HAL
open science

Mesure de la beauté des bruits périodiques

Vincent Manet

To cite this version:

Vincent Manet. Mesure de la beauté des bruits périodiques. 2012. hal-00719630v2

HAL Id: hal-00719630

https://hal.science/hal-00719630v2

Preprint submitted on 3 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mesure de la beauté des bruits périodiques

Vincent M. MANET
*Marmonier, 35, rue du dauphiné, 69960 Corbas, France**
(Dated: 3 août 2012)

Dans cet article, des indicateurs pour décrire la « beauté » d'un bruit sont proposés. Les suavités rythmique, tonale et harmonique sont introduites. Elles caractérisent le bruit en terme de régularité rythmique (suavité rythmique), de plaisir auditif des « accords » constituant le signal (suavité tonale) et de la transition entre ces accords (suavité harmonique). Ces indicateurs ont été développés pour des bruits périodiques typiquement produits par des machines tournantes telles que des compresseurs, des moteurs... et sont déjà utilisés par nos clients industriels depuis deux ans.

I. INTRODUCTION

Dans l'industrie, il est souvent nécessaire d'améliorer un environnement bruyant. La première chose à faire, après avoir identifié les sources, consiste à diminuer le niveau de bruit arrivant aux utilisateurs. Toutefois, cela n'est désormais plus suffisant. Être conforme aux normes acoustiques, même les plus sévères, n'implique pas la satisfaction du client. En effet, endurer un bruit pendant des heures, même s'il est d'intensité modérée, n'est possible que si ce bruit possède une certaines qualité, une certaine « beauté ».

De plus, on est souvent confronté à des situations d'urgence, ce qui signifie que des solutions doivent être développées et installées très rapidement. Il n'est alors pas possible de faire plusieurs essais et de demander aux utilisateurs leur sentiment sur chaque amélioration apportée. Il faudrait pouvoir fournir directement la « bonne » solution aussi bien en terme de niveau de bruit que de confort (beauté du son). C'est pourquoi il est indispensable de pouvoir caractériser cette beauté en un certain sens.

Dans cet article, nous présentons plusieurs indicateurs, chacun décrivant la beauté d'un son selon un certain point de vue. Ces indicateurs, définis comme des valeurs comprises entre 0 (mauvais) et 1 (parfait), peuvent ensuite être combinés en un indicateur global du bruit considéré.

Le sujet de la beauté d'un bruit est fondamentalement différent de celui de la beauté en musique par exemple. C'est pourquoi d'ailleurs nous ne nous référerons pas aux travaux classiques de psychoacoustique. Nous tenons à insister sur le fait que nous ne nous intéressons qu'aux bruits, et même plus particulièrement à des bruits « neutres » : un bruit neutre étant un bruit auquel n'est pas attaché de connotation culturelle ou émotionnelle. par exemple, le bruit d'un moteur de voiture n'est pas un bruit neutre, car sa perception est clairement reliée à des facteurs culturels et émotionnels. Par contre, des bruits tels que ceux d'un climatiseur, d'un compresseur ou d'un moteur de machine sont neutres.

* vincent.manet@marmonier.com

II. ÉTAPE 1 (OPTIONNELLE) : DÉTERMINATION DES CYCLES DANS UN SIGNAL ACOUSTIQUE

En musique (jouée par des musiciens, pas générée par ordinateur), le temps entre deux notes successives ne peut généralement pas être inférieur à 20 ms (même si l'on trouve des valeurs inférieures dans des formes plus contemporaines). Green[1] puis Roads[2] ont montré que des événements séparés par seulement 1 ms peuvent être détectés par l'oreille humaine.

Nous n'avons donc pas besoin d'imposer une limite minimale à la durée des cycles étudiés. Cela est encore plus vrai pour les signaux périodiques, puisque même une toute petite partie du signal est importante car répétée constamment.

De plus, comme nous étudions des signaux périodiques, il nous faut pouvoir isoler un cycle du signal pour pouvoir l'examiner en détails.

La figure 1 présente un signal temporel typique d'un phénomène périodique. Les signaux étudiés (bruits cycliques produits par des machines tournantes) ont la particularité d'avoir une émergence à chaque cycle. L'algorithme exploite cette propriété : une première approximation de la durée du cycle est obtenue en étudiant les fréquences les plus basses du spectre. Cette approximation est ensuite raffinée par l'étude du signal temporel. Cela donne d'excellent résultats, comme illustré dans les exemples industriels fournis à la fin de cet article.

Si cet algorithme n'est pas adapté au type de signal étudié, alors nous supposerons qu'un cycle peut être extrait par une autre méthode (ou manuellement), et dans la suite, nous ne considèrerons plus qu'un cycle du signal.

III. ÉTAPE 2 : SUAVITÉ RYTHMIQUE

Cet indicateur représente la régularité rythmique d'un signal acoustique, et est basé sur une analyse temporelle du cycle. Par exemple, un moteur peut tourner de manière uniforme ou non (indépendamment du bruit qu'il fait). Le ressenti de cette régularité ou irrégularité est déjà une partie (une composante) de la beauté du signal acoustique. Afin de le définir, nous proposons de trouver les pulses dans le signal considéré, i.e. de trouver

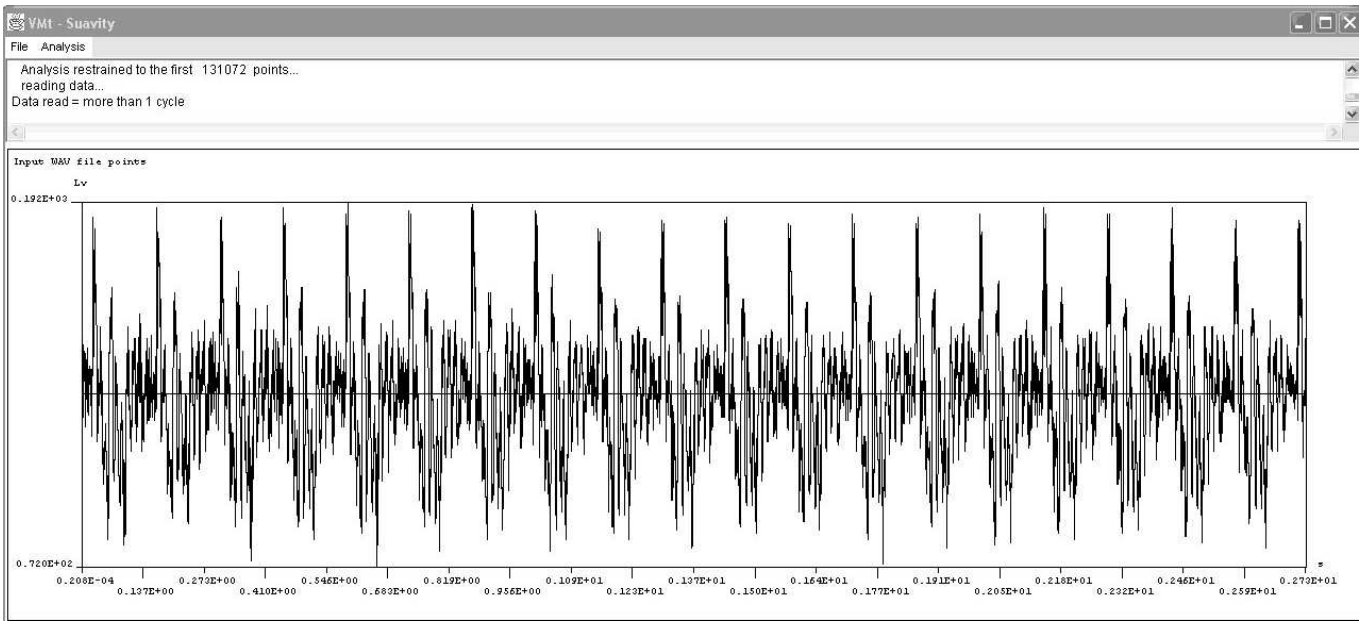


FIGURE 1. Enregistrement temporel typique d'un signal périodique

où les événements acoustiques se produisent. La suavité rythmique sera définie comme le nombre d'événements acoustiques divisé par le nombre total de pulsations dans le signal.

