



HAL
open science

Orientabilité d'espaces de modules de courbes réelles dans des variétés symplectiques réelles

Rémi Crétois

► **To cite this version:**

Rémi Crétois. Orientabilité d'espaces de modules de courbes réelles dans des variétés symplectiques réelles. 2012. hal-00719418v1

HAL Id: hal-00719418

<https://hal.science/hal-00719418v1>

Preprint submitted on 19 Jul 2012 (v1), last revised 13 Sep 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Orientabilité d'espaces de modules de courbes réelles dans des variétés symplectiques réelles

Rémi CRÉTOIS

19 juillet 2012

Abstract

The paper is devoted to the study of the orientability of the moduli spaces of real pseudoholomorphic curves in real symplectic manifolds. We begin by extending the results we obtained in [6]. Namely, we consider a complex vector bundle (N, c_N) equipped with a real structure over a real curve (Σ_g, c_Σ) of genus $g \in \mathbb{N}$, and we give a description of the action of an automorphism of (N, c_N) on the orientations of the determinant bundle over the space of all Cauchy-Riemann operators on (N, c_N) .

In the second part, we use the previous description to compute the first Stiefel-Whitney class of the moduli space of real pseudoholomorphic curves in many cases. We show for example that the real pseudoholomorphic curves with non-empty real part in the complex projective space of dimension three form an orientable moduli space for a generic almost complex structure.

CLASSIFICATION AMS 2010 : 14H60, 53D45

MOTS CLÉS : fibrés vectoriels, courbes réelles, opérateurs de Cauchy-Riemann, espaces de modules, invariants de Gromov-Witten

Table des matières

1	Étude des automorphismes réels	4
1.1	Action des automorphismes sur les structures Pin^\pm	4
1.2	Action de $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ sur l'espace de Teichmüller réel	8
1.2.1	Les cas des fibrés trivial et canonique	8
1.2.2	Action des difféomorphismes sur $\text{Det}(T\Sigma_g)$	10
1.2.3	Espace de Teichmüller réel	12
1.3	Automorphismes et diviseurs	15
1.3.1	Opérateurs de Cauchy-Riemann et diviseurs	15
1.3.2	Action d'un automorphisme général	21
1.3.3	Transformations élémentaires réelles négatives	23
1.3.4	Étude de l'action des automorphismes associés à un diviseur	27
1.3.5	Deux cas particuliers	29
2	Orientabilité des espaces de modules de courbes réelles	32
2.1	Espaces de modules et fibré déterminant	32
2.2	Deux cas particuliers	35
2.2.1	Le cas séparant	36

2.2.2	Le cas <i>Spin</i>	37
2.3	Polarisations	38
2.3.1	Diviseurs admissibles	38
2.3.2	Transversalité	39
2.3.3	Exemples	43

Introduction

Une variété symplectique (X, ω) est dite réelle si elle est munie d’une involution anti-symplectique $c_X : X \rightarrow X$. Dans ce cas, on note $\mathbb{R}J_\omega(X)$ l’ensemble des structures presque-complexes sur X qui sont compatibles avec ω et pour lesquelles c_X est anti-holomorphe. Prenons $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $(c_X)_*d = -d$ et fixons $g, m \in \mathbb{N}$ de telle sorte que $c_1(X)d + (n - 3)(1 - g) \geq 0$, où $n = \frac{\dim X}{2}$. Pour chaque $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$, l’espace de modules $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$ est l’ensemble des courbes réelles J -holomorphes dans X qui sont de genre g , homologues à d et munies de m points marqués réels. Lorsque $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ est générique, $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$ est une variété de dimension $c_1(X)d + (n - 3)(1 - g) + m$. Dans le présent article, nous étudions l’orientabilité de $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,m}^d(X, J)$.

Dans leurs travaux sur l’homologie de Floer, Fukaya, Oh, Ohta et Ono ([11]) ont introduit la notion de sous-variété relativement *Spin* et montré que lorsque $\mathbb{R}X := \text{Fix}(c_X)$ est relativement *Spin*, l’espace des disques pseudo-holomorphes à bord dans $\mathbb{R}X$ et sans point marqué est orientable. D’autre part, Welschinger ([26], [25] et [27]) a montré l’importance en géométrie énumérative réelle de l’étude de l’orientabilité des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes réelles dans des variétés symplectiques réelles. La définition de ses invariants lui a notamment permis de donner un représentant géométrique du dual de cette première classe de Stiefel-Whitney dans le cas des variétés projectives réelles lisses et convexes de dimension deux et trois. Ce résultat a ensuite été précisé par Puignau ([21]). De son côté, Cho ([5]) a repris la définition des invariants de Welschinger en utilisant les techniques de [11], de même que Solomon ([24]) qui les a étendus à des surfaces à bord de genre plus élevé et aux variétés symplectiques de dimension six quelconques.

Notre angle d’attaque de ce problème consiste à se ramener au problème linéaire abstrait suivant. Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle abstraite, c’est-à-dire un couple formé d’une surface compacte connexe sans bord de genre g et orientée et d’un difféomorphisme involutif $c_\Sigma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ qui renverse l’orientation. Nous noterons $\mathbb{R}\Sigma_g$ l’ensemble des points fixes de c_Σ . Nous considérons un fibré vectoriel complexe $\pi : N \rightarrow \Sigma_g$ que nous munissons d’une structure réelle, c’est-à-dire d’un automorphisme involutif $c_N : N \rightarrow N$, \mathbb{C} -antilinéaire dans les fibres et qui relève c_Σ . Nous noterons $\mathbb{R}N$ l’ensemble des points fixes de c_N . De plus, lorsque c_Σ ou c_N induisent une involution sur un espace vectoriel (ou sur un module), nous notons avec un indice $+1$ (resp. -1) le sous-espace propre associé à la valeur propre $+1$ (resp. -1) de cette involution.

L’ensemble $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ des opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur (N, c_N) , ou de façon équivalente l’ensemble des structures holomorphes sur (N, c_N) , est un espace contractile (voir [6]). On définit le fibré déterminant $\text{Det}(N)$ au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ dont la fibre au-dessus d’un opérateur $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ est son déterminant $\det(\bar{\partial}) = \Lambda^{\max} \ker(\bar{\partial})_{+1} \otimes \left(\Lambda^{\max} \text{coker}(\bar{\partial})_{+1} \right)^*$. C’est un fibré en droites réelles qui est donc orientable mais non canoniquement orienté. Le groupe $\mathbb{R}\text{Aut}(N)$ des automorphismes de N qui commutent avec c_N agit sur les orientations de $\text{Det}(N)$. La question est de décrire cette action.

Dans [6], nous avons traité le cas du sous-groupe $\mathbb{R}GL(N)$ de $\mathbb{R}\text{Aut}(N)$ consistant des

automorphismes relevant l'identité de Σ_g . Nous terminons cette étude dans le §1 en traitant tous les éléments de $\mathbb{R}Aut(N)$. Nous commençons par nous ramener au cas où N est de rang 1, et par traiter les cas particuliers des fibrés trivial $(\mathbb{C}, conj)$, canonique $(K_\Sigma, (dc_\Sigma)^*)$ et tangent $(T\Sigma_g, dc_\Sigma)$. Ceci nous permet d'étudier l'action des difféomorphismes réels de (Σ_g, c_Σ) sur les orientations de l'espace de Teichmüller réel. En particulier, nous obtenons le résultat suivant (voir Théorème 1.1).

