



**HAL**  
open science

## Cohomologie $L^p$ en degré 1 des espaces homogènes

Pierre Pansu

► **To cite this version:**

Pierre Pansu. Cohomologie  $L^p$  en degré 1 des espaces homogènes. *Potential Analysis*, 2007, 27, pp.151-165. hal-00720372

**HAL Id: hal-00720372**

**<https://hal.science/hal-00720372v1>**

Submitted on 24 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Cohomologie $L^p$ en degré 1 des espaces homogènes\*

Pierre Pansu<sup>1,2</sup> †

24 juillet 2012

RESUME. On calcule la cohomologie  $L^p$  en degré 1 des espaces homogènes riemanniens. Notamment, on montre que la cohomologie réduite est non nulle si et seulement si l'espace est quasiisométrique à un espace homogène à courbure sectionnelle strictement négative.

ABSTRACT. The  $L^p$ -cohomology in degree 1 of Riemannian homogeneous spaces is computed. It turns out that reduced cohomology does not vanish exactly for spaces quasiisometric to negatively curved homogeneous spaces.

## 1 Introduction

L'objet de ce papier est de calculer dans des exemples, en employant des outils d'analyse, un invariant d'inspiration topologique, utile en théorie géométrique des groupes, la cohomologie  $L^p$  en degré 1.

### 1.1 Cohomologie $L^p$

**Définition 1** Soit  $p \geq 1$ . La cohomologie  $L^p$  en degré 1 d'une variété riemannienne  $M$ , notée  $H^{1,p}(M)$ , est le quotient de l'espace des 1-formes fermées  $L^p$  par le sous-espace des différentielles des fonctions  $L^p$  à gradient  $L^p$ . Autrement dit,  $H^{1,p}(M) = 0$  si et seulement si toute fonction sur  $M$  dont le gradient est  $L^p$  est elle-même  $L^p$  à une constante additive près. Les classes des 1-formes qui sont limites  $L^p$  de différentielles de fonctions  $L^p$  forment un sous-espace de  $H^{1,p}(M)$  appelé torsion et noté  $T^{1,p}(M)$ . Le quotient  $H^{1,p}(M)/T^{1,p}(M) = R^{1,p}(M)$  (plus grand quotient séparé de  $H^{1,p}(M)$ ) s'appelle la cohomologie  $L^p$  réduite.

Lorsque  $M$  est compacte,  $H^{1,p}(M)$  est simplement le premier espace de cohomologie de de Rham de  $M$ . Dans cet article, on calcule  $H^{1,p}(M)$  lorsque  $M$  est homogène non compacte. Voici deux cas extrêmes, classiques.

**Exemple.** La droite réelle. Dans ce cas,  $R^{1,p}(M) = 0$  et  $T^{1,p}(M) \neq 0$ . En effet, il existe des fonctions  $L^p$  sur  $\mathbf{R}$  dont les primitives ne sont pas  $L^p$ , mais toute fonction  $L^p$  est limite  $L^p$  de fonctions à support compact, d'intégrale nulle, qui admettent une primitive à support compact (donc  $L^p$ ).

**Exemple.** Le plan hyperbolique. Dans ce cas,  $T^{1,p}(M) = 0$  et  $R^{1,p}(M) \neq 0$ . L'annulation de la torsion résulte de l'inégalité isopérimétrique linéaire : l'aire d'un domaine du plan hyperbolique est inférieure à la longueur de son bord. Lorsque  $p = 2$ , la cohomologie réduite est représentée par des 1-formes harmoniques  $L^2$ . Leurs primitives possèdent des valeurs au bord, des fonctions sur le cercle qui appartiennent à l'espace de Sobolev  $H^{1/2}$ . Plus généralement, pour tout  $p > 1$ ,  $R^{1,p}(M)$  est isomorphe à l'espace de Besov  $B_{1/p}^{p,p}$  du cercle, quotienté par les fonctions constantes, voir [T].

---

\*Mots clé : Cohomologie  $L^p$ , courbure négative, espace homogène, espace de Besov. Keywords :  $L^p$ -cohomology, negative curvature, homogeneous space, Besov space. Mathematics Subject Classification : 43A15, 43A80, 46E35, 53C20, 53C30, 58A14.

†<sup>1</sup> Univ Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay, F-91405 ;

<sup>2</sup> CNRS, Orsay, F-91405.

La droite réelle illustre le cas particulier des espaces homogènes *fermés à l'infini*, i.e. pour lesquels l'inégalité isopérimétrique linéaire est en défaut, voir Définition 9. Ces espaces ont été caractérisés par H. Hoke, [Ho]. Le plan hyperbolique illustre une autre famille particulière, celle des espaces homogènes à courbure sectionnelle négative. Ces espaces ont été caractérisés par E. Heintze, [He]. Le résultat principal de cet article est le fait que dans le cas général, i.e. avec pour seules exceptions ces deux familles, la cohomologie  $L^p$  en degré 1 est nulle. En particulier, les espaces homogènes possédant des fonctions harmoniques non constantes dont le gradient est  $L^p$  sont rares.

## 1.2 Le résultat

Remarque que l'espace  $H^{1,p}(M)$  ne change pas si on change de métrique riemannienne sur  $M$ , pourvu qu'elle reste bornée par rapport à la métrique initiale (plus généralement,  $H^{1,p}(M)$  est un invariant de quasiisométrie, voir au paragraphe 2.1). Par conséquent, si  $M$  est homogène,  $H^{1,p}(M)$  ne change pas si on change de métrique riemannienne sur  $M$ , pourvu qu'elle reste invariante par un groupe cocompact d'isométries. Plus généralement, c'est un invariant de commensurabilité.

**Définition 2** *On dit que deux groupes de Lie connexes  $G$  et  $G'$  sont commensurables s'il sont dans la même classe pour la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes.*

- $G$  est isomorphe à un sous-groupe fermé, connexe et cocompact de  $G'$ .
- $G' = G/K$  est le quotient de  $G$  par un sous-groupe compact distingué.

*On dit que deux espaces homogènes riemanniens  $M$  et  $M'$  sont commensurables si les composantes neutres de leurs groupes d'isométries le sont.*

**Théorème 1** *Soit  $M$  un espace homogène riemannien non compact. Alors la cohomologie  $L^p$  en degré 1 de  $M$  est nulle, sauf si  $M$  est fermé à l'infini ou à courbure négative. Plus précisément,*

1. *ou bien le groupe d'isométries de  $M$  est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble unimodulaire. Dans ce cas, pour tout  $p > 1$ ,  $T^{1,p}(M) \neq 0$ .*
2. *ou bien  $M$  est commensurable à un espace homogène à courbure sectionnelle strictement négative. Dans ce cas,  $T^{1,p}(M) = 0$  pour tout  $p \geq 1$ . De plus, il existe un nombre  $\mathbf{p}(M) \geq 1$  tel que  $H^{1,p}(M) = 0$  si  $p \leq \mathbf{p}(M)$  et  $R^{1,p}(M) \neq 0$  si  $p > \mathbf{p}(M)$ .*
3. *sinon,  $H^{1,p}(M) = 0$  pour tout  $p > 1$ .*

Pour un espace homogène à courbure strictement négative, le nombre  $\mathbf{p}(M)$ , qui sera explicité dans la Proposition 24, peut s'interpréter comme la dimension de Hausdorff du bord à l'infini, voir [P2]. Il vaut au moins 2, sauf pour le plan hyperbolique.

**Corollaire 3** *Soit  $M$  un espace homogène riemannien non compact. Si  $M$  possède des fonctions harmoniques non constantes dont le gradient est  $L^2$ , il est commensurable (et donc quasiisométrique) au plan hyperbolique.*

Dans la classe plus restreinte des espaces symétriques riemanniens, ce résultat est dû à A. Borel, [Bo].