Les logiciels ayant une fonction "beat finder" utilisent généralement une approche dynamique (au sens musical) afin de représenter la notion de début (ou de fin) de note. Les pulses sont les instants où les voies entrent en jeu : une pente supérieure à un seuil donné est traquée dans le signal temporel, comme dans le logiciel Audacity[3]. Cette notion peut également être étudiée de manière spectrale, comme par exemple dans le logiciel AudioSculpt[4].

Pour les signaux périodiques courts (i.e. ceux qui nous concernent), les méthodes basées sur la dérivée du spectre ou sa variation ne sont pas adaptées parce que les notions de début ou fin de notes n'existent pas : le signal est trop lisse (comparé à de la musique), et abaisser le seuil conduit à des résultats totalement instables. Les méthodes de lissage (comme la moyenne glissante) appliquées au signal conduisent au même type de problème de seuil.

L'algorithme implémenté, illustré à la figure 2, est basé sur l'idée suivante : Le signal étudié (un cycle) est divisé en n parties égales. Le sens de variation de la moyenne sur chaque partie est étudiée afin de détecter lorsque l'on passe de décroissant ou constant à croissant (ce qui correspond à la notion de début de note). Le point exact d'inflexion est déterminé comme étant le minimum du signal temporel dans la partie en cours ainsi que sur les deux parties adjacentes.

Connaissant ces instants où les événements acoustiques ont lieu (appelés pulses), il est aisé de trouver la pulsation telle que chaque pulse ainsi que la durée totale du cycle soient des multiples de cette pulsation, et par suite de trouver la suavité rythmique. Avec une telle définition, la suavité rythmique est bien un nombre réel compris entre 0 et 1.

IV. ÉTAPE 3 : SUAVITÉ TONALE

Nous appelons « accord » le contenu fréquentiel de la partie du signal comprise entre deux pulses successifs. Un accord est constitué d'un certain nombre de « notes » correspondant aux fréquences présentes dans l'accord.

Une méthode dérivée de travaux d'Euler sera utilisée pour calculer la « beauté » de chaque accord relativement à la tonique du signal.

La suavité tonale pour tout le signal acoustique sera obtenue par la moyenne pondérée des beautés de chaque accord par leur durée.

A. Détermination de la tonique

Lorsque l'on considère de la musique, il est facile de déterminer la tonique à partir de la partition.

Mais, lorsque l'on considère un bruit, ce n'est plus aussi simple. Néanmoins, il y a plusieurs manière de déterminer une « note équivalente » ou une tonique d'un signal acoustique.

Il est possible d'utiliser des méthodes de fréquences émergentes : aussi bien le "Tone to noise ratio" défini dans les normes[5, 6], que le "Prominence ratio" défini dans la norme[6] peuvent être utilisés. Pour ces deux

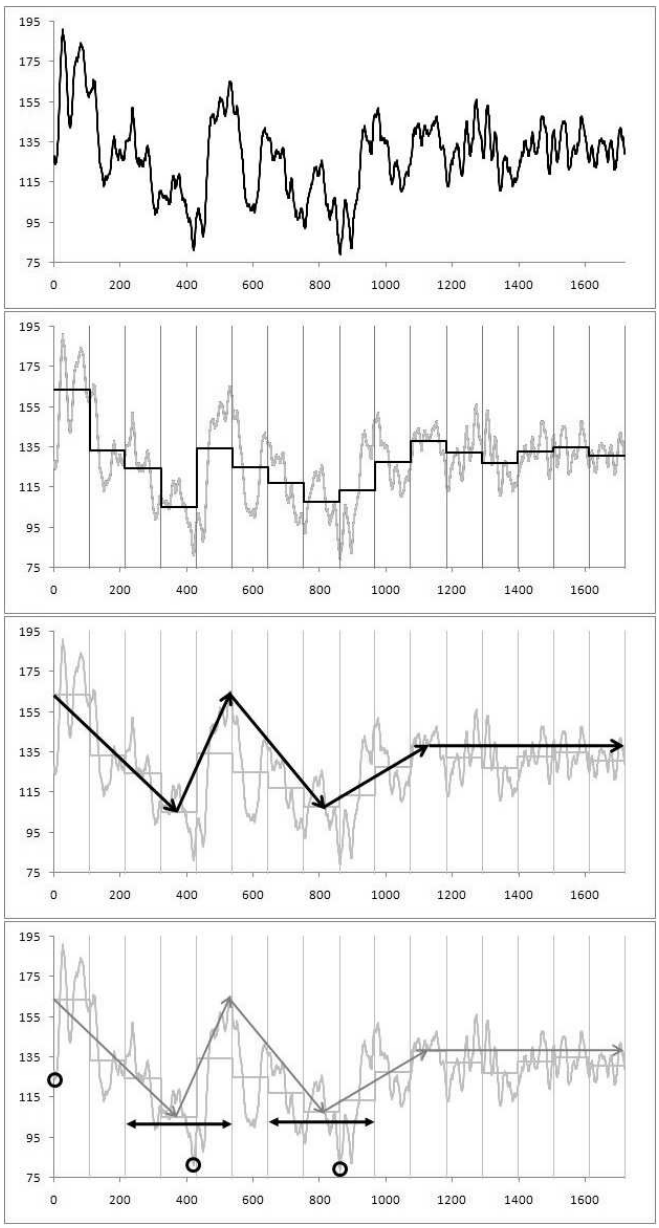


FIGURE 2. Algorithme de détection des pulses : 1) un cycle (signal temporel), 2) moyenne du signal sur chacune des 16 parties, 3) variation des moyennes, 4) parties (glèches horizontales) où le mimimum (encerclé) représente un pulse.

méthodes, un ton est dit émergent s'il rempli certains critères dans la bande critique centrée sur lui. Si plusieurs tons sont dans une même bande critique, il vaut mieux utiliser le prominence ratio ; si par contre plusieurs tons sont présents dans des bandes adjacentes (cas d'harmoniques fortes), il est préférable d'utiliser le tone-to-noise ratio. Parmi ces fréquences, la plus émergente de toutes peut être choisie comme tonique.

Dans ce travail, nous définissons la tonique comme la fréquence fondamentale du signal, car c'est une valeur intéressante (au moins d'un point de vue mécanique et énergétique). Nous retenons donc le pic fréquentiel le plus bas, et pour cela appliquons une fonction de Bartlett dans la FFT pour favoriser les basses fréquences.