Théorème. *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle de genre au moins deux. L'action d'un difféomorphisme réel φ de (Σ_g, c_Σ) sur les orientations de l'espace de Teichmüller réel associé à (Σ_g, c_Σ) est donnée par le signe du déterminant de l'application $\varphi_* : H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1} \rightarrow H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$.*

Nous traitons ensuite le cas général. Nous introduisons pour cela la notion de diviseur réel associé à $(\det(N), c_{\det(N)})$ (voir §1.3.1). Étant donné un tel diviseur D , nous définissons un fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal $\mathfrak{D}_D(N)$ au-dessus de l'ensemble $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ des structures complexes sur Σ_g qui rendent c_Σ holomorphe. Nous renvoyons au §1.3.1 pour la définition précise. Notons simplement que si tous les points de D apparaissent avec multiplicité ± 1 , alors le choix d'une section réelle de $(\det(N), c_{\det(N)})$ qui s'annule transversalement aux points de D avec un indice d'annulation donné par la multiplicité du point dans D oriente le fibré $\mathfrak{D}_D(N)$. Nous obtenons alors le résultat suivant (voir le Théorème 1.2).

Théorème. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_Σ) . Soit D un diviseur associé à $(\det(N), c_{\det(N)})$. Le fibré $\text{Det}(N)$ au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est canoniquement isomorphe à*

$$\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \pi^* \mathfrak{D}_D(N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_D) \bigotimes_{x \in D|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\max(0, \text{mult}_D(x))}.$$

Le fibré $\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N)$ est défini en considérant les structures Pin^+ sur la partie réelle de N . Le fibré $\mathbb{R}\mathcal{J}_D$ est un fibré vectoriel réel au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ qui est orienté par le choix d'une numérotation des points de D et d'une orientation de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Nous renvoyons au §1.3.1 pour la définition précise. Ce Théorème nous permet de décrire l'action d'un automorphisme de (N, c_N) sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ de façon plus topologique.

Nous améliorons enfin le résultat précédent dans deux cas particuliers : lorsque la courbe est séparante, c'est-à-dire lorsque $\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$ n'est pas connexe, et lorsque la partie réelle de N est non vide et orientable (voir §1.3.5).

Nous passons ensuite à l'étude des espaces de modules proprement dite. Nous déduisons du §1 la première classe de Stiefel-Whitney des espaces de modules de courbes réelles dans (X, ω, c_X) auxquelles on ajoute une polarisation (voir le Théorème 2.1). Afin d'obtenir des résultats sur l'espace $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$, nous introduisons une polarisation D sur (X, ω, c_X) , sorte d'analogue symplectique d'un diviseur anti-canonique (voir 2.3.1). Le sous-ensemble $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$ de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$ constitué des courbes réelles J -holomorphes pour des structures J qui rendent D holomorphe et qui sont transverses à D forme une sous-variété de Banach de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$. Si de plus D est donné comme l'ensemble des zéros d'une section réelle de (TX, dc_X) , que l'on appelle polarisante, nous obtenons (voir le Théorème 2.2) :

Théorème. *Soit (X^{2n}, ω, c_X) une variété symplectique réelle polarisée par le diviseur D donné par une section polarisante. Pour $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ générique rendant D holomorphe, le fibré en droites réelles $\det(T\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D, J)^\natural)$ est canoniquement isomorphe à*

$$\mathfrak{p}_X^+ \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes (\Pi_{pol})_* T_{pol}$$

au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D, J)^\natural$.

Nous renvoyons au §2.1 pour les définitions précises des différents termes apparaissant dans ce résultat. Notons simplement que le fibré \mathfrak{p}_X^+ est orientable dès que $\mathbb{R}X$ admet une structure Pin^+ et que le fibré T_{pol} est défini en considérant les points d'intersection des courbes avec la polarisation.

Nous donnons enfin des exemples de polarisations et de sections polarisantes dans le §2.3.3 notamment dans le cas des hypersurfaces de $\mathbb{C}P^n$ et dans le cas général en utilisant des hypersurfaces de Donaldson.

Comme dans le §1, nous faisons apparaître deux cas particuliers dans lesquels nous avons de meilleurs résultats pour le problème considéré (voir §2.2). En particulier, nous obtenons le résultat suivant (voir le Corollaire 2.4) :

Théorème. *Soit $d \in H_2(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z})$, $g \in \mathbb{N}$ et $J \in \mathbb{R}J_{\omega_{Fub}}(\mathbb{C}P^3)$ générique. Les composantes connexes de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(\mathbb{C}P^3, J)$ dont les éléments intersectent $\mathbb{R}P^3$ sont orientables.*

Notations

Dans tout l'article, (Σ_g, c_Σ) sera une courbe réelle abstraite et (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle au-dessus de (Σ_g, c_Σ) .

- $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$: l'ensemble des structures complexes sur Σ_g qui rendent c_Σ antiholomorphe.
- $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$: l'ensemble des opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur (N, c_N) (voir [6]).
- Pour tout $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ formé des opérateurs pour lesquels la structure complexe sous-jacente sur Σ_g est donnée par J .
- $H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)$, $H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)$: noyau et conoyau de l'opérateur $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$.
- $\mathbb{R}Aut(N)$: le groupe des automorphismes de N qui commutent avec c_N .
- $\mathbb{R}GL(N)$: le sous-groupe de $\mathbb{R}Aut(N)$ formé des automorphismes relevant l'identité de Σ_g .
- $\mathbb{R}SL(N)$: le sous-groupe de $\mathbb{R}GL(N)$ formé des automorphismes de déterminant 1.

1 Étude des automorphismes réels

1.1 Action des automorphismes sur les structures Pin^\pm

Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur une courbe réelle (Σ_g, c_Σ) . Un élément Φ de $\mathbb{R}Aut(N)$ induit naturellement une permutation Φ_{p+} (resp. Φ_{p-}) de l'ensemble à $2k$ éléments formé des structures Pin^+ (resp. Pin^-) de $\mathbb{R}N$ (voir [17]). Ceci va nous permettre de nous ramener au cas du rang 1 (voir la Proposition 1.2 et aussi le Lemme 3.1 de [6]). Avant cela, nous remarquons dans la Proposition 1.1 qu'en général l'action d'un élément de $\mathbb{R}Aut(N)$ n'est pas la même sur les structures Pin^+ et sur les structures Pin^- de $\mathbb{R}N$. Plus précisément, considérons un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$. Il induit une permutation σ_φ sur l'ensemble à $2k$ éléments formé des orientations des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Cette permutation laisse stable le sous-ensemble à $2k_-$ éléments formé des orientations de composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable. Notons σ_φ^- la permutation induite sur cet ensemble.

