuls. Pour tout $\delta \in (0, 2n)$, soit la fonction $x \mapsto A^\delta(x) = \{a_{ij} x^{(\delta-i-j)_+}\}_{0 \leq i, j \leq n}$ définie sur \mathbb{R} et soit $\rho_\delta = [\delta/2]$.*

Si les matrices

$$A_{11}^\delta = A \begin{bmatrix} (1 + \rho_\delta) \cdots n \\ (1 + \rho_\delta) \cdots n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_{22}^\delta = A \begin{bmatrix} 1 \cdots \rho_\delta \\ 1 \cdots \rho_\delta \end{bmatrix}$$

sont inversibles, alors

$$\det A^\delta(x) \sim (\det A_{11}^\delta \det A_{22}^\delta) x^{(\rho_\delta+1)(\delta-\rho_\delta)}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Preuve : Par hypothèse on a $\rho_\delta < n$ et on peut écrire par blocs

$$A^\delta(x) = \begin{bmatrix} A_{11}^\delta(x) & A_{12}^\delta(x) \\ A_{21}^\delta(x) & A_{22}^\delta(x) \end{bmatrix}$$

où $A_{11}^\delta(x)$ est une matrice $(1 + \rho_\delta) \times (1 + \rho_\delta)$ et $A_{22}^\delta(x)$ une matrice $(n - \rho_\delta) \times (n - \rho_\delta)$. Le choix de la taille des blocs entraîne que $A_{22}^\delta(x) = A_{22}^\delta$ pour tout x . Comme A_{22}^δ est inversible, on peut appliquer la formule classique

$$\det A^\delta(x) = \det A_{22}^\delta \times \det(A_{11}^\delta(x) - A_{12}^\delta (A_{22}^\delta)^{-1} A_{21}^\delta(x)).$$

On voit facilement que le coefficient (i, j) de la matrice $A_{12}^\delta (A_{22}^\delta)^{-1} A_{21}^\delta(x)$ est un $O(x^{2(\delta-\rho_\delta-1)-i-j})$ quand $x \rightarrow +\infty$, quantité négligeable devant $[A_{11}^\delta(x)]_{ij} = a_{ij}x^{\delta-i-j}$ puisque $a_{ij} \neq 0$ et $\delta < 2(\rho_\delta+1)$. On en déduit que

$$\det(A_{11}^\delta(x) - A_{12}^\delta (A_{22}^\delta)^{-1} A_{21}^\delta(x)) \sim \det(A_{11}^\delta(x)) = (\det A_{11}^\delta) x^{(\rho_\delta+1)(\delta-\rho_\delta)}$$

par invertibilité de A_{11}^δ , et où l'égalité résulte de la formule de Leibniz. Tout ceci donne le comportement souhaité. \square

3. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Le cas TP_∞ ayant déjà été vu, on suppose dans toute cette partie que $(d, b) \notin \mathcal{R}$ et on montre le point (ii) du théorème, qui est le point délicat. L'argument principal repose sur la notion de positivité complète étendue. On commence par transformer le noyau $T_{b,d}$ pour simplifier les calculs, en écrivant

$$e^{-xy}\Psi(b, b+1-d, xy) = y^{d-b}K_{b,d}(x, y)$$

pour tout $x, y > 0$, avec

$$K_{b,d}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-x(t+y)} \frac{t^{b-1}}{(t+y)^d} dt.$$

Les fonctions déterminantales

$$\Delta_{b,d}^n = \det_n \left[\frac{\partial^{i+j} K_{b,d}}{\partial x^i \partial y^j} \right]$$

définies sur $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, sont les quantités centrales de notre problème. En effet, on sait par le théorème 2.2.6 p. 56 dans [8] que pour tout $n \geq 1$ on a $K_{b,d} \in \text{RR}_{n+1} \Leftrightarrow T_{b,d} \in \text{TP}_{n+1}$ - voir [8] p. 12 pour la notation RR - dès que

$$(-1)^{m(m+1)/2} \Delta_{b,d}^m > 0$$

pour tout $m = 1 \dots n$. Mais comme $(d, b) \succ \mathcal{E}_n \Rightarrow (d, b) \succ \mathcal{E}_m$ pour tout $m = 1 \dots n$, on doit en fait considérer à chaque fois un seul déterminant. On voit en effet par récurrence immédiate qu'il suffit de montrer

$$(d, b) \succ \mathcal{E}_n \Rightarrow (-1)^{n(n+1)/2} \Delta_{b,d}^n > 0$$

pour tout $n \geq 1$ afin d'avoir les inclusions désirées $(d, b) \succ \mathcal{E}_n \Rightarrow T_{b,d} \in \text{TP}_{n+1}$. Réciproquement, on voit facilement par définition que si $\Delta_{b,d}^n$ change au moins une fois strictement de signe, alors on aura $K_{b,d} \notin \text{SR}_{n+1} \Leftrightarrow T_{b,d} \notin \text{SR}_{n+1}$.