Dans la suite, f_0 sera la fréquence correspondant à la tonique du signal.

B. Suavité tonale

La suavité tonale sera calculée à partir d'une version modifiée de travaux d'Euler[7–9]. Cette approche[10] est avant tout une approche de physicien, proche de celle de Helmholtz. Par ailleurs, la classification de la beauté des accords constitués de deux notes est exactement la même pour Euler [7] et Helmholtz[11].

Cette version modifiée des travaux d'Euler a un avantage majeur : une fois que l'échelle de classification de la beauté des accords à deux notes est déterminée, alors elle peut être étendue à un accord constitué d'un nombre quelconque de notes réparties sur un nombre quelconque d'octaves.

Un accord (comme défini avant, i.e. comme le contenu fréquentiel entre deux pulses) est constitué de n notes. Nous noterons f_1, f_2, ..., f_n les n fréquences correspondant à ces n notes (on rappelle que f_0 est la tonique).

C. Les travaux d'Euler

Euler définit un « degré de douceur » , une sorte de « facilité » , qui est son indicateur : plus cet indicateur est petit, plus il est facile de percevoir un ordre entre les notes, i.e. plus le son est harmonieux.

La théorie d'Euler peut être résumée comme suit :

- Une note est remplacée par un nombre entre 0 (unisson) et 12 (octave) correspondant à son intervalle avec la tonique.
- L'« exposant » de l'accord est défini comme le PPCM (plus petit commun multiple) des rapports des fréquences (des notes) à celle de la tonique du signal : exposant = PPCM$(f_1/f_0, ..., f_n/f_0)$. Afin de calculer ce PPCM, nous devons n'avoir que des entiers, ce qui peut nécessiter d'avoir à multiplier les rapports f_i/f_0 par un coefficient adéquat.
- L'exposant est alors décomposé en produit de facteurs premiers :

$$\text{exponent}_{\text{chord}} = \prod_k p_k^{j_k} \tag{1}$$

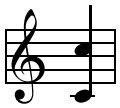
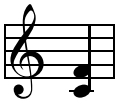
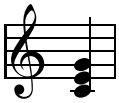
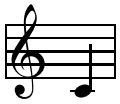
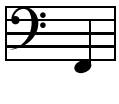
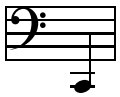
  où k est le nombre de nombres premiers p_k nécessaires pour cette décomposition et j_k leur puissance. Cette décomposition en facteurs premiers est donnée à la table I. Des exemples sont proposés à la table II.
- La facilité de l'accord est obtenue à partir de la décomposition précédente par :

$$\text{facilité}_{\text{accord}} = 1 + \sum_k j_k(p_k - 1) \tag{2}$$

Table I. Échelle musicale d'Euler et facilité

Intervalle	i	Décomp. en premiers	Facilité
Unisson	0	1	1
Seconde mineure	1	$2^4.3^{-1}.5^{-1}$	11
Seconde Majeure	2	$2^{-3}.3^2$	8
Tierce mineure	3	$2.3.5^{-1}$	8
Tierce Majeure	4	$2^{-2}.5$	7
Quarte	5	$2^2.3^{-1}$	5
Quarte augmentée	6	$2^{-5}.3^2.5$	14
Quinte	7	$2^{-1}.3$	4
Sixte mineure	8	$2^3.5^{-1}$	8
Sixte Majeure	9	$3^{-1}.5$	7
Septième mineure	10	$2^4.3^{-2}$	9
Septième Majeure	11	$2^{-3}.3.5$	10
Octave	12	2	2

Table II. Chiffrage d'accords selon Euler

accord			
ratio freq.	2	4/3	5/4 and 3/2
coefficient	1	3	4
tonique			
	inchangée	modifiée	modifiée
exposant	PPCM(1 ;2)=2 $= 2^1$	PPCM(3 ;4)=12 $= 2^2.3$	PPCM(4 ;5 ;6) $= 2^2.3.5$
facilité	1+1 = II	1+2+2 =IV	1+2+2+4 =IX

Le résultat est noté en chiffres romains à la table II.

Pour illustrer les méthodes de cet articles, nous utiliserons la notation musicale, et plus particulièrement en Do Majeur (pas de clef). Ainsi, un accord dont la basse sera un Do se représentée par le nombre 1 (car c'est également la tonique). Un Do une octave au dessus sera représenté par la note 2 (car sa fréquence est le double de celle de la tonique). Un Fa situé une quarte au dessus de la tonique sera représenté par 4/3 qui est le rapport de sa fréquence à celle de la tonique. Ces rapports entre les hauteurs des notes sont donnés à la table I. Des exemples de chiffrage d'intervalles sont donnés à la table II.

D. Modification, extension

Les remarques suivantes peuvent être faites sur la méthode d'Euler :

- Afin de n'avoir que des entiers, il est nécessaire de multiplier les approximations des rapports f_i/f_0 données table I par un coefficient. En faisant cela, la tonique utilisée pour le chiffrage est modifiée Par exemple, pour le second accord de la table II, il faut multiplier par 3 pour obtenir des entiers, ce qui correspond à modifier la tonique du Do au Fa deux octaves plus bas.
- Néanmoins, dans la mesure où le même coefficient multiplicatif est utilisé pour chiffrer tous les accords du signal, ce désagrément n'est que relatif : certes la tonique n'est plus la même, mais une même note est utilisée pour chiffrer tout le signal.

Table III. Échelle proposée et facilité

Intervalle	i	Décomp. en premiers	Facilité
Unisson	0	1	1
Seconde mineure	1	$2^{-12}.3.5.7.41$	65
Seconde Majeure	2	$2^{-7}.11.13$	30
Tierce mineure	3	$2^{-4}.19$	23
Tierce Majeure	4	$2^{-6}.3.5$	17
Quarte	5	$2^{-8}.7^3$	27
Quarte augmentée	6	$2^{-10}.31.47$	87
Quinte	7	$2^{-5}.3^2.5$	14
Sixte mineure	8	$2^{-8}.11.37$	55
Sixte Majeure	9	$2^{-9}.3.17^2$	44
Septième mineure	10	$2^{-12}.3^2.5.7.23$	49
Septième Majeure	11	$2^{-9}.3.11.29$	50
Octave	12	2	2

Dans la mesure où la frequence fondamentale reste une valeur d'intérêt dans les cas industriels, nous ne souhaitons pas que celle-ci puisse varier au cours du chiffrage. Il est donc nécessaire de modifier les approximations des intervalles. Il faut trouver un ensemble de nombres premiers tels i) qu'il soit possible d'approximer correctement les puissances de la racine douzième de 2, ii) n'ayant que des puissances de 2 au dénominateur, et iii) tels que les facilités obtenues pour les intervalles soient classées dans le même ordre que celles d'Euler.

Une telle approximation est présentée table III. Contrairement à Euler, qui n'utilisait que les puissances de 2, 3 et 5 pour sa décomposition, nous utilisons 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 et 47. Toutefois, cela ne rend pas le calcul plus compliqué puisque la décomposition n'est pas calculée mais obtenue directement par construction.