Proposition 1.1. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide, et soit $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$. On a $\varepsilon(\Phi_{p+}) = \varepsilon(\Phi_{p-})\varepsilon(\sigma_\varphi^-)$.*

Commençons par donner une autre définition des différentes signatures intervenant dans l'énoncé. Le difféomorphisme φ induit une permutation des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ dont on note $c_1 \dots c_l \dots c_m$ la décomposition en cycles disjoints. On suppose de plus que le

support des cycles c_1, \dots, c_l est formé des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable. On note $l(c_i)$ la longueur du cycle c_i .

On associe alors à chaque cycle c_i

- deux éléments $s_{p^\pm}(c_i) \in \{-1, 1\}$: soit $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ dans le support de c_i , alors $s_{p^\pm}(c_i)$ vaut 1 si $\Phi^{l(c_i)}$ (qui envoie la composante $(\mathbb{R}N)_j$ sur elle-même) préserve les structures Pin^\pm de $(\mathbb{R}N)_j$ et vaut -1 sinon.
- un élément $s_\varphi(c_i) \in \{-1, 1\}$: soit $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ dans le support de c_i , alors $s_\varphi(c_i)$ vaut 1 si $\varphi^{l(c_i)}$ (qui envoie la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ sur elle-même) préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ et vaut -1 sinon.

Lemme 1.1. *Les signes $s_{p^\pm}(c_i)$ et $s_\varphi(c_i)$ ne dépendent pas du choix de la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$*

choisie. De plus, on a $\varepsilon(\Phi_{p^\pm}) = \prod_{i=1}^m s_{p^\pm}(c_i)$, et $\varepsilon(\sigma_\varphi^-) = \prod_{i=1}^l s_\varphi(c_i)$.

Démonstration. Traitons le cas de σ_φ^- , l'autre étant tout à fait analogue. Fixons un cycle c_i , $1 \leq i \leq l$. Son support est formé de $l(c_i)$ composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Si c'_i est un cycle de la décomposition en cycles disjoints de σ_φ^- dont le support contient une orientation d'une des composantes du support de c_i , alors $l(c'_i)$ vaut soit $l(c_i)$ soit $2l(c_i)$. Ainsi deux cas se présentent (voir Figure 1) :

- soit $s_\varphi(c_i) = 1$, autrement dit $(c'_i)^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$, et $l(c'_i) = l(c_i)$,
- soit $s_\varphi(c_i) = -1$, autrement dit $(c'_i)^{l(c_i)}$ échange les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$, et $l(c'_i) = 2l(c_i)$.

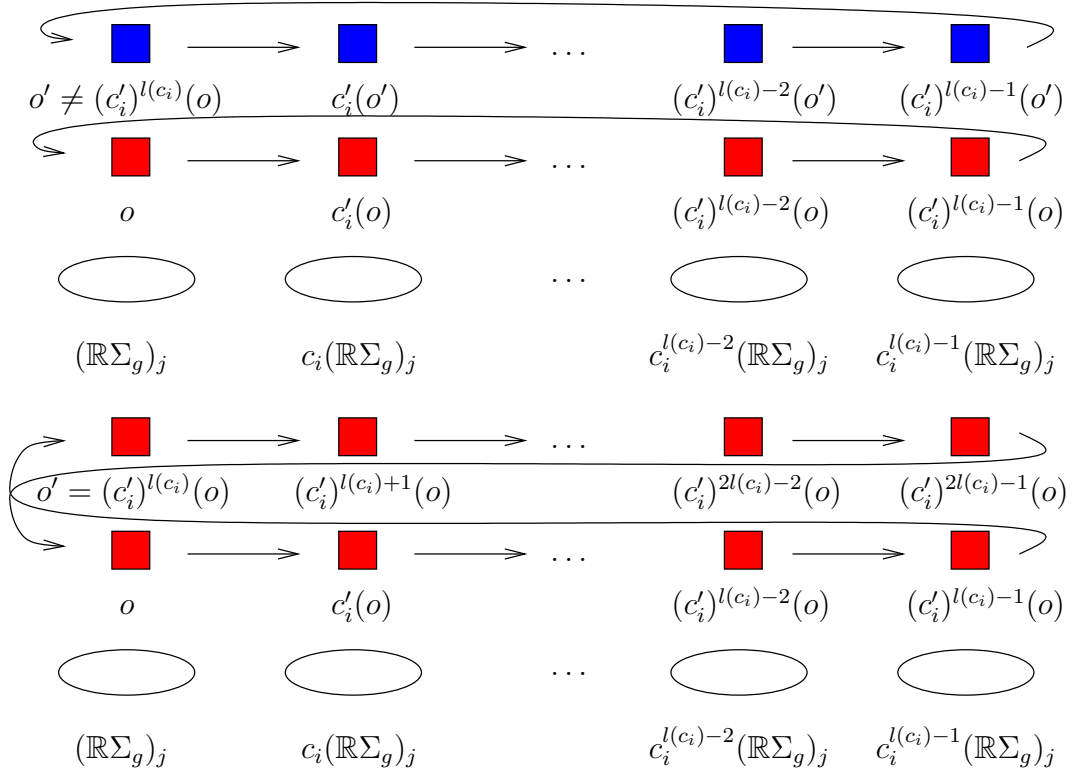


FIGURE 1 – Le cycle c'_i lorsque $s_\varphi(c_i) = 1$ en haut, et lorsque $s_\varphi(c_i) = -1$ en bas.

Dans le premier cas, il existe un autre cycle c''_i dont le support est formé des orientations

opposées à celles de c'_i . Dans le deuxième cas, la support de c'_i contient toutes les orientations des composantes formant le support de c_i .

La décomposition en cycles de supports disjoints de σ_{φ}^- est donc de la forme

$$\prod_{s_{\varphi}(c_i)=1} (c'_i c''_i) \prod_{s_{\varphi}(c_i)=-1} c'_i.$$

Dans le premier produit, comme les cycles c'_i et c''_i sont de même longueur, leurs contributions au calcul la signature de σ_{φ}^- se compensent. Ainsi

$$\varepsilon(\sigma_{\varphi}^-) = \prod_{s_{\varphi}(c_i)=-1} (-1)^{2l(c_i)-1} = \prod_{i=1}^l s_{\varphi}(c_i).$$

□

Démonstration de la Proposition 1.1. Grâce au Lemme 1.1 on peut réécrire l'égalité

$$\varepsilon(\Phi_{p^+}) = \varepsilon(\Phi_{p^-})\varepsilon(\sigma_{\varphi}^-)$$

sous la forme

$$\prod_{i=1}^m s_{p^+}(c_i) = \prod_{i=1}^m s_{p^-}(c_i) \prod_{i=1}^l s_{\varphi}(c_i).$$

Ainsi, il suffit de démontrer que pour chaque cycle c_i , l'action de $\Phi^{l(c_i)}$ sur les structures Pin^+ de $(\mathbb{R}N)_j$, où $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ est dans le support de c_i , coïncide avec celle sur les structures Pin^- de $(\mathbb{R}N)_j$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable ou bien $(\mathbb{R}N)_j$ est non orientable et $\varphi^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$.