On peut exprimer $(-1)^{n(n+1)/2} \Delta_{b,d}^n$ à l'aide d'un certain déterminant de Hankel fonctionnel - un Turanien suivant la terminologie de [9] - avec poids. On voit d'abord par une suite d'opérations

élémentaires sur les lignes utilisant les relations $\partial_x K_{b,d} = -K_{b,d-1}$ et $\partial_y K_{b,d} = -xK_{b,d} - dK_{b,d+1}$ que

$$\Delta_{b,d}^n = \det_n [(d-j)_i K_{b,d+i-j}(x,y)].$$

On en déduit

$$\operatorname{sgn}((-1)^{n(n+1)/2} \Delta_{b,d}^n(x,y)) = \operatorname{sgn}(D_{b,d}^n(xy))$$

pour tous $x, y > 0$, où

$$D_{b,d}^n(z) = \det_n [(d-n+j)_i \Psi(b, b+1-d+n-i-j, z)]$$

est bien un Turanien lesté par les $(d-n+j)_i$. Signalons par ailleurs que sans ces poids, l'étude du signe serait immédiate comme conséquence du théorème 2.8 dans [7], lequel donne

$$\det_n [\Psi(b, b+1-d+n-i-j, z)] > 0$$

pour tout $b, z > 0, n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{R}$. Les complications calculatoires induites par la présence de poids dans les Turaniens sont évoquées dans l'introduction de [9].

La suite de cette partie est donc consacrée à l'étude de la stricte positivité de la fonction $z \mapsto D_{b,d}^n(z)$ sur $(0, +\infty)$. Pour simplifier les écritures, on utilisera parfois la notation

$$(8) \quad f_{\mu,\nu}(z) = \Psi(\mu, \mu+1-\nu, z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-tz} \frac{t^{\mu-1}}{(1+t)^\nu} dt$$

pour tout $\mu > 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$.

L'étude du signe de $D_{b,d}^n$ est facile quand $d > n$. En factorisant convenablement on voit en effet, avec la notation $h(a, c, x) = \Gamma(1+a-c)\Psi(a, c, x)$ pour tout $a > 0$ et $c < 1+a$, que

$$D_{b,d}^n(z) = \frac{1}{\prod_{k=0}^n \Gamma(d-k)} \times \det_n [h(b, b+1-d-n+i+j, z)].$$

La formule exacte donnée dans [2] p. 12 montre alors que $z \mapsto \det_n [h(b, b+1-d-n+i+j, z)]$ est strictement positive (et même complètement monotone) sur $(0, +\infty)$ puisque $d > n$, et il en est donc de même pour $D_{b,d}^n(z)$. Ceci entraîne donc la propriété TP_{n+1} pour $T_{b,d}$ lorsque $d > n$, ce que nous avons déjà vu dans la partie précédente par un argument de symétrie.

L'étude devient cependant plus ardue quand $d < n$, puisque certaines fonctions h dans le déterminant ont alors des paramètres négatifs. On peut certes reprendre formellement les calculs du théorème 5 de [2] à l'aide de la transformation de Kummer et d'une représentation intégrale de Ψ le long d'un chemin de type Hankel - voir la formule 6.11.2 (9) p.273 dans [6], mais ceci exprime $\det_n [h(b, b+1-d-n+i+j, z)]$ comme une intégrale curviligne multiple dont il paraît malaisé

de déterminer le signe. D'une façon générale, il ne semble pas que l'on dispose de transformations déterminantales simples, telle celle donnée dans l'exercice II.1.68 de [13], qui fasse apparaître naturellement la barrière \mathcal{E}_n .

3.1. Le cas $n = 1$. On traite ce cas à part pour simplifier l'exposition de la méthode, qui sera la même dans le cas général avec des arguments plus élaborés. Par le résultat de Dette et Munk, on sait que $T_{b,d} \in \text{TP}_2$ si $b > 1$ et on est donc ramené à une étude sur la bande $\{0 < b < 1, d \in \mathbb{R}\}$. On réduit encore le domaine d'étude en considérant les carrés

$$\mathcal{E}_1^+ = \{0 < x, y < 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1^- = \{-1 \leq x < 0, 0 < y < 1\}.$$

Ces carrés sont ouverts sauf \mathcal{E}_1^- à son arête gauche $\{x = -1, 0 < y < 1\}$. L'identité en loi (5) et le caractère TP_∞ du noyau multiplicatif associé à \mathbf{U} montrent automatiquement que si $T_{b,d}$ est TP_2 pour $(d, b) \in \mathcal{E}_1^+$ alors il le sera aussi sur $\{0 < b < 1, d > 0\}$, et que si $T_{b,d}$ n'est pas SR_2 pour $(d, b) \in \mathcal{E}_1^-$ alors il ne le sera pas non plus sur $\{0 < b < 1, d < 0\}$.

Il y a deux façons de montrer que $T_{b,d}$ est TP_2 sur \mathcal{E}_1^+ . La première, propre au cas $n = 1$, utilise la notion de complète monotonicité hyperbolique (HCM) faisant l'objet du livre [3] - voir en particulier le chapitre 4.3 et le chapitre 5. En utilisant la définition de $T_{b,d}$, la caractérisation de TP_2 par log-concavité et la log-concavité de $x \mapsto e^{-e^x}$ sur \mathbb{R} , il suffit en effet de démontrer que $x \mapsto f_{b,d}(e^x)$ est log-concave sur \mathbb{R} , ce qui est encore équivalent - voir le paragraphe 6.4 pp. 101-102 dans [3] - à la propriété HM pour la fonction $x \mapsto f_{b,d}(x)$ sur $(0, +\infty)$. On voit cependant par (8) et la propriété 5.1(vii) p. 68 dans [3] que cette dernière est HCM (et donc HM) pour $d > 0$ puisque la fonction $t \mapsto t^{b-1}(1+t)^{-d}$ est alors HCM - voir la propriété 5.1(ii) p. 68 dans [3].