Un résultat récent de R. Tessera [Te] affirme que, pour un groupe de Lie résoluble unimodulaire,  $R^{1,p}(M) = 0$ . Cela permet de compléter le théorème 1 comme suit. *Pour un espace homogène riemannien, on a la trichotomie suivante.*

1. *ou bien, pour tout  $p > 1$ ,  $R^{1,p}(M) = 0$  et  $T^{1,p}(M) \neq 0$ .*
2. *ou bien, pour tout  $p > 1$ ,  $T^{1,p}(M) = 0$ , et il existe un nombre  $\mathbf{p}(M) \geq 1$  tel que  $R^{1,p}(M) \neq 0 \Leftrightarrow p > \mathbf{p}(M)$ .*
3. *ou bien, pour tout  $p > 1$ ,  $H^{1,p}(M) = 0$ .*

### 1.3 Schéma de la preuve

1. Par commensurabilité, on se ramène au cas des groupes de Lie résolubles connexes  $G$  munis de métriques riemanniennes invariantes à gauche.
2. Si  $G$  est unimodulaire, alors, d'après un résultat de H. Hoke [Ho], il est fermé à l'infini, donc, d'après un principe qui remonte à H. Kesten [K], la torsion  $L^p$  est non nulle pour tout  $p \geq 1$ .
3. Si  $G$  n'est pas unimodulaire, on choisit un sous-groupe à un paramètre  $t \mapsto g_t$  qui augmente le volume. En s'inspirant de R. Strichartz, [S], on montre que, pour toute fonction  $u$  sur  $G$  dont le gradient est  $L^p$ , la limite  $u_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(xg_t)$  existe pour presque tout  $x$ , et que  $u \in L^p$  si et seulement si  $u_\infty$  est constante. Autrement dit, l'application  $u \mapsto u_\infty$  induit un isomorphisme de l'espace  $H^{1,p}(G)$  sur le sous-espace, noté  $\mathcal{B}^p$ , des fonctions  $g_t$ -invariantes ayant  $-1$  dérivées dans  $L^p$ , modulo les fonctions constantes. En particulier,  $T^{1,p}(G) = 0$ .
4. On montre que toute fonction de  $\mathcal{B}^p$  est invariante à droite par les éléments de  $G$  qui sont contractés (au sens large) par  $Ad(g_t)$ . Or une fonction de norme  $L^p_{-1}$  finie ne peut-être invariante à gauche par un sous-groupe distingué non compact de  $G$ . On conclut que si  $\mathcal{B}^p \neq \{0\}$ ,  $Ad(a_t)$  dilate dans toutes les directions, i.e. que  $G$  possède des métriques riemanniennes invariantes à gauche à courbure sectionnelle strictement négative, [He].

### 1.4 Questions

1. Du théorème 1, il résulte que, parmi les espaces homogènes riemanniens, la classe des espaces homogènes commensurables à un espace à courbure négative est invariante par quasiisométries. Peut-on le voir de façon plus directe ? Par exemple, Y. de Cornulier conjecture que cette classe contient exactement les espaces homogènes riemanniens qui sont hyperboliques au sens de M. Gromov.
2. D'un résultat de N. Lohoué, [L1] (voir aussi [R]), il résulte que, pour les espaces ouverts à l'infini, le fait que la cohomologie réduite soit non nulle,  $R^{1,p}(M) \neq 0$ , équivaut à l'existence de fonctions harmoniques non constantes dont le gradient est  $L^p$ . Le théorème 1 répond donc à la question de l'existence de fonctions harmoniques non constantes dont le gradient est  $L^p$  sur les espaces homogènes riemanniens ouverts à l'infini. Dans le cas fermé à l'infini, la question reste ouverte.

### 1.5 Remerciements

Je suis reconnaissant à Y. Benoist et à Y. de Cornulier pour leur aide au sujet de la structure des groupes de Lie, ainsi qu'à R. Tessera pour l'intérêt qu'il a porté à ce texte, extrait d'un manuscrit ancien non publié, [P4].

## 2 Réduction aux groupes résolubles

### 2.1 Invariance sous quasiisométrie

Une application  $f : X \rightarrow X'$  entre espaces métriques est une *quasiisométrie* s'il existe des constantes  $L$  et  $D$  telles que tout point de  $X'$  est à distance au plus  $D$  de l'image de  $f$ , et pour tous  $x, y \in X$ ,

$$-D + \frac{1}{L}d^X(x, y) \leq d^{X'}(f(x), f(y)) \leq Ld^X(x, y) + D.$$

**Lemme 4** *Deux espaces homogènes riemanniens connexes commensurables sont quasiisométriques.*

**Preuve.** Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, soit  $H \subset G$  un sous-groupe compact. Montrons que les espaces homogènes  $G$  et  $M = G/H$  sont quasiisométriques.

Choisissons un supplémentaire  $ad_H$ -invariant  $U$  de l'algèbre de Lie  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$  et une structure euclidienne  $ad_H$ -invariante  $g_U$  sur  $U$ . Cela détermine une métrique riemannienne  $G$ -invariante sur  $M$ . Soit  $g_{\mathcal{H}}$  une structure euclidienne sur  $\mathcal{H}$ . La métrique euclidienne  $g_{\mathcal{H}} \oplus g_U$  sur  $\mathcal{G}$  détermine une métrique riemannienne invariante à gauche sur  $G$ , invariante par l'action à droite de  $H$ . Pour cette métrique, l'application  $f : G \mapsto G/H$  est une submersion riemannienne, i.e. isométrique orthogonalement aux fibres. Par conséquent,  $f$  diminue les distances.

Inversement, étant donné un point  $g \in G$ , toute courbe dans  $M = G/K$  d'origine  $f(g)$  a un unique relèvement en une courbe d'origine  $g$  dans  $G$  partout orthogonale aux fibres, et le relèvement prélève la longueur. Par conséquent, la distance entre deux fibres  $f^{-1}(x)$  et  $f^{-1}(x')$  est égale à  $d^M(x, x')$ . Enfin, par invariance à gauche, toutes les fibres sont isométriques de même diamètre  $D$ . Par conséquent, pour tous  $g, g' \in G$ ,  $d^M(f(g), f(g')) \geq d^G(g, g') - D$ . Ceci montre que  $f$  est une quasiisométrie, et  $M$  est quasiisométrique à  $G$ .

Lorsque  $H$  est compact et distingué dans  $G$ , l'action de  $G$  sur  $G/H$  passe au quotient en l'action de  $G' = G/H$  sur lui-même par translation à gauche, donc les métriques  $G$ -invariantes sur  $G/H$  coïncident avec les métriques invariantes à gauche sur  $G'$ . On conclut que  $G$  et  $G'$  sont quasiisométriques.

Soit maintenant  $G$  un groupe de Lie connexe et  $H$  un sous-groupe fermé connexe cocompact de  $G$ . Montrons que  $G$  et  $H$  (munis de métriques riemanniennes invariantes à gauche) sont quasiisométriques.

Montrons d'abord par l'absurde qu'il existe une constante  $D$  telle que  $d^G(g, H) \leq D$  pour tout  $g \in G$ . Sinon, il existe une suite  $g_j$  telle que  $d^G(g_j, H)$  tend vers  $+\infty$ . L'espace des classes à gauche  $H \backslash G$  est lui aussi compact. Il existe donc une suite  $h_j \in H$  telle que la suite  $h_j^{-1}g_j$  converge dans  $G$ . Les distances  $d^G(h_j, g_j) = d^G(h_j^{-1}g_j, 1)$  sont bornées, et  $d^G(g_j, H) \leq d^G(h_j, g_j)$  l'est aussi, contradiction.