Remarquons d'abord que si $\varphi^{l(c_i)}$ préserve les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$ alors on peut homotoper $\Phi^{l(c_i)}$ en un automorphisme de $(\mathbb{R}N)_j$ qui relève l'identité sur $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$. Or l'action d'un tel automorphisme est la même sur les structures Pin^+ et Pin^- .

Supposons maintenant que $\varphi^{l(c_i)}$ échange les orientations de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_j$. On choisit un isomorphisme entre $(\mathbb{R}N)_j$ et le modèle $[0, 1] \times \mathbb{R}^n / (0, v) \sim (1, rv)$, où r est l'identité si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, et la symétrie orthogonale d'axe $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ sinon. L'automorphisme $\Phi_{|(\mathbb{R}N)_j}^{l(c_i)}$ induit un automorphisme f du modèle, et quitte à l'homotoper, on peut supposer qu'il est de la forme $f(t, v) = (1 - t, f_t(v))$ où f_t est un élément de $O_n(\mathbb{R})$ et $f_0 = r f_1 r$. Or, deux relevés de $t \mapsto 1 - t$ diffèrent d'un automorphisme au-dessus de l'identité et on sait que ces derniers agissent de la même manière sur les structures Pin^+ et Pin^- . Il suffit donc d'étudier l'action de l'automorphisme $g : (t, v) \mapsto (1 - t, v)$ sur les structures Pin^+ et Pin^- de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n / (0, v) \sim (1, rv)$.

Notons $\pi_{\pm} : Pin_n^{\pm}(\mathbb{R}) \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ les revêtements doubles et considérons les structures Pin^{\pm} sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^n / (0, v) \sim (1, rv)$ données par $[0, 1] \times Pin_n^{\pm}(\mathbb{R}) / (0, p) \sim (1, e_1^{\pm} p) \xrightarrow{\pi_{\pm}^{\pm}} [0, 1] \times O_n(\mathbb{R}) / (0, v) \sim (1, rv)$ avec $\pi_{\pm}(e_1^{\pm}) = r$. Un relevé \tilde{g}^{\pm} de g au niveau des structures Pin^{\pm} doit vérifier pour tout $p \in Pin_n^{\pm}(\mathbb{R})$, $g \circ \pi_{\pm}(p) = \pi_{\pm} \circ \tilde{g}^{\pm}(p)$. Donc les seuls relevés possibles de g sont $\tilde{g}^{\pm} : (t, p) \mapsto (1 - t, p)$ ou $\tilde{g}^{\pm} : (t, p) \mapsto (1 - t, -p)$.

Or ces relevés doivent aussi vérifier pour tout $p \in Pin_n^{\pm}(\mathbb{R})$, $\tilde{g}_0^{\pm}(p) = e_1^{\pm} \tilde{g}_1^{\pm}(e_1^{\pm} p)$. Mais ceci n'est possible que si $e_1^{\pm} e_1^{\pm} = 1$. Ainsi, si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable g préserve les structures Pin^{\pm} , et si $(\mathbb{R}N)_j$ n'est pas orientable, g préserve les structures Pin^+ mais pas les structures Pin^- . □

Remarque 1.1. — Notons que si Φ est un élément de $\mathbb{R}Aut(N)$, la valeur de $\varepsilon(\Phi_{\mathfrak{p}^+})$ calcule aussi l'action de Φ sur $\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) = \bigotimes_{i=1}^k Pin^+(\mathbb{R}N)_i$.

Étant donné un difféomorphisme réel φ de (Σ_g, c_Σ) , on définit l'automorphisme $\Phi_\varphi \in \mathbb{R}Aut(\mathbb{C}^n)$ au-dessus de φ par

$$\Phi_\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x, v) & \mapsto & (\varphi(x), v). \end{array}$$

Lemme 1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons un fibré L en droites réelles au-dessus d'un cercle. Alors le fibré $L \oplus \mathbb{R}^{\oplus n}$ admet une structure Pin^+ naturelle. En particulier, tout automorphisme de $L \oplus \mathbb{R}^{\oplus n}$ de la forme $\Phi_L \oplus \Phi_1 \oplus \dots \oplus \Phi_n$, où $(\Phi_L, \varphi) \in Aut(L)$ et $(\Phi_i, \varphi) \in Aut(\mathbb{R})$, préserve cette structure.*

Démonstration. Fixons un isomorphisme entre L et $[0, 1] \times \mathbb{R}/(0, v) \sim (1, rv)$, où r vaut 1 si L est orientable et -1 sinon. Notons qu'on a en particulier orienté S^1 . Fixons une fois pour toutes un relevé e de -1 dans $Pin^+(\mathbb{R})$. Lorsque L est orientable, on lui associe la structure Pin^+ donnée par $[0, 1] \times Pin^+(\mathbb{R})/(0, p) \sim (1, p)$. Dans le cas contraire on prend $[0, 1] \times Pin^+(\mathbb{R})/(0, p) \sim (1, ep)$. On obtient alors une structure Pin^+ sur $L \oplus \mathbb{R}^{\oplus n}$ par stabilisation (voir [17]).

Pour vérifier l'indépendance par rapport au choix initial d'isomorphisme, il suffit de vérifier qu'un automorphisme du modèle agit trivialement sur les structures Pin^+ . Un tel automorphisme à homotopie près est soit l'identité, soit -1 , soit $(t, v) \mapsto (1 - t, v)$, soit un produit des deux derniers. Or, ces trois automorphismes fixent bien les structures Pin^+ de L . \square

Remarque 1.2. — Insistons sur le fait que le Lemme 1.2 n'est plus vrai si l'on remplace Pin^+ par Pin^- .

Énonçons maintenant la Proposition 1.2 qui permet de décomposer le signe de l'action d'un automorphisme sur les orientations de $\text{Det}(N)$ en trois termes.

Proposition 1.2. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang au moins deux sur (Σ_g, c_Σ) et $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$. Alors le signe de l'action de Φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est égal au produit du signe de l'action de $\det(\Phi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ et du signe de l'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$ si et seulement si $\varepsilon(\Phi_{\mathfrak{p}^+}) = 1$.*

Démonstration. Fixons tout d'abord une structure Pin^+ sur chaque composante de $\mathbb{R}N$. Prenons alors un isomorphisme $f : (N, c_N) \rightarrow (\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1}, c_{\det(N)} \oplus c_{\mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1}})$ envoyant les structures Pin^+ fixées sur $\mathbb{R}N$ sur celles données par le Lemme 1.2, et dont le déterminant vaut 1.

Supposons dans un premier temps que Φ préserve les structures Pin^+ fixées. L'automorphisme Φ a même action sur les orientations de $\text{Det}(N)$ que $f \circ \Phi \circ f^{-1}$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$. Écrivons maintenant

$$f \circ \Phi \circ f^{-1} = (\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi) \circ \left((\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)^{-1} \circ f \circ \Phi \circ f^{-1} \right).$$

L'automorphisme $g = (\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)^{-1} \circ f \circ \Phi \circ f^{-1}$ est au-dessus de l'identité et préserve les structures Pin^+ naturelles données par le Lemme 1.2. De plus, l'action de $\det(g) = \det(\Phi)^{-1} \circ \det(f) \circ \det(\Phi) \circ \det(f)^{-1}$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ est triviale. Donc

l'action de g sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$ est triviale d'après le Lemme 3.1 de [6]. Ainsi, le signe de l'action de Φ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est le même que celui de l'action de $(\det(\Phi) \oplus \Phi_\varphi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$, lequel est donné par le produit du signe de l'action de $\det(\Phi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ et du signe de l'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C}^{\oplus \text{rg}(N)-1})$.