La deuxième manière montre la stricte positivité de $D_{b,d}^1$ pour tout $(d, b) \in \mathcal{E}_1^+$, et c'est cette argumentation qui sera reprise pour $n \geq 2$. On remarque d'abord par l'inégalité de Hölder que la fonction $\nu \mapsto f_{b,\nu}(z)$ est log-convexe sur \mathbb{R} pour tout $z > 0$. On écrit ensuite

$$D_{b,d}^1 = \begin{vmatrix} f_{b,d-1} & f_{b,d} \\ (d-1)f_{b,d} & df_{b,d+1} \end{vmatrix} = d(f_{b,d-1}f_{b,d+1} - f_{b,d}^2) + f_{b,d}^2$$

et cette fonction est bien strictement positive sur $(0, +\infty)$ puisque $d > 0$ et $f_{b,d}$ ne s'annule pas.

Remarque. Dans chacune des deux preuves on n'a pas utilisé l'hypothèse $(d, b) \in \mathcal{E}_1^+$ mais seulement $d > 0$. Dans la suite, on aura cependant besoin des domaines \mathcal{E}_n^+ correspondant à $n \geq 2$.

On montre maintenant que $D_{b,d}^1$ change strictement de signe sur $(0, +\infty)$ pour $(d, b) \in \mathcal{E}_1^-$. Il est immédiat que $f_{b,\nu}(z) \sim z^{-b}$ quand $z \rightarrow +\infty$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne

$$D_{b,d}^1(z) \sim z^{-2b}$$

en $+\infty$ et montre donc que $D_{b,d}^1(z) > 0$ pour z assez grand. On établit que $D_{b,d}^1(z) \rightarrow -\infty$ quand $z \rightarrow 0+$ à l'aide du lemme suivant, élémentaire, et qui jouera également un rôle dans le cas général $n \geq 2$.

Lemme 5. *Pour tout $\mu > 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$ on a*

$$f_{\mu,\nu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu - \mu)}{\Gamma(\nu)} & \text{si } \mu < \nu \\ \frac{\Gamma(\mu - \nu)}{\Gamma(\mu)} z^{\nu - \mu} & \text{si } \mu > \nu \\ \frac{1}{\Gamma(\mu)} (-\log z) & \text{si } \mu = \nu \end{cases}$$

quand $z \rightarrow 0+$.

On découpe \mathcal{E}_1^- en un triangle supérieur $\mathcal{E}_1^{s-} = \{-1 \leq x < y - 1 < 0\}$, un triangle inférieur $\mathcal{E}_1^{i-} = \{-1 < y - 1 < x < 0\}$, et une diagonale $\mathcal{E}_1^{d-} = \{-1 < x = y - 1 < 0\}$. Pour $(d, b) \in \mathcal{E}_1^{s-}$ on trouve à l'aide du lemme 5 et après simplification le comportement asymptotique

$$D_{b,d}^1(z) \sim (b-1)(b-d-1) \left(\frac{\Gamma(b-d-1)}{\Gamma(b)} \right)^2 z^{2(d-b)} \rightarrow -\infty$$

quand $z \rightarrow 0+$. Quand $(d, b) \in \mathcal{E}_1^{i-}$ et $(d, b) \in \mathcal{E}_1^{d-}$ ces comportements deviennent respectivement

$$\frac{d\Gamma(b-d+1)\Gamma(d+1-b)}{\Gamma(b)\Gamma(d+1)} z^{d-1-b} \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad \frac{d\Gamma(b-d+1)}{\Gamma(b)^2} (-\log z) z^{-2} \rightarrow -\infty.$$

Tout ceci prouve que $D_{b,d}^1$ change strictement de signe sur $(0, +\infty)$, et donc que $T_{b,d}$ n'est pas SR_2 , quand $(d, b) \in \mathcal{E}_1^-$.

3.2. Le cas général. On fixe $n \geq 2$ et on introduit dans \mathbb{H} les deux escaliers adjacents suivants, constitués chacun de n carrés ouverts disjoints :

$$\mathcal{E}_n^- = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{k-1 < x < k, n-k-1 < y < n-k\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_n^+ = \bigcup_{k=1}^n \{k-1 < x < k, n-k < y < n-k+1\}.$$

On sait déjà que $T_{b,d}$ est TP_{n+1} si $b > n$. A nouveau, l'identité en loi (5) et le caractère TP_∞ du noyau multiplicatif associé à \mathbf{U} montrent que si $T_{b,d}$ est TP_{n+1} pour $(d, b) \in \mathcal{E}_n^+$ alors il le sera aussi pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$ et $b \leq n$. De même, si $T_{b,d}$ n'est pas SR_{n+1} pour $(d, b) \in \mathcal{E}_n^-$ alors il ne le sera pas non plus pour $(d, b) \prec \mathcal{E}_n$ et $-d \notin \mathbb{N}^*$.

On montre d'abord par récurrence que pour $(d, b) \in \mathcal{E}_n^+$, on a $D_{b,d}^n > 0$ sur $(0, +\infty)$. Rappelons que le cas $n = 1$ a déjà été vu.