Les facilités obtenues avec la nouvelle décomposition ont des valeurs plus grandes, mais respectent globalement le même ordre. Certaines différences existent qui permettent notamment d'inclure les derniers développements faits par Euler[8], et de mieux prendre en compte certaines consonances. De plus, le fait que les valeurs soient réparties sur un domaine plus grand conduira à des notes de suavité plus distinctes.

E. Algorithme implémenté

L'algorithme est le suivant :

1. Détermination des notes constituant l'accord :
   À partir du spectre du contenu spectral correspondant à un accord (i.e. entre deux pulses), nous retenons les n pics fréquentiels les plus bas. Dans le programme développé, on se restreint à $n \leq 10$, et on ne retient que les pics dont la fréquences est inférieure à $\min(8000\ \text{Hz}, \text{fréquence de Nyquist})$. On dispose alors de n fréquences f_n décrivant l'accord.
2. Approximation des notes de l'accord :
   Chaque fréquence f_n est approximée par $f_n \approx f_0.2^{k_n}.(\sqrt[12]{2})^{i_n}$, où k_n est le nombre d'octaves entre f_n et f_0, et i_n le demi-ton le plus proche de f_n dans l'octave considérée. La valeur $(\sqrt[12]{2})^{i_n}$ est alors remplacée par son approximation selon les tables I ou III.
3. Calcul de l'exposant de l'accord selon l'équation (1).
4. Calcul de la facilité de l'accord selon l'équation (2).
5. Normalisation :
   Plus la facilité est petite, plus l'accord est harmonieux. Or nous voulons que plus la suavité soit grande, plus l'accord soit harmonieux. Nous voulons également que la suavité soit comprise entre 0 et 1.
   On peut remarquer que, pour un accord de n notes donné : $1 \leq \text{facilité} \leq b$ avec :
   $$b = o_n + a_n \tag{3}$$
   où o_n est la borne supérieure du nombre d'octaves entre la tonique et les notes de l'accord, et a_n la borne supérieure de la facilité de l'accord considéré. a_n est donc la borne supérieure de l'équation (2), qui est calculée en prenant le maximum de chaque terme de la somme :
   $$\begin{aligned} a_n &= 1 + \textstyle\sum_k \left(\max_{i=1}^{12} j_i - \min_{i=1}^{12}(0, j_i)\right)(p_k - 1) \\ &= 28 \text{ si on utilise la table I} \\ &= 318 \text{ si on utilise la table III} \end{aligned} \tag{4}$$
   Si seules les fréquences comprises entre 1 et 10 kHz sont considérées, alors on a un maximum de 14 octaves, ce qui signifie que l'on peut utiliser $o_n = 14$ comme borne supérieure.
6. Calcul de la suavité de l'accord :
   La suavité de l'accord est définie par :
   $$\text{suavité}_{\text{accord}} = 1 - \frac{\text{facilité} - 1}{b - 1} \tag{5}$$
   qui est bien comprise entre 0 et 1 (1 étant la meilleure note).
7. Finalement, la suavité tonale du signal (i.e. du cycle) est obtenue comme moyenne pondérée de la suavité de chaque accord par sa durée :
   $$\text{suavité}_{\text{tonale}} = \sum_i \frac{\text{suavité}_{\text{accord}_i}.\text{durée}_{\text{accord}_i}}{\text{durée totale du signal}} \tag{6}$$

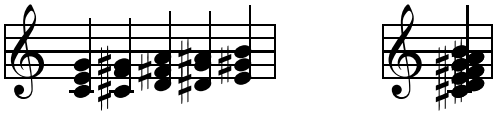


FIGURE 3. Une marche ascendante par demi-tons

Avec cette définition, la suavité tonale est elle aussi comprise entre 0 et 1.

V. ÉTAPE 4 : SUAVITÉ HARMONIQUE

La suavité harmonique représente la beauté de la transition entre deux accords successifs constituant le signal (plus le dernier accord suivi du premier pour les signaux périodiques). plus précisément, la suavité harmonique quantifie la beauté de la partie du second accord qui ne provient pas d'une transformation du premier accord (au sens du groupe diédral). Dans ce sens, la suavité harmonique est le taux de changement entre deux événements acoustiques.

A. Travaux existants

Dans ces travaux, Euler étend sa méthode afin de calculer la beauté d'un nombre quelconque d'accords ou d'une œuvre musicale complète.

L'idée principale est la suivante : la transition entre deux accords est harmonieuse si l'accord composé de toutes les notes des deux accords est lui-même harmonieux. par extension, cette méthode peut être appliquée à un nombre quelconque d'accords, et donc à toute une œuvre.

Toutefois, deux objections peuvent être faites :

1. Une telle méthode conduit à donner une mauvaise note aux accords transposés, comme dans une marche. La figure 3 montre l'accord parfait de Do Majeur sur la tonique Do–Mi–Sol comme accord de départ d'une marche s'effectuant par demi-tons successifs. Une telle marche n'a rien de choquant pour l'oreille car un motif est immédiatement reconnu, qui est répété et transposé. Dans la méthode d'Euler, nous devrions prendre en considération l'accord formé de toutes les notes de ces accords, i.e. l'accord constitué des 12 les demi-tons : un tel accord a une facilité élevée ou une suavité tonale faible, ce qui est en accord avec ce que nous entendons.
2. Euler ne calcule pas la beauté de la transition entre deux accords,mais la beauté globale de deux (ou plus) accords considérés comme une entité propre.

Une autre voie possible serait d'utiliser les règles de musicologie relatives à la beauté de la transition entre

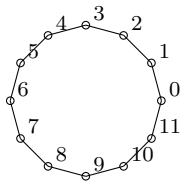


FIGURE 4. Dodécagone des 12 demi-tons

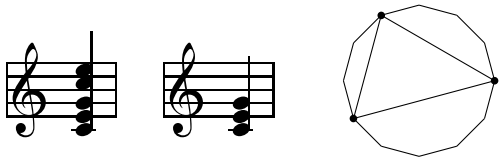


FIGURE 5. Représentations d'un accord (Accord considéré / accord sous forme compact / polygone correspondant)

les accords (que l'on appelle parfois « accords en mouvements »). Dans cette approche, les accords sont qualifiés (stables ou attractifs) et le mouvement de la basse analysé par rapport au degré de l'accord (i.e. la position de la basse de l'accord relativement à la tonique). les règles sont nombreuses et délicates et requièrent une analyse qui peut être qualifiée de syntaxique. Il est quasiment impossible de programmer ces règles, d'autant plus que les accords de plus de 6 notes ne peuvent être pris en compte.

B. Approche développée

Nous continuons à exposer notre approche sur des exemple musicaux, même si notre but reste bien l'étude de bruits industriels.

Nous proposons de simplifier les travaux d'Euler et de les combiner avec certaines règles de l'harmonie musicale. De l'harmonie musicale, nous gardons le fait de chiffrer les accords relativement à leur basse sans prendre en compte les octaves. Des travaux d'Euler nous retenons l'idée selon laquelle la transition entre deux accords est harmonieuse si l'accord consitué de toutes les notes des deux accords est lui-même harmonieux. Nous ne considérons un accord que relativement à la basse de l'accord précédent (et non plus de la tonique). De plus, le problème décrit concernant les marches sera résolu en « supprimant » du second accord la partie qui « vient du premier accord » (dans le sens des transformations du groupe diédral).