Dans le cas général, on écrit $\Phi = f \circ \Phi'$, où $f \in \mathbb{R}SL(N)$ et $\Phi' \in \mathbb{R}Aut(N)$ préserve les structures Pin^+ fixées sur $\mathbb{R}N$, puis on conclut grâce au Théorème 2.1 de [6]. \square

Remarque 1.3. — Nous n'imposons pas dans les hypothèses de la Proposition 1.2 que la partie réelle de la courbe est non vide contrairement au Lemme 3.1 et au Théorème 2.1 de [6] que nous utilisons dans la démonstration ci-dessus. Toutefois, dans le cas d'une courbe de partie réelle vide, ces deux derniers résultats sont encore vrais et découlent du fait qu'alors le groupe $\mathbb{R}SL(N)$ est connexe (voir le Lemme 1.2 de [6]).

L'action de Φ_φ sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C}^n)$ est étudiée dans le §1.2.1, et le cas du rang 1 est traité au §1.3.

1.2 Action du groupe des difféotopies réel sur l'espace de Teichmüller réel

1.2.1 Les cas des fibrés trivial et canonique

Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle et considérons tout d'abord le fibré vectoriel complexe trivial de rang $n \geq 1$, \mathbb{C}^n muni de la structure réelle naturelle notée $conj$. Notons $s_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{R}GL(\mathbb{C}^n) \rightarrow \{-1, 1\}$ le morphisme calculant l'action du déterminant d'un élément de $\mathbb{R}GL(\mathbb{C}^n)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ (voir le §3 de [6] pour son étude). Pour tout difféomorphisme réel φ de (Σ_g, c_Σ) , le déterminant de l'automorphisme Φ_φ nous fournit une section réelle du fibré $(\varphi^*(\mathbb{C}, conj)) \otimes (\mathbb{C}, conj)^*$ qui devient donc isomorphe à $(\mathbb{C}, conj)$. Ainsi, on peut étendre $s_{\mathbb{C}^n}$ à tout $\mathbb{R}Aut(\mathbb{C}^n)$.

D'autre part, un difféomorphisme réel φ de (Σ_g, c_Σ) induit un automorphisme φ^* du lagrangien $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$.

Proposition 1.3. *Le signe de l'action d'un élément (Φ, φ) de $\mathbb{R}Aut(\mathbb{C}^n)$ sur les orientations du fibré déterminant $\text{Det}(\mathbb{C}^n)$ est donné par*

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}\pm}(\Phi) s_{\mathbb{C}^n}(\Phi) \det(\varphi^*)^n \in \{-1, 1\}. \quad (\varepsilon)$$

La Proposition 1.3 correspond au cas particulier du fibré trivial et du diviseur nul dans le Théorème 1.2. Notons que les deux premiers termes $\varepsilon_{\mathfrak{p}\pm}(\Phi)$ et $s_{\mathbb{C}^n}(\Phi)$ sont analogues à ceux obtenus dans [6], et ne font pas intervenir le difféomorphisme φ , au contraire du troisième terme $\det(\varphi^*)^n$.

Commençons par quelques remarques. La projection $(\bar{\partial}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \mapsto J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ admet une section naturelle $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g) \mapsto (\bar{\partial}_J^{\oplus n}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$, où $\bar{\partial}_J = \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J)$. Le fibré déterminant est donc défini sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$, et est encore trivialisable sur cet espace qui est contractile. De plus, il s'écrit

$$\text{Det}(\mathbb{C}^n)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} = \left(\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \otimes \left(\Lambda^g \mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \right)^* \right)^{\otimes n}$$

où $\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ et $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ sont les fibrés sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibres respectives $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ et $H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ au-dessus de J . D'autre part, comme $(\Phi_\varphi)^*(\bar{\partial}_J, J) = (\bar{\partial}_{\varphi^*J}, \varphi^*J)$, l'action de l'automorphisme Φ_φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C}^n)$ est donnée par son action sur celles de $\text{Det}(\mathbb{C}^n)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat intermédiaire suivant.

Lemme 1.3. *Nous avons un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n},$$

où $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$ est le fibré trivial au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}$, tel que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n} \\ (\Phi_\varphi)_* \downarrow & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \\ \text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n} \end{array} \quad (*)$$

commute.

Démonstration. D'une part, l'évaluation des fonctions J -holomorphes réelles sur (Σ_g, c_Σ) donne un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1} \xrightarrow{ev} \mathbb{R}$$

qui nous permet de dire que Φ_φ agit trivialement sur la partie $\mathcal{H}^0(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1}$. D'autre part, nous avons par dualité de Serre

$$\left(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1}\right)^* \cong \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1},$$

où $\mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}$ est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H^0(\Sigma_g, K_{\Sigma, J})_{-1}$ au-dessus de J , et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1})^* & \xrightarrow{\text{Serre}} & \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} \\ \downarrow {}^t(\Phi_\varphi)^* & & \downarrow (d\varphi^{-1})^* \\ (\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1})^* & \xrightarrow{\text{Serre}} & \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}. \end{array}$$

Enfin, l'intégration des $(1,0)$ -formes J -holomorphes le long des lacets sur Σ_g définit une dualité

$$\mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} \times \mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1} \rightarrow i\mathbb{R},$$

où $\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$ est le fibré trivial sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$, et nous avons à nouveau un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} & \longrightarrow & (\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})^* \\ (d\varphi^{-1})^* \downarrow & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \\ \mathcal{H}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1} & \longrightarrow & (\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})^* \end{array}$$

qui commute grâce à la formule du changement de variables pour $\omega \in H_{\partial K_\Sigma, J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)$ et $c \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$

$$\int_c \omega \circ d\varphi^{-1} = \int_{\varphi_*^{-1}c} \omega.$$

Tout compte fait, nous avons un isomorphisme

$$\text{Det}(\underline{\mathbb{C}}^n)_{|\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n}$$

et le diagramme $(*)$ commute bien. \square

Démonstration de la Proposition 1.3. Vérifions le résultat tout d'abord pour un automorphisme de la forme Φ_φ avec $\varphi \in \mathbb{R}Dif f^+(\Sigma_g)$. Par construction, nous avons $\varepsilon_{\mathbb{p}^\pm}(\Phi_\varphi) = 1$ et $s_{\mathbb{C}^n}(\Phi_\varphi) = 1$. Le signe topologique (ε) est donc simplement égal à $\det(\varphi^*)^n$.

D'autre part, le Lemme 1.3 nous montre que l'action de Φ_φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C}^n)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$ est la même que celle de $(\varphi^{-1})^*$ sur $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes n}$. On retrouve ainsi le signe (ε) pour Φ_φ .