Cas $n = 2$. On isole ce cas à nouveau pour simplifier l'exposition. On a

$$D_{b,d}^2 = \begin{vmatrix} f_{b,d-2} & f_{b,d-1} & f_{b,d} \\ (d-2)f_{b,d-1} & (d-1)f_{b,d} & df_{b,d+1} \\ (d-2)(d-1)f_{b,d} & d(d-1)f_{b,d+1} & d(d+1)f_{b,d+2} \end{vmatrix}$$

et $\mathcal{E}_2^+ = \{0 < b < 1 < d < 2\} \cup \{0 < d < 1 < b < 2\}$. Par un argument de log-convexité semblable au cas $n = 1$, il est possible de montrer directement la stricte positivité de $D_{b,d}^2$ pour $\{0 < d < 1 < b < 2\}$ en développant par rapport à la troisième ligne, et pour $\{0 < b < 1 < d < 2\}$ en développant par rapport à la première ligne. Mais cet argument ne se généralise pas aux plus grandes valeurs de n . On utilise plutôt l'identité déterminantale de Sylvester - voir le chapitre 0 p. 3 dans [8] - avec pour bloc pivot la matrice scalaire $(d-1)f_{b,d}$. On obtient

$$(d-1)f_{b,d}D_{b,d}^2 = \begin{vmatrix} d(d-1)D_{b,d+1}^1 & (d-1)(d-2)D_{b,d}^1 \\ D_{b,d}^1 & D_{b,d-1}^1 \end{vmatrix},$$

ce qui entraîne

$$D_{b,d}^2 = \frac{1}{f_{b,d}}(dD_{b,d-1}^1D_{b,d+1}^1 + (2-d)(D_{b,d}^1)^2)$$

qui est bien strictement positive pour $(d,b) \in \mathcal{L}_2^+$ par l'hypothèse de récurrence, puisque l'on sait que $D_{b,d-1}^1D_{b,d+1}^1 \geq 0$, $f_{b,d} > 0$ et $D_{b,d}^1 > 0$ pour $(d,b) \in \mathcal{E}_2^+$.

Cas $n \geq 3$. On développe $D_{b,d}^n$ de nouveau par l'identité de Sylvester, en choisissant cette fois pour bloc pivot la sous-matrice centrale de taille $n-1$, qui est donc bordée par les lignes et les colonnes numéro 0 et n . Après simplifications, il vient

$$D_{b,d}^n = \frac{1}{D_{b,d}^{n-2}}(dD_{b,d-1}^{n-1}D_{b,d+1}^{n-1} + (n-d)(D_{b,d}^{n-1})^2).$$

Ceci permet de conclure par récurrence, puisque l'on sait que $D_{b,d-1}^{n-1}D_{b,d+1}^{n-1} \geq 0$, $D_{b,d}^{n-2} > 0$ et $D_{b,d}^{n-1} > 0$ pour $(d,b) \in \mathcal{E}_n^+$.

Tout ceci montre l'inclusion recherchée $(d,b) \succ \mathcal{E}_n \Rightarrow T_{b,d} \in \text{TP}_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Remarque. L'argument précédent étant uniquement algébrique, il est tentant de chercher une preuve probabiliste du sens direct de la partie (ii) du théorème par le biais d'identités en loi multiplicatives. Si on divise \mathcal{E}_{n+1}^- en $(n+1)$ marches disjointes $\mathcal{E}_{n+1}^{\nu-}$ numérotées dans l'ordre descendant de $\nu = 0$ à n , on a $\mathcal{E}_n^+ = \mathcal{E}_{n+1}^{1-} \cup \dots \cup \mathcal{E}_{n+1}^{n-}$ et on sait que $T_{b,d} \in \text{TP}_{n+1}$ pour $(d,b) \in \mathcal{E}_{n+1}^{0-} \subset \{b > n\}$. D'autre part, la descente de $\mathcal{E}_{n+1}^{\nu-}$ à $\mathcal{E}_{n+1}^{\nu+1-}$ correspond à une factorisation multiplicative pour tout $\nu = 0, \dots, n-1$. En effet, on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{T}(a,b,c)^s] = \frac{c(c+1)(a+b+s)}{(a+b)(c+s)(c+1+s)} \times \mathbb{E}[\mathbf{T}(a,b+1,c+2)^s]$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > (-a) \vee (-c)$, et le quotient à droite est la transformée de Mellin d'une certaine variable aléatoire positive si $c < a + b$ autrement dit $d > 0$. De façon plus précise, si on pose $\mathbf{U}_\rho = \varepsilon_\rho + (1 - \varepsilon_\rho)\mathbf{U}$ où $\rho = c(a + b)^{-1} < 1$ et ε_ρ est une variable indépendante de Bernoulli de paramètre ρ , on trouve la factorisation

$$\mathbf{T}(a, b, c) \stackrel{d}{=} \mathbf{U}_\rho^{1/c} \times \mathbf{U}^{1/(c+1)} \times \mathbf{T}(a, b + 1, c + 2)$$

pour tout $a, b, c > 0$ tels que $c < a + b$. Cette identité permet bien pour tout $\nu = 0, \dots, n - 1$ de passer de $\mathcal{E}_{n+1}^{\nu-}$ à $\mathcal{E}_{n+1}^{\nu+1-}$ par convolution multiplicative, en choisissant convenablement les paramètres. Si le noyau multiplicatif associé à $\mathbf{U}_\rho^{1/c} \times \mathbf{U}^{1/(c+1)}$ avait une positivité complète appropriée, on pourrait espérer déduire la propriété TP_{n+1} pour $\mathbf{T}_{b,d}$ sur tout \mathcal{E}_n^+ de celle déjà connue sur \mathcal{E}_{n+1}^{0-} en faisant varier ν , descendant l'escalier. Malheureusement, la densité de $\mathbf{U}_\rho^{1/c} \times \mathbf{U}^{1/(c+1)}$ est la fonction

$$\rho(c + 1)x^{c-1}(d + (1 - d)x)\mathbf{1}_{(0,1)}(x),$$

de sorte que le noyau multiplicatif associé n'est pas SR_2 si $d < 1$ et n'est pas SR_3 si $d > 1$.