Nous avons déjà mentionné que considérer une note indépendament de son octave et relativement à une note de référence revient à la considérer au travers de l'intervalle qu'elle fait avec cette note de référence. Une note est donc représentée par un élément du groupe cyclique $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Ce groupe cyclique peut être vu comme un polygone régulier à 12 faces, i.e. un dodécagone : les 12 sommets représentent les 12 semi-tons possibles pour une note (relativement à la basse de l'accord). Cela est illustré à la figure 4.

Dans la suite, les notes étant considérées indépendament de leur octaves, un accord tel que Do–Mi–Sol–Do sera équivalent à l'accord Do–Mi–Sol (forme « compacte » de l'accord), comme montré figure 5. Si l'on considère un accord ayant p notes, il peut être représenté par un polygone à p faces dont les sommets appartiennent au dodécagone précédent. Un ensemble T de p valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui est équivalent à un polygone à p côtés est donc également équivalent à un accord de p notes.

Par exemple $T = (0, 4, 7)$ représente dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ un accord et un polygone donnés à la figure 5. L'accord $T = (0, 4, 7)$ correspond à n'importe quel accord dont la seconde note est située à 4 demis-tons de sa basse, et dont la troisième note est à 7 demi-tons de la basse. Un tel accord peut par exemple être l'accord Do–Mi–Sol de la figure 5, mais aussi toute transposition de cet accord comme illustré figure 3.

Le groupe diédral D_n est un groupe d'ordre $2n$ des isométries planes laissant le polygone régulier à n côtés inchangé. D_n est constitué de n rotations et n symétries. Il est généré par deux éléments : la rotation d'un sommet au suivant R_1, et la symétrie par rapport à l'axe des abscisses S_0. Le groupe diédral D_n peut donc s'écrire $D_n = \{R_0 = Id, R_1, ..., R_1^{n-1}, S_0, R_1 \circ S_0, ..., R_1^{n-1} \circ S_0\}$. D'un point de vue calculatoire, cela signifie qu'il suffit de disposer de R_1 et S_0 pour parcourir tout le groupe.

D'un point de vue musical (et fréquentiel), nous noterons que :

- $R_0 = Id$ correspond à une transposition de l'accord T (comme dans une marche) ;
- R_i, avec $i \geq 1$, correspond à une inversion de l'accord T (mêmes notes dans un ordre différent) avec éventuellement une transposition ;
- S_0 correspond à l'accord rétrograde de T (accord constitué des mêmes intervalles mais dans le sens opposé) avec éventuellement une transposition ;
- $R_i \circ S_0$, avec $i \geq 1$, correspond à l'accord rétrograde de l'inversion de T avec éventuellement une transposition.

Même si chaque tranformation du groupe diédral diffère des autres, cela n'implique pas qu'il existe une unique décomposition de la transformation d'un polygone T en un polygone V lorsque $p < n$.

Si l'on considère l'accord $T = (0, 5, 10)$ correspondant à Do–Fa–La# et l'accord $V = (0, 2, 7)$ correspondant à Ré–Mi–La, alors on constate que $V = R_2(T)$, mais également $V = S_0(T)$.

Lorsque plus d'une transformation existe entre deux accords, alors nous choisirons toujours celle qui vient ne premier dans le groupe diédral classé dans l'ordre précédemment rencontré : $D_n = \{R_0 = Id, R_1, ..., R_1^{n-1}, S_0, R_1 \circ S_0, ..., R_1^{n-1} \circ S_0\}$. Cela signifie juste qu'il est plus facile d'entendre une transposition,

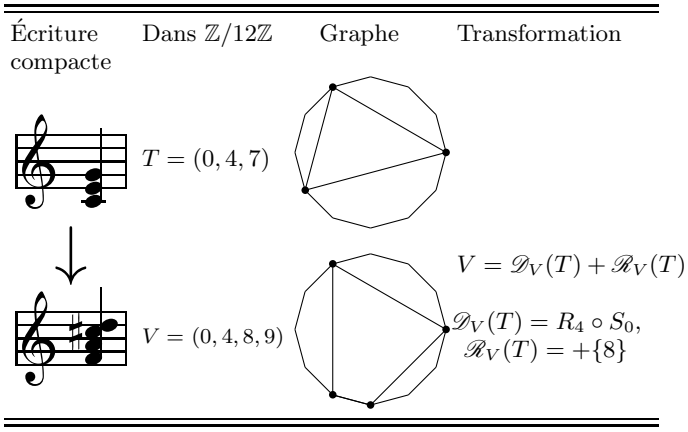


FIGURE 6. Comparaison entre accords

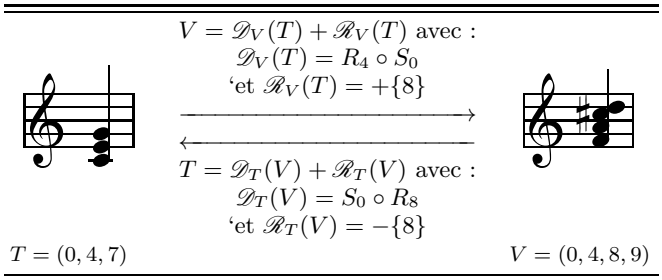


FIGURE 7. Arithmétique entre accords

puis une inversion, puis un accord rétrograde, puis une inversion d'accord rétrograde... ce qui est bien le cas effectivement.

Finalement, lorsqu'une telle transformation existe, nous lui donnons alors une « note de beauté » . Nous avons choisi les notes suivantes : 1 pour $R_0 = Id$, 0.9 pour R_i $(i \geq 1)$, 0.8 pour S_0 et 0.7 pour $R_i \circ S_0$ $(i \geq 1)$. Elles donnent satisfaction jusqu'à présent.

C. Transformation d'un accord en un autre – composantes diédrale $\mathscr{D}$ et non congrue $\mathscr{R}$

Considérons à nouveau l'accord $T = (0, 4, 7)$, qui peut représenter l'accord Do–Mi–Sol de la figure 5. Soit $V = (0, 4, 8, 9)$ l'accord Fa–La–Do#–Ré comme illustré figure 6.

Il est facile de voir que $R_4(S_0(T)) = (0, 4, 9) = V - \{8\}$.

Nous appellerons composante diédrale l'élément de D_n (s'il existe) permettant de transformer T en V. Elle sera notée $\mathscr{D}_V(T)$. Dans notre exemple la composante diédrale est donc $\mathscr{D}_V(T) = R_4 \circ S_0$.

Nous définissons également la composante non congrue de V relativement à T, que nous notons $\mathscr{R}_V$, comme le reste lorsque l'on retire de V la composante diédrale $\mathscr{D}_V(T)$. Cette composante non congrue correspond aux notes de V qui ne proviennent pas de la transformation de T. Cette définition est très naturelle, et nous obtenons sur notre exemple $\mathscr{R}_V(T) = +\{8\}$.

Lorsqu'aucune transformation n'existe entre deux accords, alors la composante diédrale vaut $\mathscr{D} = \emptyset$ et la composante non congrue $\mathscr{R}$ est égale au second accord en entier.