Soient  $h, h' \in H$ . Alors  $\delta = d^G(h, h') \leq d^H(h, h')$ . Il reste à montrer l'inégalité inverse. Soit  $\gamma : [0, \delta] \rightarrow G$  une géodésique minimisante de  $h$  à  $h'$ . Pour  $i = 0, \dots, N = [\delta/D]$ , posons  $g_i = \gamma(iD)$ , de sorte que  $d^G(g_i, g_{i+1}) \leq D$  et  $ND \leq \delta \leq (N+1)D$ . Choisissons  $h_i \in H$  tel que  $d^G(h_i, g_i) \leq D$ . Comme  $H$  est fermé dans  $G$ , l'intersection de  $H$  et de la boule de rayon  $3D$  de  $G$  est compacte, donc contenue dans une boule de rayon  $D'$  pour la métrique de  $H$ . Pour tout  $i$ ,  $d^G(h_i^{-1}h_{i+1}, 1) \leq 3D$ , donc  $d^H(h_i^{-1}h_{i+1}, 1) \leq D'$ . Par conséquent,

$$d^H(h, h') \leq \sum d^H(h_i^{-1}h_{i+1}, 1) \leq (N+1)D' \leq \frac{D'}{D}d^G(h, h') + D. \text{ q.e.d.}$$

**Proposition 5** *Soit  $M$  un espace homogène riemannien connexe et non compact. Alors toute forme fermée  $L^p$  sur  $M$  est exacte.*

**Preuve.** Soit  $M$  un espace homogène riemannien connexe et non compact. La composante neutre  $G$  du groupe d'isométries de  $M$  est transitive sur  $M$ . Soit  $\omega$  une forme  $L^p$  fermée non exacte sur  $M$ . Alors il existe une boule  $B$  de  $M$  telle que la restriction de  $\omega$  à  $B$  ne soit pas exacte.

Lorsque  $g$  varie dans  $G$ , les formes  $g^*\omega$  sont deux à deux cohomologues. Par conséquent la classe de cohomologie  $c \in H^k(B, \mathbf{R})$  de la restriction de  $g^*\omega$  à  $B$  est indépendante de  $g \in G$ . Comme  $B$  est compacte, la cohomologie  $L^p$  de  $B$  coïncide avec sa cohomologie de de Rham ordinaire. En particulier, la différentielle extérieure  $d$  agissant sur les formes différentielles  $L^p$  (et à différentielle  $L^p$ ) sur  $B$  a une image fermée, et il existe une constante  $\epsilon > 0$  telle que toute forme fermée représentant la classe  $c$  soit de norme  $L^p$  supérieure à  $\epsilon$ . Par conséquent  $\|\omega\|_{L^p(gB)} = \|g^*\omega\|_{L^p(B)} \geq \epsilon$ . C'est incompatible avec l'hypothèse  $\omega \in L^p(M)$ . q.e.d.

**Corollaire 6**  *$H^{1,p}$ ,  $T^{1,p}$  et  $R^{1,p}$  sont des invariants de commensurabilité pour les espaces homogènes riemanniens connexes non compacts.*

**Preuve.** Il est classique ([G, BP]) que, dans la catégorie des variétés riemanniennes à géométrie bornée, la cohomologie  $L^p$  exacte en degré 1 est un invariant de quasiisométrie (l'énoncé précis se trouve dans [P3]). C'est donc un invariant de commensurabilité. q.e.d.

## 2.2 Réduction aux groupes résolubles

**Lemme 7** *Notons  $T_n$  le groupe des matrices triangulaires réelles de taille  $n$ . Tout espace homogène riemannien connexe est commensurable à un sous-groupe fermé connexe de  $T_n$ , pour un  $n$  assez grand.*

**Preuve.** Soit  $M = \check{G}/\check{H}$  un espace homogène riemannien connexe. Alors les orbites dans  $M$  de l'action de la composante neutre  $G$  de  $\check{G}$  sont ouvertes, donc elles sont fermées. Comme  $M$  est connexe, il n'y en a qu'une, et on peut écrire  $M = G/H$  où  $H = \check{H} \cap G$  est compact. Par définition,  $M$  est commensurable à  $G$ .

Soit  $G = RS$  la décomposition de Levi du groupe  $G$ , où  $R$  est le radical de  $G$  et  $S$  est semi-simple ([B] chap. 3 page 244). Supposons d'abord que le centre de  $S$  est fini. Soit  $S = NAK$  la décomposition d'Iwasawa de  $S$ . Comme le centre de  $S$  est fini, le groupe  $K$  est compact. Alors  $G' = RNA$  est résoluble et connexe,  $G/G' = G/RNA = S/NA$  est compact, donc  $G$  et  $G'$  sont commensurables.

Dans le cas général, une construction supplémentaire permet de se débarrasser du centre de  $S$ . L'image de  $S$  dans le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie de  $R$  est un groupe de Lie semi-simple connexe linéaire, donc son centre est fini. Par conséquent, il existe un sous-groupe abélien libre  $\Gamma$  d'indice fini dans le centre de  $S$  qui agit trivialement sur  $R$ .  $\Gamma$  est donc contenu dans le centre de  $G$ . Posons  $C = \Gamma \otimes \mathbf{R}$  et  $G'' = (G \times C)/\Gamma$  où  $\Gamma$  agit diagonalement par translation. Comme  $G \times C$  est connexe,  $G''$  l'est aussi. Comme  $G''/G$ , homéomorphe à  $C/\Gamma$ , est compact,  $G$  est cocompact dans  $G''$ , donc  $G$  est commensurable à  $G''$ .

La projection sur le premier facteur passe au quotient en  $\pi : G'' \rightarrow \overline{G} =: G/\Gamma$ . Le noyau de  $\pi$  est isomorphe à  $C$  donc connexe. Soit  $\overline{S} = S/\Gamma$  et  $\overline{R} = R/\Gamma \cap R$ . Ces sous-groupes de  $\overline{G}$  engendrent  $\overline{G}$ . Soit  $\overline{S} = NAK$  la décomposition d'Iwasawa de  $\overline{S}$ . A nouveau, comme le centre de  $\overline{S}$  est fini, le groupe  $K$  est compact. Alors  $G' = \pi^{-1}(RNA)$  est résoluble et connexe,  $G''/G' = \overline{G}/\overline{RNA} = \overline{S}/NA$  est compact, donc  $G''$  (et donc  $G$ ) est commensurable à  $G'$ .

D'après le Lemme 2.4 de [C],  $G'$  est isomorphe à un sous-groupe fermé cocompact d'un groupe  $H$  qui possède un sous-groupe fermé connexe cocompact  $T$  qui se plonge proprement dans l'un des groupes  $T_n$ . Autrement dit,  $G'$  est commensurable à l'image de  $T$  dans  $T_n$ , qui est fermée. q.e.d.

## 3 Torsion et inégalité isopérimétrique

**Proposition 8** *Soit  $M$  une variété riemannienne de volume infini. Soit  $p \geq 1$ . La torsion  $T^{1,p}(M)$  est nulle si et seulement si l'inégalité de Sobolev suivante est vraie. Il existe une constante telle que, pour toute fonction  $u \in L^p(M)$  telle que  $du \in L^p(M)$ ,*

$$\| u \|_{L^p} \leq \text{const.} \| du \|_{L^p}.$$

**Preuve.** Notons  $\Omega^{0,p}(M)$  l'ensemble des fonctions  $L^p$  à gradient  $L^p$ , muni de la norme  $\| u \|_{\Omega^{0,p}} = \| u \|_{L^p} + \| du \|_{L^p}$ . Notons  $\Omega^{1,p}(M)$  l'espace des 1-formes  $L^p$  sur  $M$ . Ce sont des espaces de Banach, et  $d : \Omega^{0,p} \rightarrow \Omega^{1,p}$  est borné.