On établit maintenant que $D_{b,d}^n$ change au moins une fois strictement de signe sur $(0, +\infty)$ quand $(d, b) \in \mathcal{L}_n^-$. Par la discussion précédente, ceci montrera l'inclusion

$$(d, b) \prec \mathcal{E}_n \text{ et } -d \notin \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathbf{T}_{b,d} \notin \text{SR}_{n+1}.$$

Les arguments ressemblent à ceux du cas $n = 1$ mais sont hélas plus techniques. Par le lemme 1, on voit que

$$(9) \quad D_{b,d}^n(z) \sim \left(\prod_{k=0}^n k! \right) z^{-(n+1)b}$$

quand $z \rightarrow +\infty$, de sorte que pour tout $b > 0, d \in \mathbb{R}$ on a $D_{b,d}^n(z) > 0$ si z est assez grand. Il suffit donc de montrer

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} D_{b,d}^n(z) \rightarrow -\infty$$

pour tout $(d, b) \in \mathcal{E}_n^-$. Dans le demi-plan $\{b > 0\}$, l'ensemble \mathcal{E}_n^- est constitué des n carrés ouverts disjoints

$$\mathcal{E}_{n,p}^- = \{p - 2 < x < p - 1\} \cap \{n - p < y < n + 1 - p\}$$

pour $p = 1, \dots, n$, qu'on divise en un triangle supérieur $\mathcal{E}_{n,p}^{s,-} = \mathcal{E}_{n,p}^- \cap \{x < y + 2(p - 1) - n\}$, un triangle inférieur $\mathcal{E}_{n,p}^{i,-} = \mathcal{E}_{n,p}^- \cap \{x > y + 2(p - 1) - n\}$, et une diagonale $\mathcal{E}_{n,p}^{d,-} = \mathcal{E}_{n,p}^- \cap \{x = y + 2(p - 1) - n\}$.

Pour $(d, b) \in \mathcal{E}_{n,p}^{s,-}$, le lemme 5 entraîne avec la notation du lemme 4 que

$$D_{b,d}^n(z) \sim \det A^\delta(1/z)$$

lorsque $z \rightarrow 0+$, où l'on a posé $\delta = b + n - d > 1$ et où les coefficients de la matrice A sous-jacente sont donnés par

$$a_{ij} = \begin{cases} (d - n + j)_i \frac{\Gamma(b + n - d - i - j)}{\Gamma(b)} & \text{si } i + j \leq 2(n + 1 - p), \\ (d - n + j)_i \frac{\Gamma(d - n - b + i + j)}{\Gamma(d - n + i + j)} & \text{si } i + j > 2(n + 1 - p). \end{cases}$$

Avec la notation du lemme 4, on voit que $\rho_\delta = n + 1 - p < \delta$. En posant $q = n + 1 - p, \mu = b$ et $\nu = d + 1 - p$, on a $\mu > \nu + q$ par définition de $\mathcal{E}_{n,p}^{s,-}$. Par le lemme 2, le déterminant de la matrice A_{11}^δ sous-jacente vaut donc

$$\det_q A_{11}^\delta = \prod_{k=0}^q k! \Gamma(\mu - \nu - k) (\mu - k - 1)^{q-k} < 0,$$

où l'inégalité stricte vient de $q - 1 < \mu < q$. Si $p = 1$ on a $A^\delta = A_{11}^\delta$ et la formule de Leibniz donne $\det A^\delta(1/z) = \det A_{11}^\delta z^{-(n+1)\delta} \rightarrow -\infty$ quand $z \rightarrow 0+$. Si $p > 1$, les coefficients de la matrice A_{22}^δ sous-jacente qui est de taille $r = p - 2$, s'écrivent

$$(d - r + j)_{n-r+i} \frac{\Gamma(d + n - b - 2r + i + j)}{\Gamma(d + n - 2r + i + j)}$$

pour $0 \leq i, j \leq r$. En posant $\rho = d + n - b - 2r$, on a $\rho > 0$ par définition de $\mathcal{E}_{n,p}^-$. Le lemme 3 donne

$$\det A_{22}^\delta = F_q(\rho) \prod_{k=0}^r \left(\frac{(d - k)_{n-r}}{\Gamma(d + n - k - r)} \right) > 0,$$

où l'inégalité stricte vient de $d > p - 2$. On a d'autre part $\rho_\delta < \delta$ et le lemme 4 entraîne finalement

$$D_{b,d}^n(z) \sim (\det A_{11}^\delta \det A_{22}^\delta) z^{(\rho_\delta+1)(\rho_\delta-\delta)} \rightarrow -\infty$$

quand $z \rightarrow 0+$.

