



HAL
open science

Imaginärquadratische Einbettung von Maximalordnungen rationaler Quaternionenalgebren, und die nichtzyklischen endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen

Norbert Krämer

► **To cite this version:**

Norbert Krämer. Imaginärquadratische Einbettung von Maximalordnungen rationaler Quaternionenalgebren, und die nichtzyklischen endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen. 2014. hal-00720823v3

HAL Id: hal-00720823

<https://hal.science/hal-00720823v3>

Preprint submitted on 10 Apr 2014 (v3), last revised 20 Feb 2017 (v7)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Imaginärquadratische Einbettung von Ordnungen rationaler Quaternionenalgebren, und die nichtzyklischen endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen

Norbert Krämer

10. April 2014

Zusammenfassung

Seien k ein imaginärquadratischer Zahlkörper, F, F' zwei rationale Quaternionenalgebren und M eine gemeinsame Erweiterung von F, F' zur k -Quaternionenalgebra. Wir klassifizieren die Durchschnitte der M -Maximalordnungen mit F und zeigen, dass der Isomorphietyp einer M -Maximalordnung nur vom Index des Durchschnitts in einer F -Maximalordnung abhängt. Wir setzen dann die Durchschnitte von zwei M -Maximalordnungen mit F bzw. F' zueinander in Beziehung (Satz 5.8).

Damit können wir ermitteln, ob die Bianchi-Gruppe über der Hauptordnung von k 3-Dieder-, Tetraeder- oder maximalendliche 2-Diedergruppen enthält (Satz 6.8).

Zusätzlich bestimmen wir die Anzahl der M -Maximalordnungen, die mit F jeweils denselben Durchschnitt haben. Damit berechnen wir die Konjugationsklassenzahlen der nichtzyklischen maximalendlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppe (Satz 7.5).

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Bezeichnungen und Grundlagen	3
3	Einbettung rationaler Quaternionenalgebren	6
4	Einbettung p-adischer Quaternionenordnungen	9
5	Einbettung rationaler Quaternionenordnungen	19
6	Die endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen	24
7	Konjugationsklassenzahlen	28

Mathematics subject classification (2010):

11S45 Algebras and orders, and their zeta functions

11R52 Quaternion and other division algebras: arithmetic, zeta functions

11F06 Structure of modular groups and generalizations; arithmetic groups

20G30 Linear algebraic groups over global fields and their integers

1 Einleitung

Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} .

Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, $M \cong k \otimes_{\mathbb{Q}} F$ eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra, \mathfrak{F} eine F -Maximalordnung und \mathfrak{M} eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$.

Für eine F -Ordnung $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ sei $\Lambda(\mathfrak{G}) := [\mathfrak{F} : \mathfrak{G}]$. Wir nennen \mathfrak{G} dann \mathfrak{o} -kompatibel, wenn \mathfrak{G}_p an allen Stellen p von \mathbb{Q} mit $p \mid \Lambda(\mathfrak{G})$ eine zu $\mathfrak{o}_p = \mathbb{Z}_p \mathfrak{o}$ isomorphe Ordnung enthält. Wir untersuchen Existenz und Struktur \mathfrak{o} -kompatibler F -Ordnungen (Satz 5.3 mit den Sätzen 4.1, 4.2 und 4.4), und wir zeigen, dass \mathfrak{G} genau dann \mathfrak{o} -kompatibel ist, wenn es eine M -Maximalordnung \mathfrak{N} mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{N}$ gibt, und dass der Isomphietyp von \mathfrak{N} in Relation zu \mathfrak{M} dann nur vom Isomphietyp von F und von $\Lambda(\mathfrak{G})$ abhängt (Sätze 5.5 und 5.6).

Unser Hauptergebnis ist der nachstehende Satz 5.8, der die Einbettungen von Ordnungen zweier \mathbb{Q} -Quaternionenalgebren in M -Maximalordnungen zueinander in Beziehung setzt.

Wir verwenden darin die folgenden Notationen: Für eine Stelle p von \mathbb{Q} und $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$ sei

$\left(\frac{a, b}{p}\right)$ das Hilbert-Symbol. Sei $\left(\frac{F}{p}\right) := +1$ oder -1 , je nachdem, ob F an der Stelle p zerfällt oder verzweigt ist. Sei $\Sigma(F)$ das Produkt der endlichen Verzweigungsstellen von F , multipliziert mit -1 , falls F an der Stelle ∞ verzweigt ist. Sei $\Sigma_k(F)$ das Produkt der Verzweigungsstellen von F , die in k zerlegt sind. Und sei $\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) := [\mathfrak{M} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})]$.

Bemerkung: Der Isomphietyp von \mathfrak{N} in Relation zu \mathfrak{M} hängt nur von der Gesamtheit der Hilbertsymbole $\left(\frac{\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}), -d}{p}\right)$ ab. \mathfrak{N} ist genau dann isomorph zu \mathfrak{M} , wenn es ein

$f \in \mathbb{N}$ gibt mit: $f \mid \Sigma_k(F)$ und $\left(\frac{f\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}), -d}{p}\right) = 1$ für alle Stellen p (Lemma 5.4).

Satz 5.8. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.*

Seien F, F' zwei \mathbb{Q} -Quaternionenalgebren, sei M eine gemeinsame Erweiterung von F und F' zur k -Quaternionenalgebra, und seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ zwei M -Maximalordnungen.

Dann gibt es ein $f \in \mathbb{N}$ mit $f \mid \Sigma_k(F)$, so dass für alle Stellen p von \mathbb{Q} gilt:

$$\left(\frac{\Sigma(F)\Lambda(F \cap \mathfrak{M})f\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')\Sigma(F')\Lambda(F' \cap \mathfrak{M}'), -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right) \left(\frac{F'}{p}\right).$$

Wir zeigen die oben genannten Aussagen über die Einbettungen $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{N}$ und schließlich Satz 5.8, indem wir erstens (Kapitel 3) je zwei \mathbb{Q} -Quaternionenalgebren $F, F' \subset M$ zueinander in Beziehung setzen (Satz 3.4), zweitens (Kapitel 4) die lokalen Einbettungen $\mathfrak{G}_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p$ an den endlichen Stellen p von \mathbb{Q} untersuchen, an denen M_p zerfällt, und drittens (Kapitel 5) die lokalen Sätze und Lemmata global synthetisieren und schließlich mit Satz 3.4 kombinieren. Für den Fall, dass k ein Zerfällungskörper von F ist, lassen sich die Sätze 3.4 und 5.8 auf die einfacheren Klassifizierungssätze 3.5 und 5.9 reduzieren.

Für eine \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnung \mathfrak{G} bestimmen wir zusätzlich die Anzahl der M -Maximalordnungen \mathfrak{N} mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{N}$ und jeweils die Anzahl der \mathfrak{N}^\times -Konjugationsklassen

von Einbettungen $j : \mathfrak{G} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ mit $j(\mathfrak{G}) = j(F) \cap \mathfrak{N}$ (Satz 7.3 mit Satz 4.8).

Als Anwendung von Satz 5.9 können wir dann unter anderem klären, welche nichtzyklischen endlichen Untergruppen die Bianchi-Gruppe $PSL_2(\mathfrak{o}) = SL_2(\mathfrak{o})/\{\pm 1\}$ enthält:

Satz 6.8. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} . Dann gilt:*

- (i) *$PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine 3-Diedergruppe \mathcal{D}_3 , wenn $p \equiv 1 \pmod{3}$ für alle Primteiler $p \neq 3$ von d .*
- (ii) *$PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine Tetraedergruppe \mathcal{T} , wenn $p \equiv 1$ oder $p \equiv 3 \pmod{8}$ für alle Primteiler $p \neq 2$ von d .*
- (iii) *$PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine maximalendliche 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 , wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ für alle Primteiler $p \neq 2$ von d .*

Und mit Satz 7.3 bestimmen wir zusätzlich unter anderem die Konjugationsklassenanzahlen der nichtzyklischen maximalendlichen Untergruppen von $PSL_2(\mathfrak{o})$ (Satz 7.5).

Unter Verwendung der Ergebnisse von [3] lassen sich nun auch die Konjugationsklassenanzahlen der zyklischen Untergruppen einer Bianchi-Gruppe angeben (in Vorbereitung). Rahm hat in [5] die homologische Torsion und die Farrell-Tate-Kohomologie der Bianchi-Gruppen ermittelt und als Funktion dieser Konjugationsklassenanzahlen ausgedrückt.

Wir führen Satz 6.8 wie folgt auf Satz 5.8 zurück: Enthält $PSL_2(k)$ eine Untergruppe vom Isomorphietyp \mathcal{D}_3 , \mathcal{T} oder \mathcal{D}_2 , dann erzeugt deren Urbild in $SL_2(k)$ über \mathbb{Q} eine Quaternionenalgebra $F \subset M_2(k)$ und über \mathbb{Z} eine F -Ordnung \mathfrak{F} . Wir setzen dann die Einbettung von \mathfrak{F} in eine $M_2(k)$ -Maximalordnung in Beziehung zur Einbettung $M_2(\mathbb{Z}) \subset M_2(\mathfrak{o})$. Wir erhalten die Sätze 6.4.(i), 6.4.(ii) und 6.6, sowie Satz 6.7 mit dem Spezialfall Satz 6.8.

Ich danke Alexander D. Rahm für seine Ratschläge und die technische Unterstützung, und Jürgen Rohlf für die kritische Durchsicht des Manuskripts und hilfreiche Vorschläge.

2 Bezeichnungen und Grundlagen

Für die in diesem Artikel benutzen zahlentheoretischen Grundlagen verweisen wir summarisch auf [1] für imaginärquadratische Zahlkörper und [4] für Quaternionenalgebren. Für die speziellen Bezeichnungen und Grundlagen zu Bianchi-Gruppen siehe Kapitel 6.

In einer abelschen Gruppe G sei $G^{(2)}$ die Untergruppe der Quadrate. In einem Ring R mit Eins sei R^\times die Gruppe der multiplikativ invertierbaren Elemente. Für kommutatives R sei $M_2(R)$ die R -Algebra der 2×2 -Matrizen mit Koeffizienten in R . Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichne $z \mapsto \bar{z}$ die komplexe Konjugation und $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ den Absolutbetrag.

Sei im Folgenden stets $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei und $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d}) \subset \mathbb{C}$ ein imaginärquadratischer Zahlkörper mit Hauptordnung \mathfrak{o} und Diskriminante D . Die Einschränkung der komplexen Konjugation auf k stimmt mit der nichttrivialen Galois-Involution von k/\mathbb{Q} überein. Bezeichne I die Gruppe der \mathfrak{o} -Ideale und $H \subset I$ die Untergruppe der Hauptideale.

Sei p stets eine Stelle von \mathbb{Q} , d.h. eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ oder die unendliche Stelle $p = \infty$. Sei \mathfrak{p} stets eine Stelle von k , d.h. ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ oder die unendliche Stelle $\mathfrak{p} = \infty$.

Ist p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} , dann ist k auf natürliche Weise eingebettet in die halbeinfache quadratische Erweiterung $k_p \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} k$ von \mathbb{Q}_p , mit der Hauptordnung $\mathfrak{o}_p = \mathbb{Z}_p \mathfrak{o}$. Die Galois-Involution $a \mapsto \bar{a}$ von k/\mathbb{Q} setzt sich auf natürliche Weise auf k_p/\mathbb{Q}_p fort. Ist p verzweigt oder träge in k mit Primteiler \mathfrak{p} , dann ist auf natürliche Weise $k_p = k_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{o}_p = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Für die jeweils einzige unendliche Stelle von \mathbb{Q} und k gilt: $\mathbb{Q}_{\infty} = \mathbb{R}$, $k_{\infty} = \mathbb{C}$. Ist p zerlegt in k mit den Primteilern \mathfrak{p} und $\bar{\mathfrak{p}}$, dann ist $k_p \cong k_{\mathfrak{p}} \times k_{\bar{\mathfrak{p}}}$ und $\mathfrak{o}_p \cong \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{o}_{\bar{\mathfrak{p}}}$.

Für eine Stelle p von \mathbb{Q} und $a, b \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ sei $\left(\frac{a, b}{p}\right)$ das Hilbert-Symbol.

Für Rechenregeln zum Hilbert-Symbol siehe [1, Kapitel I, § 6, Formeln (9)-(13), Satz 7].

Eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra F ist auf natürliche Weise eingebettet in ihre p -Komponente $F_p \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} F$. Wir identifizieren \mathbb{Q} und \mathbb{Q}_p mit den Zentren von F und F_p . Für $p \in \mathbb{N}$ und einen \mathbb{Z} -Modul $\mathfrak{F} \subset F$ ist $\mathfrak{F}_p = \mathbb{Z}_p \mathfrak{F}$ die p -Komponente von \mathfrak{F} .

Für eine k -Quaternionenalgebra M gilt analog $k \subset M \subset M_{\mathfrak{p}} \cong k_{\mathfrak{p}} \otimes_k M$ und $k_{\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$. Wir nehmen stets $M_{\infty} = M_2(\mathbb{C})$ an. Ist \mathfrak{p} endlich und $\mathfrak{M} \subset M$ ein \mathfrak{o} -Modul, so ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{M}$.

Sind $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und $M \cong k \otimes_{\mathbb{Q}} F$ eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra, dann bezeichne $M_p \cong k_p \otimes_k M \cong k_p \otimes_{\mathbb{Q}} F$ die p -Komponente von M . Auf natürliche Weise ist $M \subset M_p$ und k_p das Zentrum von M_p . Ist p verzweigt oder träge in k mit Primteiler \mathfrak{p} , so ist auf natürliche Weise $M_p = M_{\mathfrak{p}}$, und für einen \mathfrak{o} -Modul $\mathfrak{M} \subset M$ ist $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$.

Ist p zerlegt in k mit den Primteilern \mathfrak{p} und $\bar{\mathfrak{p}}$, dann ist $M_p \cong M_{\mathfrak{p}} \times M_{\bar{\mathfrak{p}}} \cong F_p \times F_p$. Wir nennen dann M_p eine k_p -Quaternionenalgebra (obwohl $k_p \cong k_{\mathfrak{p}} \times k_{\bar{\mathfrak{p}}}$ kein Körper ist). Ist \mathfrak{M} eine M -Ordnung, dann nennen wir $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{o}_p \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{M}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ eine M_p -Ordnung. Diese Benennungen ermöglichen uns einheitliche und unkomplizierte Formulierungen von Sätzen und Lemmata in Kapitel 4. Die Aussagen über M_p und \mathfrak{M}_p leiten sich natürlich jeweils aus ihren Eigenschaften als direktes Produkt von Algebren bzw. Ordnungen her.

Eine F -Ordnung \mathfrak{O} heißt in eine M -Maximalordnung \mathfrak{N} optimal eingebettet, wenn $\mathfrak{O} = F \cap \mathfrak{N}$ gilt. Eine F -Maximalordnung $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ ist stets optimal in \mathfrak{M} eingebettet.

Für ein Element A einer Quaternionenalgebra Q bezeichne A^* das konjugierte Element. $N(A) = AA^*$ und $S(A) = A + A^*$ sind dann die (reduzierte) Norm und die Spur von A .

Ist K ein Körper und $Q \cong M_2(K)$ eine K -Quaternionenalgebra, dann heißen, in dieser

Reihenfolge, $U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22} \in Q$ Matrizeeinheiten in Q , wenn für alle $r, s, \in \{1, 2\}$ gilt: $U_{r1}U_{1s} = U_{r2}U_{2s} = U_{rs} \neq 0$ und $U_{r1}U_{2s} = U_{r2}U_{1s} = 0$. Dann ist $\{U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22}\}$ eine Basis von Q über K , und für ein $A = \alpha U_{11} + \beta U_{12} + \gamma U_{21} + \delta U_{22} \in Q$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ gilt bezüglich dieser Matrizeeinheiten die Gleichung (oder Darstellung) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Für eine Darstellung bezüglich Matrizeeinheiten gelten die bekannten Matrix-Rechenregeln.

Lemma 2.1. *Sei K algebraischer oder \mathfrak{p} -adischer Zahlkörper, und sei Q eine K -Quaternionenalgebra. Seien $A, B \in Q$ mit $N(A) = N(B)$, $S(A) = S(B)$ und $S(A)^2 \neq 4N(A)$. Dann gibt es ein $J \in Q^\times$ mit $JAJ^{-1} = B$.*

Beweis. Falls $K[A]$ Körper ist, siehe [4, Theorem 2.9.8].

Andernfalls zerfällt Q , wir können $Q = M_2(K)$ annehmen. Das charakteristische Polynom von A hat dann in K zwei Nullstellen $a \neq b$. Nun folgt leicht, dass es $X, Y \in GL_2(K)$ gibt mit $XAX^{-1} = YBY^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Wir setzen $J := Y^{-1}X$. □

Ist K ein algebraischer oder \mathfrak{p} -adischer Zahlkörper mit Hauptordnung \mathfrak{D} , und ist \mathfrak{A} ein \mathfrak{D} -Ideal, dann bezeichne $N_{abs}(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Q}^+$ die Absolutnorm von \mathfrak{A} , und für $A \in K^\times$ sei $N_{abs}(A) := N_{abs}(A\mathfrak{D})$. Falls $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}$, ist $N_{abs}(\mathfrak{A}) = [\mathfrak{D} : \mathfrak{A}]$.

Lemma 2.2. *Sei K ein \mathfrak{p} -adischer Zahlkörper mit Hauptordnung \mathfrak{D} und Primelement Π . Seien $Q \cong M_2(K)$ eine K -Quaternionenalgebra und $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ zwei Q -Maximalordnungen. Dann gibt es genau ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit den folgenden Eigenschaften.*

(i) *Es gibt Matrizeeinheiten in Q , bezüglich derer gilt:*

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{M}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \Pi^{-r}\mathfrak{D} \\ \Pi^r\mathfrak{D} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = J\mathfrak{M}J^{-1} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Pi^r \end{pmatrix}.$$

(ii) $N(\mathfrak{M}'\mathfrak{M})^{-1} = N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')^{-1} = \Pi^r\mathfrak{D}$.

(iii) *Sei $J' \in \mathfrak{M} \setminus \Pi\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}' = J'\mathfrak{M}J'^{-1}$. Dann ist $N(J') \in \Pi^r\mathfrak{D}^\times$.*

(iv) $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ hat die Diskriminante $\Pi^{2r}\mathfrak{D}$, und es gilt $[\mathfrak{M} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')] = N_{abs}(\Pi\mathfrak{D})^r$.

Beweis. Wir zeigen die Existenz von r . Die Eindeutigkeit folgt dann sofort, etwa mit (ii).

(i) Für einen kurzen Beweis siehe [2, Beweis von Satz 7, Fall b)].

(ii) Man prüft leicht nach, dass $\mathfrak{M}\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}J^{-1}$. Also gilt $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')^{-1} = N(J)\mathfrak{D} = \Pi^r\mathfrak{D}$.