Supposons l'inégalité de Sobolev vraie. Soit  $\alpha$  une 1-forme  $L^p$  dont la classe de cohomologie appartient à  $T^{1,p}(M)$ . Soit  $u_j$  une suite de fonctions  $L^p$  sur  $M$  telle que  $du_j \in L^p$  et  $du_j$  converge vers  $\alpha$  dans  $L^p$ . D'après l'inégalité de Sobolev, la suite  $u_j$  est bornée dans  $L^p$ . Extrayons une sous-suite qui converge faiblement vers  $u_\infty$ . Alors  $u_\infty \in L^p$  et  $du_\infty = \alpha$ , donc la classe de cohomologie  $L^p$  de  $\alpha$  est nulle. On conclut que  $T^{1,p}(M) = 0$ .

Inversement, supposons que  $T^{1,p}(M) = 0$ . Alors  $d\Omega^{0,p}(M)$  est fermé dans  $\Omega^{1,p}(M)$ , donc c'est un espace de Banach. Comme  $M$  est de volume infini, les fonctions constantes ne sont pas  $L^p$ , donc  $d$  est injectif. L'opérateur  $d$  induit  $\bar{d} : \Omega^{0,p}(M) \rightarrow d\Omega^{0,p}(M)$ . C'est une bijection continue entre espaces de Banach, donc un isomorphisme. Par conséquent, il existe une constante telle que pour tout  $u \in \Omega^{0,p}(M)$ ,  $\| u \|_{\Omega^{0,p}} \leq \text{const.} \| du \|_{L^p}$ . q.e.d.

**Définition 9** Une variété riemannienne  $M$  est dite ouverte à l'infini si elle satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire, i.e. si pour toute sous-variété compacte  $\Delta$  de codimension 0, à bord lisse,

$$\text{Vol } \Delta \leq \text{const. Vol } \partial\Delta.$$

Si  $M$  n'est pas ouverte à l'infini, elle est fermée à l'infini.

**Proposition 10** Soit  $M$  une variété riemannienne à géométrie bornée. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $M$  est ouverte à l'infini;
2. pour tout  $p \geq 1$ ,  $T^{1,p}(M) = 0$ ;
3. il existe  $p \geq 1$  tel que  $T^{1,p}(M) = 0$ .

**Preuve.** Lorsque  $p = 2$ , ces équivalences sont essentiellement dues à R. Brooks, [Br]. Elles apparaissent pour la première fois dans le contexte des marches aléatoires sur les groupes, [K].

Il est classique (voir [Ma]) que l'inégalité isopérimétrique  $\text{Vol } \Delta \leq \text{const. Vol } \partial\Delta$  est équivalente à l'inégalité de Sobolev  $L^1$  (avec la même constante) : pour toute fonction  $u$  lisse à support compact sur  $M$ ,  $\|\phi\|_{L^1} \leq \text{const.} \|du\|_{L^1}$ .

L'inégalité de Sobolev  $L^1$ , appliquée à la fonction  $u^p$ , combinée à l'inégalité de Hölder, entraîne l'inégalité de Sobolev  $L^p$  pour  $p \geq 1$ . Ceci prouve que (1)  $\Rightarrow$  (2).

Il reste à montrer que, sous l'hypothèse de géométrie bornée, l'inégalité de Sobolev  $L^p$  pour un  $p > 1$  entraîne l'inégalité de Sobolev  $L^1$ . Par invariance par quasiisométrie, on peut remplacer  $M$  par un graphe  $X$  de valence bornée par  $V$  et dont les arêtes ont toutes même longueur. Les fonctions sur  $M$  deviennent des fonctions sur l'ensemble  $X^0$  des sommets de  $X$  et la norme  $L^p$  de la différentielle devient  $(\sum |u(a) - u(b)|^p)^{1/p}$  où la somme est étendue aux couples de sommets reliés par une arête.

Supposons d'abord que  $u$  ne prend que les valeurs 0 et 1. Alors  $\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^1}^{1/p}$  et  $\|du\|_{L^1} = \|du\|_{L^1}^{1/p}$  donc l'inégalité de Sobolev  $L^p$  entraîne l'inégalité de Sobolev  $L^1$  dans ce cas.

Enfin, on écrit une fonction quelconque comme intégrale de fonctions à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Soit  $u$  une fonction sur  $X^0$ . Quitte à remplacer  $u$  par sa valeur absolue (ce qui ne change pas la norme  $L^1$  et diminue la norme  $L^1$  de la différentielle), on peut supposer que  $u$  est positive ou nulle. On

écrit alors  $u = \int_0^{+\infty} u_t dt$  où  $u_t(x) = 1$  si  $u(x) \geq t$  et  $u_t(x) = 0$  sinon. Alors

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} \|u_t\|_{L^1} dt$$

et

$$\|du\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} \|du_t\|_{L^1} dt,$$

donc l'inégalité de Sobolev  $L^p$  entraîne l'inégalité de Sobolev  $L^1$  en général. q.e.d.

**Proposition 11** (H. Hoke, [Ho]). Soit  $G$  un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Alors  $G$  est fermé à l'infini si et seulement si  $G$  est moyennable (i.e. extension d'un groupe résoluble par un groupe compact) et unimodulaire.

**Corollaire 12** Soit  $G$  un groupe de Lie. Si  $G$  est moyennable unimodulaire, alors pour tout  $p > 1$ ,  $T^{1,p}(G) \neq 0$ . Inversement, s'il existe  $p > 1$  tel que  $T^{1,p}(G) \neq 0$ , alors  $G$  est moyennable unimodulaire.

## 4 Valeur au bord

Soit  $G$  un groupe de Lie non unimodulaire muni d'une métrique invariante à gauche, soit  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie. La forme linéaire  $\xi \mapsto \text{tr} ad_\xi$  sur  $\mathcal{G}$  n'est pas nulle. Choisissons  $\xi_0 \in \mathcal{G}$  tel que  $\tau = \text{tr} ad_{\xi_0} > 0$ . Notons  $\phi_t = R_{\exp(t\xi_0)}$  la translation à droite par  $\exp(t\xi_0)$ . C'est le flot de  $\xi_0$  vu comme champ de vecteurs invariant à gauche sur  $G$ , donc il multiplie les volumes par  $e^{t\tau}$ . Alors, pour toute fonction  $u$  sur  $G$  dont le gradient est  $L^p$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} u \circ \phi_t \right\|_{L^p} &= \| (\xi_0 u) \circ \phi_t \|_{L^p} \\ &= e^{-t\tau/p} \| \xi_0 u \|_{L^p} \\ &\leq \text{const.} e^{-t\tau/p} \| du \|_{L^p}, \end{aligned}$$

où la constante est la norme (constante) de  $\xi_0$ . Comme  $\tau/p > 0$ , l'application  $t \mapsto u \circ \phi_t - u$  converge dans  $L^p(G)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . En particulier,  $u \circ \phi_t$  converge presque partout.

**Définition 13** Soit  $u$  une fonction sur  $G$  dont le gradient est  $L^p$ . On appelle valeur au bord de  $u$ , et on note  $u_\infty$  la limite des translatées  $u \circ R_{\exp(t\xi_0)} = u \circ \phi_t$ , quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Le terme valeur au bord s'inspire du cas de la courbure strictement négative. Lorsque  $G$  possède une métrique riemannienne invariante à gauche à courbure sectionnelle négative, les orbites de  $\xi_0$  convergent en  $-\infty$  vers un même point du bord à l'infini, et en  $+\infty$  vers tous les autres points du bord.