Pour un automorphisme $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(\mathbb{C}^n)$ quelconque, on commence par le décomposer en $f \circ \Phi_\varphi$, où $f \in \mathbb{R}GL(\mathbb{C}^n)$. Or, nous avons déjà calculé le signe de l'action de Φ_φ , et le signe de celle de f est donné par $\varepsilon_{\mathbb{p}^\pm}(f)s_{\mathbb{C}^n}(f)$. Le produit des deux signes nous donne le résultat voulu. \square

Remarque 1.4. — Le Lemme 1.3 nous permet de préciser le résultat obtenu dans la Proposition 1.2. Nous obtenons en effet que le signe de l'action d'un automorphisme $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ est le produit de $\varepsilon_{\mathbb{p}^+}(\Phi)$ par $\det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)-1}$ et par le signe de l'action de $\det(\Phi)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$. Il reste encore à décrire cette dernière action, ce que nous faisons au §1.3.

Lemme 1.4. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(K_\Sigma)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}),$$

où $\text{Det}(K_\Sigma)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$ est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $\Lambda^g H^0(\Sigma_g, K_{\Sigma, J})_{+1} \otimes (H^1(\Sigma_g, K_{\Sigma, J})_{+1})^*$ au-dessus de J , tel que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}Dif f^+(\Sigma_g)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(K_\Sigma)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \\ (d\varphi^{-1})^* \downarrow & & \downarrow (\varphi^{-1})^* \\ \text{Det}(K_\Sigma)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \end{array}$$

commute.

Démonstration. On procède comme dans le Lemme 1.3, sans avoir besoin de la dualité de Serre. \square

1.2.2 Action des difféomorphismes sur $\text{Det}(T\Sigma_g)$

Le Lemme 1.4 permet aussi d'étudier le cas du fibré tangent à la courbe réelle. Rappelons pour cela qu'étant donné un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}$ sur un fibré vectoriel complexe (N, c_N) , on a un opérateur $\bar{\partial}^*$ sur (N^*, c_{N^*}) défini par

$$(\bar{\partial}^* \alpha)(v) = \bar{\partial}_J(\alpha(v)) - \alpha(\bar{\partial}v), \quad (*)$$

pour $\alpha \in \Gamma(\Sigma_g, N^*)$ et $v \in \Gamma(\Sigma_g, N)$.

Lemme 1.5. *L'opérateur $\bar{\partial}^*$ est bien défini et est un élément de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N^*)$. Par exemple, pour les fibrés $T\Sigma_{g, J}$ et $K_{\Sigma, J}$, on a*

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{T\Sigma, J}^* &= \frac{1}{2}(\nabla^J + J \circ \nabla^J \circ J), \\ \bar{\partial}_{K\Sigma, J}^* &= \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J), \\ \bar{\partial}_{T\Sigma, J}^* &= \bar{\partial}_{K\Sigma, J}^*, \end{aligned}$$

où ∇^J est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique induite par J .

Démonstration. Fixons $\alpha \in \Gamma(\Sigma_g, N^*)$. Il nous faut vérifier que $\bar{\partial}^* \alpha$ tel que donné par l'égalité (*) ne dépend que de la valeur en chaque point de la section $v \in \Gamma(\Sigma_g, N)$. Prenons pour cela une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J(\alpha(fv)) - \alpha(\bar{\partial}(fv)) &= \alpha(v)\bar{\partial}_J(f) + f\bar{\partial}_J(\alpha(v)) - \alpha(\bar{\partial}_J(f)v) - f\alpha(\bar{\partial}v) \\ &= f(\bar{\partial}_J(\alpha(v)) - \alpha(\bar{\partial}v)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{\partial}^* \alpha$ est bien défini. La formule de Leibniz se montre de la même façon.

D'autre part, une métrique associée à J s'écrit $\lambda(z)dz \otimes d\bar{z}$ dans des coordonnées locales holomorphes. On vérifie alors que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}^J \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}$ et $\nabla_{i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}}^J \frac{\partial}{\partial z} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}$. Ainsi, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}^J + i \circ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \circ i = 0$. Donc la structure holomorphe sur $T\Sigma_{g,J}$ est induite par l'opérateur $\bar{\partial}_{T\Sigma,J} = \frac{1}{2}(\nabla^J + J \circ \nabla^J \circ J)$.

Enfin, toujours dans des coordonnées locales holomorphes, on prend $\omega = wdz$ et $\xi = s \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et on calcule

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_J(\omega(\xi)) &= \bar{\partial}_J(ws) \\ &= w\bar{\partial}_J(s) + \bar{\partial}_J(w)s \\ &= \omega(\bar{\partial}_{T\Sigma,J}\xi) + (\bar{\partial}_{K\Sigma,J}\omega)(\xi), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{\partial}_{T\Sigma,J}^* = \bar{\partial}_{K\Sigma,J}$. □

Comme on a une bijection entre $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ et $\mathbb{R}\mathcal{C}(N^*)$ on peut comparer les fibrés $\text{Det}(N)$ et $\text{Det}(N^*)$, ce qui est l'objet de la Proposition 1.4.

Proposition 1.4. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Supposons que $\mathbb{R}N$ est orientable. On a un isomorphisme canonique $\text{Det}(N) = \text{Det}(N^*)^*$, où $\text{Det}(N^*)^*$ est défini au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ grâce à la correspondance $\bar{\partial} \mapsto \bar{\partial}^*$.*

En particulier, si (Φ, φ) est un automorphisme de (N, c_N) alors son action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est la même que celle de $({}^t\Phi^{-1}, \varphi)$ sur les orientations de $\text{Det}(N^)$.*

Démonstration. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus N^* \rightarrow N^* \rightarrow 0.$$

Grâce à la correspondance $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N) \mapsto \bar{\partial}^* \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N^*)$, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) = \text{Det}(N \oplus N^*) \otimes \text{Det}(N^*)^*,$$

où la fibre de $\text{Det}(N \oplus N^*)$ au dessus de $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ est $\text{Det}(\bar{\partial} \oplus \bar{\partial}^*)$.

De plus, nous avons des structures *Spin* naturelles sur chaque composante de $\mathbb{R}N \oplus \mathbb{R}N^*$ données de la façon suivante. Fixons une structure *Spin* sur une composante $(\mathbb{R}N)_i$. Celle-ci induit une décomposition de $(\mathbb{R}N)_i$ en somme directe de fibrés en droites réelles orientables définie à homotopie près. Par dualité, on obtient alors, à homotopie près, une décomposition en somme directe de fibrés en droites réelles orientables de $(\mathbb{R}N)_i \oplus (\mathbb{R}N^*)_i$ ainsi qu'une orientation canonique sur ce même fibré. Nous avons donc une structure *Spin* sur $(\mathbb{R}N)_i \oplus (\mathbb{R}N^*)_i$. De plus, cette structure ne dépend pas du choix de structure fait sur $(\mathbb{R}N)_i$.

Prenons alors un isomorphisme $f : N \oplus N^* \rightarrow \mathbb{C}^{2\text{rg}(N)}$ tel que

- $\det(f) : \det(N \oplus N^*) = \mathbb{C} \rightarrow \det(\mathbb{C}^{2\text{rg}(N)}) = \mathbb{C}$ vaut 1 et
- f envoie la structure *Spin* naturelle de chaque composante $\mathbb{R}N \oplus \mathbb{R}N^*$ sur celle naturelle de la composante correspondante de $\mathbb{R}(\mathbb{C}^{2\text{rg}(N)})$.