(iii) Wegen $\mathfrak{M}' = J'\mathfrak{M}J'^{-1} = J\mathfrak{M}J^{-1}$ ist $J^{-1}J'\mathfrak{M} = \mathfrak{M}J^{-1}J'$ ein zweiseitiges \mathfrak{M} -Ideal. Mit [4, Theorem 6.5.3.2] folgt $J' = \Pi^e JY$ für ein $e \in \mathbb{Z}$ und ein $Y \in \mathfrak{M}^\times$.

Wegen $J, J' \in \mathfrak{M}$ und $J, J' \notin \Pi\mathfrak{M}$ ist $e = 0$. Also gilt $N(J')\mathfrak{D} = N(J)\mathfrak{D} = \Pi^r\mathfrak{D}$.

(iv) Nach (i) hat $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ die Diskriminante $\Pi^{2r}\mathfrak{D}$, und es ist $[\mathfrak{M} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')] = [\mathfrak{D} : \Pi^r\mathfrak{D}]$.

□

Lemma 2.3. *Sei K ein p -adischer Zahlkörper, und sei Q eine K -Quaternionenalgebra. Sei $L \subset Q$ eine halbeinfache quadratische Erweiterung von K , und seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ zwei Q -Maximalordnungen mit $L \cap \mathfrak{M} = L \cap \mathfrak{M}'$. Dann gibt es ein $J \in L^\times$ mit $\mathfrak{M}' = J\mathfrak{M}J^{-1}$.*

Beweis. Spezialfall einer lokalen Version von [2, Satz 7], Beweis siehe dort, Fall b).

□

3 Einbettung rationaler Quaternionenalgebren

Definition 3.1. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$. Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra.*

- (i) Für eine Stelle p von \mathbb{Q} sei $\left(\frac{F}{p}\right) := +1$ oder -1 ,
je nachdem, ob F an der Stelle p zerfällt oder verzweigt ist.
- (ii) Sei $\Sigma(F)$ das Produkt der endlichen Verzweigungsstellen von F ,
multipliziert mit -1 , falls F an der Stelle ∞ verzweigt ist.
- (iii) Sei $\Sigma_k(F)$ das Produkt der Verzweigungsstellen von F , die in k zerlegt sind.
- (iv) Sei $\Phi_F : M \rightarrow M$ die Abbildung mit $\Phi_F(A + i\sqrt{d}B) := A - i\sqrt{d}B$ für $A, B \in F$.
- (v) Für $T \in M^\times$ mit $\Phi_F(T) = T^*$ sei $F(F, T) := \{A \in M \mid T\Phi_F(A)T^{-1} = A\}$.

Lemma 3.2. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$. Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Dann gilt:*

- (i) M ist an einer Stelle \mathfrak{p} von k genau dann verzweigt, wenn $\Sigma_k(F) \in \mathfrak{p}$ gilt.
- (ii) Eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra E kann genau dann in M eingebettet werden,
wenn $\Sigma_k(E) = \Sigma_k(F)$ gilt.
- (iii) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra E
mit $|\Sigma(E)| = \Sigma_k(E) = \Sigma_k(F)$.

Beweis.

- (i) Ist $p \neq \infty$ in k nicht zerlegt, dann zerfällt M_p , siehe [4, Theorem 2.6.5], und es gilt $M_\infty = M_2(\mathbb{C})$. Ist $p \neq \infty$ in k zerlegt, $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$, dann gilt $M_p \cong M_{\mathfrak{p}} \times M_{\bar{\mathfrak{p}}} \cong F_p \times F_p$.
- (ii) folgt aus (i), siehe [4, Theorem 2.7.5].
- (iii) Sei S die Menge der Stellen p von \mathbb{Q} mit $p \mid \Sigma_k(F)$. Dann hat S oder $S \cup \{\infty\}$ eine gerade Anzahl von Elementen. Die Behauptung folgt mit [4, Theorem 7.3.6].

□

Lemma 3.3. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Sei E eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei p eine Stelle von \mathbb{Q} . Sei p in k nicht zerlegt.

Dann gibt es ein $\tau \in \mathbb{Z}$ mit $\left(\frac{\tau, -d}{p}\right) = -1$, so dass $\mathbb{Q}(\sqrt{\tau})$ Zerfällungskörper von E ist.

Beweis. Wir bestimmen τ so, dass alle endlichen Verzweigungsstellen von E in $\mathbb{Q}(\sqrt{\tau})$ verzweigt sind und dass $\tau < 0$ gilt, falls E an der Stelle ∞ verzweigt ist. (Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{\tau})_q$ Zerfällungskörper von E_q für alle Verzweigungsstellen q von E , siehe [4, Theorem 2.6.5].)

Falls $\left(\frac{\Sigma(E), -d}{p}\right) = -1$, sei $\tau := \Sigma(E)$. Nachfolgend nehmen wir $\left(\frac{\Sigma(E), -d}{p}\right) = 1$ an.

- Falls $p \neq \infty$ in k verzweigt ist, gibt es ein zu $D\Sigma(E)$ teilerfremdes $\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{\varepsilon, -d}{p}\right) = -1$. Dann sei $\tau := \varepsilon\Sigma(E)$.
- Falls $p \neq \infty$ in k träge ist, gilt $p \nmid \Sigma(E)$, denn sonst wäre $\left(\frac{\Sigma(E)/p, -d}{p}\right) = -1$, Widerspruch. Dann sei $\tau := p\Sigma(E)$.
- Falls $p = \infty$ ist, sei $\tau := -\Sigma(E)$.

□

Satz 3.4. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$. Sei E eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei M eine Erweiterung von E zur k -Quaternionenalgebra. Dann gilt:

- (i) Φ_E ist \mathbb{Q} -Algebrenautomorphismus von M mit $\Phi_E(\lambda A) = \bar{\lambda}\Phi_E(A)$ und $\Phi_E^2(A) = A$ und $\Phi_E(A^*) = \Phi_E(A)^*$ für alle $\lambda \in k$, $A \in M$. Es gilt $E = \{A \in M \mid \Phi_E(A) = A\}$.
- (ii) Sei $T \in M^\times$ mit $\Phi_E(T) = T^*$. Dann gilt:
 $F(E, T)$ ist \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra mit $\Phi_{F(E, T)}(A) = T\Phi_E(A)T^{-1}$ für $A \in M$,
 und $N(T) \in \mathbb{Q}^\times$ sowie $\left(\frac{N(T), -d}{p}\right) = \left(\frac{E}{p}\right) \left(\frac{F(E, T)}{p}\right)$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} .
- (iii) Sei umgekehrt $F \subset M$ eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra. Dann ist $F = F(E, T)$ für ein $T \in M^\times$ mit $\Phi_E(T) = T^*$, und T ist dann bis auf einen Faktor aus \mathbb{Q}^\times eindeutig.

Beweis. Wir kürzen $\Phi := \Phi_E$ und $F(T) := F(E, T)$ ab.

- (i) rechnet man leicht nach.
- (ii) $F(T)$ ist eine \mathbb{Q} -Algebra und via Zuordnungsvorschrift $A \mapsto i\sqrt{d}A$ als \mathbb{Q} -Vektorraum isomorph zu $F(T, -) := \{A \in M \mid T\Phi(A)T^{-1} = -A\}$. Es gilt $T\Phi(T) \in \mathbb{Q}^\times$, und mithilfe der Zerlegung $A = (A + T\Phi(A)T^{-1})/2 + (A - T\Phi(A)T^{-1})/2$ folgt, dass $M = F(T) \oplus F(T, -)$ gilt. $F(T)$ hat über \mathbb{Q} die Dimension 4. Wegen $i\sqrt{d} \notin F(T)$ ist $F(T)$ eine zentrale \mathbb{Q} -Algebra, und wegen $M \cong k \otimes_{\mathbb{Q}} F(T)$ auch einfache \mathbb{Q} -Algebra. Sei $A \in M$. Dann gibt es $A', A'' \in F(T)$ mit $A = A' + i\sqrt{d}A''$, und damit gilt:
 $\Phi_{F(T)}(A) = A' - i\sqrt{d}A'' = T\Phi(A')T^{-1} - i\sqrt{d}T\Phi(A'')T^{-1} = T\Phi(A' + i\sqrt{d}A'')T^{-1}$.

Sei p eine Stelle von \mathbb{Q} . Ist p in k zerlegt, so ist $\left(\frac{N(T), -d}{p}\right) = 1 = \left(\frac{E}{p}\right) \left(\frac{F(T)}{p}\right)$, siehe Lemma 3.2.(ii). Wir können nun also p als nicht zerlegt in k annehmen. Φ ist auf natürliche Weise zu einem \mathbb{Q}_p -Algebrenautomorphismus von M_p fortsetzbar.

- Im Fall $\left(\frac{E}{p}\right) \left(\frac{F(T)}{p}\right) = 1$, ist E_p isomorph zu $F(T)_p$. Einen Isomorphismus $E_p \rightarrow F(T)_p$ können wir zu einem k_p -Algebrenautomorphismus von M_p fortsetzen. Also gibt es ein $J \in M_p^\times$ mit $F(T)_p = JE_pJ^{-1}$. Für alle $A \in E_p$ gilt dann $JAJ^{-1} = \Phi_{F(T)}(JAJ^{-1}) = T\Phi(JAJ^{-1})T^{-1} = T\Phi(J)A\Phi(J)^{-1}T^{-1}$. Also gibt es ein $\lambda \in k_p^\times$ mit $T = \lambda J\Phi(J)^{-1}$ und $N(T) = T\Phi(T) = \lambda\bar{\lambda}$.

Sei τ wie in Lemma 3.3. Es gibt ein $U \in E^\times$ mit $U^2 = \tau$. Sei $T' := i\sqrt{d}U$. Dann gilt $\Phi(T') = T'^*$. Aus $N(T') = d\tau$ folgt $\left(\frac{N(T'), -d}{p}\right) = -1$ und $\left(\frac{E}{p}\right) \left(\frac{F(T')}{p}\right) = -1$.

- Im Fall $\left(\frac{E}{p}\right) \left(\frac{F(T)}{p}\right) = -1$ ist $F(T')_p$ isomorph zu $F(T)_p$, also gibt es ein $J \in M_p^\times$ mit $JAJ^{-1} = \Phi_{F(T)}(JAJ^{-1})$ für alle $A \in F(T')_p$, also mit $JAJ^{-1} = T\Phi(J)\Phi(A)\Phi(J)^{-1}T^{-1} = T\Phi(J)T'^{-1}\Phi_{F(T')}(A)T'\Phi(J)^{-1}T^{-1}$. Also gibt es ein $\lambda \in k_p^\times$ mit $T = \lambda JT'\Phi(J)^{-1}$ und $N(T) = T\Phi(T) = \lambda\bar{\lambda}N(T')$.

- (iii) Wegen $\Phi_F(\Phi(\lambda A)) = \lambda\Phi_F(\Phi(A))$ für $\lambda \in k$, $A \in M$ ist $\Phi_F \circ \Phi$ ein k -Algebrenautomorphismus von M . Nach [4, Corollary 2.9.9] gibt es also ein $T \in M^\times$ mit $\Phi_F(A) = T\Phi(A)T^{-1}$ für alle $A \in M$, und aus $\Phi_F^2(A) = \Phi^2(A) = A$ folgt dann $T\Phi(T) \in k^\times$. Sei $\Phi(T) = \lambda T^*$ mit $\lambda \in k^\times$. Dann ist $T = \Phi(\lambda T^*) = \bar{\lambda}\lambda T$, und daher gilt $\bar{\lambda}\lambda = 1$. Also gibt es ein $\mu \in k^\times$ mit $\lambda = \mu\bar{\mu}^{-1}$. Wir ersetzen T durch μT . Dann ist $\Phi(T) = T^*$, und offensichtlich gilt $\Phi_F = \Phi_{F(T)}$, also $F = F(T)$. □

Satz 3.5. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Diskriminante D .

Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra mit Zerfällungskörper k .

Dann gibt es ein $\tau \in \mathbb{Q}^\times$, so dass F isomorph ist zu $F(\tau) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \tau\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\}$.

Damit gilt $\left(\frac{F}{p}\right) = \left(\frac{\tau, -d}{p}\right)$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} . Man kann o.B.d.A. annehmen, dass $\tau \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und teilerfremd zu D ist, und dass $\tau \equiv 1 \pmod{4}$ gilt, falls $2 \mid d$. Dann hat die $F(\tau)$ -Ordnung $\mathfrak{F}(\tau) := F(\tau) \cap M_2(\mathfrak{o})$ die Diskriminante $t^2 D^2 \mathbb{Z}$.

Beweis. Seien $E = M_2(\mathbb{Q})$ und $M = M_2(k)$. Dann sind E eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra mit $\left(\frac{E}{p}\right) = 1$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} und M eine Erweiterung von E zur k -Quaternionenalgebra.

Für $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M$ gilt $\Phi_E(A) = \begin{pmatrix} \bar{a}' & \bar{b}' \\ \bar{c}' & \bar{d}' \end{pmatrix}$. Nach Voraussetzung kann F in M eingebettet werden, und nach Satz 3.4.(iii) gibt es ein $T \in M^\times$ mit $\Phi_E(T) = T^*$,

so dass F isomorph ist zu $F(E, T)$. Nach Satz 3.4.(ii) hängt die Isomorphieklasse von F nur davon ab, welche Werte $\left(\frac{N(T), -d}{p}\right)$ für die Stellen p von \mathbb{Q} annimmt.

Sei $\tau = N(T)/d$. Wir können dann zunächst T durch $i\sqrt{d}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$ ersetzen.

Damit folgt leicht $F(E, T) = F(\tau)$ und $\left(\frac{F}{p}\right) = \left(\frac{\tau, -d}{p}\right)$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} .

Es gibt genau ein $r \in \mathbb{Q}^+$, so dass $\tau r^2 \in \mathbb{Z}$ quadratfrei ist. Wir ersetzen τ durch τr^2 . Sei g der größte gemeinsame Teiler von τ und d , und sei $\tau = g\tau'$ und $d = gd'$. Wegen $\left(\frac{d + g^2, -d}{p}\right) = 1$ gilt $\left(\frac{\tau, -d}{p}\right) = \left(\frac{g^2\tau'(d' + g), -d}{p}\right)$. Falls $g > 1$ ist, ersetzen wir τ durch den quadratfreien Anteil von $\tau'(d' + g)$. Dann ist τ teilerfremd zu d . Falls τ und D einen gemeinsamen Teiler $g' > 1$ haben, ist $g' = 2$ und $d \equiv 1 \pmod{4}$, und wir ersetzen τ durch den quadratfreien Anteil von $\tau(d+1)/4$. Dann ist τ teilerfremd zu D . Falls $2 \mid d$ und $\tau \not\equiv 1 \pmod{4}$, ist $d \equiv 2 \pmod{4}$ und $\tau \equiv 3 \pmod{4}$. In diesem Fall ersetzen wir schließlich τ durch den quadratfreien Anteil von $\tau(d+1)$. Die Diskriminante von $\mathfrak{F}(\tau)$ kann man dann leicht elementar berechnen. \square

4 Einbettung p -adischer Quaternionenordnungen

Satz 4.1. *Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} .*

Seien F_p eine \mathbb{Q}_p -Quaternionenalgebra, \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung und $K_p, K'_p \subset F_p$ zwei quadratische Körpererweiterungen von \mathbb{Q}_p mit den Hauptordnungen $\mathfrak{D}_p, \mathfrak{D}'_p \subset \mathfrak{F}_p$. Sei p verzweigt in K_p und träge in K'_p . Sei $\Pi \in \mathfrak{D}_p$ Primelement, und sei $\mathfrak{D}'_p = \mathbb{Z}_p[\Omega]$.

- (i) *Sei \mathfrak{G}_p eine F_p -Ordnung mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$.
Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{D}_p + \mathfrak{D}_p\Pi^r\Omega$ und $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = [\mathfrak{D}_p : \mathfrak{D}_p\Pi^r] = p^r$.*
- (ii) *Sei \mathfrak{G}_p eine F_p -Ordnung mit $\mathfrak{D}'_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$.
Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{D}'_p + p^r\mathfrak{D}'_p\Pi$ und $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = [\mathfrak{D}'_p : p^r\mathfrak{D}'_p] = p^{2r}$.*
- (iii) *Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann sind $\mathfrak{D}_p + \mathfrak{D}_p\Pi^r\Omega$ und $\mathfrak{D}'_p + p^r\mathfrak{D}'_p\Pi$ jeweils F_p -Ordnungen.*
- (iv) *Sei $F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$, und sei \mathfrak{G}_p eine F_p -Ordnung mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p$.
Dann ist $\Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1}$ eine F_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{D}_p \subset \Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1} \neq \mathfrak{F}_p$,
und es gilt entweder $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ oder $\mathfrak{G}_p = \Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1}$.*

Bemerkung: Eine quadratische Körpererweiterung von \mathbb{Q}_p ist stets in F_p einbettbar, und ihre Hauptordnung ist stets in eine F_p -Maximalordnung einbettbar. Alle F_p -Maximalordnungen sind isomorph zueinander. Die Voraussetzungen von Satz 4.1 sind also erfüllbar.

Beweis.

- (i) Wir zeigen zuerst durch Widerspruch, dass $\{1, \Pi, \Omega, \Pi\Omega\}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{F}_p ist. Wir nehmen also an, dass es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_p$ gibt, nicht alle durch p teilbar, mit

$A := \alpha + \beta\Pi + \gamma\Omega + \delta\Pi\Omega \in p\mathfrak{F}_p$. Wir multiplizieren A von links mit Π^* .
Wegen $p \mid N(\Pi) = \Pi^*\Pi$ gilt dann auch $B := \alpha\Pi^* + \gamma\Pi^*\Omega \in p\mathfrak{F}_p$, also $p^2 \mid N(B)$.
Wegen $p^2 \nmid N(\Pi)$ folgt $p \mid N(\alpha + \gamma\Omega)$. Daraus folgt $\alpha + \gamma\Omega \in p\mathfrak{D}'_p$, also $\alpha, \gamma, \in p\mathbb{Z}_p$.
Dann gilt auch $C := \beta\Pi + \delta\Pi\Omega \in p\mathfrak{F}_p$. Wie für B folgt $\beta, \delta \in p\mathbb{Z}_p$, Widerspruch.
 $\{1, \Pi, \Omega, \Pi\Omega\}$ ist eine \mathbb{Z}_p -Basis und $\{1, \Omega\}$ eine \mathfrak{D}_p -Basis des Linksmoduls \mathfrak{F}_p .

Sei $\mathfrak{B}_p = \{B \in K_p \mid B\Omega \in \mathfrak{G}_p\}$.

Wegen $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ ist \mathfrak{B}_p ein ganzes \mathfrak{D}_p -Ideal, also gilt $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{D}_p\Pi^r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$.
Nach Konstruktion gilt $\mathfrak{B}_p\Omega \subset \mathfrak{G}_p$, wegen $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p$ also $\mathfrak{D}_p + \mathfrak{B}_p\Omega \subset \mathfrak{G}_p$.

Seien umgekehrt $A, B \in K_p$ mit $A + B\Omega \in \mathfrak{G}_p$.

Aus $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ folgt dann $A, B \in \mathfrak{D}_p$, und wegen $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p$ ist $B\Omega \in \mathfrak{G}_p$, also $B \in \mathfrak{B}_p$.