On va montrer qu'une fonction sur  $G$  dont le gradient est  $L^p$  satisfait l'inégalité de Sobolev dès que sa valeur au bord est presque partout nulle. Cette idée est due à R. Strichartz, [S], voir aussi [GKS].

### 4.1 Les espaces $(L^p + dL^p)(G)$ et $d^{-1}dL^p(G)$

Dans cette section, on précise la régularité de la valeur au bord. Soit  $u$  une fonction sur  $G$  dont le gradient est  $L^p$ . Par construction,  $v = u_\infty - u \in L^p$ , donc  $du_\infty$  est la somme d'une 1-forme  $L^p$  et de la différentielle d'une fonction  $L^p$ . Cela suggère la définition suivante.

**Définition 14** Soit  $\alpha$  une 1-forme (à coefficients distributions) sur  $G$ , on pose

$$\| \alpha \|_{(L^p + dL^p)(G)} = \inf \{ \| \beta \|_{L^p} + \| \gamma \|_{L^p} \mid \beta \text{ 1-forme, } \gamma \text{ fonction, } \alpha = \beta + d\gamma \}.$$

On va exprimer cette norme sous une forme plus commode, à l'aide de la définition suivante.

**Définition 15** Soit  $B$  une boule de rayon 1 de  $G$ . Soit  $f$  une fonction sur  $B$ . On pose

$$\| f \|_{d^{-1}dL^p(B)} = \inf_{c \in \mathbf{R}} \| f - c \|_{L^p(B)}.$$

Pour une fonction  $f$  localement  $L^p$  sur  $G$ , on pose

$$\| f \|_{d^{-1}dL^p(G)}^p = \int_G \| f|_{gB} \|_{d^{-1}dL^p(gB)}^p dg.$$

Autrement dit, une fonction est de classe  $d^{-1}dL^p$  si sa dérivée est localement la dérivée d'une fonction  $L^p$ , et si la fonction "meilleure norme  $L^p$  d'une primitive locale" est elle-même  $L^p$  sur  $G$  tout entier.

**Lemme 16** Soit  $w$  une fonction sur  $G$ . Alors  $w$  appartient à  $d^{-1}dL^p(G)$  si et seulement si  $dw$  appartient à  $(L^p + dL^p)(G)$ .

**Preuve.** Si  $f$  est une fonction  $L^p$  sur  $G$ , alors pour toute boule de rayon 1,  $\|f|_B\|_{d^{-1}dL^p(B)} \leq \|f|_B\|_{L^p(B)}$ , d'où, en intégrant sur toutes les boules,  $\|f\|_{d^{-1}dL^p(G)} \leq \|f\|_{L^p}$ .

Soit  $f$  une fonction sur  $G$  dont la différentielle est  $L^p$ . D'après l'inégalité de Poincaré, il existe pour chaque boule  $B$  une constante  $c_{f,B}$  telle que

$$\|f - c_{f,B}\|_{L^p(B)} \leq \text{const.} \|df\|_{L^p(B)}.$$

En intégrant sur toutes les boules de rayon 1, il vient  $\|f\|_{d^{-1}dL^p(G)} \leq \text{const.} \|df\|_{L^p}$ .

Soit  $w$  une fonction telle que  $dw = \beta + d\gamma \in (L^p + dL^p)(G)$ . Alors  $w - \gamma$  a une différentielle  $L^p$ , donc elle appartient à  $d^{-1}dL^p(G)$ , d'où  $w = w - \gamma + \gamma \in d^{-1}dL^p(G)$ .

Réciproquement, si  $w \in d^{-1}dL^p(G)$ , construisons une fonction lisse, qui diffère de  $w$  d'une fonction  $L^p$ , et dont la différentielle est  $L^p$ . Pour cela, il suffit de régulariser  $w$ . Soit  $\psi$  une fonction lisse, positive ou nulle, à support compact dans la boule unité  $B$  de  $G$ , d'intégrale 1. Soit  $u$  le produit de convolution  $u = w \star \psi$ . Alors  $u$  est lisse. Comme, pour toute constante  $c$ ,  $du = (w - c) \star d\psi$  est une combinaison linéaire de valeurs de  $w - c$ , pour tout  $g \in G$ ,

$$\|du\|_{L^p(gB)} \leq \text{const.} \inf_{c \in \mathbf{R}} \|w - c\|_{L^p(gB)} \leq \text{const.} \|dw\|_{d^{-1}dL^p(gB)},$$

d'où, en intégrant par rapport à  $g$ ,  $du \in L^p(G)$ . De même, pour toute constante  $c$ ,  $u - w = (w - c) \star (\psi - \delta)$ , où  $\delta$  est la masse de Dirac à l'origine, donc pour tout  $g \in G$ ,

$$\|u - w\|_{L^p(gB)} \leq \text{const.} \inf_c \|w - c\|_{L^p(gB)} \leq \text{const.} \|dw\|_{d^{-1}dL^p(gB)},$$

d'où  $u - w \in L^p(G)$ . Cela prouve que  $dw \in (L^p + dL^p)(G)$ . q.e.d.

## 4.2 Image de l'application valeur au bord

**Définition 17** Soit  $G$  un groupe de Lie non unimodulaire. Soit  $\xi_0 \in \mathcal{G}$  un champ de vecteurs invariant à gauche de divergence strictement positive. On note

$$\mathcal{B}_{\xi_0}^p = \{w \in d^{-1}dL^p(G) \mid w \circ R_{\exp(t\xi_0)} = w \text{ presque partout, pour tout } t\},$$

**Proposition 18** Soit  $G$  un groupe de Lie non unimodulaire. On choisit un vecteur  $\xi_0 \in \mathcal{G}$  de divergence positive, pour définir des valeurs au bord. Alors l'application  $u \mapsto u_\infty$  passe au quotient en une injection  $H^{1,p}(G) \rightarrow d^{-1}dL^p(G) \text{ mod } \mathbf{R}$ , dont l'image est exactement  $\mathcal{B}_{\xi_0}^p \text{ mod } \mathbf{R}$ , i.e. modulo les constantes additives.

De façon équivalente, l'application  $du \mapsto du_\infty$  passe au quotient en une injection  $H^{1,p}(G) \rightarrow (L^p + dL^p)(G)$ , dont l'image est le sous-espace

$$d\mathcal{B}_{\xi_0}^p = \{\alpha \in (L^p + dL^p)(G) \mid d\alpha = 0 \text{ et } \alpha(\xi_0) = 0 \text{ au sens des distributions}\}.$$

**Preuve.** Les valeurs au bord  $u_\infty$  sont des fonctions  $\phi_t$ -invariantes. Par construction, leur différentielle appartient à  $L^p + dL^p$ . D'après le lemme 16,  $u_\infty \in d^{-1}dL^p$ , donc  $u \in \mathcal{B}_{\xi_0}^p$ .

Si  $u \in L^p$ ,  $\|u \circ \phi_t\|_{L^p} = e^{-t\tau/p} \|u\|_{L^p}$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , donc  $u_\infty = 0$ . Si  $u$  est constante,  $u_\infty$  l'est aussi. Par conséquent, l'opérateur valeur au bord, à constante additive près, passe au quotient. Si  $u_\infty$  est constante, comme  $u - u_\infty \in L^p$ , la classe de cohomologie de  $du$  est nulle. Par conséquent, l'opérateur valeur au bord est injectif.

Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée de  $(L^p + dL^p)(G)$ , telle que  $\alpha(\xi_0) = 0$  au sens des distributions. Par hypothèse, il existe une 1-forme  $L^p$   $\beta$  et une fonction  $L^p$   $\gamma$  telles que  $\alpha = \beta + d\gamma$ . Nécessairement,  $d\beta = 0$ , donc, avec le lemme 5,  $\beta = du$  où la fonction  $u$  a un gradient  $L^p$ . Soit  $w = u + \gamma$ . Alors  $dw = \alpha$ , sa dérivée au sens des distributions le long des orbites de  $\xi_0$  s'annule, donc  $w$  est  $\phi_t$ -invariante. Comme  $\gamma$  est  $L^p$ , les fonctions  $\gamma \circ \phi_t$  tendent vers 0 dans  $L^p$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , donc  $w$  est la valeur au bord de  $u$ . On conclut que l'image de l'opérateur valeur au bord est exactement  $\mathcal{B}_{\xi_0}^p$  modulo les constantes. q.e.d.

### 4.3 Restrictions sur les valeurs au bord

Une métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie  $G$  croît exponentiellement avec des taux différents suivant les directions. Cela entraîne des restrictions sur les fonctions de  $d^{-1}dL^p(G)$  invariantes à droite par un sous-groupe à un paramètre.

**Lemme 19** *Soit  $G$  un groupe de Lie non unimodulaire, soit  $\xi_0 \in \mathcal{G}$  de divergence  $\text{tr } ad_{\xi_0}$  strictement positive. Pour toute fonction  $w \in \mathcal{B}_{\xi_0}^p$ , la différentielle au sens des distributions  $dw$  s'annule sur tous les sous-espaces caractéristiques de  $ad_{\xi_0}$  relatifs à des valeurs propres de parties réelles strictement inférieures à  $\frac{\text{tr } ad_{\xi_0}}{p}$ .*

**Preuve.** On écrit  $w = u + v$  où  $v \in L^p(G)$  et  $du \in L^p$ . Comme  $w$  est  $\phi_t$  invariante,  $w = u \circ \phi_t + v \circ \phi_t$ . Or  $v \circ \phi_t$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,

$$dw = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(u \circ \phi_t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t^* du$$

au sens des distributions.

On voit  $du$  comme une fonction  $G \mapsto \mathcal{G}^*$  et les éléments de  $\mathcal{G}$  comme des champs de vecteurs invariants à gauche. Soit  $\eta \in \mathcal{G} \otimes \mathbf{C}$ . Alors, en tout point de  $G$ ,

$$\langle \phi_t^* du, \eta \rangle = \langle du \circ \phi_t, ad_{\exp(t\xi_0)}(\eta) \rangle$$

Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$  une valeur propre de  $ad_{\xi_0}$ . Supposons que  $\eta \in \ker(ad_{\xi_0} - \lambda I)^\ell \subset \mathcal{G}$  appartient à l'espace caractéristique relatif à  $\lambda$ . Alors

$$\exp(t ad_{\xi_0})(\eta) = e^{t\lambda} P(t),$$

où  $P$  est un polynôme en  $t$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$ . Comme les fonctions  $du \circ \phi_t$  tendent vers 0 exponentiellement vite dans  $L^p$ ,  $\| du \circ \phi_t \|_{L^p} \leq e^{-t \text{tr } ad_{\xi_0}/p}$ , il vient

$$\begin{aligned} \|\langle \phi_t^* du, \eta \rangle\|_{L^p} &= \|e^{t\lambda} \langle du \circ \phi_t, P(t) \rangle\|_{L^p} \\ &\leq e^{t(\Re(\lambda) - \text{tr } ad_{\xi_0}/p)} |P(t)|. \end{aligned}$$

Si  $\Re(\lambda) < \text{tr } ad_{\xi_0}/p$ ,  $\langle \phi_t^* du, \eta \rangle$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , et on conclut que  $\langle dw, \eta \rangle = 0$ . q.e.d.

On aura besoin aussi du cas limite du lemme 19.

**Lemme 20** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. Soit  $\xi \in \mathcal{G}$  un champ de vecteurs invariant à gauche. On suppose que le sous-groupe à un paramètre  $A = \{\exp(t\xi) \mid t \in \mathbf{R}\}$  est fermé dans  $G$ . Soit  $w \in d^{-1}dL^p(G)$  une fonction  $A$ -invariante à droite. Alors la différentielle au sens des distributions  $dw$  s'annule sur les sous-espaces propres de  $ad_{\xi_0}$  relatifs aux valeurs propres de partie réelle égale à  $\frac{\text{tr } ad_{\xi}}{p}$ . En particulier, si  $\text{tr } ad_{\xi} = 0$  et si  $[\xi, \eta] = 0$ , alors  $\langle dw, \eta \rangle = 0$ .*

**Preuve.** Comme  $A$  est fermé dans  $G$ ,  $\phi_t = R_{\exp(t\xi)}$  définit une action propre de  $\mathbf{R}$  sur  $G$ .

Soit  $w \in d^{-1}dL^p(G)$  une fonction  $A$ -invariante à droite. De nouveau, on l'écrit  $w = u + v$  avec  $v \in L^p$  et  $du \in L^p$ . Dans le cas où  $\text{tr } ad_{\xi} = 0$ , il n'est plus vrai que les  $v \circ \phi_t$  tendent vers 0 dans  $L^p$ , mais on peut quand même affirmer qu'il existe une sous-suite  $t_j$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $v \circ \phi_{t_j}$  tend vers 0 au sens des distributions. En effet, dans ce cas,  $\phi_t$  préserve la mesure et agit proprement sur  $G$ . Pour tout compact  $K$  de  $G$ , il existe une sous-suite  $t_j$  tendant vers  $+\infty$  telle que les  $\phi_{t_j}(K)$  soient deux à deux disjoints. Comme la suite  $(\|v\|_{L^p(\phi_{t_j}(K))})_j$  est  $\ell^p$ , elle tend vers 0. Cela prouve que les  $v \circ \phi_{t_j}$  tendent vers 0 dans  $L^p(K)$ .

Une variante de ce raisonnement s'applique à la fonction  $v' = |\langle du, \eta \rangle|$ , lorsque  $\eta$  est un vecteur propre de  $ad_\xi$  relatif à une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\Re(\lambda) = \text{tr } ad_\xi/p$ . Comme  $v' \in L^p$ , on peut supposer que les intégrales  $\int_{\phi_{t_j}(K)} v'^p$  tendent vers 0. Or

$$\int_{\phi_{t_j}(K)} v'^p = \int_K |\langle \phi_{t_j}^* du, \eta \rangle|^p.$$

Par conséquent,  $\langle \phi_{t_j}^* du, \eta \rangle$  tend vers 0 au sens des distributions. Cela suffit pour conclure que  $\langle dw, \eta \rangle = 0$ . q.e.d.

Une fonction  $L^p$  sur un groupe de Lie  $G$  ne peut être invariante par un sous-groupe unimodulaire non compact. Il en est de même pour une fonction de  $d^{-1}dL^p(G)$ .