Remarquons qu'un tel isomorphisme est uniquement défini à homotopie près : un autre tel isomorphisme différerait de f par multiplication à droite par un automorphisme de $\underline{\mathbb{C}}^{2\text{rg}(N)}$ de déterminant 1 et préservant les structures $Spin$ sur $\mathbb{R}(\underline{\mathbb{C}}^{2\text{rg}(N)})$. Or d'après le Lemme 1.2 de [6] ces automorphismes sont homotopes à l'identité.

Nous avons ainsi grâce à la Proposition 1.3 un isomorphisme canonique entre $\text{Det}(N \oplus N^*)$ et $\det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\otimes 2\text{rg}(N)}$. Comme ce dernier fibré est canoniquement trivial, nous obtenons l'isomorphisme voulu dans l'énoncé. \square

Remarque 1.5. — Insistons sur une conséquence de la Proposition 1.4. Si (N, c_N) et $(N', c_{N'})$ sont deux fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) , $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ et $\bar{\partial}' \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N')$ alors on n'a pas en général d'isomorphisme canonique $\text{Det}(\bar{\partial} \otimes \bar{\partial}') = \text{Det}(\bar{\partial}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}')$. En effet, en prenant N de rang 1, $N' = N^*$ et $\bar{\partial}' = \bar{\partial}^*$, l'action d'un élément de $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N) \otimes \text{Det}(N^*)$ est triviale d'après la Proposition 1.4, alors que l'automorphisme induit sur $N \otimes N^* = \underline{\mathbb{C}}$ est Φ_φ dont l'action sur les orientations de $\text{Det}(N \otimes N^*) = \text{Det}(\underline{\mathbb{C}})$ est donnée par $\det(\varphi^*)$ d'après la Proposition 1.3.

Nous avons comme corollaire immédiat du Lemme 1.4 et de la Proposition 1.4 le résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Nous avons un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(T\Sigma_g)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} \cong \det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}),$$

où $\text{Det}(T\Sigma_g)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)}$ est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre $H^0(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{+1} \otimes (\Lambda^{\max} H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{+1})^*$ au-dessus de J , tel que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(T\Sigma_g)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}) \\ \text{d}\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \text{Det}(T\Sigma_g)|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} & \longrightarrow & \det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}) \end{array}$$

commute. \square

1.2.3 Espace de Teichmüller réel

Afin de simplifier l'exposé, nous supposons dans ce paragraphe que les courbes considérées sont de genre au moins deux. Nous commençons par rappeler quelques faits concernant l'espace de Teichmüller réel associé à une courbe réelle (Σ_g, c_Σ) (voir en particulier [22] et [9]).

Le groupe $Diff(\Sigma_g)$ des difféomorphismes de Σ_g agit sur l'ensemble $J(\Sigma_g)$ des structures complexes sur Σ_g par tiré en arrière :

$$(\varphi, J) \in Diff(\Sigma_g) \times J(\Sigma_g) \mapsto \varphi^*J = s(\varphi)d\varphi^{-1} \circ J \circ d\varphi, \quad (*)$$

où $s(\varphi)$ vaut 1 lorsque $\varphi \in Diff^+(\Sigma_g)$ et -1 sinon.

Définition 1.1. *L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma_g)$ associé à la surface compacte orientée Σ_g est le quotient de l'ensemble des structures complexes de Σ_g compatibles avec son orientation par l'action du sous-groupe $Diff_0(\Sigma_g)$ de $Diff(\Sigma_g)$ formé des difféomorphismes homotopes à l'identité,*

$$\mathcal{T}(\Sigma_g) = J(\Sigma_g)/Diff_0(\Sigma_g).$$

L'espace de Teichmüller réel associé à la courbe réelle (Σ_g, c_Σ) est le quotient de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ par l'action du sous-groupe $\mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ de $Diff_0(\Sigma_g)$ formé des difféomorphismes homotopes à l'identité qui commutent avec c_Σ ,

$$\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma) = \mathbb{R}J(\Sigma_g) / \mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g).$$

Lemme 1.6. Soit $\varphi \in Diff_0(\Sigma_g)$. S'il existe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ telle que $\varphi^*J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, alors φ commute avec c_Σ .

Démonstration. Comme $\varphi^*J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ c_\Sigma \circ \varphi^{-1})^*J &= (\varphi^{-1})^*(c_\Sigma)^*(\varphi^*J) \\ &= (\varphi^{-1})^*\varphi^*J \\ &= J. \end{aligned}$$

Le difféomorphisme $c_\Sigma \circ \varphi \circ c_\Sigma \circ \varphi^{-1}$ est donc un automorphisme pour J . Il est de plus homotope à l'identité. Ainsi $c_\Sigma \circ \varphi \circ c_\Sigma \circ \varphi^{-1} = id$, et $c_\Sigma \circ \varphi = \varphi \circ c_\Sigma$. \square

Le Lemme 1.6 nous assure que l'inclusion $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow J(\Sigma_g)$ induit une injection de $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ dans $\mathcal{T}(\Sigma_g)$. De plus, l'image de cette application est contenue dans le lieu fixe $\mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma} \subset \mathcal{T}(\Sigma_g)$ de l'action de c_Σ sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ induite par $(*)$.

Proposition 1.5. (Kravetz [18]) L'espace $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est homéomorphe à la boule unité ouverte d'un espace vectoriel réel normé de dimension $3g - 3$.
(Earle [9]) L'injection $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$ est un homéomorphisme.

L'espace de Teichmüller réel est donc contractile et hérite d'une structure de variété analytique réelle venant de celle de $\mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$. En particulier, l'espace de Teichmüller réel associé à une courbe réelle est toujours orientable.

D'autre part, l'action du groupe $Diff^+(\Sigma_g)$ (resp. $\mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$) sur $J(\Sigma_g)$ (resp. sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$) descend en une action du groupe des difféotopies (resp. du groupe des difféotopies réel) sur l'espace de Teichmüller (resp. réel).

Définition 1.2. Le groupe $\Gamma(\Sigma_g)$ des difféotopies de Σ_g est l'ensemble des classes d'homotopie de difféomorphismes de Σ_g préservant l'orientation fixée,

$$\Gamma(\Sigma_g) = Diff^+(\Sigma_g) / Diff_0(\Sigma_g).$$

Le groupe $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ des difféotopies réel de (Σ_g, c_Σ) est l'ensemble des classes d'homotopie de difféomorphismes réels de (Σ_g, c_Σ) préservant l'orientation fixée,

$$\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma) = \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g) / \mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g).$$

Nous avons à nouveau une action de c_Σ sur $\Gamma(\Sigma_g)$ par conjugaison. Notons $\Gamma(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$ son lieu fixe.

Lemme 1.7. L'inclusion naturelle $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Sigma_g)$ a pour image $\Gamma(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$.