Da p in K_p verzweigt ist, gilt $[\mathfrak{D}_p : \mathfrak{D}_p\Pi] = p$ und $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = [\mathfrak{D}_p : \mathfrak{B}_p] = p^r$.

- (ii) Wie in (i) folgt, dass $\{1, \Omega, \Pi, \Omega\Pi\}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{F}_p ist. (Man multipliziere mit Π^* von rechts statt von links.) Analog folgt dann, dass $\{1, \Pi\}$ eine \mathfrak{D}'_p -Basis des Linksmoduls \mathfrak{F}_p ist, und dass $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{D}'_p + \mathfrak{B}'_p\Pi$ für ein ganzes \mathfrak{D}'_p -Ideal $\mathfrak{B}'_p = p^r\mathfrak{D}'_p$ ist, mit $r \in \mathbb{N}_0$. Wegen $[\mathfrak{D}'_p : p\mathfrak{D}'_p] = p^2$ ist dann $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = [\mathfrak{D}'_p : \mathfrak{B}'_p] = p^{2r}$.
- (iii) Zum Beweis, dass $\mathfrak{G}_p := \mathfrak{D}_p + \mathfrak{D}_p\Pi^r\Omega$ eine F_p -Ordnung ist, müssen wir nur zeigen, dass \mathfrak{G}_p multiplikativ abgeschlossen ist. Seien also $A_1, A_2 \in \mathfrak{D}_p$ und $B_1, B_2 \in \mathfrak{D}_p\Pi^r$. Da \mathfrak{F}_p multiplikativ abgeschlossen ist, ist $\Omega(A_2 + B_2\Omega) = A' + B'\Omega$ mit $A', B' \in \mathfrak{D}_p$. Dann ist $(A_1 + B_1\Omega)(A_2 + B_2\Omega) = A'' + B''\Omega$ mit $A'' = A_1A_2 + B_1A' \in \mathfrak{D}_p$ und $B'' = A_1B_2 + B_1B' \in \mathfrak{D}_p\Pi^r$. Genauso folgt, dass $\mathfrak{D}'_p + p^r\mathfrak{D}'_p\Pi$ eine F_p -Ordnung ist.
- (iv) Sei \mathfrak{F}'_p eine F_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{F}'_p$. Dann gilt $\mathfrak{D}_p = K_p \cap \mathfrak{F}_p = K_p \cap \mathfrak{F}'_p$. Daher gibt es nach Lemma 2.3 ein $X \in K_p^\times$ mit $\mathfrak{F}'_p = X\mathfrak{F}_pX^{-1}$.
Wegen $\Pi^2p^{-1} \in \mathfrak{D}_p^\times$ gibt es ein $r \in \mathbb{Z}$ und $Y \in \mathfrak{D}_p^\times$ mit $X = p^rY$ oder $X = \Pi p^rY$.
Also ist $\mathfrak{F}'_p = \mathfrak{F}_p$ oder $\mathfrak{F}'_p = \Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1}$, und wegen $\Pi \notin \mathbb{Q}_p^\times\mathfrak{F}_p^\times$ gilt $\Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1} \neq \mathfrak{F}_p$, siehe [4, Theorem 6.5.3.2]. Damit folgt $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ oder $\mathfrak{G}_p \subset \Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1}$. Falls $\mathfrak{G}_p \subsetneq \Pi\mathfrak{F}_p\Pi^{-1}$, gibt es nach (i) ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{D}_p + \mathfrak{D}_p\Pi^r\Pi\Omega\Pi^{-1} = \mathfrak{D}_pN(\Pi)^{-1}\Pi^{r+1}\Omega\Pi^* \subset \mathfrak{F}_p$. □

Satz 4.2. *Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} .*

Seien $F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$ eine \mathbb{Q}_p -Quaternionenalgebra, \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung und $K_p \subset F_p$ eine halbeinfache quadratische Erweiterung von \mathbb{Q}_p mit Hauptordnung $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{F}_p$. Sei p zerlegt in K_p , sei also K_p kein Körper.

(i) *Sei \mathfrak{G}_p eine F_p -Ordnung mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$.*

Dann gibt es Matrizeseinheiten in F_p , bezüglich derer $\mathfrak{D}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ gilt.

Diesbezüglich gibt es dann $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p^{r+s}$ und $\mathfrak{G}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^s\mathbb{Z}_p \\ p^r\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$.

Man kann überdies die Matrizeseinheiten so wählen, dass $r \in \mathbb{N}_0$ und $s = 0$ gilt.

(ii) *Seien $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r + s \geq 0$, und seien (beliebige) Matrizeseinheiten in F_p gegeben.*

Bezüglich dieser Matrizeseinheiten ist dann $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^s\mathbb{Z}_p \\ p^r\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ eine F_p -Ordnung.

Beweis.

- (i) Je zwei zerfallende halbeinfache quadratische Erweiterungen von \mathbb{Q}_p sind isomorph zueinander. Nach Lemma 2.1 gibt es also Matrizeeinheiten $U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22} \in F_p$, bezüglich derer $\mathfrak{D}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ gilt. Für $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_p$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}_p$ gilt dann $\beta U_{12} = U_{11} A U_{22} \in \mathfrak{G}_p$ und $\gamma U_{21} = U_{22} A U_{11} \in \mathfrak{G}_p$ sowie $\alpha, \delta \in \mathbb{Z}_p$. Also ist $\{U_{11}, p^s U_{12}, p^r U_{21}, U_{22}\}$ mit geeigneten $r, s \in \mathbb{Z}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{G}_p . Da \mathfrak{G}_p die Diskriminante $p^{2(r+s)} \mathbb{Z}_p$ hat, gilt $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p^{r+s}$. Bezüglich der Matrizeeinheiten $U_{11}, p^s U_{12}, p^{-s} U_{21}, U_{22}$ gilt schließlich $\mathfrak{D}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{G}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p^{r+s} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$.

- (ii) leicht nachzurechnen □

Lemma 4.3. *Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} , und sei F_p eine \mathbb{Q}_p -Quaternionenalgebra. Seien $\mathfrak{F}_p, \mathfrak{F}'_p$ zwei F_p -Maximalordnungen und $K_p, K'_p \subset F_p$ zwei halbeinfache quadratische Erweiterungen von \mathbb{Q}_p mit den Hauptordnungen $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{F}_p, \mathfrak{D}'_p \subset \mathfrak{F}'_p$. Seien $\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}'_p$ zwei F_p -Ordnungen mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p, \mathfrak{D}'_p \subset \mathfrak{G}'_p \subset \mathfrak{F}'_p$ und $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = [\mathfrak{F}'_p : \mathfrak{G}'_p]$. Dann gilt: Ein Isomorphismus $\mathfrak{D}_p \rightarrow \mathfrak{D}'_p$ lässt sich zu einem Isomorphismus $\mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{G}'_p$ fortsetzen.*

Beweis. Ein Isomorphismus $\mathfrak{D}_p \rightarrow \mathfrak{D}'_p$ ist nach Lemma 2.1 zu einem Automorphismus $j : F_p \rightarrow F_p$ fortsetzbar. Wegen $K'_p \cap j(\mathfrak{F}_p) = j(\mathfrak{D}_p) = \mathfrak{D}'_p = K'_p \cap \mathfrak{F}'_p$ gibt es nach Lemma 2.3 ein $X \in K_p^{\times}$ mit $\mathfrak{F}'_p = X j(\mathfrak{F}_p) X^{-1}$, und es gilt $\mathfrak{D}'_p \subset X j(\mathfrak{G}_p) X^{-1} \subset \mathfrak{F}'_p$. Falls K_p Körper ist, folgt mit Satz 4.1.(i) bzw. 4.1.(ii), dass $X j(\mathfrak{G}_p) X^{-1} = \mathfrak{G}'_p$. Falls K_p zerfällt, gibt es nach Satz 4.2.(i) Matrizeeinheiten in F_p und $r, s, r', s' \in \mathbb{Z}$ mit $r + s = r' + s'$, bezüglich derer gilt: $\mathfrak{D}'_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$, $X j(\mathfrak{G}_p) X^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^s \mathbb{Z}_p \\ p^r \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{G}'_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^{s'} \mathbb{Z}_p \\ p^{r'} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$. Mit $Y := \begin{pmatrix} p^r & 0 \\ 0 & p^{r'} \end{pmatrix} \in K_p^{\times}$ folgt $Y X j(\mathfrak{G}_p) X^{-1} Y^{-1} = \mathfrak{G}'_p$. □

Satz 4.4. *Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} , und sei F_p eine \mathbb{Q}_p -Quaternionenalgebra. Sei \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung, und sei $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ eine F_p -Ordnung mit $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p$.*

- (i) *Falls F_p Divisionsalgebra ist, gilt $\mathfrak{G}_p = \{A \in \mathfrak{F}_p \mid S(A)^2 - 4N(A) \in p\mathbb{Z}_p\}$.*

- (ii) *Falls F_p zerfällt, gibt es Matrizeeinheiten in F_p , bezüglich derer $\mathfrak{G}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$.*

Beweis.

- (i) Seien $K_p, K'_p \subset F_p$ quadratische Körpererweiterungen von \mathbb{Q}_p mit den Hauptordnungen $\mathfrak{D}_p, \mathfrak{D}'_p$. Sei p verzweigt in K_p und träge in K'_p . Sei $\Pi \in \mathfrak{D}_p$ Primelement, und sei $\mathfrak{D}'_p = \mathbb{Z}_p[\Pi]$. Da \mathfrak{F}_p die einzige F_p -Maximalordnung ist, gilt $K_p \cap \mathfrak{F}_p = \mathfrak{D}_p$ und $K'_p \cap \mathfrak{F}_p = \mathfrak{D}'_p$. Wir zeigen zunächst durch Widerspruch, dass $\Pi \in \mathfrak{G}_p$.

Es gibt $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma', \gamma'' \in \mathbb{Z}_p$, so dass $\{1, \alpha\Omega + \beta\Omega\Pi + \gamma\Pi, \beta'\Omega\Pi + \gamma'\Pi, \gamma''\Pi\}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{G}_p ist. Falls $\Pi \notin \mathfrak{G}_p$, können wir wegen $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p$ annehmen, dass $\alpha = \beta' = 1, \gamma'' = p, \beta = 0$. Und wir können Ω durch $\Omega + \gamma'$ ersetzen, also annehmen, dass $\{1, \Omega + \gamma\Pi, \Omega\Pi, p\Pi\}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{G}_p ist. Wegen $\Pi^{-1}\mathfrak{F}_p\Pi = \mathfrak{F}_p$ ist $N(\Omega)\Pi = (\Omega + \gamma\Pi)^*\Omega\Pi - \gamma\Pi^*\Omega\Pi = (\Omega + \gamma\Pi)^*\Omega\Pi - \gamma N(\Pi)\Pi^{-1}\Omega\Pi \in \mathfrak{G}_p + p\mathfrak{F}_p$, und deshalb $\Pi \in \mathfrak{G}_p + p\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{G}_p$, Widerspruch.

Nach Satz 4.1.(i) gilt also $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{D}_p + \mathfrak{D}_p\Pi\Omega$, und $\{1, \Pi, p\Omega, \Pi\Omega\}$ ist eine \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{G}_p . Damit folgt, dass $K_p \cap \mathfrak{G}_p = \mathfrak{D}_p = \{A \in K_p \cap \mathfrak{F}_p \mid (S(A))^2 - 4N(A) \in p\mathbb{Z}_p\}$ und $K'_p \cap \mathfrak{G}_p = \mathbb{Z}_p + p\mathbb{Z}_p\Omega = \{A \in K'_p \cap \mathfrak{F}_p \mid (S(A))^2 - 4N(A) \in p\mathbb{Z}_p\}$.

Sei nun $A \in \mathfrak{F}_p$ beliebig. Dann ist A in einer quadratischen Körpererweiterung $K''_p \subset F_p$ von \mathbb{Q}_p enthalten. p ist entweder verzweigt oder träge in K''_p . Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $K''_p = K_p$ oder $K''_p = K'_p$, womit die Behauptung folgt.

(ii) siehe [2, Satz 3]

□

Lemma 4.5. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.*

Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Seien \mathfrak{F} eine F -Maximalordnung und p eine endliche Verzweigungsstelle von F .

(i) *Falls p in k verzweigt ist, gibt es genau eine M_p -Maximalordnung \mathfrak{M}_p mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$.*

(ii) *Falls p in k träge ist, gibt es genau zwei M_p -Maximalordnungen $\mathfrak{M}_p \neq \mathfrak{M}'_p$ mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$ und $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}'_p$. Es gilt $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}'_p)] = p^2$.*

Beweis. Sei $K_p \subset F_p$ quadratische Körpererweiterung von \mathbb{Q}_p mit Hauptordnung \mathfrak{D}_p . Falls p verzweigt in k ist, sei p träge in K_p . Falls p träge in k ist, sei p verzweigt in K_p . $L_p := k_p K_p$ ist quadratische Körpererweiterung von k_p mit Hauptordnung $\mathfrak{L}_p = \mathfrak{o}_p \mathfrak{D}_p$. Seien \mathfrak{M}_p und \mathfrak{M}'_p zwei M_p -Maximalordnungen mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$ und $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}'_p$. Dann gilt $\mathfrak{L}_p = \mathfrak{o}_p \mathfrak{D}_p = \mathfrak{o}_p (K_p \cap \mathfrak{M}_p) \subset L_p \cap \mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{L}_p$, also gilt $\mathfrak{L}_p = L_p \cap \mathfrak{M}_p$ und genauso $\mathfrak{L}_p = L_p \cap \mathfrak{M}'_p$. Daher gibt es nach Lemma 2.3 ein $X \in L_p^\times$ mit $\mathfrak{M}'_p = X\mathfrak{M}_p X^{-1}$.

(i) Sei $\pi \in \mathfrak{o}_p$ Primelement. Dann ist π auch Primelement in \mathfrak{L}_p . Daher gibt es $r \in \mathbb{Z}$ und $Y \in \mathfrak{L}_p^\times \subset \mathfrak{M}_p^\times$ mit $X = \pi^r Y$. Also gilt $\mathfrak{M}'_p = \pi^r Y \mathfrak{M}_p Y^{-1} \pi^{-r} = \mathfrak{M}_p$.

(ii) Sei $\Pi \in \mathfrak{D}_p$ Primelement, also auch Primelement in \mathfrak{L}_p . Es gilt $\Pi^2 p^{-1} \in \mathfrak{D}_p^\times$. Daher gibt es $r \in \mathbb{Z}$ und $Y \in \mathfrak{L}_p^\times \subset \mathfrak{M}_p^\times$ mit $X = p^r Y$ oder $X = \Pi p^r Y$. Also gilt $\mathfrak{M}'_p = \mathfrak{M}_p$ oder $\mathfrak{M}'_p = \Pi \mathfrak{M}_p \Pi^{-1}$. Sei nun $\mathfrak{M}'_p = \Pi \mathfrak{M}_p \Pi^{-1}$. Die k_p -Algebra M_p zerfällt, siehe Lemma 3.2.(i). Wegen $\Pi \notin k_p^\times \mathfrak{M}_p^\times$ gilt daher $\mathfrak{M}'_p \neq \mathfrak{M}_p$, siehe [4, Theorem 6.5.3.2]. Nach Lemma 2.2.(iv) gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}'_p$ die Diskriminante $p^{2r} \mathfrak{o}_p$ hat und $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}'_p)] = N_{abs}(p \mathfrak{o}_p)^r = p^{2r}$ gilt.

Da \mathfrak{F}_p die Diskriminante $p^2 \mathbb{Z}_p$ hat und $\mathfrak{o}_p \mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}'_p$ gilt, folgt $r = 1$.

□

Lemma 4.6. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Seien \mathfrak{F} eine F -Maximalordnung und p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} . Falls F_p zerfällt oder p in k zerlegt ist, gibt es genau eine M_p -Maximalordnung \mathfrak{M}_p mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$.

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ ein Primteiler von p .

Falls F_p zerfällt, hat \mathfrak{F}_p die Diskriminante \mathbb{Z}_p . Dann hat $\mathfrak{M}_p := \mathfrak{o}_p \mathfrak{F}_p$ die Diskriminante \mathfrak{o}_p , ist also die einzige M_p -Maximalordnung \mathfrak{M}_p mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$. Ist p in k verzweigt oder träge, bleibt nichts zu zeigen. Ist p in k zerlegt, folgt die Behauptung mit $\mathfrak{M}_p \cong \mathfrak{M}_p \times \mathfrak{M}_{\bar{p}}$. Falls F_p Divisionsalgebra ist und p in k zerlegt ist, gilt $M_p \cong M_p \times M_{\bar{p}} \cong F_p \times F_p$, und $\mathfrak{M}_p \cong \mathfrak{F}_p \times \mathfrak{F}_p$ ist die einzige M_p -Maximalordnung. (\mathfrak{F}_p ist darin diagonal eingebettet.) \square

Lemma 4.7. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} .

Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra und \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung. Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} mit $p \nmid \Sigma_k(F)$.

- (i) Dann enthält $F_p \cap \mathfrak{N}_p$ eine zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung.
- (ii) Sei \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung mit $F_p \cap \mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{F}_p$. Dann gibt es genau eine M_p -Maximalordnung \mathfrak{M}_p mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$ und $[\mathfrak{F}_p : (F_p \cap \mathfrak{N}_p)] = [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)]$. Die Inklusion $\mathfrak{F}_p \hookrightarrow \mathfrak{M}_p$ induziert einen Isomorphismus $\mathfrak{F}_p / (F_p \cap \mathfrak{N}_p) \rightarrow \mathfrak{M}_p / (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{G}_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p$, und sei \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$.

- Sei zunächst p zerlegt in k .

Wegen $p \nmid \Sigma_k(F)$ gilt $F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$. Sei $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$. Dann gilt $\mathfrak{N}_p \cong \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_{\bar{p}}$. Wegen $F_p \cong M_p \cong M_{\bar{p}}$ gibt es F_p -Maximalordnungen $\mathfrak{F}'_p, \mathfrak{F}''_p$ mit $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{o}_p \mathfrak{F}'_p$ und $\mathfrak{N}_{\bar{p}} = \mathfrak{o}_{\bar{p}} \mathfrak{F}''_p$.

Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Matriceseinheiten in F_p , bezüglich derer $\mathfrak{F}'_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{F}''_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^{-r}\mathbb{Z}_p \\ p^r\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ gilt. Dann ist $\mathfrak{N}_p \cong \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\bar{p}} & p^{-r}\mathfrak{o}_{\bar{p}} \\ p^r\mathfrak{o}_{\bar{p}} & \mathfrak{o}_{\bar{p}} \end{pmatrix}$. Daraus folgt

$\mathfrak{G}_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p^r\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$. Also gilt $\mathfrak{o}_p \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \subset \mathfrak{G}_p$. Nach Satz 4.2.(i) gilt

$\mathfrak{F}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^{-s}\mathbb{Z}_p \\ p^s\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{Z}$. Wegen $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ gilt $0 \leq s \leq r$ und $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p^r$.