D. Arithmétique des transformations

Considérons un accord T et son successeur V. Comme mentionné, une manière d'écrire que V est issu d'une transformation de T est :

$$V = \mathscr{D}_V(T) + \mathscr{R}_V(T) \tag{7}$$

L'équation (7) peut être vue comme une décomposition ou une division de V par T : V représente le dividende, T lev diviseur, $\mathscr{D}_V(T)$ le quotient et $\mathscr{R}_V(T)$ le reste. Cette équation pourrait également être écrite sous forme modulaire : $V \equiv \mathscr{R}_V(T) \mod [\mathscr{D}_V(T)]$.

L'équation (7) peut être écrire sous forme inverse :

$$T = \mathscr{D}_T(V) + \mathscr{R}_T(V) \tag{8}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathscr{D}_T = \mathscr{D}_V^{-1} \\ \mathscr{R}_T = -\mathscr{D}_V^{-1}.\mathscr{R}_V = -\mathscr{D}_T(\mathscr{R}_V) \end{cases} \tag{9}$$

Comme chaque représentant du groupe diédral ne peut s'écrire que sous la forme R_i ou $R_i \circ S_0$, alors (les indexes appartiennent à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} \text{Si } \mathscr{D}_V = R_i, & \mathscr{D}_T = R_{-i} \\ \text{Si } \mathscr{D}_V = R_i \circ S_0, & \mathscr{D}_T = S_0 \circ R_{-i} \end{cases} \tag{10}$$

L'équation (10) montre que la « note de beauté » de la transformation est la même dans les sens direct et indirect.

Reprenons l'étude de la transformation de T en V et de V en T définis par $T = (0, 4, 7)$ Do–Mi–Sol et $V = (0, 4, 8, 9)$ Fa–La–Do#–Ré et illustrés figure Fig 6. Les composantes diédrale et non congrue peuvent être claculées de manière directe (comme au paragraphe précédent), ou en utilisant les équations (9) et (10). Les résultats sont donnés figure 7.

Nous avons donc sur cet exemple :

- Le calcul directe de T à V donne $\mathscr{D}_V(T) = R_4 \circ S_0$ et $\mathscr{R}_V(T) = \{8\}$,
- le calcul direct de V à T donne $\mathscr{D}_T(V) = R_4 \circ S_0$ et $\mathscr{R}_T(V) = -\{8\}$.
- Les équations (9) et (10) donnent $\mathscr{D}_T(V) = S_0 \circ R_{-4} = S_0 \circ R_8$ et $\mathscr{R}_T(V) = -(S_0 \circ R_8)(\{8\}) = -S_0(\{4\}) = -\{8\}$.

L'écriture de $\mathscr{D}_T(V)$ n'est pas unique, mais $[R_4 \circ S_0](T) = [S_0 \circ R_8](T)$. Le point le plus important est que la note de bauté de la composante diédrale est inchangée, et que les deux méthodes de calcul conduisent à la même composante non congrue $\mathscr{R}_T(V)$.

E. Suavité harmonique de la transformation entre deux accords

La suavité harmonique, qui correspond à la beauté de la transformation d'un accord T en un accord V, sera calculée comme suit :

- S'il existe une transformation (dans le groupe diédral) de T en V, alors :
  - si le nombre de notes de V est inférieur ou égale au nombre de notes de T (i.e. si la composante non congrue est inférieure ou égale à zéro), alors la suavité harmonique est égale à la note de beauté de la transformation : 1 pour R_0, 0.9 pour R_i ($i \geq 1$), 0.8 pour S_0 et 0.7 pour $R_i \circ S_0$ ($i \geq 1$) ;
  - si le nombre de notes de V est strictement supérieur au nombre de notes de T (i.e. la composante non congrue est strictement supérieure à zéro), alors la suavité harmonique est égale à la suavité tonale de l'accord $\mathscr{R}_V(T)$ relativement à la basse de T (i.e. on remplace f_0 par $f_1(T)$ dans l'algorithme présenté à l'étape 3) ;
- Si une telle transformation n'existe pas, alors la suavité harmonique est égale à la suavité tonale de l'accord V (dans cas on a $\mathscr{R}_V(T) = V$) relativement à la basse de T (i.e. on remplace f_0 par $f_1(T)$ dans l'algorithme présenté à l'étape 3) ;

Dans les deux cas où il est nécessaire de calculer une suavité tonale (i.e. dans les cas où la partie congrue est strictement positive) , alors la normalisation de la suavité tonale est effectuée selon l'équation (3) dans laquelle $o_n = 0$ (car en notation compacte ; on ne considère qu'une seule octave), et a_n est inchangé.

La figure 8 reprend l'exemple de la figure 7 et donne les accords résultant de la transition dans le cas où la méthode d'Euler aurait été conservée et dans la méthode exposée.

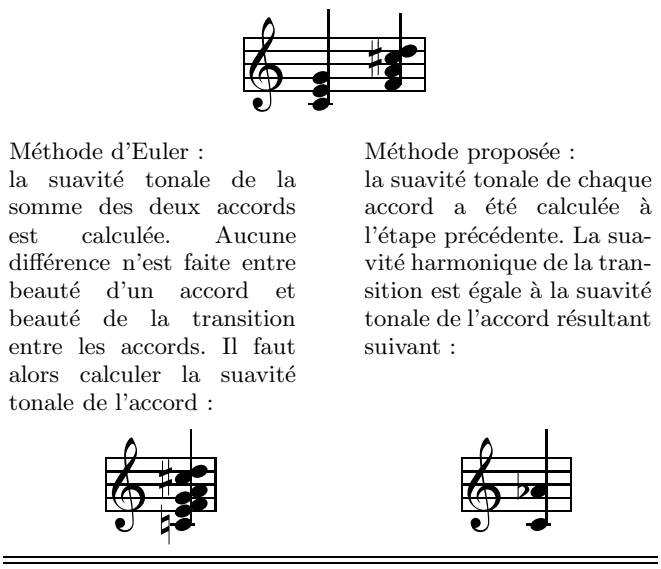
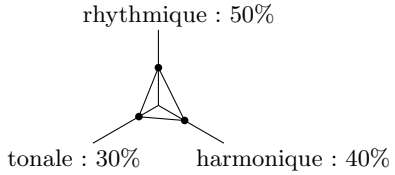


FIGURE 8. Accords résultants



Suavité globale = 15.67% (rapport des surfaces)

FIGURE 9. Représentation de la suavité globale

F. Suavité harmonique du signal

La suavité harmonique du signal est obtenue comme moyenne des suavité harmoniques des transitions entre les accords constituant ce signal.

Pour les signaux périodiques, il faut bien prendre en compte la transition entre le dernier accord et le premier accord du signal.

VI. ÉTAPE 5 : SUAVITÉ GLOBALE

La suavité globale se veut une synthèse des indicateurs définis précédemmment. elle correspond donc à une note de beauté globale du signal étudié.

Afin de ne pas mélanger les informations temporelle et fréquentielles, une représentation sous forme de radar est utilisée (au lieu d'une simple multiplication des suavités). Le rapport de l'aire du triangle fait par les suavité divisé par celle du triangle maximal est utilisé comme suavité globale, comme illustré figure 9.