L'argumentation est la même sur $\mathcal{E}_{n,p}^{i,-}$, sauf que l'on voit par le lemme 5 que la matrice A_{22}^δ sous-jacente est cette fois-ci toujours définie, et de taille $p - 1$. On calcule

$$\det_{n-p}(A_{11}^\delta) = \prod_{k=0}^{n-p} k! \Gamma(b - d - 1 + p - k) (b - k - 1)^{n-p-k} > 0$$

où l'inégalité stricte vient de $b > n - p$, et

$$\det_{p-1}(A_{22}^\delta) = F_{p-1}(d + n - b + 2 - 2p) \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{(d - k)_{n+1-p}}{\Gamma(d + n - k + 1 - p)} \right) < 0,$$

où l'inégalité stricte vient de $p - 2 < d < p - 1$ et de $n + 1 - p \geq 1$. On a toujours $\rho_\delta < \delta$ et on en déduit $D_{b,d}^n(z) \rightarrow -\infty$ quand $z \rightarrow 0+$ par le lemme 4.

Sur la diagonale $\mathcal{E}_{n,p}^{d,-}$, la preuve est légèrement différente et repose sur une variante du lemme 4 que nous laissons au lecteur. Pour $p = 1$ on trouve à l'aide des lemmes 2 et 5

$$D_{b,d}^n(z) \sim \left(\prod_{k=0}^{n-1} k! (d+k) \Gamma(n-k) (d+n-k-1)^{n-1-k} \right) (-\log z) z^{-n^2} \rightarrow -\infty$$

quand $z \rightarrow 0+$, où la stricte négativité du coefficient directeur vient de $-1 < d < 0$. Pour $p \geq 2$ on trouve à l'aide des lemmes 2, 3 et 5

$$D_{b,d}^n(z) \sim \left(\prod_{k=0}^{n+1-p} (d+1-p+k) \right) \left(\prod_{k=0}^{n-p} k! \Gamma(b-d-1+p-k) (b-k-1)^{n-p-k} \right) \times \\ F_{p-2}(d+n-b-2p+4) \left(\prod_{k=0}^{p-2} \frac{(d-k)_{n+2-p}}{\Gamma(d+n-k+2-p)} \right) (-\log z) z^{-(n+1-p)^2} \rightarrow -\infty$$

quand $z \rightarrow 0+$, où la stricte négativité du coefficient directeur est celle du premier facteur et vient de $p-2 < d < p-1$.

Pour terminer la preuve de la partie (ii) du théorème, il reste à montrer l'inclusion

$$(d, b) \prec \mathcal{E}_n \text{ et } -d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow T_{b,d} \notin \text{SR}_{n+1}.$$

Par (4), (5) et le raisonnement précédent, ceci est une conséquence de

$$\lim_{z \rightarrow 0+} D_{b,d}^n(z) = -\infty$$

pour $d = -1$ et $n-1 < b < n$. Mais ce dernier point a en fait déjà été démontré dans le sous-cas $(d, b) \in \mathcal{E}_{n,1}^{s,-}$ de la discussion précédente. \square

Remarque. (a) Par des arguments semblables, on montre que si $(d, b) \in \mathcal{E}_n^+$, alors $D_{b,d}^n(z) \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow 0+$.

(b) Dans le cas $d > 0$, le théorème fournit un exemple de noyaux n'appartenant pas à SR_∞ et qui sont obtenus par multiplication ponctuelle de deux noyaux TP_∞ . En effet, le noyau $e^{xy^{-1}}$ est TP_∞ sur $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ et par convolution multiplicative le noyau $\Psi(b, b+1-d, xy^{-1})$ est aussi TP_∞ quand $d > 0$, puisque la fonction $t \mapsto (1+e^t)^{-d}$ est alors PF_∞ sur \mathbb{R} - voir pour cela le théorème 3.2 dans [4]. En revanche, on a démontré que le noyau

$$T_{b,d}(xy^{-1}) = e^{xy^{-1}} \times \Psi(b, b+1-d, xy^{-1})$$

n'est pas SR_∞ sur $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ si $(d, b) \notin \mathcal{R}$. Dans cet exemple, la seule propriété qui reste stable par multiplication ponctuelle est la propriété TP_2 .

(c) Le théorème montre que le noyau multiplicatif de $\mathbf{T}(a, b, c)$ n'est pas $\text{SR}_{[b+2]}$ si $b \notin \mathbb{N}^*$ et $c > a+b$. Ceci entraîne que le noyau multiplicatif de $\mathbf{B}(a, b)$ n'est pas $\text{SR}_{[b+2]}$ si $b \notin \mathbb{N}^*$ puisque

celui de $\Gamma(c)$ est toujours TP_∞ . Il est aussi possible de voir directement cette propriété à l'aide du noyau $(y-x)_+^{b-1}$, tâche que nous laissons au lecteur.

4. AUTRES DÉTERMINANTS ASSOCIÉS À Ψ .

Dans cette dernière partie on donne quelques remarques sur des Wronskiens et des Turaniens associés à la fonction de Tricomi, dans l'esprit de [9].