Nach Lemma 4.6 gibt es genau eine M_p -Maximalordnung \mathfrak{M}_p mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$. Dann gilt

$\mathfrak{M}_p \cong \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^{-s}\mathfrak{o}_p \\ p^s\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\bar{p}} & p^{-s}\mathfrak{o}_{\bar{p}} \\ p^s\mathfrak{o}_{\bar{p}} & \mathfrak{o}_{\bar{p}} \end{pmatrix}$, und aus $\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p \cong \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ p^s\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\bar{p}} & p^{-s}\mathfrak{o}_{\bar{p}} \\ p^r\mathfrak{o}_{\bar{p}} & \mathfrak{o}_{\bar{p}} \end{pmatrix}$

folgt $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)] = p^s p^{r-s} = p^r$, und $\mathfrak{F}_p / \mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{M}_p / (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)$ ist Isomorphismus.

- Sei nun p verzweigt oder träge in k .

k_p ist quadratische Körpererweiterung von \mathbb{Q}_p , und es gilt $M_p \cong M_2(k_p)$, siehe Lemma 3.2.(i). Sei $\mathfrak{o}_p = \mathbb{Z}_p[\omega]$, und sei $\pi \in \mathfrak{o}_p$ ein Primelement. Falls p in k verzweigt ist, sei $\omega = \pi$. Falls p in k träge ist, sei $\pi = p$. Sei \mathfrak{M}_p eine M_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$. Nur falls p in k träge ist, müssen wir \mathfrak{M}_p im Beweisverlauf eventuell ersetzen, siehe

Lemma 4.5. Die induzierte Abbildung $\mathfrak{F}_p/\mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{M}_p/(\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)$ ist injektiv. Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Matrizeseinheiten $U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22} \in M_p$, bezüglich derer $\mathfrak{M}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{N}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \pi^{-r}\mathfrak{o}_p \\ \pi^r\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ gilt. Wir zeigen (i) und (ii) zuerst für den Fall, dass $\pi^r \notin p\mathfrak{o}_p$.

- Dann ist entweder $r = 0$, also $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_p$ und $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{F}_p$, also nichts weiter zu zeigen.
- Oder es ist $r = 1$ und p ist verzweigt in k . Dann ist $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] \leq [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)] = p$. Falls $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{F}_p$, wäre $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_p$, also doch $r = 0$. Also ist $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p$, und nach Satz 4.4 ist \mathfrak{G}_p bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, enthält nach Satz 4.1.(i) also eine zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung, und $\mathfrak{F}_p/\mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{M}_p/(\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)$ ist surjektiv.

Wir können nun also annehmen, dass $\pi^r \in p\mathfrak{o}_p$ oder gleichwertig $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)] \geq p^2$.

(i) Wir konstruieren (unabhängig von r) ein $U \in \mathfrak{G}_p$, so dass $\mathbb{Z}_p[U]$ isomorph zu \mathfrak{o}_p ist.

F_p und $\begin{pmatrix} k_p & k_p \\ 0 & k_p \end{pmatrix}$ haben als \mathbb{Q}_p -Algebren die Dimensionen 4 und 6. Ihr Durchschnitt hat also eine Dimension ≥ 2 . Daher gibt es $a, b, c \in k_p$ mit $U := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in F_p \setminus \mathbb{Q}_p$.

Wir zeigen zunächst, dass wir $c = \bar{a}$ annehmen können.

Falls $c \neq \bar{a}$, gilt $c - \bar{a} = S(U) - (a + \bar{a}) \in \mathbb{Q}_p^\times$, und wegen $a(c - \bar{a}) = N(U) - a\bar{a} \in \mathbb{Q}_p$ sind $a, c \in \mathbb{Q}_p$. Wir ersetzen U durch $U - c$, können also $c = 0$ und $a \neq 0$ annehmen. Man rechnet leicht nach, dass $UM_pU^* \subset k_pU_{12}$ und speziell $UU_{12}U^* = a^2U_{12}$. Also gilt $UM_pU^* \neq \{0\}$ und wegen $M_p = F_p + \omega F_p$ auch $UF_pU^* \neq \{0\}$. Sei $X \in F_p$ mit $UXU^* \neq 0$. Wir ersetzen U durch $UXU^* \in F_p$ und erhalten so $c = \bar{a} = 0$.

Wir können also $U = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$ annehmen, mit $a, b \in \mathfrak{o}_p$, nicht beide durch p teilbar.

Wir zeigen nun, dass wir $a = \omega$ annehmen können.

Es gibt $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times$ und $s \in \mathbb{N}_0$ mit $a = \alpha$ oder $a = \alpha + \beta p^s \omega$. Sei $t \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $p^t \mid (a - \alpha)$ und $p^t \mid b$. Wir ersetzen U durch $(U - \alpha)/(\beta p^t)$. Dann gilt $a = 0$ oder $a = p^s \omega$ mit $s \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen durch Widerspruch, dass $a \neq 0$, $s = 0$.

Andernfalls gilt $p^{-1}U \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^{-1}\mathfrak{o}_p \\ 0 & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$, wegen $p \mid \pi^r$ also $p^{-1}U \in \mathfrak{N}_p$. Daher gilt $p^{-1}U \in F_p \cap \mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}_p$, andererseits gilt wegen $p \nmid b$ aber $p^{-1}U \notin \mathfrak{M}_p$, und deshalb $p^{-1}U \notin \mathfrak{F}_p$, Widerspruch. Wir können also $U = \begin{pmatrix} \omega & b \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$ annehmen, mit $b \in \mathfrak{o}_p$.

(ii) Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{F}_p/\mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{M}_p/(\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)$ surjektiv ist. Dazu genügt es, die Surjektivität von $f_{21} : \mathfrak{F}_p \rightarrow \mathfrak{o}_p$ mit Zuordnungsvorschrift $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \gamma$ zu zeigen.

- Falls p in k verzweigt ist, sei $K_p \subset F_p$ eine quadratische Körpererweiterung von \mathbb{Q}_p mit Hauptordnung $\mathfrak{O}_p \subset \mathfrak{F}_p$. Sei p träge in K_p , und sei $\mathfrak{D}_p = \mathbb{Z}_p[\Omega]$.

Es gibt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{o}_p$ mit $\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\Omega U = \begin{pmatrix} \alpha\omega & \alpha b + \beta\bar{\omega} \\ \gamma\omega & \gamma b + \delta\bar{\omega} \end{pmatrix}$. Nach Lemma 4.5.(i) und Lemma 4.6 gilt $\mathfrak{F}_p \not\subset \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \pi^{-1}\mathfrak{o}_p \\ \pi\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$. Also gilt: $\gamma \in \mathfrak{o}_p^\times$, $\{\gamma, \gamma\omega\}$ ist \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{o}_p , und $f_{21} : \mathfrak{F}_p \rightarrow \mathfrak{o}_p$ ist surjektiv.

- Falls p in k träge ist, sei $K_p \subset F_p$ quadratische Körpererweiterung von \mathbb{Q}_p mit Hauptordnung $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{F}_p$. Sei p verzweigt in K_p , und sei $\Pi \in \mathfrak{D}_p$ Primelement.

Es gibt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathfrak{o}_p$ mit $\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Falls $\gamma \in \mathfrak{o}_p^\times$, folgt wie in (i), dass f_{21} surjektiv ist. Wir dürfen also $\gamma = \gamma'p^s$ mit $\gamma' \in \mathfrak{o}_p^\times$ und $s \in \mathbb{N}$ annehmen. Bezüglich der Matrizeinheiten $U_{11}, p^{-s}U_{12}, p^sU_{21}, U_{22} \in M_p$ gilt dann:

$U = \begin{pmatrix} \omega & p^s b \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$, $\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & p^s \beta \\ \gamma' & \delta \end{pmatrix}$, $\Pi U = \begin{pmatrix} \alpha\omega & p^s(\alpha b + \beta\bar{\omega}) \\ \gamma'\omega & p^s\gamma' b + \delta\bar{\omega} \end{pmatrix}$. Speziell gilt $\mathfrak{F}_p \subset \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^s \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$. Also ist F_p Divisionsalgebra, \mathfrak{F}_p hat die Diskriminante $p^2\mathbb{Z}_p$,

und es gilt $s = 1$, also $\mathfrak{N}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^{-(r-1)}\mathfrak{o}_p \\ p^{r-1}\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{M}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p\mathfrak{o}_p \\ p^{-1}\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$.

Wir ersetzen \mathfrak{M}_p durch $\begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$. Wegen $\gamma' \in \mathfrak{o}_p^\times$ ist f_{21} dann surjektiv.

Falls p Verzweigungsstelle von F ist, müssen wir noch die Eindeutigkeit von \mathfrak{M}_p zeigen. Das verschieben wir als Anhang auf den Beweis von Satz 4.8.(ii).

□

Satz 4.8. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} .

Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} mit $p \nmid \Sigma_k(F)$. Seien \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung, $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{F}_p$ eine zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung und \mathfrak{G}_p eine F_p -Ordnung mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$. Bezeichne $C(\mathfrak{G}_p)$ die Anzahl der M_p -Maximalordnungen \mathfrak{N}_p mit $\mathfrak{G}_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p$.

(i) Sei p zerlegt in k .

Es ist $C(\mathfrak{F}_p) = 1$. Für $\mathfrak{G}_p \neq \mathfrak{F}_p$ ist $C(\mathfrak{G}_p) = 2$.

(ii) Sei p träge in k .

Falls $F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$, ist $C(\mathfrak{F}_p) = 1$. Falls $F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$ oder $\mathfrak{G}_p \neq \mathfrak{F}_p$, ist $C(\mathfrak{G}_p) = 2$.

(iii) Sei p verzweigt in k .

Es ist $C(\mathfrak{F}_p) = 1$. Für $\mathfrak{G}_p \neq \mathfrak{F}_p$ wird $C(\mathfrak{G}_p)$ durch die folgenden Tabellen dargestellt.

$[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p]$	$C(\mathfrak{G}_p)$, falls $p \neq 2$	
	$F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$
p	1	$p + 1$
p^2	$p - 1$	$2p$
$\geq p^3$	$2p$	$2p$

$[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p]$	$C(\mathfrak{G}_p)$, falls $p = 2$			
	$d \equiv 1 \pmod{4}$		$d \equiv 2 \pmod{4}$	
	$F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$
2	1	3	1	3
4	1	2	1	2
8	2	4	2	4
16	4	8	4	4
32	8	8	4	8
64	8	8	8	16
≥ 128	8	8	16	16

Beweis. Die Behauptungen für \mathfrak{F}_p , folgen mit den Lemmata 4.5 und 4.6. Sei nun $\mathfrak{G}_p \neq \mathfrak{F}_p$.

- (i) Sei $p\mathfrak{o} = p\bar{p}$. Nach Satz 4.2.(i) gibt es $r \in \mathbb{N}$ und Matrizeseinheiten in F_p , bezüglich derer $\mathfrak{D}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{G}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p^r \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ gilt. \mathfrak{G}_p ist diagonal in $\mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_{\bar{p}}$ eingebettet. Wegen $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p$ gilt $\begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & 0 \\ 0 & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\bar{p}} & 0 \\ 0 & \mathfrak{o}_{\bar{p}} \end{pmatrix} \subset \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_{\bar{p}}$. Mit Satz 4.2.(i) folgt aus $\mathfrak{o}_p \cong \mathfrak{o}_{\bar{p}} \cong \mathbb{Z}_p$, dass $\mathfrak{N}_p \cong \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_{\bar{p}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^{-s} \mathfrak{o}_p \\ p^s \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\bar{p}} & p^{-s'} \mathfrak{o}_{\bar{p}} \\ p^{s'} \mathfrak{o}_{\bar{p}} & \mathfrak{o}_{\bar{p}} \end{pmatrix}$ mit $s, s' \in \mathbb{Z}$. Wegen $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{N}_p$ gilt $0 \leq s, s' \leq r$. Man erkennt dann leicht, dass $\mathfrak{G}_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p$ genau dann, wenn entweder $s = 0$ und $s' = r$ oder $s' = 0$ und $s = r$.
- (ii) F_p ist isomorph zur p -Komponente einer \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra mit Zerfällungskörper k . Es gibt also ein $\tau \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften laut Satz 3.5 und Matrizeseinheiten in M_p , bezüglich derer $F_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \tau \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in k_p \right\}$ gilt.

F_p zerfällt genau dann, wenn $\left(\frac{\tau, -d}{p} \right) = 1$, also wenn $p \nmid \tau$ gilt. Die F_p -Ordnung

$\mathfrak{F}_p := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \tau \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathfrak{o}_p \right\}$ hat die Diskriminante $\tau^2 \mathbb{Z}_p$, ist also Maximalordnung.

Für $r \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{G}(r)_p := \left\{ \begin{pmatrix} a & p^r b \\ p^r \tau \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathfrak{o}_p \right\}$. Dann ist $\mathfrak{G}(r)_p$ eine F_p -Ordnung mit $\mathfrak{G}(r)_p \subset \mathfrak{F}_p$. Es gilt $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}(r)_p] = p^{2r}$, und $\mathfrak{G}(r)_p$ enthält die zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung $\mathfrak{D}_p := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathfrak{o}_p \right\}$. Wegen $\mathfrak{G}_p \cong \mathfrak{G}(r)_p$ für ein $r \in \mathbb{N}$ genügt es,

die Behauptung für $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}(r)_p$ zu zeigen. Seien $\mathfrak{N}(r)_p := \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^r \mathfrak{o}_p \\ p^{-r} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{N}(-r)_p := \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & (p^r \tau)^{-1} \mathfrak{o}_p \\ p^r \tau \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$. Dann gilt $F_p \cap \mathfrak{N}(r)_p = F_p \cap \mathfrak{N}(-r)_p = \mathfrak{G}(r)_p$.

Sei umgekehrt \mathfrak{N}_p eine M_p -Ordnung mit $F_p \cap \mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}(r)_p$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{N}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^s \mathfrak{o}_p \\ p^{-s} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ für ein $s \in \mathbb{Z}$. Da \mathfrak{D}_p die Diskriminante \mathbb{Z}_p hat, gilt

$\mathfrak{L}_p := \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & 0 \\ 0 & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix} \subset \mathfrak{N}_p$. Sei $L_p := \begin{pmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_p \end{pmatrix}$. Dann gilt $L_p \cap \mathfrak{N}_p = L_p \cap M_2(\mathfrak{o}_p) = \mathfrak{L}_p$. Also gibt es nach Lemma 2.3 ein $X \in L_p^\times$ mit $\mathfrak{N}_p = XM_2(\mathfrak{o}_p)X^{-1}$. Es gibt dann $s, t \in \mathbb{Z}$ und ein $Y \in \mathfrak{L}_p^\times$ mit $X = p^t \begin{pmatrix} p^s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$. Damit folgt die Behauptung.

Anhang zum Beweis von Lemma 4.7.(ii) (p träge in k und Verzweigungsstelle von F):

Mit $\mathfrak{M}(+)_p := \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{M}(-)_p := \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^{-1}\mathfrak{o}_p \\ p\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ gilt $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}(+)_p \cap \mathfrak{M}(-)_p$,
 $[\mathfrak{M}(+)_p : (\mathfrak{M}(+)_p \cap \mathfrak{N}(r)_p)] = [\mathfrak{M}(-)_p : (\mathfrak{M}(-)_p \cap \mathfrak{N}(-r)_p)] = p^{2r} = [\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}(r)_p]$,
aber $[\mathfrak{M}(+)_p : (\mathfrak{M}(+)_p \cap \mathfrak{N}(-r)_p)] = [\mathfrak{M}(-)_p : (\mathfrak{M}(-)_p \cap \mathfrak{N}(r)_p)] = p^{2r+2}$.

Die in Lemma 4.7.(ii) beschriebene Zuordnung $\mathfrak{N}_p \mapsto \mathfrak{M}_p$ ist also wirklich eindeutig.

(iii) Wie in (ii) gibt es ein $\tau \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften laut Satz 3.5 und Matrizeseinheiten in M_p , bezüglich derer $F_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \tau\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in k_p \right\}$ gilt. Diesbezüglich

sei $\mathfrak{N}'_p := \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p\mathfrak{o}_p \\ p^{-1}\mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathfrak{G}'_p := F_p \cap \mathfrak{N}'_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & pb \\ p\tau\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathfrak{o}_p \right\}$ eine F_p -Ordnung mit Diskriminante $p^4 D^2 \mathbb{Z}_p$. Seien \mathfrak{F}_p eine F_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{G}'_p \subset \mathfrak{F}_p$ und \mathfrak{M}_p die M_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$. Dann gilt $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}'_p] \geq p^2$. Sei $\pi \in \mathfrak{o}_p$ ein Primelement. Wie im Beweis von Lemma 4.7 folgt nun, dass es $b, \alpha, \beta, \delta \in \mathfrak{o}_p$, $\gamma \in \mathfrak{o}_p^\times$ und Matrizeseinheiten in M_p gibt, bezüglich derer gilt:

$\mathfrak{M}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$, und $\left\{ 1, \Pi := \begin{pmatrix} \pi & b \\ 0 & \bar{\pi} \end{pmatrix}, \Omega := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \Pi\Omega \right\}$ ist \mathbb{Z}_p -Basis von \mathfrak{F}_p ,
und p ist träge in $K'_p = \mathbb{Q}_p(\Omega)$ mit Hauptordnung $\mathfrak{D}'_p = \mathbb{Z}_p[\Omega]$. Sei $\mathfrak{D}_p := \mathbb{Z}_p[\Pi]$ und $\mathfrak{G}(r)_p := \mathfrak{D}_p + \mathfrak{D}_p \Pi^r \Omega$ für $r \in \mathbb{N}$. Es genügt, die Anzahl der M_p -Maximalordnungen \mathfrak{N}_p mit $\mathfrak{G}(r)_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p$ zu berechnen, siehe die Lemmata 4.1.(i) und 4.3.

Sei zunächst \mathfrak{N}_p eine M_p -Maximalordnung mit $\mathfrak{G}(r)_p = F_p \cap \mathfrak{N}_p$. Nach Lemma 4.7.(ii) und den Lemmata 4.5.(i), 4.6 ist dann $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}(r)_p] = [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)] = p^r$. Nach Lemma 2.2.(i) gibt es $J \in \mathfrak{M}_p \setminus \pi \mathfrak{M}_p$ mit $J\mathfrak{M}_p J^{-1} = \mathfrak{N}_p$ und $N(J) \in \pi^r \mathfrak{o}_p^\times$. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ wählen wir eine Repräsentantenmenge $\mathfrak{r}_p(m) \subset \mathfrak{o}_p$ von $\mathfrak{o}_p / \pi^m \mathfrak{o}_p$.

Mit [4, Theorem 6.5.3.3] folgt dann leicht, dass wir $J = J(m, n, c) := \begin{pmatrix} \pi^m & c \\ 0 & \bar{\pi}^n \end{pmatrix}$ annehmen können, mit $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m + n = r$, $c \in \mathfrak{o}_p$, für die darüberhinaus gilt:

(C1) $c \in \mathfrak{r}_p(m)$, und $c \in \mathfrak{o}_p^\times$, falls $mn > 0$.