**Lemme 21** *Soit  $G$  un groupe de Lie. Soit  $w \in d^{-1}dL^p(G)$ . Si  $w$  est invariante par un sous-groupe fermé distingué unimodulaire non compact de  $G$ , alors  $w$  est constante.*

**Preuve.** Comme  $H$  est distingué, toute fonction  $H$ -invariante à droite est aussi  $H$ -invariante à gauche. Comme  $H$  est fermé, distingué et unimodulaire, la mesure de Haar de  $G$  se désintègre le long des orbites de  $H$ , par rapport à une mesure de Haar de  $G/H$ , [W]. Si  $w$  est  $H$ -invariante, la fonction  $g \mapsto I(g) = \|w\|_{d^{-1}dL^p(gB)}^p$  est aussi  $H$ -invariante, elle passe au quotient en une fonction  $J$  sur  $G/H$ , et son intégrale sur  $G$  vaut

$$\|w\|_{d^{-1}dL^p(G)}^p = \text{vol}(H) \int_{G/H} J(\bar{g}) d\bar{g}.$$

Si  $H$  est non compact, son volume est infini, donc  $J = 0$ , et  $w$  est constante. q.e.d.

**Corollaire 22** *Soit  $G$  un groupe de Lie,  $N \subset G$  un sous-groupe fermé nilpotent connexe, simplement connexe, distingué, non trivial. Soit  $w \in d^{-1}dL^p(G)$ , soit  $\xi \in \mathcal{N}$  un champ de vecteurs invariant à gauche non nul. Si, au sens des distributions,  $\langle dw, \xi \rangle = 0$ , alors  $w$  est constante.*

**Preuve.** Notons  $A$  le sous-groupe à un paramètre engendré par  $\xi$ . Comme  $N$  est nilpotent connexe et simplement connexe, l'exponentielle de  $N$  est un difféomorphisme, donc  $A$  est fermé dans  $N$  et donc dans  $G$ . D'autre part,  $ad_\xi$  est nilpotent donc  $\text{tr } ad_\xi = 0$ .

Soit  $\eta$  un vecteur non nul du centre de  $\mathcal{N}$ . Alors  $[\xi, \eta] = 0$ . Le lemme 20 donne que  $\langle dw, \eta \rangle = 0$ . Par conséquent, le centre de  $N$ , qui est non compact, fermé et distingué dans  $G$ , préserve  $w$ . Le lemme 21 s'applique, on conclut que  $w$  est constante. q.e.d.

#### 4.4 Cohomologie $L^p$ en degré 1 des groupes de Lie résolubles

**Proposition 23** *Soit  $G$  un sous-groupe connexe et fermé du groupe des matrices triangulaires réelles. On suppose que  $G$  n'est pas unimodulaire et qu'il n'admet pas de métrique invariante à gauche à courbure sectionnelle strictement négative. Alors pour tout  $p > 1$ ,  $H^{1,p}(G) = 0$ .*

**Preuve.** D'après [B], chap. 7, pages 19-20, il existe deux sous-groupes nilpotents connexes  $A$  et  $N \subset G$  tels que  $G = AN$ ,  $N$  est fermé, distingué et  $[A, A] \subset N$ . Notons  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$  leurs algèbres de Lie. L'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  se décompose en sous-espaces caractéristiques pour l'action de l'algèbre de Lie nilpotente  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{G} \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathcal{G}_\lambda$$

où les  $\lambda$  sont des formes linéaires sur  $\mathcal{A}$  telles que pour  $\xi \in \mathcal{A}$ ,  $ad_\xi - \lambda(\xi)I$  restreinte à  $\mathcal{G}_\lambda$  soit nilpotente (voir [B], chap. 1, exercice 12 page 127). Comme  $ad$  est la restriction de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie du groupe  $T_n$ , les racines  $\lambda$  sont à valeurs réelles.

Si  $\xi \in \mathcal{N}$ ,  $ad_\xi$  est nilpotente sur  $\mathcal{N}$  et son image est contenue dans  $\mathcal{N}$ . Par conséquent, la forme linéaire  $\tau : \xi \mapsto \text{tr } ad_\xi$  sur  $\mathcal{G}$  est nulle sur  $\mathcal{N}$ . Comme  $G$  n'est pas unimodulaire,  $\tau$  n'est pas identiquement nulle sur  $\mathcal{G}$ , donc elle est non nulle sur  $\mathcal{A}$ .

Supposons que  $H^{1,p}(G) \neq 0$ . Montrons que pour tout élément  $\lambda \in \Sigma$ ,  $\lambda$ , en tant que forme linéaire sur  $\mathcal{A}$ , est un multiple positif de  $\tau$ . Choisissons  $\xi_0 \in \mathcal{A}$  tel que  $\tau(\xi_0) > 0$ . Alors, d'après le lemme 18, si  $H^{1,p}(G) \neq 0$ , il existe une fonction non constante  $w \in \mathcal{B}_{\xi_0}^p$ , i.e.  $w \in d^{-1}dL^p(G)$  est invariante par le groupe à un paramètre de translations à droite engendré par  $\xi_0$ . D'après les lemmes 19 et 20, si  $\lambda(\xi_0) \leq \tau(\xi_0)/p$ , et si  $\eta \in \mathcal{N}$  est un vecteur propre de  $ad_{\xi_0}$  relatif à  $\lambda(\xi_0)$ , alors  $dw$  s'annule sur  $\eta$ . Le corollaire 22 entraîne alors que  $w$  est constante, contradiction. On a donc montré que, pour tout  $\xi_0 \in \mathcal{A}$ ,

$$\tau(\xi_0) > 0 \Rightarrow \lambda(\xi_0) > \frac{\tau(\xi_0)}{p}.$$

Cela entraîne en particulier que  $\tau(\xi_0) > 0 \Leftrightarrow \lambda(\xi_0) > 0$ , i.e. que  $\lambda$  est colinéaire à  $\tau$ ,  $\lambda = c_\lambda \tau$ , où  $c_\lambda > \frac{1}{p}$ .

Pour tout  $\xi \in \ker \tau$ ,  $ad_\xi$  est nilpotent, donc l'idéal  $\ker \tau$  est nilpotent. On peut donc remplacer la paire  $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$  par  $(\mathbf{R}\xi_0, \ker \tau)$ . Autrement dit, on peut supposer que  $\dim \mathcal{A} = 1$ . Les formes linéaires  $\lambda \in \Sigma$  ne sont rien de plus que les nombres  $\lambda = \lambda(\xi_0)$ , et leurs parties réelles sont toutes du même signe. Autrement dit,  $G$  est le produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe  $N$  par  $\mathbf{R}$  agissant par une dérivation dont les valeurs propres ont une partie réelle strictement positive. Un tel groupe admet une métrique riemannienne invariante à courbure sectionnelle strictement négative, [He]. q.e.d.

**Proposition 24** *Soit  $N$  un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de dimension  $n-1$ ,  $\alpha$  une dérivation de  $\mathcal{N}$  dont les valeurs propres ont des parties réelles  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$  strictement positives. Soit  $G = N \rtimes_{\alpha} \mathbf{R}$ . Posons*

$$\mathbf{p}(G) = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}{\lambda_1}.$$

*Alors  $T^{1,p}(G) = 0$  pour tout  $p \geq 1$ ,  $R^{1,p}(G) = 0$  si  $p \leq \mathbf{p}(G)$  et  $R^{1,p}(G) \neq 0$  si  $p > \mathbf{p}(G)$ .*

**Preuve.** Le résultat apparaît dans [P1] dans le cas particulier où  $\alpha$  est semi-simple.

Le champ de vecteurs invariant à gauche  $\xi_0$  engendrant l'action à droite du facteur  $\mathbf{R}$  sur le produit semi-direct satisfait  $ad_{\xi_0} = \alpha$  sur  $\mathcal{N}$ , d'où  $\text{tr}(ad_{\xi_0}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} > 0$ . Le lemme 18 s'applique et  $H^{1,p}(G) = \mathcal{B}_{\xi_0}^p$  est séparé.