VII. EXEMPLES INDUSTRIELS

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats obtenus sur des cas industriels.

Sur le premier exemple au paragraphe VII A nous rentrons plus dans le détail des calculs, alors que seuls les résultats seront présentés sur l'exemple suivant.

Afin de réaliser l'analyse, un logiciel prototype a été développé en fortran 77[12], avec une interface graphique en japi[13]. Ce logiciel n'a été développé que pour un but de recherche et non pas commercial.

A. Moteur deux temps asymétrique

Le signal considéré est le bruit d'un moteur à deux temps. Deux explosions se produisent à 1/4 et 3/4 du premier tour de vilebrequin, alors qu'aucune explosion n'a lieu sur le deuxième tour de vilebrequin. Le signal enregistré est donné à la figure 1.

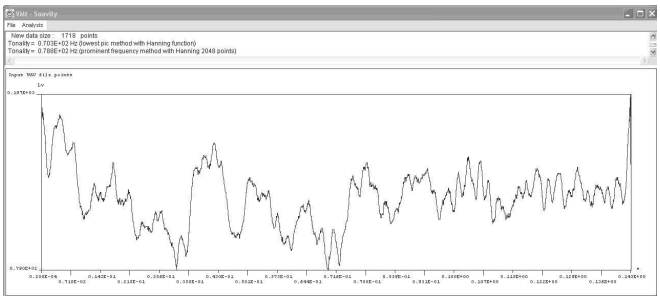


FIGURE 10. Un cycle extrait du signal (2 tours de vilebrequin)

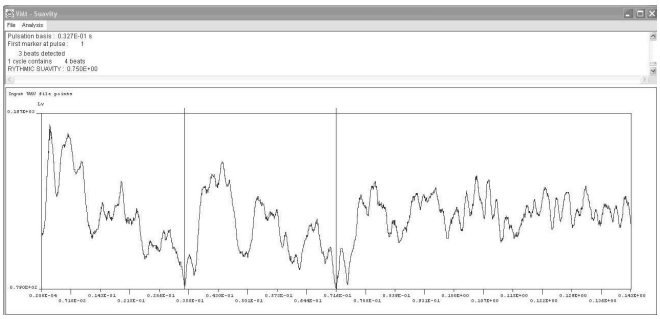


FIGURE 11. Pulses détectés

Le logiciel permet d'identifier les cycles. On trouve une durée moyenne des cycles de 0.109 s avec un écart-type de $2.149.10^{-3}$ s. Un « cycle » , tel que détecté par le programme, correspond à une période du signal, i.e. à 2 tours de vilebrequin. Cela correspond donc à une vitesse de rotation du moteur de 1100 tours/min.

Nous ne retenons qu'un seul cycle, présenté à la figure 10, pour continuer l'analyse.

L'analyse des pulses sur ce cycle (2 tours de vilebrequin) conduit à la détection des pulses marqués par des barres verticales à la figure 11. Trois événements acoustiques sont détectés aux points 1, 420 et 862 sur un cycle comportant un total de 1718 points. Les détails algorithmiques sont illustrés figure 2. Cela correspond à des événements acoustiques se produisant aux pulses 0, 1 et 2 pendant un cycle contenant 4 pulses. La suavité rythmique du signal est donc de $3/4 = 0.75$.

La périodicité des explosions suggérait une plus grande arythmie du signal. En effet, la présence de 2 explosions sur une demi-période et rien sur la seconde demi-période pouvait laisser penser que la suavité rythmique aurait dû valoir $2/4 = 0.5$ (2 événements sur un total de 4 pulses).

Toutefois, la figure 10 montre que le signal possède 3 zones : 1) une première contenant 3 pics décroissants ; 2) une remontée suivie par 3 pics descendants ; 3) une dernière remontée suivie de plusieurs petits pics sans réelle émergence. Trouver 3 événements acoustiques est donc cohérent. En fait, des bruits mécaniques sont émis à 1/4 du second tour de vilebrequin (mais sans explosion). Le niveau de ce troisième pulse est plus faible que les deux autres mais son émergence est malgré tout clairement présente.

TABLE IV. Accord 1

fréquences (Hz)	k_n	i_n	Euler table I	Proposé table III
$f_1 = 187.5$	1	5	$2^3 3^{-1}$	$2^{-7} 7^3$
$f_2 = 562.5$	3	0	2^3	2^3
$f_3 = 937.5$	3	9	$2^{-1} 3^3$	$2^{-6} 3^1 17^2$
$f_4 = 1406.25$	4	4	$2^2 5^1$	$2^{-2} 3^1 5^1$
$f_5 = 1593.75$	4	6	$2^{-1} 3^2 5^1$	$2^{-6} 31^1 47^1$
$f_6 = 1875.0$	4	9	3^3	$2^{-5} 3^1 17^2$
$f_7 = 2250.0$	5	0	2^5	2^5
$f_8 = 2718.75$	5	3	$2^6 3^1 5^{-1}$	$2^1 19^1$
$f_9 = 3000.0$	5	5	$2^7 3^{-1}$	$2^{-3} 7^3$
$f_{10} = 3468.75$	5	7	$2^4 3^1$	$3^2 5^1$
		facilité	25	169
		coefficient	30	128
		suavité	41.46%	49.24%

L'analyse de la durée des événements acoustique confirme le fait que le cycle comprend bien 4 pulses. la suavité rythmique annoncée (égale à 3/4) est correcte.

La tonique est choisie comme étant la fréquence fondamentale du signal à savoir $f_0 = 70.3$ Hz.

Table IV montre les fréquences constituant l'accord 1 (première colonne), les facteurs k_n et i_n correspondant à l'algorithme de l'étape 3, et les décompositions en facteurs premiers selon Euler et la méthode proposée. Si l'on effectue les mêmes calculs pour le second accord, alors on trouve qu'il est nécessaire d'avoir un coefficient égale à 120 dans la méthode d'Euler pour n'avoir que des entiers. Pour le troisième accord, ce coefficient reste égale à 120. Afin de calculer la suavité tonale pour le cycle complet, il est nécessaire de ne considérer qu'une seule et même valeur de ce coefficient (qui correspond à un déplacement de la tonique), qui est évidemment la plus grande valeur (pour n'obtenir que des entiers). En mettant le coefficient à 120 dans le calcul du premier accord, la valeur de la suavité de l'accord 1 devient 36.58%. C'est bien cette valeur actualisée qui doit être prise en compte dans le calcul de la suavité tonale de tout le signal.

Finalement, la suavité tonale pour le signal est de 36.02% pour le décomposition proposée et de 34.10% pour celle d'Euler.

Le signal est composé de 3 accords. Les fréquences du premier ont été présentées à la table IV. Celles des accords 2 et 3 sont données à la table V. À partir des accords écrits dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sous forme compacte, et donnés à la table VI, il apparaît qu'il n'y a pas de transformation de l'accord 1 en l'accord 2, ni de l'accord 3 en l'accord 1 (signal périodique), et que : accord 3 = Id(chord 2) -{2, 4, 7}.