Die Abbildung mit Zuordnungsvorschrift $\mathfrak{N}_p \mapsto (m, n, c)$ ist wohldefiniert und injektiv, und man überprüft leicht, dass $\Pi \in \mathfrak{N}_p$ oder $J^{-1}\Pi J \in \mathfrak{M}_p$ äquivalent ist zu:

(C2) $(\pi - \bar{\pi})c + \bar{\pi}^n b \in \pi^m \mathfrak{o}_p$.

Wir berechnen für jedes $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Anzahl $C(m, n)$ der $c \in \mathfrak{o}_p$, die die Bedingungen (C1) und (C2) erfüllen. Dazu benötigen wir zwei Vorbemerkungen:

- Falls $p \neq 2$, gilt $(\pi - \bar{\pi}) \in \pi \mathfrak{o}_p^\times$.
 Falls $p = 2$ und $d \equiv 1 \pmod{4}$, gilt $(\pi - \bar{\pi}) \in \pi^2 \mathfrak{o}_p^\times$.
 Falls $p = 2$ und $d \equiv 2 \pmod{4}$, gilt $(\pi - \bar{\pi}) \in \pi^3 \mathfrak{o}_p^\times$.
 Zum Beweis ist nur zu beachten, dass wir $\pi - \bar{\pi} = 2i\sqrt{d}$ annehmen können.
- Genau dann gilt $b \in \mathfrak{o}_p^\times$, wenn F_p zerfällt. Falls $p = 2$, gilt stets $b \notin \pi^2 \mathfrak{o}_p$.
 Zum Beweis der ersten Behauptung sei zunächst $b \in \pi \mathfrak{o}_p$. Dann ist $\Pi/\pi \in \mathfrak{M}_p$, also $\mathfrak{o}_p \mathfrak{F}_p \subsetneq \mathfrak{M}_p$. Also hat \mathfrak{F}_p die Diskriminante $p^2 \mathbb{Z}_p$.
 Sei umgekehrt F_p eine \mathbb{Q}_p -Divisionsalgebra. Wir zeigen, dass der \mathfrak{o}_p -Modul \mathfrak{M}'_p mit Basis $\{1, \Pi/\pi, \Omega, \Pi\Omega/\pi\}$ multiplikativ abgeschlossen, also M_p -Ordnung ist: (\mathfrak{M}'_p ist dann Maximalordnung, nach Lemma 4.5.(i) also $\mathfrak{M}'_p = \mathfrak{M}_p$, $b \in \pi \mathfrak{o}_p$.)
 Multiplikation von links mit (Π/π) oder von rechts mit Ω überführt \mathfrak{M}'_p in sich. Die Behauptung folgt nun mit $\Omega\Pi/\pi = (\Pi/\pi)(\Pi^{-1}\Omega\Pi) \in (\Pi/\pi)\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}'_p$.
 Zum Beweis der zweiten Behauptung nehmen wir $b = \pi^2 b'$ mit $b' \in \mathfrak{o}_p$ an.
 Es gibt $x, u, v, w \in \mathfrak{o}_p$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x + u\Pi/\pi + v\Omega + w\Pi\Omega/\pi$. Daraus folgt $0 = v\gamma + w\gamma\bar{\pi}/\pi$, also $v+w \in \pi \mathfrak{o}_p$, und $1 = (u+w\delta)\pi b' + (v+w)\beta$, Widerspruch.

Nun können wir die $C(m, n)$ elementar berechnen. Wir führen die Details hier nicht aus, sondern fassen nur die Ergebnisse in den beiden folgenden Tabellen zusammen.

m, n	$C(m, n)$, falls $p \neq 2$	
	$F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$
$m = 0, n \geq 0$	1	1
$m \geq 1, n = 0$	0	p
$m = 1, n \geq 1$	$p - 1$	$p - 1$
$m \geq 2, n = 1$	p	0
$m \geq 2, n \geq 2$	0	0

m, n	$C(m, n)$, falls $p = 2$			
	$d \equiv 1 \pmod{4}$		$d \equiv 2 \pmod{4}$	
	$F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$	$F_p \not\cong M_2(\mathbb{Q}_p)$
$m = 0, n \geq 0$	1	1	1	1
$m = 1, n = 0$	0	$p = 2$	0	$p = 2$
$m = 1, n \geq 1$	$p - 1 = 1$	$p - 1 = 1$	$p - 1 = 1$	$p - 1 = 1$
$m \geq 2, n = 0$	0	0	0	0
$m = 2, n = 1$	0	$p^2 - p = 2$	0	$p^2 - p = 2$
$m = 2, n \geq 2$	$p^2 - p = 2$	$p^2 - p = 2$	$p^2 - p = 2$	$p^2 - p = 2$
$m \geq 3, n = 1$	0	$p^2 = 4$	0	0
$m = 3, n = 2$	$p^2 = 4$	0	0	$p^3 - p^2 = 4$
$m = 3, n \geq 3$	0	0	$p^3 - p^2 = 4$	$p^3 - p^2 = 4$
$m \geq 4, n = 2$	$p^2 = 4$	0	0	$p^3 = 8$
$m \geq 4, n = 3$	0	0	$p^3 = 8$	0
$m \geq 4, n \geq 4$	0	0	0	0

Seien nun umgekehrt $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m + n = r$, $c \in \mathfrak{o}_p$, für die (C1) und (C2) gelten, und seien $\mathfrak{N}_p := J(m, n, c)\mathfrak{M}_p J(m, n, c)^{-1}$ und $\mathfrak{H}_p := F_p \cap \mathfrak{N}_p$. Dann gilt $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{H}_p$. Falls $\mathfrak{H}_p \subset \mathfrak{F}_p$, folgt mit den Lemmata 4.7.(ii) (sowie 4.5.(i) und 4.6) und 2.2.(iii)(iv): $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{H}_p] = [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)] = p^r$, mit Lemma 4.1.(i) also $\mathfrak{H}_p = \mathfrak{G}(r)_p$. Ist $\mathfrak{H}_p \not\subset \mathfrak{F}_p$, folgt mit den Lemmata 4.1.(iv) und 4.5.(i): $\mathfrak{H}_p = \Pi \mathfrak{F}_p \Pi^{-1}$ und $\mathfrak{N}_p = \Pi \mathfrak{M}_p \Pi^{-1}$. O.B.d.A. sei $b \in \mathfrak{r}_p(1)$. Wegen $\Pi = J(1, 1, b)$ können wir zusammenfassen:

Sei $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p^r$. Dann ist $C(\mathfrak{G}_p)$ gleich der Summe der $C(m, n)$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $m + n = r$, vermindert um 1, falls F_p zerfällt und $r = 2$ ist. □

Lemma 4.9. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Diskriminante D .*

Seien E eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von E zur k -Quaternionenalgebra. Sei $T \in M^\times$ ganz mit $\Phi_E(T) = T^$, $S(T) \in 4\mathbb{Z}$ und $S(T)^2 \neq 4N(T)$.*

Sei p eine endliche Stelle von \mathbb{Q} , an der E zerfällt. Dann gilt:

Es gibt eine E_p -Maximalordnung \mathfrak{E}_p und eine M_p -Maximalordnung \mathfrak{N}_p mit $\mathfrak{E}_p \subset \mathfrak{N}_p$, so dass die $F(E, T)_p$ -Ordnung $F(E, T)_p \cap \mathfrak{N}_p$ die Diskriminante $D^2 d^2 N(T)^2 \mathbb{Z}_p$ hat.

Beweis. Wegen $\Phi_E(T) = T^*$ gibt es $\sigma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}_p$ und Matrizeseinheiten in E_p mit $T = \begin{pmatrix} \sigma + \alpha i\sqrt{d} & \beta i\sqrt{d} \\ \gamma i\sqrt{d} & \sigma - \alpha i\sqrt{d} \end{pmatrix}$. Sei $\tau := (\alpha^2 + \beta\gamma)d = -(S(T)^2 - 4N(T))/4 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\sigma \in 2\mathbb{Z}$ und $N(T) = \sigma^2 + \tau$. Wegen $\tau \neq 0$ gibt es $a, b \in \mathbb{Q}_p$ mit $j := a^2\beta - 2ab\alpha - b^2\gamma \neq 0$. Sei $J := \begin{pmatrix} a/d & b/d \\ a\alpha + b\gamma & a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$. Dann ist $N(J) = j/d$ und $JTJ^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma & i\sqrt{d}/d \\ \tau i\sqrt{d} & \sigma \end{pmatrix}$.

Also gibt es Matrizeseinheiten in E_p bezüglich derer $T = \begin{pmatrix} \sigma & i\sqrt{d}/d \\ \tau i\sqrt{d} & \sigma \end{pmatrix}$ gilt.

Diesbezüglich sei $\mathfrak{E}_p = M_2(\mathbb{Z}_p)$ und $\mathfrak{N}_p = M_2(\mathfrak{o}_p)$. Man rechnet elementar nach, dass $\left\{ 1, U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tau d & 0 \end{pmatrix}, V := \begin{pmatrix} \sigma d & -i\sqrt{d} \\ \tau d i\sqrt{d} & -\sigma d \end{pmatrix}, W := \begin{pmatrix} i\sqrt{d} & 0 \\ 2\sigma d & -i\sqrt{d} \end{pmatrix} = (\sigma U + UV/d)/\tau \right\}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis einer $F(E, T)_p$ -Ordnung $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{N}_p$ mit Diskriminante $16d^4 N(T)^2 \mathbb{Z}_p$ ist.

Falls $p = 2$ in k verzweigt oder $p \neq 2$ ist, sieht man leicht, dass $\mathfrak{G}_p = F(E, T)_p \cap \mathfrak{N}_p$ gilt. Falls $p = 2$ in k träge oder zerlegt ist, ist $\{1, (U + V)/2, V, (1 + W)/2\}$ eine \mathbb{Z}_p -Basis der $F(E, T)_p$ -Ordnung $F(E, T)_p \cap \mathfrak{N}_p$. Die Diskriminante ist in diesem Fall also $d^4 N(T)^2 \mathbb{Z}_p$. □

5 Einbettung rationaler Quaternionenordnungen

Definition 5.1. *Ist K ein algebraischer Zahlkörper, Q eine K -Quaternionenalgebra, \mathfrak{M} eine Q -Maximalordnung und $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ eine Q -Ordnung, dann sei $\Lambda(\mathfrak{N}) := [\mathfrak{M} : \mathfrak{N}]$.*

Definition 5.2. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} . Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra. Eine F -Ordnung \mathfrak{G} heißt \mathfrak{o} -kompatibel genau dann, wenn für alle Stellen p von \mathbb{Q} mit $p \mid \Lambda(\mathfrak{G})$ gilt: \mathfrak{G}_p enthält eine zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung.*

Satz 5.3. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} und Idealgruppe I . Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei \mathfrak{F} eine F -Maximalordnung.

(i) Sei $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ eine \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnung.

Dann ist $\Lambda(\mathfrak{G})$ teilerfremd zu $\Sigma_k(F)$, und es gilt $\Lambda(\mathfrak{G}) \in N_{abs}(I)$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu $\Sigma_k(F)$, und sei $\lambda \in N_{abs}(I)$.

Dann gibt es eine \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnung $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ mit $\Lambda(\mathfrak{G}) = \lambda$.

(iii) Seien $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ zwei \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnungen mit $\Lambda(\mathfrak{G}) = \Lambda(\mathfrak{G}')$.

Für alle endlichen Stellen p von \mathbb{Q} gilt dann: \mathfrak{G}_p ist isomorph zu \mathfrak{G}'_p .

Bemerkung: Wir haben die Struktur der \mathfrak{G}_p in den Sätzen 4.1, 4.2 und 4.4 dargelegt.

Beweis. Die Behauptungen (i) und (ii) folgen sofort durch globale Synthese der folgenden lokalen Resultate. Zu deren Beweis sei im Folgenden p stets eine endliche Stelle von \mathbb{Q} .

(i) Falls $p \mid \Sigma_k(F)$, ist F_p eine Divisionsalgebra und die zerfallende quadratische Erweiterung k_p von \mathbb{Q}_p lässt sich nicht in F_p einbetten. Daher gilt $p \nmid \Lambda(\mathfrak{G})$.

Falls $p \nmid \Sigma_k(F)$ gibt es nach den Sätzen 4.1 und 4.2 ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p^r$, falls p in k verzweigt oder zerlegt ist, und mit $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = p^{2r}$, falls p in k träge ist.

(ii) Sei λ_p der p -Anteil von λ . Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $\lambda_p = p^r$ oder mit $\lambda_p = p^{2r}$, je nachdem, ob p in k verzweigt oder zerlegt ist, oder ob p in k träge ist.

Falls $p \nmid \lambda$, sei $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{F}_p$.

Falls $p \mid \lambda$, gilt $p \nmid \Sigma_k(F)$ und \mathfrak{F}_p enthält eine zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung \mathfrak{D}_p . Nach den Sätzen 4.1, 4.2 gibt es eine F_p -Ordnung \mathfrak{G}_p mit $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{F}_p$ und $[\mathfrak{F}_p : \mathfrak{G}_p] = \lambda_p$.

(iii) Falls $p \mid \Sigma_k(F)$, ist $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}'_p$ die F_p -Maximalordnung.

Falls $p \nmid \Sigma_k(F)$, gibt es nach Lemma 4.3 einen Isomorphismus $\mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{G}'_p$.

□

Lemma 5.4. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, sei M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra, und seien $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ zwei M -Maximalordnungen. Dann gilt:

(i) $\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') = N_{abs}(N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}'))^{-1}$.

(ii) Sei \mathfrak{M} eine M -Maximalordnung. Dann gilt $\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') \Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}) \Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$.

(iii) \mathfrak{N} ist genau dann isomorph zu \mathfrak{N}' , wenn es ein $f \in \mathbb{N}$ gibt mit:

$f \mid \Sigma_k(F)$ und $\left(\frac{f \Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')}{p}, -d \right) = 1$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} .

Beweis.

- (i) Die Behauptung folgt sofort durch globale Synthese der folgenden lokalen Resultate.
 Sei \mathfrak{p} eine endliche Stelle von k , und sei π ein Primelement in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$.
 Falls $\mathfrak{p} \mid \Sigma_k(F)$, gilt $\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{N}'_{\mathfrak{p}}$, also $[\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} : (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')_{\mathfrak{p}}] = 1$ und $N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}')_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$.
 Falls $\mathfrak{p} \nmid \Sigma_k(F)$, gibt es nach Lemma 2.2.(iv) und 2.2.(ii) ein $r \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt:
 $[\mathfrak{N}_{\mathfrak{p}} : (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')_{\mathfrak{p}}] = N_{abs}(\pi \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})^r = N_{abs}(N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}')_{\mathfrak{p}})^{-1}$.
- (ii) $\mathfrak{A} := (\mathfrak{N}\mathfrak{M}\mathfrak{N}'\mathfrak{N})^{-1} = (\mathfrak{N}\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{N}'\mathfrak{N})^{-1}$ ist ein zweiseitiges ganzes \mathfrak{N} -Ideal und teilerfremd zu $\Sigma_k(F)$. Daher gibt es ein ganzes \mathfrak{o} -Ideal \mathfrak{a} mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}\mathfrak{a}$, siehe dazu etwa [4, Lemma 6.7.5]. Dann gilt $\mathfrak{a}^2 = N(\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{N}'\mathfrak{N})^{-1}N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')^{-1}N(\mathfrak{N}\mathfrak{M})^{-1}$.
 Nach (i) gilt also $\Lambda(\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N})\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}')\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}) = N_{abs}(\mathfrak{a})^2 \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$.
- (iii) Bezeichne R die von den Verzweigungsstellen von M erzeugte \mathfrak{o} -Idealgruppe.
 Nach [4, Chapter 6.7] ist \mathfrak{N} genau dann isomorph zu \mathfrak{N}' , wenn $N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}') \in RI^{(2)}H$, also wenn es ein o.B.d.A. ganzes $\mathfrak{f} \in R$ gibt mit $\mathfrak{f}N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}')^{-1} \in I^{(2)}H$.
 Nach [1, Kapitel III, § 8, Sätze 6 und 7] gilt $\mathfrak{f}N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}')^{-1} \in I^{(2)}H$ genau dann, wenn $N_{abs}(\mathfrak{f})\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') = N_{abs}(\mathfrak{f}N(\mathfrak{N}\mathfrak{N}')^{-1}) \in N_{abs}(k^{\times})$, nach [1, Kapitel I, § 7, Satz 1] (Minkowski-Hasse) also genau dann, wenn $\left(\frac{N_{abs}(\mathfrak{f})\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'), -d}{p}\right) = 1$ für alle p .
 Falls \mathfrak{N} isomorph zu \mathfrak{N}' ist, sei f der quadratfreie Anteil von $N_{abs}(\mathfrak{f})$. Nach Lemma 3.2.(i) gilt dann $f \mid \Sigma_k(F)$. Falls es umgekehrt ein $f \in \mathbb{N}$ gibt mit $f \mid \Sigma_k(F)$ und $\left(\frac{f\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'), -d}{p}\right) = 1$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} , gibt es ein $\mathfrak{f} \in R$ mit $\mathfrak{f} = N_{abs}(\mathfrak{f})$.

□

Satz 5.5. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} . Sei F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra.*

- (i) *Sei \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung.
 Dann ist $F \cap \mathfrak{N}$ eine \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnung.*
- (ii) *Sei umgekehrt \mathfrak{G} eine \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnung.
 Dann gibt es eine M -Maximalordnung \mathfrak{N} mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{N}$.*
- (iii) *Sind \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung und \mathfrak{F} eine F -Maximalordnung mit $F \cap \mathfrak{N} \subset \mathfrak{F}$, so gibt es genau eine M -Maximalordnung \mathfrak{M} mit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ und $\Lambda(F \cap \mathfrak{N}) = \Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$.
 Die Inklusion $\mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{M}$ induziert einen Isomorphismus $\mathfrak{F}/(F \cap \mathfrak{N}) \rightarrow \mathfrak{M}/(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$.*
- (iv) *Seien $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ zwei M -Maximalordnungen.
 Dann gilt: $\Lambda(F \cap \mathfrak{N})\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')\Lambda(F \cap \mathfrak{N}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$.*

Beweis. Sei im Folgenden p stets eine endliche Stelle von \mathbb{Q} .

- (i) Falls $p \mid \Sigma_k(F)$, ist $(F \cap \mathfrak{N})_p$ die F_p -Maximalordnung, also gilt speziell $p \nmid \Lambda(F \cap \mathfrak{N})$.
 Falls $p \nmid \Sigma_k(F)$, enthält $(F \cap \mathfrak{N})_p$ nach Lemma 4.7.(i) eine zu \mathfrak{o}_p isomorphe Ordnung.