4.1. **Wronskiens.** On pose

$$z \mapsto W_{b,d}^n(z) = \det_n \left[\frac{\partial^i}{\partial z^i} \Psi(d-j, d+1-b-j, z) \right]$$

sur $(0, +\infty)$. On voit par la formule de Leibniz et les formules 6.5(6) et 6.6(12) pp.257-258 dans [6] que

$$(10) \quad D_{b,d}^n(z) = z^{(n+1)(d-b)} W_{b,d}^n(z).$$

Ainsi, le théorème entraîne entre autres que

$$W_{b,d}^n > 0 \Leftrightarrow (d, b) \succ \mathcal{E}_n \text{ ou } (d, b) \in \mathcal{R}$$

pour tout $n \geq 1$. Il ne semble pas possible d'obtenir une telle caractérisation de la constance du signe du Wronskien $W_{b,d}^n$ à l'aide de l'équation hypergéométrique. La transformation

$$\Psi(b, b+1-d, x) = e^{x/2} x^{-1/2-\mu} W_{\kappa, \mu}(x)$$

où $\kappa = (d-1-b)/2$ et $\mu = (b-d)/2$ - voir 6.8(4) p. 264 dans [6] - et l'équation différentielle de type Sturm-Liouville vérifiée par la fonction de Whittaker $W_{\kappa, \mu}$ ne semblent pas non plus pouvoir aider.

Cette écriture wronskienne permet de préciser le comportement de $z \mapsto D_{b,d}^n(z)$ pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$ et $b \geq d > 0$. On voit en dérivant colonne par colonne et en utilisant à nouveau la formule de Leibniz et les formules 6.5(6) et 6.6(12) pp. 257-258 dans [6] que

$$\frac{d}{dz} W_{b,d}^n(z) = -dz^{(n+1)(b-d)+1} \tilde{D}_{b,d}^n(z)$$

où $\tilde{D}_{b,d}^n(z)$ est obtenu à partir de $D_{b,d}^n(z)$ en remplaçant d par $d+1$ dans toute la dernière colonne. Un argument en tous points semblable à celui du sens direct de la partie (ii) du théorème montre alors que $\tilde{D}_{b,d}^n > 0$ pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$. On en déduit que $z \mapsto W_{b,d}^n(z)$ est strictement décroissante pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$ et $d > 0$, et strictement croissante pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$ et $d < 0$. Ces propriétés qui s'accordent avec (9) et (10), sont bien sûr un peu attendues pour un Wronskien. On en déduit aussi $z \mapsto D_{b,d}^n(z)$ est strictement décroissante pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$ et $b \geq d > 0$, en accord avec la dernière remarque (a) ci-dessus.

Il est plausible que $z \mapsto D_{b,d}^n(z)$ est strictement décroissante pour $(d, b) \succ \mathcal{E}_n$ et $d > 0$. Rappelons que si $d > n$, la transformation de Kummer et le théorème 5 dans [2] entraînent que cette fonction est complètement monotone.

4.2. Turaniens. Comme leur nom l'indique, les Turaniens servent à montrer des inégalités de type Turán. Introduites après-guerre pour les polynômes de Legendre, ces dernières peuvent être vues comme des variations sur la log-convexité ou la log-concavité de fonctions spéciales en le paramètre. Une étude systématique pour de nombreuses classes de polynômes orthogonaux a été menée dans [9]. L'intérêt porté à ces inégalités pour des fonctions non polynomiales est en revanche plus récent et nous renvoyons entre autres aux articles [1, 2, 7] ainsi qu'à leur bibliographie.

Certaines inégalités de Turán sont très faciles. Ainsi, il est immédiat par l'inégalité de Hölder et déjà mentionné plus haut que

$$\Psi^2(a, c) \leq \Psi(a, c-1)\Psi(a, c+1)$$

sur $(0, +\infty)$ pour tout $a > 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Cependant, on sait que $\Psi^2(a, c) \sim \Psi(a, c-1)\Psi(a, c+1)$ en $+\infty$, et on peut donc se poser la question de la taille de l'écart dans l'inégalité. A cet effet, le théorème 4 dans [2] montre que

$$\Psi(a, c-1)\Psi(a, c+1) - \Psi^2(a, c) \leq \frac{a}{c(c-a-1)} \Psi^2(a, c)$$

sur $(0, +\infty)$ pour tout $a > 0 > c$ et que

$$\Psi(a, c-1)\Psi(a, c+1) - \Psi^2(a, c) \leq \frac{1}{c-2} \Psi^2(a, c)$$

sur $(0, +\infty)$ pour tout $a > c-1 > 1$. L'argument repose essentiellement sur une représentation intégrale pour le quotient de fonctions de Tricomi ayant des paramètres contigus, dûe à Ismail et Kelker - voir (3.6) dans [2]. Il est possible de compléter ces deux inégalités à l'aide de notre résultat principal.

Corollaire 1. *Supposons $a \geq 1$ ou bien $a > 0$ et $c \leq a+2$. On a*

$$(11) \quad \Psi(a, c-1)\Psi(a, c+1) - \Psi^2(a, c) \leq \frac{1}{x} \Psi(a, c)\Psi(a, c-1)$$

sur $(0, +\infty)$.