Dans ce cas, l'analyse de la transition entre les accords donne :

- de l'accord 1 à l'accord 2 : suavité harmonique = suavité tonale de l'accord 2 par rapport à la basse de l'accord 1 (f_0 remplacé par 187.5) ;

TABLE V. Contenu fréquentiel des accords 2 et 3 (Hz)

Accord 2	Accord 3
$f_1 = 281.25$	$f_1 = 140.625$
$f_2 = 937.5$	$f_2 = 234.375$
$f_3 = 1687.5$	$f_3 = 468.75$
$f_4 = 2343.75$	$f_4 = 562.5$
$f_5 = 3093.75$	$f_5 = 890.625$
$f_6 = 3656.25$	$f_6 = 1171.875$
$f_7 = 4406.25$	$f_7 = 1546.875$
$f_8 = 5062.5$	$f_8 = 1828.125$
$f_9 = 5812.5$	$f_9 = 1921.825$
$f_{10} = 6468.75$	$f_{10} = 2203.125$

TABLE VI. Accords sous forme compacte dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Accord 1	Accord 2	Accord 3
0	0	0
1	1	1
3	2	6
4	4	8
7	6	9
10	7	
11	8	
	9	

- de l'accord 2 à l'accord 3 : suavité harmonique = 1 (note de la transformation correspondant à $Id = R_0$) ;
- de l'accord 3 à l'accord 1 : suavité harmonique = suavité tonale de l'accord $\mathscr{R}_{\text{chord 3}}$ = chord 1 relativement à la basse de l'accord 3 (f_0 remplacé par 140.625).

Ne pas oublier que le recourt à la suavité tonale pour le calcul de la suavité harmonique se fait avec $o_n = 0$.

La suavité harmonique du signal est égale à 69.92% avec la décomposition d'Euler, et à 89.43% avec la méthode proposée.

Finalement, le bruit émis pour le moteur à deux temps asymétrique a une suavité rythmique de 75%, une suavité tonale de 36.02% et une suavité harmonique de 89.43%. Sa suavité globale vaut 42.10%.

B. Moteur deux temps symétrique

Dans ce second exemple, le signal est le bruit d'un moteur à deux temps symétrique : une explosion a lieu à chaque tour de vilbrequin.

L'analyse des cycles conduit à une durée moyenne des cycles de 0.0551 s avec un écart-type de $1.10.10^{-3}$ s. Un cycle correspondant à un tour de vilebrequin, la vitesse de rotation du moteur est de 1089 tours/min.

Les pulses trouvés dans un cycle sont symbolisés par des barres verticales à le figure 12. Seuls 2 événements acoustiques sont détectés aux points 1 et 871 dans un cycle comptant 2433 points. Cela correspond à 2

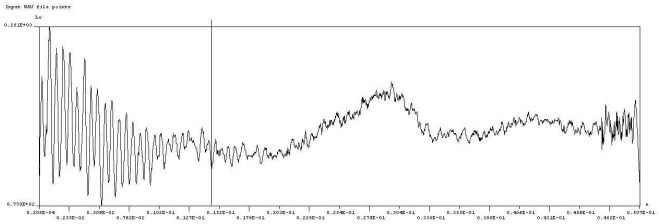


FIGURE 12. Pulses détectés

événements acoustiques aux pulses 0 et 2 dans un cycle contenant 5 pulses. La suavité rythmique est donc de $2/5 = 0.40$.

La tonique est encore prise égale à la fréquence fondamentale du signal à savoir $f_0 = 11.7$ Hz. La suavité tonale du signal est égale à 37.85% avec la décomposition proposée.

L'analyse des transitions entre accords est réduite à celle de l'accord 1 vers l'accord 2 et de l'accord 2 vers l'accord 1. Dans les deux cas, on trouve $\mathscr{D} = R_{10} \circ S_0$. La suavité harmonique du signal vaut donc 70.00%.

Finalement, la suavité globale du signal est égale à 23.21%.

La comparaison entre ces deux moteurs à deux temps conduit aux remarques suivantes :

- Contrairement à l'intuition, le moteur asymétrique a un suavité rythmique meilleure que celle du moteur symétrique. Ce point est confirmé par un jury.
- Les suavités tonales sont du même ordre de grandeur, ce qui signifie que globalement les accords des deux moteurs ont le même agrément.
- la différence est plus prononcée pour la suavité harmonique. Cela signifie que la transition entre les accords est plus agréable pour le moteur asymétrique.

Il serait possible d'améliorer le bruit du moteur symétrique (par rapport à celui du moteur asymétrique) en ajoutant par exemple une fréquence au second événement acoustique (afin d'améliorer la suavité harmonique, mais sans dégrader la suavité tonale), ou en travaillant sur la rythmicité du moteur (par exemple en ajoutant un troisième événement sonore).

VIII. CONCLUSION

Le but de cette étude était de développer un outil capable de donner une mesure de la beauté, ou de la qualité acoustique, de bruits (périodiques).

A cette fin, nous avons décomposé cette beauté en trois composantes, les suavités rythmique, tonale et harmonique, chacune d'elle donnant une indication selon un point de vue différent.

D'un point de vue algorithmique, le calcul des suavité se fait par manipulation de tableaux d'entiers, ce qui

consomme peu de mémoire et ne requiert qu'un temps de calcul très court.

Il nous semble intéressant de noter que la suavité harmonique fournit une manière de coder un accord à partir du précédent par ses composantes diédrale et non congrue.

Bien qu'ayant travaillé dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, il est tout à fait possible de travailler avec toute autre décomposition de type $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, du moment que l'on est capable de formaliser une facilité (i.e. un tableau du type fourni aux tables I et III) : par exemple, l'échelle musicale thaï-khmer utilise $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, alors que l'échelle slendro utilisée à Java est basée sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$[14].

Finalement, la méthode présentée est en parfait accord avec le ressenti d'un jury humain (8 membres internes plus les équipes clients) dans tous les cas industriels traités jusqu'à présent.

[1] D. Green, Psychological Review **78(6)**, 540 (1971).

[2] C. Roads, in *Computer Music Journal*, edited by G. D. P. A. Piccialli and C. R. editors (The MIT Press, Cambridge, Massachusets, 1991).

[3] *Audacity 1.2.6* (audacity.sourceforge.net, Internet, 2006-).

[4] A. Lithaud, N. Bogaards, and A. Roebel, *AudioSculpt 2.9*, edited by Ircam (Internet, 2008-).

[5] E DIN 45681 (2002).

[6] ANSI S1.13 (1995).

[7] L. Euler, *Tentamen novæ theoriæ musicæ ex certissismis harmoniæ principiis dilucide expositae [E033].* (Saint Petersburg Academy, 1739).

[8] L. Euler, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin **20**, 165 (1766).

[9] L. Euler, Novi Commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ **18**, 330 (1773).

[10] L. Euler, *Lettres à un princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie [E343,344,417]*, edited by S. P. . I. de l'Academie impériale des sciences (1768-1772).

[11] H. L. F. von Helmholtz, *On the sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*, edited by f. G. t. E. 2nd. Ed. translation A.J. Ellis (1885) (Dover (1954), New York, 1877).

[12] J. C. Burley, *GNU Fortran g77* (GNU Project, Internet, 1998).

[13] *java application programming interface* (Koblenz University, Internet, 2000-2003).

[14] Encyclopædia universalis (1971).