- (ii) Falls $p \mid \Sigma_k(F)$, gilt $p \nmid \Lambda(\mathfrak{G})$, also ist \mathfrak{G}_p die F_p -Maximalordnung, und für jede M -Maximalordnung \mathfrak{N} gilt $\mathfrak{G}_p = (F \cap \mathfrak{N})_p$.
Falls $p \nmid \Sigma_k(F)$, sei \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{G}_p = (F \cap \mathfrak{N})_p$, siehe Satz 4.8. Wir wählen \mathfrak{N} so, dass dies für alle $p \mid \Lambda(\mathfrak{G})$ gilt, und dass $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{N}_p$ für $p \nmid \Lambda(\mathfrak{G})$.
- (iii) Falls $p \mid \Sigma_k(F)$, ist $(F \cap \mathfrak{N})_p = \mathfrak{F}_p$ die F_p -Maximalordnung, und es gilt $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_p$ für jede M -Maximalordnung \mathfrak{M} , also ist $[\mathfrak{F}_p : (F \cap \mathfrak{N})_p] = [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})_p] = 1$.
Falls $p \nmid \Sigma_k(F)$, gibt es nach Lemma 4.7.(ii) genau eine M_p -Maximalordnung \mathfrak{M}_p mit $\mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_p$ und $[\mathfrak{F}_p : (F_p \cap \mathfrak{N}_p)] = [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{N}_p)]$.
 \mathfrak{M} setzt sich eindeutig aus den lokalen Komponenten zusammen. Die Abbildung $\mathfrak{F}/(F \cap \mathfrak{N}) \rightarrow \mathfrak{M}/(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$ ist Isomorphismus, da für alle $p \neq \infty$ ein Isomorphismus.
- (iv) Seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ zwei F -Maximalordnungen mit $F \cap \mathfrak{N} \subset \mathfrak{F}$ und $F \cap \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{F}'$.
Nach (iii) gibt es M -Maximalordnungen $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ mit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{M}'$ sowie mit $\Lambda(F \cap \mathfrak{N}) = \Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$ und $\Lambda(F \cap \mathfrak{N}') = \Lambda(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}')$. Mit Lemma 5.4.(ii) folgt: $\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') \Lambda(F \cap \mathfrak{N}) \Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$ und $\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}') \Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') \Lambda(F \cap \mathfrak{N}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$, und miteinander multipliziert folgt: $\Lambda(F \cap \mathfrak{N}) \Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') \Lambda(F \cap \mathfrak{N}') \Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$.
Es genügt also zu zeigen, dass $\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$.
Die Behauptung folgt sofort durch globale Synthese der folgenden lokalen Resultate.

- Falls F an der Stelle p verzweigt ist und p in k verzweigt oder zerlegt ist, dann ist $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}'_p$, und nach Lemma 4.5.(ii) bzw. Lemma 4.6 gilt $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}'_p$.
- Falls F an der Stelle p verzweigt ist und p in k träge ist, dann ist $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}'_p$, und nach Lemma 4.5.(ii) gilt entweder $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}'_p$ oder $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')_p] = p^2$.
- Falls F an der Stelle p zerfällt, gibt es nach Lemma 2.2.(i) ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Matrizesinheiten in F_p , bezüglich derer $\mathfrak{F}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$, $\mathfrak{F}'_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^{-r} \mathbb{Z}_p \\ p^r \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$.
Also gilt $\mathfrak{M}_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \\ \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$, $\mathfrak{M}'_p = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_p & p^{-r} \mathfrak{o}_p \\ p^r \mathfrak{o}_p & \mathfrak{o}_p \end{pmatrix}$ und $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')_p] = p^{2r}$.
(Falls $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$, ist $[\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')_p] = [\mathfrak{M}_p : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')_p][\mathfrak{M}_{\bar{\mathfrak{p}}} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')_{\bar{\mathfrak{p}}}] = p^{2r}$.)

□

Satz 5.6. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Seien F, F' isomorphe \mathbb{Q} -Quaternionenalgebren, sei M eine gemeinsame Erweiterung von F und F' zur k -Quaternionenalgebra, und seien $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ zwei M -Maximalordnungen.

Dann gibt es ein $f \in \mathbb{N}$ mit $f \mid \Sigma_k(F)$, so dass für alle Stellen p von \mathbb{Q} gilt:

$$\left(\frac{\Lambda(F \cap \mathfrak{N}) f \Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') \Lambda(F' \cap \mathfrak{N}')}{p}, -d \right) = 1.$$

Insbesondere gilt: \mathfrak{N} ist isomorph zu \mathfrak{N}' , falls $\Lambda(F \cap \mathfrak{N}) = \Lambda(F' \cap \mathfrak{N}')$.

Beweis. Ein Isomorphismus: $j : F' \rightarrow F$ ist zu einem Automorphismus von M fortsetzbar.

Nach Lemma 5.4.(iii) gibt es ein $f \in \mathbb{N}$ mit $f \mid \Sigma_k(F)$ und $\left(\frac{f \Lambda(j(\mathfrak{N}') \cap \mathfrak{N}')}{p}, -d \right) = 1$

für alle Stellen p von \mathbb{Q} . Mit $\Lambda(F \cap j(\mathfrak{N}')) = \Lambda(F' \cap \mathfrak{N}')$ folgt daraus die Behauptung,

denn nach Lemma 5.4.(ii) gilt: $\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')\Lambda(\mathfrak{N} \cap j(\mathfrak{N}'))\Lambda(j(\mathfrak{N}') \cap \mathfrak{N}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$,
und nach Lemma 5.5.(iv) gilt: $\Lambda(F \cap \mathfrak{N})\Lambda(\mathfrak{N} \cap j(\mathfrak{N}'))\Lambda(F \cap j(\mathfrak{N}')) \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$. □

Lemma 5.7. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.*

Sei E eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra mit $|\Sigma(E)| = \Sigma_k(E)$, sei M eine Erweiterung von E zur k -Quaternionenalgebra, und sei F eine weitere \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra mit $F \subset M$.

Dann gibt es ein $e \in \mathbb{N}$ mit $e \mid \Sigma_k(E)$, eine E -Maximalordnung \mathfrak{E} und eine F -Maximalordnung \mathfrak{F} , sowie M -Maximalordnungen \mathfrak{N} und \mathfrak{L} mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}$, so dass gilt:

$$\left(\frac{\Sigma(F)e\Lambda(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N})\Sigma(E), -d}{p} \right) = \left(\frac{E}{p} \right) \left(\frac{F}{p} \right) \text{ f\"ur alle Stellen } p \text{ von } \mathbb{Q}.$$

Beweis. Nach Satz 3.4.(iii) gibt es ein $T \in M^\times$ mit $\Phi_E(T) = T^*$, so dass $F = F(E, T)$. O.B.d.A. sei $N(T) \in \mathbb{Z}$ und $S(T) \in 4\mathbb{Z}$.

Falls $S(T)^2 = 4N(T)$, gilt $N(T) \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$. Nach Satz 3.4.(ii) ist F isomorph zu E , also $\Sigma(F) = \Sigma(E)$. Sei $J \in M^\times$ mit $F = JEJ^{-1}$. Seien \mathfrak{E} eine E -Maximalordnung und \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{F} := J\mathfrak{E}J^{-1}$ eine F -Maximalordnung und $\mathfrak{L} := J\mathfrak{N}J^{-1}$ eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}$. Nach Lemma 5.4.(iii) gibt es ein $e \in \mathbb{N}$

mit $e \mid \Sigma_k(E)$ und $\left(\frac{e\Lambda(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}), -d}{p} \right) = 1 = \left(\frac{E}{p} \right) \left(\frac{F}{p} \right)$ f\"ur alle p .

Wir k\"onnen nun also annehmen, dass $S(T)^2 \neq 4N(T)$ gilt. An den Stellen p von \mathbb{Q} mit $p \mid \Sigma_k(E)$ ist $F_p \cap \mathfrak{N}_p$ die F_p -Maximalordnung, hat also die Diskriminante $p^2\mathbb{Z}_p$. Sei $DdN(T) = tg$ mit $t \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathbb{N}$, so dass t teilerfremd zu $\Sigma_k(E)$ ist und alle Primteiler von g auch Teiler von $\Sigma_k(E)$ sind. Nach Lemma 4.9 gibt es eine E -Maximalordnung \mathfrak{E} und eine M -Maximalordnung \mathfrak{N} mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{N}$, so dass an allen endlichen Stellen p von \mathbb{Q} mit $p \nmid \Sigma_k(E)$ gilt: Die F_p -Ordnung $F_p \cap \mathfrak{N}_p$ hat die Diskriminante $D^2d^2N(T)^2\mathbb{Z}_p$.

Dann hat $F \cap \mathfrak{N}$ also die Diskriminante $(DdN(T)\Sigma_k(E)/g)^2\mathbb{Z}$. Andererseits hat $F \cap \mathfrak{N}$ die Diskriminante $(\Sigma(F)\Lambda(F \cap \mathfrak{N}))^2\mathbb{Z}$. Unter Beachtung des Vorzeichens (Satz 3.4.(ii) f\"ur $p = \infty$) gilt also $|D|dN(T)\Sigma(E) = g\Sigma(F)\Lambda(F \cap \mathfrak{N})$. Sei nun \mathfrak{F} eine F -Maximalordnung mit $F \cap \mathfrak{N} \subset \mathfrak{F}$. Nach Satz 5.5.(iii) gibt es eine M -Maximalordnung \mathfrak{L} mit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}$ und $\Lambda(F \cap \mathfrak{N}) = \Lambda(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N})$. Sei $e \in \mathbb{N}$ der quadratfreie Anteil von g . Die Behauptung folgt dann, weil nach Satz 3.4.(ii) gilt: $\left(\frac{N(T), -d}{p} \right) = \left(\frac{E}{p} \right) \left(\frac{F}{p} \right)$ f\"ur alle Stellen p von \mathbb{Q} . □

Satz 5.8. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.*

Seien F, F' zwei \mathbb{Q} -Quaternionenalgebren, sei M eine gemeinsame Erweiterung von F und F' zur k -Quaternionenalgebra, und seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ zwei M -Maximalordnungen.

Dann gibt es ein $f \in \mathbb{N}$ mit $f \mid \Sigma_k(F)$, so dass f\"ur alle Stellen p von \mathbb{Q} gilt:

$$\left(\frac{\Sigma(F)\Lambda(F \cap \mathfrak{M})f\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')\Sigma(F')\Lambda(F' \cap \mathfrak{M}'), -d}{p} \right) = \left(\frac{F}{p} \right) \left(\frac{F'}{p} \right).$$

Beweis. Sei \mathfrak{F}' eine F -Maximalordnung mit $F \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}'$. Nach Satz 5.5.(iii) gibt es eine M -Maximalordnung \mathfrak{L}' mit $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{L}'$ und $\Lambda(F \cap \mathfrak{M}) = \Lambda(\mathfrak{L}' \cap \mathfrak{M})$. Nach Lemma 3.2 gibt es eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra $E \subset M$ mit $|\Sigma(E)| = \Sigma_k(E)$. Seien $e, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{N}$ und \mathfrak{L} wie

in Lemma 5.7. Nach Lemma 5.4.(ii) gilt $\Lambda(\mathcal{L} \cap \mathfrak{N})\Lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}')\Lambda(\mathcal{L}' \cap \mathfrak{M})\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$. Nach Lemma 5.5.(iv) gilt $\Lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}') = \Lambda(F \cap \mathcal{L})\Lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}')\Lambda(F \cap \mathcal{L}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$. Mit Lemma 5.7 folgt $\left(\frac{\Sigma(F)e\Lambda(F \cap \mathfrak{M})\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})\Sigma(E), -d}{p}\right) = \left(\frac{E}{p}\right)\left(\frac{F}{p}\right)$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} . Entsprechend gibt es ein $e' \in \mathbb{N}$ mit $e' \mid \Sigma_k(E)$ und eine E -Maximalordnung \mathcal{E}' , sowie eine M -Maximalordnung \mathfrak{N}' mit $\mathcal{E}' \subset \mathfrak{N}'$, so dass für alle Stellen p von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{\Sigma(F')e'\Lambda(F' \cap \mathfrak{M}')\Lambda(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}')\Sigma(E), -d}{p}\right) = \left(\frac{E}{p}\right)\left(\frac{F'}{p}\right)$. Sei f der quadratfreie Anteil von ee' . Die Behauptung folgt dann durch Multiplikation der beiden Gleichungen, denn nach Lemma 5.5.(iv) gilt $\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}') = \Lambda(E \cap \mathfrak{N})\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')\Lambda(E \cap \mathfrak{N}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$, und mit Lemma 5.4.(ii) folgt daraus $\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})\Lambda(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')\Lambda(\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$. \square

Satz 5.9. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} . Sei $F \subset M_2(k)$ eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, und sei \mathfrak{M} eine $M_2(k)$ -Maximalordnung. Für alle Stellen p von \mathbb{Q} gilt dann $\left(\frac{\Sigma(F)\Lambda(F \cap \mathfrak{M})\Lambda(\mathfrak{M} \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$. Speziell gilt $\left(\frac{\Sigma(F)\Lambda(F \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} .*

Beweis. Sei $F' = M_2(\mathbb{Q})$, sei $M = M_2(k)$, und sei $\mathfrak{M}' = M_2(\mathfrak{o})$. Wegen $F' \cap \mathfrak{M}' = M_2(\mathbb{Z})$ gilt $\Lambda(F' \cap \mathfrak{M}') = 1$. Außerdem gilt $\Sigma(F') = 1$ und $\left(\frac{F'}{p}\right) = 1$ für alle Stellen p von \mathbb{Q} . Die Voraussetzungen von Satz 5.8 sind gegeben, die Behauptung folgt jetzt unmittelbar. \square

6 Die endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen

Definition 6.1.

- (i) *Bezeichne $P : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ die kanonische Projektion. Für Untergruppen $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ mit $\{\pm 1\} \subset \Gamma$ kürzen wir $P\Gamma := P(\Gamma) = \Gamma/\{\pm 1\}$ ab.*
- (ii) *Für einen Ring $R \subset M_2(\mathbb{C})$ mit Eins sei $\Gamma(R) := \{A \in R \mid N(A) = 1\}$*
- (iii) *Für eine endliche Menge $\mathcal{G} \subset PSL_2(\mathbb{C})$ seien $F(\mathcal{G}) \subset M_2(\mathbb{C})$ der von $P^{-1}(\mathcal{G})$ erzeugte \mathbb{Q} -Vektorraum und $\mathfrak{F}(\mathcal{G})$ der von $P^{-1}(\mathcal{G})$ erzeugte \mathbb{Z} -Modul.*

Bemerkung: Speziell ist $P\Gamma(M_2(\mathfrak{o})) = PSL_2(\mathfrak{o})$ eine Bianchi-Gruppe.

Für $2 \leq m \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{D}_m \subset PSL_2(\mathbb{C})$ stets eine (projektive) m -Diedergruppe, und $\mathcal{T} \subset PSL_2(\mathbb{C})$ bezeichne stets eine (projektive) Tetraedergruppe. Dann ist $P^{-1}(\mathcal{D}_m)$ bzw. $P^{-1}(\mathcal{T})$ eine binäre m -Diedergruppe bzw. binäre Tetraedergruppe. \mathcal{D}_3 , \mathcal{T} bzw. \mathcal{D}_2 sind isomorph zur symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_3 , alternierenden Gruppe \mathcal{A}_4 bzw. Kleinschen Vierergruppe \mathcal{V}_4 . Eine Tetraedergruppe \mathcal{T} enthält genau eine 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 , und umgekehrt ist eine 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 Normalteiler in genau einer Tetraedergruppe \mathcal{T} . Wir fassen die bekannten Grundlagen in den Lemmata 6.2 und 6.3 zusammen:

Lemma 6.2. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Sei M eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra oder eine k -Quaternionenalgebra.

Sei $\mathcal{G} \subset P\Gamma(M)$ eine nichtzyklische endliche Gruppe.

Dann ist \mathcal{G} eine 3-Diedergruppe, Tetraedergruppe oder 2-Diedergruppe.

Beweis. Sei \mathcal{G} eine nichttriviale endliche Untergruppe von $P\Gamma(M)$, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung $u > 1$. Dann ist $P^{-1}(\mathcal{U})$ zyklisch und hat die Ordnung $2u$. Sei U ein erzeugendes Element von $P^{-1}(\mathcal{U})$, und sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $2u$ -te Einheitswurzel. Dann ist $S(U) = \zeta + \bar{\zeta} \in \mathfrak{o} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$. Daher muss $u = 2$ oder $u = 3$ sein. Nach [6, Chapter 4.4] ist $P^{-1}(\mathcal{G})$ also eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 oder 6, oder eine binäre 3-Diedergruppe, Tetraedergruppe oder 2-Diedergruppe. \square

Lemma 6.3. Sei \mathcal{G} eine 3-Diedergruppe \mathcal{D}_3 , Tetraedergruppe \mathcal{T} oder 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 . Dann ist $F(\mathcal{G})$ eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra, $\mathfrak{F}(\mathcal{G})$ ist eine $F(\mathcal{G})$ -Ordnung, und es gilt $P^{-1}(\mathcal{G}) = \Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) = \mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times$. Im Einzelnen gilt:

(i) $\Sigma(F(\mathcal{D}_3)) = -3$ und $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)) = 1$.

(ii) $F(\mathcal{D}_2) = F(\mathcal{T})$, $\Sigma(F(\mathcal{T})) = -2$, $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2) \subset \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) = 1$ und $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) = 2$.

Beweis.

(i) $P^{-1}(\mathcal{D}_3)$ wird von zwei Elementen U, V erzeugt, mit $U^3 = -1$ ($U^2 - U + 1 = 0$), $V^2 = -1$, $VUV^{-1} = U^{-1}$, siehe [6, 4.4.7]. U, V erzeugen über \mathbb{Q} eine Quaternionenalgebra $F(\mathcal{D}_3)$ und über \mathbb{Z} eine $F(\mathcal{D}_3)$ -Ordnung $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)$ mit Diskriminante $9\mathbb{Z}$. Also zerfällt $F(\mathcal{D}_3)$ an allen Stellen $p \neq 3, \infty$ von \mathbb{Q} . Jedes $A \in F(\mathcal{D}_3)$ ist darstellbar als $A = \alpha + \beta U + \gamma V + \delta UV$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$. Falls $A \neq 0$ ist, ist $N(A) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2 > 0$. Daher ist $F(\mathcal{D}_3)$ Divisionsalgebra. Die Anzahl der Verzweigungsstellen von $F(\mathcal{D}_3)$ ist gerade. Also ist $F(\mathcal{D}_3)$ genau an den Stellen 3 und ∞ verzweigt, und $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)$ ist eine $F(\mathcal{D}_3)$ -Maximalordnung.