On a vu au paragraphe précédent que si  $H^{1,p}(G) \neq 0$ , alors les parties réelles  $\lambda_i$  des valeurs propres de  $ad_{\xi_0}$  sur  $\mathcal{N}$  satisfont toutes  $\lambda_i > \frac{\text{tr } ad_{\xi_0}}{p} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}{p}$ , soit  $p > \mathbf{p}(G)$ .

Inversement, notons  $\pi : N \rtimes \mathbf{R} \rightarrow N$  la projection sur le second facteur. Si  $p > \mathbf{p}(G)$ , pour toute fonction lisse  $\bar{u}$  à support compact sur  $N$ ,  $\bar{u} \circ \pi$  est dans  $\mathcal{B}_{\xi_0}^p$ . En effet, soit  $\chi$  une fonction lisse sur  $\mathbf{R}$  qui vaut 0 au voisinage de  $-\infty$  et 1 au voisinage de  $+\infty$ . Le flot  $\phi_t$  de  $\xi$  donne un difféomorphisme

$$N \times \mathbf{R} \rightarrow G, \quad (n, t) \mapsto \phi_t(n).$$

Posons  $u(n, t) = \chi(t)\bar{u}(n)$ . Si  $p > \mathbf{p}(G)$ ,  $du \in L^p$ ,  $u_\infty = \bar{u} \circ \pi \in \mathcal{B}_{\xi_0}^p$ . En particulier,  $R^{1,p}(G) \neq 0$ . q.e.d.

## 4.5 Preuve du théorème 1

Soit  $M$  un espace homogène riemannien connexe non compact. Soit  $G$  la composante neutre de son groupe d'isométries. Comme  $M$  et  $G$  sont quasiisométriques (lemme 4),  $T^{1,p}(M) = T^{1,p}(G)$ . D'après le corollaire 12, s'il existe  $p > 1$  tel que  $T^{1,p}(M) \neq 0$ , alors  $G$  est une extension compacte

d'un groupe de Lie résoluble unimodulaire. Inversement, si  $G$  est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble unimodulaire, alors pour tout  $p > 1$ ,  $T^{1,p}(M) \neq 0$ .

Désormais, nous pouvons supposer que  $T^{1,p}(M) = 0$ . D'après le lemme 7,  $M$  est quasiisométrique à un groupe de Lie résoluble  $G$  qui satisfait aux hypothèses de la proposition 23. De nouveau,  $T^{1,p}(G) = T^{1,p}(M) = 0$  donc  $G$  n'est pas unimodulaire. S'il existe  $p > 1$  tel que  $H^{1,p}(M) \neq 0$ , alors  $R^{1,p}(G) \neq 0$ . D'après la proposition 23,  $G$  admet une métrique invariante à courbure sectionnelle négative, et le détail est donné par la proposition 24. q.e.d.

## 4.6 Preuve du corollaire 3

Soit  $M$  un espace homogène riemannien connexe non compact. L'espace des 1-formes harmoniques  $L^2$  sur  $M$  est isomorphe à  $R^{1,2}(M)$ . J. Cheeger et M. Gromov [CG] ont montré que si  $M$  est une variété riemannienne fermée à l'infini qui revêt une variété compacte, alors les nombres de Betti  $L^2$  de  $M$  (dimensions de Von Neumann des espaces de cohomologie  $L^2$ ) sont tous nuls. En particulier,  $R^{1,2}(M) = 0$ . Le même argument, fondé sur la dimension de von Neumann, s'étend sans changement au cas des groupes de Lie fermés à l'infini. Par invariance sous quasiisométrie (lemme 4 et corollaire 6), on a donc  $R^{1,2}(M) = 0$  pour tout espace homogène riemannien fermé à l'infini.

D'après le théorème 1, si  $R^{1,2}(M) \neq 0$ ,  $M$  est commensurable à un espace homogène  $M'$  à courbure sectionnelle strictement négative, et tel que  $\mathbf{p}(M') < 2$ . L'expression donnée par la proposition 24 montre que cela n'est possible que si  $\dim M' = 2$ . q.e.d.

## Références

- [B] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*. Éléments de Mathématique, Masson, Paris (1981).
- [Bo] A. BOREL, *The  $L^2$ -cohomology of negatively curved Riemannian symmetric spaces*. Ann. Acad. Sci. Fennicae **10**, 95 – 105 (1985).
- [BP] M. BOURDON, H. PAJOT, *Cohomologie  $L^p$  et espaces de Besov*. J. Reine Angew. Math. **558**, 85 – 108 (2003).
- [Br] R. BROOKS, *The fundamental group and the spectrum of the Laplacian*. Comment. Math. Helv. **56**, 581 – 598 (1981).
- [C] Y. DE CORNULIER, *Dimension of asymptotic cones of Lie groups*. Prépublication. Université de Rennes (2007).
- [CG] J. CHEEGER, M. GROMOV,  *$L^2$  cohomology and group cohomology*. Topology **25**, 189 – 215 (1986).
- [G] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups*. In “Geometric Group Theory”, ed. G. Niblo and M. Roller, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [GKS] V. GOLDSTEIN, V. KUZMINOV, I. SHVEDOV, *The Kuenneth formula for  $L_p$  cohomologies of warped products*. Sib. Math. J. **32**, No.5, 749 – 760 (1991); translation from Sib. Mat. Zh. **32**, No.5(189), 29 – 42 (1991).
- [He] E. HEINTZE, *On homogeneous manifolds of negative curvature*. Math. Annalen **211**, 23 – 34 (1974).
- [Ho] H. HOKE, *Lie groups that are closed at infinity*. Trans. Amer. Math. Soc. **313**, 721 – 735 (1989).
- [K] H. KESTEN, *Full Banach mean values on countable groups*. Math. Scand. **7**, 146 – 156 (1959).
- [L1] N. LOHOUÉ, *Remarques sur un théorème de Strichartz*. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **311**, 507 – 510 (1990).
- [Ma] V. MAZYA, *Classes of domains and embedding theorems for function spaces*. Dokl. Akad. Nauk USSR **133**, 527 – 530 (1960).

- [P1] P. PANSU, *Cohomologie  $L^p$  des variétés à courbure négative, cas du degré un*. In “P.D.E. and Geometry 1988”, Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. spez., 95 – 120 (1989).
- [P2] P. PANSU, *Dimension conforme et sphère à l’infini des variétés à courbure négative*. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I **14**, 177 – 212 (1989).
- [P3] P. PANSU, *Cohomologie  $L^p$  : invariance sous quasiisométrie*. Manuscrit (1995).
- [P4] P. PANSU, *Cohomologie  $L^p$ , espaces homogènes et pincement*. Texte disponible à la page <http://www.math.u-psud.fr/%7Eepansu/liste-prepub.html> depuis (1999).
- [R] D. ALEXANDRU-RUGINA,  *$L_p$ -intégrabilité des formes harmoniques  $K$ -finies sur les espaces hyperboliques réels et complexes*. Rend. Semin. Mat., Torino **54**, 75 – 87 (1996).
- [S] R. STRICHARTZ, *Analysis of the Laplacian on a complete Riemannian manifold*. J. Funct. Anal. **52**, 48 – 79 (1983).
- [Te] R. TESSERA, *Vanishing of the first reduced cohomology with values in an  $L^p$ -representation*. Preprint, Université de Cergy-Pontoise, (2006).
- [T] H. TRIEBEL, *Theory of function spaces II*. Birkhäuser, Basel (1992).
- [W] A. WEIL, *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Actual. sci. et indus. **869**. Paris : Hermann (1940).

Univ Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, Orsay Cedex, F-91405;  
 CNRS, Orsay cedex, F-91405  
 Pierre.Pansu@math.u-psud.fr  
<http://www.math.u-psud.fr/~pansu>