Preuve : En posant $d = 2+a-c$, on a $\{a \geq 1\} \cup \{a > 0, c \leq a+2\} = \{(d, a) \succ \mathcal{L}_1^+\}$. Par le théorème, on sait que la fonction $g_{a,c}(e^x)$ où $g_{a,c}(x) = e^{-x}\Psi(a, c-1, x)$ est alors PF₂ sur \mathbb{R} , autrement dit

$$g_{a,c}(x^2 g_{a,c}'' + x g_{a,c}') \leq (x g_{a,c}')^2$$

sur $(0, +\infty)$. On obtient alors aisément (11) en utilisant $g_{a,c}' = -g_{a,c+1}$ et $g_{a,c}'' = g_{a,c+2}$. \square

Remarque. (a) Le domaine de validité de (11) contient strictement celui du théorème 4 de [2], et autorise par exemple des valeurs de c dans $[0, 2]$. D'autre part l'inégalité (11) est meilleure que les deux précédentes sur leurs domaines respectifs, pour peu que x soit suffisamment éloigné de zéro. En effet, il est évident par définition de Ψ que $c(c - a - 1)\Psi(a, c - 1, x) < ax\Psi(a, c, x)$ pour tout $a > 0 > c$ et $x > c(c - a - 1)/a$, et que $(c - 2)\Psi(a, c - 1, x) < x\Psi(a, c, x)$ pour tout $a > c - 1 > 1$ et $x > c - 2$. Signalons enfin, toujours par notre résultat principal, que (11) est fausse si $a < 1$ et $c > a + 1$.

(b) Dans la preuve de ce corollaire on a utilisé de manière non travaillée le caractère TP_2 du noyau $T_{b,d}$, sans la simplification par $K_{b,d}$ qui permet d'enlever la variable x dans le déterminant et de démontrer la partie (ii) du théorème. Il est possible de faire la même chose pour des déterminants d'ordre supérieur. On obtient par exemple par TP_3 des inégalités hélas pas très parlantes, avec produits triples et paramètres c contigus jusqu'à l'ordre 2.

Si on suppose maintenant $a > 1$ et $c < 1 + a$, la transformation de Kummer et l'inégalité $\Psi^2(1 + a - c, 2 - c) \leq \Psi(1 + a - c, 1 - c)\Psi(1 + a - c, 3 - c)$ entraînent

$$(12) \quad \Psi^2(a, c) \leq \Psi(a - 1, c - 1)\Psi(a + 1, c + 1),$$

autre inégalité de type Turán. On a encore $\Psi^2(a, c) \sim \Psi(a - 1, c - 1)\Psi(a, c + 1)$ en $+\infty$, et on peut donc se poser la question de la taille de l'écart dans l'inégalité. Le théorème 2 dans [2] montre à cet égard que

$$(13) \quad \Psi(a - 1, c - 1)\Psi(a + 1, c + 1) - \Psi^2(a, c) \leq -\frac{1}{c}\Psi^2(a, c)$$

pour tout $c < 0 < a$, en utilisant à nouveau par la représentation intégrale d'Ismail et Kelker. Une conséquence immédiate du corollaire 1 et de la transformation de Kummer est l'inégalité suivante, dont le domaine de validité est en partie plus large que celui de (13) et qui donne aussi une estimation plus précise sur $\{x \geq -c > 0\}$.

Corollaire 2. *On a*

$$(14) \quad \Psi(a - 1, c - 1)\Psi(a + 1, c + 1) - \Psi^2(a, c) \leq \frac{1}{x}\Psi^2(a, c)\Psi(a + 1, c + 1)$$

sur $(0, +\infty)$, pour tout $a > 1$ et $c < 1 + a$.

Il est envisageable que d'autres inégalités de type Turán pour d'autres fonctions spéciales découlent d'arguments simples mêlant produits de variables aléatoires et positivité complète. Ceci pourrait faire l'objet de recherches plus poussées.

Remerciements. Je remercie Gérard Letac pour ses commentaires. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-09-BLAN-0084-01.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Baricz. Turán type inequalities for some probability density functions. *Stud. Sci. Math. Hung.* **47** (2), 175-189, 2010.
- [2] A. Baricz et M. E. H. Ismail. Turán type inequalities for Tricomi confluent hypergeometric functions. A paraître à *Constructive Approximation*.
- [3] L. Bondesson. *Generalized Gamma Convolutions and Related Classes of Distributions and Densities*. Lect. Notes Stat. **76**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [4] H. Dette et A. Munk. Sign regularity of a generalized Cauchy kernel with applications. *J. Statist. Plann. Inference* **52** (2), 131-142, 1996.
- [5] D. Dufresne. G distributions and the beta-gamma algebra. *Elec. J. Probab.* **15**, 2163-2199, 2010.
- [6] A. Erdélyi. *Higher transcendental functions. Vol. I*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [7] M. E. H. Ismail et A. Laforgia. Monotonicity properties of determinants of special functions. *Constr. Approx.* **26**, 1-9, 2007.
- [8] S. Karlin. *Total positivity. Vol. I*. Stanford University Press, Stanford, 1968.
- [9] S. Karlin et G. Szegő. On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials. *J. Anal. Math.* **8**, 1-157, 1961.
- [10] A. E. Koudou et P. Vallois. Independence properties of the Matsumoto-Yor type. *Bernoulli* **18** (1), 119-136, 2012.
- [11] G. Letac. Working on Kummer distribution. Note non publiée, 2009.
- [12] A. Pinkus. *Totally positive matrices*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [13] G. Pólya et G. Szegő. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. I*. Springer, Berlin, 1925.

LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, UNIVERSITÉ LILLE 1, F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX. Adresse électronique : simon@math.univ-lille1.fr