(ii) Sei $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{T}$. Dann wird $P^{-1}(\mathcal{D}_2)$ von zwei Elementen U, V erzeugt, mit $U^2 = -1$, $V^2 = -1$, $VUV^{-1} = U^{-1}$, siehe [6, 4.4.7]. $P^{-1}(\mathcal{T})$ wird von U und V sowie von einem Element W erzeugt, mit $W^3 = -1$, $UWU^{-1} = VW$ und $WV = UW$. Eine elementare Rechnung zeigt, dass $W = (1 - U - V - UV)/2$ gilt, siehe [6, 4.4.10]. U, V, W erzeugen über \mathbb{Q} eine Quaternionenalgebra $F(\mathcal{T}) = F(\mathcal{D}_2)$ und über \mathbb{Z} eine Ordnung $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$ mit Diskriminante $4\mathbb{Z}$. Also zerfällt $F(\mathcal{T})$ an allen Stellen $p \neq 2, \infty$. Jedes $A \in F(\mathcal{T})$ ist darstellbar als $A = \alpha + \beta U + \gamma V + \delta UV$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$. Falls $A \neq 0$, ist $N(A) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 > 0$. Daher ist $F(\mathcal{T})$ Divisionsalgebra. Die Anzahl der Verzweigungsstellen von $F(\mathcal{T})$ ist gerade. Also ist $F(\mathcal{T})$ genau an den Stellen 2 und ∞ verzweigt, und $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$ ist eine $F(\mathcal{T})$ -Maximalordnung. Man rechnet nun leicht nach, dass $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$ die Diskriminante $16\mathbb{Z}$ hat, also $[\mathfrak{F}(\mathcal{T}) : \mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)] = 2$ gilt.

Wegen $N(F(\mathcal{G})^\times) \subset \mathbb{Q}^+$ ist $\mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times = \Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$ endlich. Wegen $\mathcal{G} \subset P\Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$ folgt mit Lemma 6.2, dass $P\Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) \in \{\mathcal{D}_3, \mathcal{T}, \mathcal{D}_2\}$. Falls $\mathcal{G} \in \{\mathcal{D}_3, \mathcal{T}\}$, ist also $\mathcal{G} = P\Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$. Falls $\mathcal{G} = \mathcal{D}_2$, gilt $W \notin \mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$, also $P\Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) \subsetneq P\Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ und $P\Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) = \mathcal{D}_2$. \square

Satz 6.4. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Seien \mathcal{D}_3 eine 3-Diedergruppe und \mathcal{T} eine Tetraedergruppe. Dann gilt:

- (i) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine k -Quaternionenalgebra M mit $\mathcal{D}_3 \subset \text{PG}(M)$ und bis auf Isomorphie genau eine M -Maximalordnung \mathfrak{M} mit $\mathcal{D}_3 \subset \text{PG}(\mathfrak{M})$. Genau dann gilt $M \cong M_2(k)$, wenn $d \not\equiv 2 \pmod{3}$.
- (ii) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine k -Quaternionenalgebra M mit $\mathcal{T} \subset \text{PG}(M)$ und bis auf Isomorphie genau eine M -Maximalordnung \mathfrak{M} mit $\mathcal{T} \subset \text{PG}(\mathfrak{M})$. Genau dann gilt $M \cong M_2(k)$, wenn $d \not\equiv 7 \pmod{8}$.

Bemerkung: Im Fall $M \cong M_2(k)$ leistet Satz 6.7 die genaue Typisierung von \mathfrak{M} .

Beweis. Sei M eine k -Quaternionenalgebra, und sei $\mathcal{G} = \mathcal{D}_3$ oder $\mathcal{G} = \mathcal{T}$. $\mathcal{G} \subset \text{PG}(M)$ gilt genau dann, wenn M eine Erweiterung von $F(\mathcal{G})$ zur k -Algebra ist, was den Isomorphietyp von M festlegt. Der Isomorphietyp von \mathfrak{M} ist eindeutig nach Satz 5.6. Nach Lemma 3.2.(ii) ist $M \cong M_2(k)$ genau dann, wenn $\Sigma_k(F(\mathcal{G})) = \Sigma_k(M_2(\mathbb{Q})) = 1$ gilt, also wenn die einzige endliche Verzweigungsstelle p von $F(\mathcal{G})$ in k nicht zerlegt ist,

- (i) also wenn 3 in k nicht zerlegt ist, also wenn $-d \not\equiv 1 \pmod{3}$.
- (ii) also wenn 2 in k nicht zerlegt ist, also wenn $-d \not\equiv 1 \pmod{8}$.

□

Wir behandeln in den Kapiteln 6 und 7 die maximalendlichen Untergruppen von $\text{PG}(\mathfrak{M})$. $\mathcal{D}_3 \subset \text{PG}(\mathfrak{M})$ bzw. $\mathcal{T} \subset \text{PG}(\mathfrak{M})$ ist stets eine maximalendliche Untergruppe von $\text{PG}(\mathfrak{M})$. Ist aber $\mathcal{D}_2 \subset \text{PG}(\mathfrak{M})$, so gibt es (genau) eine Tetraedergruppe \mathcal{T} mit $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{T} \subset \text{PG}(M)$, und \mathcal{D}_2 ist genau dann maximalendliche Untergruppe von $\text{PG}(\mathfrak{M})$, wenn $\mathcal{T} \not\subset \text{PG}(\mathfrak{M})$.

Lemma 6.5. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} .

Sei \mathcal{D}_2 eine 2-Diedergruppe, und sei M eine k -Quaternionenalgebra mit $\mathcal{D}_2 \subset \text{PG}(M)$.

- (i) Ist \mathfrak{M} eine M -Maximalordnung, so gilt: Genau dann ist \mathcal{D}_2 eine maximalendliche Untergruppe von $\text{PG}(\mathfrak{M})$, wenn $F(\mathcal{D}_2) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$.
- (ii) Genau dann ist $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$ eine \mathfrak{o} -kompatible M -Ordnung, wenn $d \not\equiv 3 \pmod{4}$.

Beweis. Wir kürzen $F := F(\mathcal{D}_2) = F(\mathcal{T})$ ab.

- (i) Genau dann gilt $\mathcal{D}_2 \subset \text{PG}(\mathfrak{M})$ und $\mathcal{T} \not\subset \text{PG}(\mathfrak{M})$, wenn $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2) \subset \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}(\mathcal{T}) \not\subset \mathfrak{M}$. Wir zeigen die Äquivalenz zu $F \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$ durch Widerspruch. Wir nehmen also $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2) \subsetneq F \cap \mathfrak{M}$ an. Wegen $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) = 2$ ist dann $F \cap \mathfrak{M}$ eine F -Maximalordnung. Da F an der Stelle 2 verzweigt ist, ist $\mathfrak{F}(\mathcal{T})_2$ die F_2 -Maximalordnung und $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$ die einzige F -Maximalordnung, die $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$ enthält. Also ist $F \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, Widerspruch.
- (ii) Nach Satz 4.4.(i) gibt es genau eine F_2 -Ordnung $\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{F}(\mathcal{T})_2$ mit $[\mathfrak{F}(\mathcal{T})_2 : \mathfrak{G}_2] = 2$, also genau eine F -Ordnung $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}(\mathcal{T})$ mit $\Lambda(\mathfrak{G}) = 2$. Nach Satz 5.3 ist $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)$ also genau dann eine \mathfrak{o} -kompatible F -Ordnung, wenn $2 \nmid \Sigma_k(F)$ und $2 \in N_{\text{abs}}(I)$ gilt, also wenn 2 in k nicht zerlegt und nicht träge ist, also wenn $-d \not\equiv 1 \pmod{4}$ gilt.

□

Satz 6.6. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Genau dann gibt es eine k -Quaternionenalgebra M und eine M -Maximalordnung \mathfrak{M} mit einer maximalendlichen 2-Diedergruppe $\mathcal{D}_2 \subset P\Gamma(\mathfrak{M})$, wenn $d \not\equiv 3 \pmod{4}$.

In diesem Fall gilt $M \cong M_2(k)$, und \mathfrak{M} ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis. Die erste Behauptung folgt mit Lemma 6.5.(i), Satz 5.5.(i) und Lemma 6.5.(ii), beziehungsweise umgekehrt mit Lemma 6.5.(ii), Satz 5.5.(ii) und Lemma 6.5.(i).

Die zweite Behauptung folgt wegen $d \not\equiv 7 \pmod{8}$ mit Satz 6.4.(ii) und mit Satz 5.6.

□

Satz 6.7. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Sei \mathfrak{M} eine $M_2(k)$ -Maximalordnung. Dann gilt:

(i) $P\Gamma(\mathfrak{M})$ enthält genau dann eine 3-Diedergruppe \mathcal{D}_3 ,
wenn für alle Stellen $p \neq 3, \infty$ von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{-3\Lambda(\mathfrak{M} \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = 1$.

(ii) $P\Gamma(\mathfrak{M})$ enthält genau dann eine Tetraedergruppe \mathcal{T} ,
wenn für alle Stellen $p \neq 2, \infty$ von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{-2\Lambda(\mathfrak{M} \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = 1$.

(iii) $P\Gamma(\mathfrak{M})$ enthält genau dann eine maximalendliche 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 ,
wenn für alle Stellen $p \neq 2, \infty$ von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{-\Lambda(\mathfrak{M} \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = 1$.

Beweis. Wir kürzen $\lambda := \Lambda(\mathfrak{M} \cap M_2(\mathfrak{o}))$ ab.

(i) Sei $\mathcal{D}_3 \subset P\Gamma(\mathfrak{M})$, oder äquivalent $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3) \subset \mathfrak{M}$, oder äquivalent $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3) = F(\mathcal{D}_3) \cap \mathfrak{M}$.
Nach Satz 5.9 und Lemma 6.3.(i) ist dann $\left(\frac{-3\lambda, -d}{p}\right) = 1$ für alle $p \neq 3, \infty$.

Sei nun umgekehrt $\left(\frac{-3\lambda, -d}{p}\right) = 1$ für alle $p \neq 3, \infty$. Die Anzahl der Stellen p mit $\left(\frac{-3\lambda, -d}{p}\right) = -1$ ist gerade. Also ist $\left(\frac{-3\lambda, -d}{3}\right) = -1$, speziell $d \not\equiv 2 \pmod{3}$.

Sei \mathcal{D}'_3 eine 3-Diedergruppe. Nach Satz 6.4.(i) gibt es eine $M_2(k)$ -Maximalordnung \mathfrak{M}' mit $\mathcal{D}'_3 \subset P\Gamma(\mathfrak{M}')$ oder äquivalent mit $\mathfrak{F}(\mathcal{D}'_3) = F(\mathcal{D}'_3) \cap \mathfrak{M}'$. Dann gilt $\left(\frac{-3\Lambda(\mathfrak{M}' \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = 1$ für alle $p \neq 3, \infty$, also $= \left(\frac{-3\lambda, -d}{p}\right)$ für alle p .

Nach Lemma 5.4.(ii) gilt $\Lambda(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') \lambda \Lambda(M_2(\mathfrak{o}) \cap \mathfrak{M}') \in \mathbb{Q}^{\times(2)}$. Nach Lemma 5.4.(iii) ist also \mathfrak{M} isomorph zu \mathfrak{M}' . Daher gibt es eine 3-Diedergruppe $\mathcal{D}_3 \subset P\Gamma(\mathfrak{M})$.

(ii) folgt mit Lemma 6.3.(ii) und umgekehrt mit Satz 6.4.(ii) wie im Beweis von (i).

(iii) Sei $\mathcal{D}_2 \subset P\Gamma(\mathfrak{M})$ und $\mathcal{T} \not\subset P\Gamma(\mathfrak{M})$. Nach Lemma 6.5.(i), Satz 5.9 und Lemma 6.3.(ii) ist dann $\left(\frac{-\lambda, -d}{p}\right) = 1$ für alle $p \neq 2, \infty$.

Sei nun umgekehrt $\left(\frac{-\lambda, -d}{p}\right) = 1$ für alle $p \neq 2, \infty$. Die Anzahl der Stellen p mit $\left(\frac{-\lambda, -d}{p}\right) = -1$ ist gerade. Also ist $\left(\frac{-\lambda, -d}{2}\right) = -1$ und speziell $d \not\equiv 7 \pmod{8}$. Falls $d \equiv 3 \pmod{8}$, wäre 2 in k träge. Nach Lemma 5.4.(i) gilt $\lambda \in N_{abs}(I)$. Daher wäre der quadratfreie Anteil von λ ungerade, Widerspruch. Also ist $d \not\equiv 3 \pmod{4}$. Nach Satz 6.6 gibt es eine $M_2(k)$ -Maximalordnung \mathfrak{M}' mit $\mathcal{D}'_2 \subset P\Gamma(\mathfrak{M}')$ und $\mathcal{T}' \not\subset P\Gamma(\mathfrak{M}')$. Dann gilt $\left(\frac{-\Lambda(\mathfrak{M}' \cap M_2(\mathfrak{o})), -d}{p}\right) = \left(\frac{-\lambda, -d}{p}\right)$ für alle Stellen p , und nach den Lemmata 5.4.(ii), 5.4.(iii) ist \mathfrak{M}' isomorph zu \mathfrak{M} . □

Satz 6.8. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Hauptordnung \mathfrak{o} . Dann gilt:*

- (i) $PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine 3-Diedergruppe \mathcal{D}_3 , wenn $p \equiv 1 \pmod{3}$ für alle Primteiler $p \neq 3$ von d .
- (ii) $PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine Tetraedergruppe \mathcal{T} , wenn $p \equiv 1$ oder $p \equiv 3 \pmod{8}$ für alle Primteiler $p \neq 2$ von d .
- (iii) $PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine maximalendliche 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 , wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ für alle Primteiler $p \neq 2$ von d .

Beweis. Nach Satz 6.7 gilt:

- (i) $PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine 3-Diedergruppe \mathcal{D}_3 , wenn für alle Stellen $p \neq 3, \infty$ von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{-3, -d}{p}\right) = 1$.
- (ii) $PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine Tetraedergruppe \mathcal{T} , wenn für alle Stellen $p \neq 2, \infty$ von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{-2, -d}{p}\right) = 1$.
- (iii) $PSL_2(\mathfrak{o})$ enthält genau dann eine maximalendliche 2-Diedergruppe \mathcal{D}_2 , wenn für alle $p \neq 2, \infty$ gilt: $\left(\frac{-1, -d}{p}\right) = 1$.

Die Behauptung folgt dann jeweils durch Auswertung der Hilbertsymbole. □

7 Konjugationsklassenzahlen

Definition 7.1. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$. Sei \mathcal{G} eine endliche Gruppe. Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Seien \mathfrak{G} eine F -Ordnung und \mathfrak{M} eine M -Maximalordnung.*

- (i) Bezeichne $\gamma(\mathcal{G}, \mathfrak{N})$ die Anzahl der $P\Gamma(\mathfrak{N})$ -Konjugationsklassen maximalendlicher Untergruppen $\mathcal{G}' \subset P\Gamma(\mathfrak{N})$ vom Isomorphietyp \mathcal{G} .
- (ii) Bezeichne $B(\mathcal{G}, \mathfrak{N})$ die Anzahl der \mathfrak{N}^\times -Konjugationsklassen optimaler Einbettungen $j : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathfrak{N}$, und $B_1(\mathcal{G}, \mathfrak{N})$ die entsprechende Anzahl der $\Gamma(\mathfrak{N})$ -Konjugationsklassen.
- (iii) Für $\mathfrak{D} = \mathcal{G}$ oder $\mathfrak{D} = \mathfrak{N}$ bezeichne $\mathcal{A}(\mathfrak{D})$ die Gruppe der Automorphismen von \mathfrak{D} und $\mathcal{I}(\mathfrak{D}) \subset \mathcal{A}(\mathfrak{D})$ die Untergruppe der Konjugationen mit Elementen aus \mathfrak{D}^\times .

Lemma 7.2. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Diskriminante D . Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Bezeichne t die Anzahl der verschiedenen Primteiler von D , bezeichne r die Anzahl der Primteiler von $\Sigma_k(F)$, und bezeichne S die Anzahl der $f \in \mathbb{N}$ mit $f \mid \Sigma_k(F)$, für die an allen Stellen p von \mathbb{Q} gilt: $\left(\frac{f, -d}{p}\right) = 1$. Dann ist $S = 2^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$ mit $s \leq r$.

Ist \mathfrak{M} eine M -Maximalordnung, dann gilt $[\mathcal{A}(\mathfrak{M}) : \mathcal{I}(\mathfrak{M})] = 2^{t+r+s-1}$.

Bemerkung: $(r - s)$ ist der Rang der $t \times r$ -Matrix (h_{pq}) mit $h_{pq} := 1 - \left(\frac{q, -d}{p}\right)$, wo p die verschiedenen Primteiler von D und q die Primteiler von $\Sigma_k(F)$ durchläuft.

Beweis. Bezeichne R die von den Verzweigungsstellen von M erzeugte \mathfrak{o} -Idealgruppe. Sei $j \in \mathcal{A}(\mathfrak{M})$. Dann gibt es ein $J \in M^\times$ mit $j(A) = JAJ^{-1}$ für alle $A \in \mathfrak{M}$. Dann ist $\mathfrak{J} := \mathfrak{M}J$ ein zweiseitiges \mathfrak{M} -Ideal ist mit $j := N(\mathfrak{J}) \in RI^{(2)} \cap H$. Ist umgekehrt $j \in RI^{(2)} \cap H$, dann gibt es genau ein zweiseitiges \mathfrak{M} -Ideal \mathfrak{J} mit $N(\mathfrak{J}) = j$ und ein $J \in M^\times$ mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}J$. Die Zuordnungsvorschrift $j : A \mapsto JAJ^{-1}$ definiert dann ein $j \in \mathcal{A}(\mathfrak{M})$. Zum Beweis siehe [4, Corollary 2.9.9, Lemma 6.7.5 und Theorem 7.7.7].

Die Zuordnungsvorschrift $j \mapsto J$ bestimmt J eindeutig bis auf einen Faktor $a \in k^\times$. Wegen $N(a) = a^2$ induziert die Zuordnungsvorschrift $j \mapsto j$ also einen surjektiven Homomorphismus $\mathcal{A}(\mathfrak{M}) \rightarrow (RI^{(2)} \cap H)/H^{(2)}$, und mit [4, Lemma 6.7.5] sieht man leicht ein, dass der Kern der Abbildung gleich $\mathcal{I}(\mathfrak{M})$ ist. Also gilt $[\mathcal{A}(\mathfrak{M}) : \mathcal{I}(\mathfrak{M})] = [(RI^{(2)} \cap H) : H^{(2)}]$. Wir formen die Terme in $[\mathcal{A}(\mathfrak{M}) : \mathcal{I}(\mathfrak{M})] = [(RI^{(2)} \cap H) : (I^{(2)} \cap H)][(I^{(2)} \cap H) : H^{(2)}]$ um. Die Einbettung $I^{(2)} \hookrightarrow I^{(2)}H$ induziert einen Isomorphismus $I^{(2)}/(I^{(2)} \cap H) \rightarrow I^{(2)}H/H$. Also gilt $[I^{(2)} : (I^{(2)} \cap H)] = [I^{(2)}H : H]$ und ebenso $[RI^{(2)} : (RI^{(2)} \cap H)] = [RI^{(2)}H : H]$. Daraus folgt $[RI^{(2)} : (RI^{(2)} \cap H)] = [RI^{(2)}H : I^{(2)}H][(I^{(2)} : (I^{(2)} \cap H))]$.

Wegen $[RI^{(2)} : I^{(2)}][(I^{(2)} : (I^{(2)} \cap H))] = [RI^{(2)} : (RI^{(2)} \cap H)][(RI^{(2)} \cap H) : (I^{(2)} \cap H)]$ gilt also $[(RI^{(2)} \cap H) : (I^{(2)} \cap H)] = [RI^{(2)} : I^{(2)}][RI^{(2)}H : I^{(2)}H]^{-1} = 2^{2r}[RI^{(2)}H : I^{(2)}H]^{-1}$.

Für die Umformung des Terms $[(I^{(2)} \cap H) : H^{(2)}]$ bemerken wir, dass die Zuordnungsvorschrift $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^2$ für $\mathfrak{a} \in I$ einen Isomorphismus $I/H \rightarrow I^{(2)}/H^{(2)}$ induziert. Also gilt $[I : H] = [I^{(2)} : H^{(2)}]$ und $[I : I^{(2)}H][I^{(2)}H : H] = [I^{(2)} : (I^{(2)} \cap H)][(I^{(2)} \cap H) : H^{(2)}]$.

Wegen $[I^{(2)} : (I^{(2)} \cap H)] = [I^{(2)}H : H]$ gilt also $[(I^{(2)} \cap H) : H^{(2)}] = [I : I^{(2)}H] = 2^{t-1}$.

Wir müssen jetzt also noch zeigen, dass $2^r = S[RI^{(2)}H : I^{(2)}H]$ gilt.

Wir wählen ein ganzes $\mathfrak{r} \in I$ mit $N_{abs}(\mathfrak{r}) = \Sigma_k(F)$. Sei \mathcal{R} die Menge der ganzen $\mathfrak{a} \in I$ mit $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{r}$. Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in \mathcal{R}$ bezeichne $ggT(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in I$ den größten gemeinsamen Teiler. Die Verknüpfungsvorschrift $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}' := \mathfrak{a}\mathfrak{a}'ggT(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')^{-2}$ definiert eine Gruppenstruktur

auf \mathcal{R} , und die Einbettung $\mathcal{R} \hookrightarrow RI^{(2)}H$ erzeugt einen surjektiven Homomorphismus $\mathcal{R} \rightarrow RI^{(2)}H/I^{(2)}H$, denn für alle Primteiler $\mathfrak{p} \in I$ von $\Sigma_k(F)$ gilt $\mathfrak{p}^2 \in I^{(2)}$ und $\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}} \in H$. \mathcal{R} enthält 2^r Elemente. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{R} \cap I^{(2)}H$ genau S Elemente enthält. Die Zuordnungsvorschrift $\mathfrak{f} \mapsto N_{abs}(\mathfrak{f})$ induziert eine Bijektion zwischen \mathcal{R} und der Menge der $f \in \mathbb{N}$ mit $f \mid \Sigma_k(F)$. Nach [1, Kapitel III, § 8, Sätze 6, 7 und Kapitel I, § 7, Satz 1] gilt $\mathfrak{f} \in I^{(2)}H$ genau dann, wenn $\left(\frac{N_{abs}(\mathfrak{f}), -d}{p}\right) = 1$ an allen Stellen p von \mathbb{Q} .

□

Satz 7.3. *Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.*

Seien F eine \mathbb{Q} -Quaternionenalgebra und M eine Erweiterung von F zur k -Quaternionenalgebra. Seien \mathfrak{G} eine F -Ordnung und \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{N}$. Bezeichne $C(\mathfrak{G})$ die Anzahl der M -Maximalordnungen \mathfrak{N}' mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{N}'$. Dann gilt:

(i) *$C(\mathfrak{G})$ ist das Produkt der in Satz 4.8 angegebenen $C(\mathfrak{G}_p)$, wobei p die Primteiler von $\Lambda(\mathfrak{G})$ mitsamt der in k trügenden Verzweigungsstellen von F durchläuft. Ist \mathfrak{L} eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{L}$, dann ist \mathfrak{L} isomorph zu \mathfrak{N} .*

(ii) $B(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) = C(\mathfrak{G})[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})]$

(iii) $B_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) = 2B(\mathfrak{G}, \mathfrak{N})$

Beweis.

(i) klar, bzw. siehe Satz 5.6.

(ii) Ist \mathfrak{L} eine M -Maximalordnung mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{L}$, so gibt es einen Automorphismus j von M mit $\mathfrak{N} = j(\mathfrak{L})$. Dann gilt $j(\mathfrak{G}) = j(F) \cap \mathfrak{N}$. Für jede M -Maximalordnung \mathfrak{L} mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{L}$ wählen wir einen Automorphismus $j_{\mathfrak{L}}$ von M mit $\mathfrak{N} = j_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{L})$.

Eine Einbettung $j : \mathfrak{G} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ mit $j(\mathfrak{G}) = j(F) \cap \mathfrak{N}$ ist zu einem Automorphismus von M fortsetzbar. Mit $\mathfrak{L} := j^{-1}(\mathfrak{N})$ gilt $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{L}$ und $a(j) := j \circ j_{\mathfrak{L}}^{-1} \in \mathcal{A}(\mathfrak{N})$.

Die Abbildung mit Zuordnungsvorschrift $j \mapsto (\mathfrak{L}, a(j))$ ist injektiv. Sind umgekehrt eine M -Maximalordnung \mathfrak{L} mit $\mathfrak{G} = F \cap \mathfrak{L}$ und ein $a \in \mathcal{A}(\mathfrak{N})$ gegeben, dann ist $j := a \circ j_{\mathfrak{L}}$ ein Automorphismus von M , und seine Einschränkung auf \mathfrak{G} induziert eine Einbettung $j : \mathfrak{G} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ mit $j(\mathfrak{G}) = j(F) \cap \mathfrak{N}$.

Zwei Einbettungen $j, j' : \mathfrak{G} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ mit $j(\mathfrak{G}) = j(F) \cap \mathfrak{N}$ und $j'(\mathfrak{G}) = j'(F) \cap \mathfrak{N}$ sind genau dann \mathfrak{N}^\times -konjugiert, wenn $j' = a \circ j$ für ein $a \in \mathcal{I}(\mathfrak{N})$, also genau dann, wenn $j'^{-1}(\mathfrak{N}) = j^{-1}(\mathfrak{N})$ und $a(j') \circ a(j)^{-1} \in \mathcal{I}(\mathfrak{N})$. Damit folgt die Behauptung.

(iii) Sei $\mathcal{I}_1(\mathfrak{N})$ die Gruppe der Konjugationen von \mathfrak{N} mit Elementen aus $\Gamma(\mathfrak{N})$. Wie in (ii) folgt $B_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}) = C(\mathfrak{G})[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}_1(\mathfrak{N})]$. Also ist zu zeigen: $[\mathcal{I}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}_1(\mathfrak{N})] = 2$.

Ist $a \in \mathcal{I}(\mathfrak{N})$, so gibt es ein $X \in \mathfrak{N}^\times$ mit $a(A) = XAX^{-1}$ für alle $A \in \mathfrak{N}$. Die Zuordnungsvorschrift $a \mapsto X$ induziert Isomorphismen $\mathcal{I}(\mathfrak{N}) \rightarrow \mathfrak{N}^\times/\mathfrak{o}^\times$ und $\mathcal{I}_1(\mathfrak{N}) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{N})/\{\pm 1\}$. Nach [4, Theorem 11.6.1] gilt $N(\mathfrak{N}^\times) = \mathfrak{o}^\times$, also induziert die Norm eine exakte Sequenz $\{1\} \rightarrow \Gamma(\mathfrak{N})/\{\pm 1\} \rightarrow \mathfrak{N}^\times/\mathfrak{o}^\times \rightarrow \mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^{\times(2)} \rightarrow \{1\}$.

□

Lemma 7.4. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$.

Sei M eine k -Quaternionenalgebra, und sei \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung.

Sei $\mathcal{G} \subset P\Gamma(\mathfrak{N})$ eine nichtzyklische maximalendliche Untergruppe.

- (i) Dann ist $\gamma(\mathcal{G}, \mathfrak{N}) = B_1(\mathfrak{F}(\mathcal{G}), \mathfrak{N})[\mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) : \mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))]^{-1}$
- (ii) Ist \mathcal{G} eine 3-Diedergruppe oder Tetraedergruppe, dann ist $[\mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) : \mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))] = 2$.
Ist \mathcal{G} eine 2-Diedergruppe, dann ist $[\mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) : \mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))] = 6$.

Beweis. Nach Lemma 6.3 gilt $\mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times = \Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) = P^{-1}(\mathcal{G})$.

- (i) Wegen $P^{-1}(\mathcal{G}) = \mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times$ induziert die Zuordnungsvorschrift $\mathcal{G}' \mapsto \mathfrak{F}(\mathcal{G}')$ eine Bijektion zwischen den maximalendlichen Untergruppen $\mathcal{G}' \subset P\Gamma(\mathfrak{N})$ vom Isomorphietyp \mathcal{G} und den optimal eingebetteten Ordnungen $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{N}$ vom Isomorphietyp $\mathfrak{F}(\mathcal{G})$. Zwei solche Gruppen \mathcal{G}' , \mathcal{G}'' sind genau dann $P\Gamma(\mathfrak{N})$ -konjugiert, wenn $P^{-1}(\mathcal{G}')$ und $P^{-1}(\mathcal{G}'')$ $\Gamma(\mathfrak{N})$ -konjugiert sind, also wenn $\mathfrak{F}(\mathcal{G}')$ und $\mathfrak{F}(\mathcal{G}'')$ $\Gamma(\mathfrak{N})$ -konjugiert sind.

Also ist $\gamma(\mathcal{G}, \mathfrak{N}) = B(\mathfrak{F}(\mathcal{G}), \mathfrak{N})[\mathcal{A}'(\mathcal{G}) : \mathcal{I}'(\mathcal{G})]^{-1}$, wo $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ die Gruppe der Einbettungen $j : \mathfrak{F}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathfrak{N}$ mit $j(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) = \mathfrak{F}(\mathcal{G})$ ist, und $\mathcal{I}'(\mathcal{G})$ die Untergruppe der $j \in \mathcal{A}'(\mathcal{G})$, die durch Konjugation mit einem Element aus $\Gamma(\mathfrak{N})$ erzeugt werden.

Offenbar gilt $\mathcal{A}'(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$ und $\mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) \subset \mathcal{I}'(\mathcal{G})$. Ein $j \in \mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$ induziert genau einen Automorphismus von M mit $j(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) = \mathfrak{F}(\mathcal{G})$, also gilt $\mathcal{A}'(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$. Falls $J \in \Gamma(\mathfrak{N})$ mit $J\mathfrak{F}(\mathcal{G})J^{-1} = \mathfrak{F}(\mathcal{G})$, so ist wegen $P^{-1}(\mathcal{G}) = \Gamma(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$ auch $JP^{-1}(\mathcal{G})J^{-1} = P^{-1}(\mathcal{G})$. Weil $P^{-1}(\mathcal{G}) \subset \Gamma(\mathfrak{N})$ maximalendlich, also sein eigener Normalisator in $\Gamma(\mathfrak{N})$ ist, folgt $J \in P^{-1}(\mathcal{G}) = \mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times$. Daher gilt $\mathcal{I}'(\mathcal{G}) = \mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$.

- (ii) $\mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times$ hat das Zentrum $\{\pm 1\}$, also ist $\mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{G})) \cong \mathfrak{F}(\mathcal{G})^\times / \{\pm 1\} \cong \mathcal{G}$.

$\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)^\times = P^{-1}(\mathcal{D}_3)$ wird erzeugt von U, V wie im Beweis von Lemma 6.3.(i).

$j \in \mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3))$ ist durch $j(U) \in \{U, U^{-1}\}$, $j(V) \in \{\pm V, \pm UV, \pm U^{-1}V\}$ definierbar.

$\mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3))$ enthält also 12 Elemente, und $\mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)) \cong \mathcal{D}_3 \cong \mathcal{S}_3$ enthält 6 Elemente.

$\mathfrak{F}(\mathcal{T})^\times = P^{-1}(\mathcal{T})$ wird erzeugt von U, V, W wie im Beweis von Lemma 6.3.(ii).

$j \in \mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{T}))$ ist durch $j(U)$ und $j(V)$ definierbar. Dafür gibt es 6×4 Möglichkeiten.

$\mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{T}))$ enthält also 24 Elemente, und $\mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) \cong \mathcal{T} \cong \mathcal{A}_4$ enthält 12 Elemente.

$\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)^\times = P^{-1}(\mathcal{D}_2)$ wird erzeugt von U, V wie im Beweis von Lemma 6.3.(ii).

$j \in \mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2))$ ist durch $j(U)$ und $j(V)$ definierbar. Dafür gibt es 6×4 Möglichkeiten.

$\mathcal{A}(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2))$ enthält also 24 Elemente, und $\mathcal{I}(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) \cong \mathcal{D}_2 \cong \mathcal{V}_4$ enthält 4 Elemente.

□

Satz 7.5. Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, und sei $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ mit Diskriminante D .

Sei M eine k -Quaternionenalgebra, und sei \mathfrak{N} eine M -Maximalordnung.

- (i) Sei $\mathcal{D}_3 \subset P\Gamma(\mathfrak{N})$ eine 3-Diedergruppe und bezeichne t die Anzahl der verschiedenen Primteiler $p \neq 3$ von D .
 - Falls $d \not\equiv 2 \pmod{3}$, gilt $M \cong M_2(k)$ und $\gamma(\mathcal{D}_3, \mathfrak{N}) = 2^t$.

- Falls $d \equiv 2 \pmod{3}$, ist M Divisionsalgebra und es gilt:
 - $\gamma(\mathcal{D}_3, \mathfrak{N}) = 2^t$, falls d einen Primteiler $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$ hat
 - $\gamma(\mathcal{D}_3, \mathfrak{N}) = 2^{t+1}$, falls $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$ für alle Primteiler $p \neq 2$ von d

(ii) Sei $\mathcal{T} \subset P\Gamma(\mathfrak{N})$ eine Tetraedergruppe und bezeichne t die Anzahl der Primteiler $p \neq 2$ von d .

- Falls $d \not\equiv 7 \pmod{8}$, gilt $M \cong M_2(k)$ und $\gamma(\mathcal{T}, \mathfrak{N}) = 2^t$.
- Falls $d \equiv 7 \pmod{8}$, ist M Divisionsalgebra und es gilt
 - $\gamma(\mathcal{T}, \mathfrak{N}) = 2^t$, falls d einen Primteiler $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ hat
 - $\gamma(\mathcal{T}, \mathfrak{N}) = 2^{t+1}$, falls $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ für alle Primteiler p von d

(iii) Sei $\mathcal{D}_2 \subset P\Gamma(\mathfrak{N})$ eine maximalendliche 2-Diedergruppe und bezeichne t die Anzahl der Primteiler $p \neq 2$ von d . Dann gilt $d \not\equiv 3 \pmod{4}$ und $M \cong M_2(k)$, sowie $\gamma(\mathcal{D}_2, \mathfrak{N}) = 2^t$.

Beweis. Wir berechnen $\gamma(\mathcal{G}, \mathfrak{N})$ mit Lemma 7.4 mithilfe von Satz 7.3. Zur Berechnung der Faktoren $C(\mathfrak{F}(\mathcal{G}))$ und $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})]$ greifen wir auf Satz 4.8 und Lemma 7.2 zurück.

- (i) $\gamma(\mathcal{D}_3, \mathfrak{N}) = C(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3))[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})]$. Es ist $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)) = 1$ und $F(\mathcal{D}_3)_3 \not\cong M_2(\mathbb{Q}_3)$. Falls $d \equiv 1 \pmod{3}$, ist 3 träge in k , also $C(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)) = 2$. Sonst ist $C(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)) = 1$. Falls $d \not\equiv 2 \pmod{3}$, ist $\Sigma_k(F(\mathcal{D}_3)) = 1$. Wegen der abweichenden Definition von t gilt $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^{t-1}$, falls $d \equiv 1 \pmod{3}$, und $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^t$, falls $3 \mid d$. Falls $d \equiv 2 \pmod{3}$, ist $\Sigma_k(F(\mathcal{D}_3)) = 3$. Gilt in diesem Fall $\left(\frac{3, -d}{p}\right) = 1$ an allen Stellen p von \mathbb{Q} , dann ist $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^{t+1}$, sonst ist $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^t$. Die Auswertung der Hilbertsymbole liefert hier: $\left(\frac{3, -d}{p}\right) = 1$ an allen Stellen p von \mathbb{Q} ist äquivalent zu $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$ für alle Primteiler $p \neq 2$ von d .
- (ii) $\gamma(\mathcal{T}, \mathfrak{N}) = C(\mathfrak{F}(\mathcal{T}))[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})]$. Es ist $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) = 1$ und $F(\mathcal{T})_2 \not\cong M_2(\mathbb{Q}_2)$. Falls $d \equiv 3 \pmod{8}$, ist 2 träge in k , also $C(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) = 2$. Sonst ist $C(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) = 1$. Falls $d \not\equiv 7 \pmod{8}$, ist $\Sigma_k(F(\mathcal{T})) = 1$. Wegen der abweichenden Definition von t gilt $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^{t-1}$, falls $d \equiv 3 \pmod{8}$, und $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^t$, falls $2 \mid d$. Falls $d \equiv 7 \pmod{8}$, ist $\Sigma_k(F(\mathcal{T})) = 2$. Gilt in diesem Fall $\left(\frac{2, -d}{p}\right) = 1$ an allen Stellen p von \mathbb{Q} , dann ist $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^{t+1}$, sonst ist $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^t$. Die Auswertung der Hilbertsymbole liefert hier: $\left(\frac{2, -d}{p}\right) = 1$ an allen Stellen p von \mathbb{Q} ist äquivalent zu $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ für alle Primteiler p von d .
- (iii) $\gamma(\mathcal{D}_2, \mathfrak{N}) = C(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2))[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})]/3$. Es ist $\Lambda(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) = 2$ und $F(\mathcal{D}_2)_2 \not\cong M_2(\mathbb{Q}_2)$. Nach Satz 6.6 ist $d \not\equiv 3 \pmod{4}$, also ist 2 verzweigt in k , also gilt $C(\mathfrak{F}(\mathcal{D}_2)) = 3$ und $\Sigma_k(F(\mathcal{D}_2)) = 1$. Mit der abweichenden Definition von t gilt $[\mathcal{A}(\mathfrak{N}) : \mathcal{I}(\mathfrak{N})] = 2^t$.

□

Literatur

- [1] Senon I. Borewicz und Igor R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Aus dem Russischen übersetzt von Helmut Koch. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 32, Birkhäuser Verlag, Basel, 1966. MR0195802 (33 #4000)
- [2] Martin Eichler, *Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren*, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127–151 (1956). MR0080767 (18,297c)
- [3] Norbert Krämer, *Die Konjugationsklassenanzahlen der endlichen Untergruppen in der Norm-Eins-Gruppe von Maximalordnungen in Quaternionenalgebren*, Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Universität Bonn, 1980. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00628809/>.
- [4] Colin Maclachlan and Alan W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate texts in mathematics. 219, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [5] Alexander D. Rahm, *Accessing the cohomology of discrete groups above their virtual cohomological dimension*, Journal of Algebra **404** (2014), no. C, 152–175. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.01.025, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00618167>
- [6] Tonny A. Springer, *Invariant theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585, Springer-Verlag, Berlin, 1977. MR0447428 (56 #5740)

E-Mail: kraemer_norbert@t-online.de