Démonstration. Fixons un difféomorphisme $\varphi \in \Gamma(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$ et montrons qu'il est homotope à un difféomorphisme réel. Choisissons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Alors par définition, il existe $\psi \in Diff_0(\Sigma_g)$ tel que

$$c_\Sigma \circ \varphi \circ c_\Sigma = \varphi \circ \psi,$$

et

$$(c_\Sigma)^* \varphi^* J = (c_\Sigma)^* \varphi^* (c_\Sigma)^* J = \psi^* \varphi^* J.$$

Donc $\varphi^* J$ est un élément de $\mathcal{T}(\Sigma_g)_{c_\Sigma}$. D'après la Proposition 1.5, il existe un difféomorphisme γ homotope à l'identité tel que $\gamma^* \varphi^* J$ est réelle. Alors, le difféomorphisme $((\varphi \circ \gamma) \circ c_\Sigma) \circ (c_\Sigma \circ (\varphi \circ \gamma))^{-1}$ est un automorphisme pour la structure complexe J et est homotope à l'identité. Comme la surface Σ_g est de genre au moins deux, ce difféomorphisme est égal à l'identité. D'où $(\varphi \circ \gamma) \circ c_\Sigma = c_\Sigma \circ (\varphi \circ \gamma)$. Ainsi φ est homotope à $\varphi \circ \gamma$ qui est réel. \square

Remarquons avant de poursuivre que l'on pourrait aussi définir les groupes de difféotopies en considérant les difféomorphismes à isotopie près. Il n'est pas évident a priori que l'on obtienne les mêmes groupes. C'est l'objet de la Proposition 1.6.

Proposition 1.6 (Earle-Eells [10]). *Les groupes $\mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ et $\mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ sont les composantes connexes de l'identité des groupes $Diff(\Sigma_g)$ et $\mathbb{R}Diff(\Sigma_g)$.*

Théorème 1.1. *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle de genre au moins deux. Le fibré des orientations de $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est canoniquement isomorphe au fibré trivial $\det(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1})$.*

En particulier, l'action d'un élément φ de $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ sur les orientations de l'espace de Teichmüller réel associé à (Σ_g, c_Σ) est donnée par le signe du déterminant de l'application $\varphi_ : H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1} \rightarrow H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}$.*

Commençons par décrire le fibré tangent à $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.

Lemme 1.8. *Le fibré tangent à $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est le fibré $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$ de fibre $H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}$ au-dessus de $J \in \mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.*

Démonstration. D'après [26], la fibre du tangent à $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ au point J est

$$\Gamma(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1} \Sigma_g \otimes T\Sigma_{g,J})_{-1} = \{ \dot{J} \in \Gamma(\Sigma_g, \text{End}(T\Sigma_g)) \mid \begin{array}{l} J\dot{J} = -\dot{J}J, \\ -dc_\Sigma \circ \dot{J} \circ dc_\Sigma = \dot{J} \}. \end{array}$$

Il nous reste à voir quelle est l'action de l'algèbre de Lie de $\mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ sur cet espace. Prenons un chemin $\varphi_t \in \mathbb{R}Diff_0(\Sigma_g)$ tel que $\varphi_0 = \text{id}$ et $\frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0} = X \in \Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$. Notons ∇^J la connexion de Levi-Civita pour une métrique associée à J . Dérivons en zéro le chemin $\varphi_t^* J$:

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi_t^* J)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d(d\varphi_t^{-1} \circ J \circ d\varphi_t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= -(\nabla^J X) \circ J + J \circ (\nabla^J X) \\ &= J \bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}} X \\ &= \bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}(JX), \end{aligned}$$

car ∇^J est sans torsion, $\nabla^J J = 0$ et $\bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}$ est \mathbb{C} -linéaire. Or la multiplication par J est un isomorphisme entre $\Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$ et $\Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$. Ainsi, la fibre du tangent à $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ est le quotient

$$\Gamma(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1} \Sigma_g \otimes T\Sigma_{g,J})_{-1} / \bar{\partial}_{T\Sigma_{g,J}}(\Gamma(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}) = H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}.$$

\square

Démonstration du Théorème 1.1. D'après le Lemme 1.8, on souhaite étudier l'action du groupe des difféotopies réel sur les orientations du fibré $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$ au-dessus de l'espace de Teichmüller réel. Or, la multiplication par J donne un isomorphisme entre $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{-1}$ et $\mathcal{H}^1(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$. Le Théorème découle maintenant du Lemme 1.1. \square

Le Théorème 1.1 permet de calculer comme corollaire immédiat la première classe de Stiefel-Whitney du quotient $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)/\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$.

Définition 1.3. *L'espace des modules $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}$ des courbes de genre g admettant une involution anti-holomorphe dont la partie réelle est séparante (resp. non séparante) si $\varepsilon = 1$ (resp. si $\varepsilon = 0$) et a k composantes connexes est le quotient*

$$\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon} = \mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)/\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma),$$

où (Σ_g, c_Σ) est de type topologique (g, k, ε) .

Toutefois, l'action de $\Gamma(\Sigma_g, c_\Sigma)$ sur $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$ n'est pas libre, et le quotient a des singularités qui correspondent à des courbes ayant des automorphismes.

Proposition 1.7. *Si g est strictement plus grand que trois alors l'ensemble des structures complexes sur (Σ_g, c_Σ) admettant au moins un automorphisme réel non trivial est de codimension au moins deux dans $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$.*

Démonstration. On rappelle simplement rapidement le schéma de la preuve (pour plus de détails, on pourra lire Arbarello-Cornalba-Griffiths [1] Chapter XII, Proposition (2.5)).

Soit J est une structure complexe sur (Σ_g, c_Σ) admettant un automorphisme φ d'ordre premier $p > 1$. Alors, le groupe des automorphismes réels de J agit linéairement sur un voisinage de J dans $\mathcal{T}(\Sigma_g, c_\Sigma)$, et la dimension du sous-espace sur lequel φ se propage est égale à la dimension d de $H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}^\varphi$ qui est le sous espace vectoriel de $H^1(\Sigma_g, T\Sigma_{g,J})_{-1}$ formé des éléments φ -invariants. En notant g' le genre de la courbe Σ_g/φ et h le nombre de points ramifiés de la projection, on obtient

$$d = 3g' - 3 + h.$$

La formule de Riemann-Hurwitz donne aussi

$$3g - 3 - d = (p - 1)(3g' - 3) + \frac{1}{2}h(3p - 5).$$

On conclut en étudiant les différents cas selon le genre g' . □

Notons $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}$ formé des courbes sans automorphisme.

Corollaire 1.2. *Pour $g \geq 4$, la première classe de Stiefel-Whitney de $\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}^*$ est donnée par*

$$w_1(\mathcal{M}_{g,k,\varepsilon}^*) = w_1(\mathcal{H}_1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{+1}).$$

□

1.3 Automorphismes et diviseurs

1.3.1 Opérateurs de Cauchy-Riemann et diviseurs

Nous passons maintenant au cas général d'un fibré en droites complexes (N, c_N) muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Fixons un diviseur $D = \sum_i a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ et $x_i \in \Sigma_g$, invariant par c_Σ et tel que

- D est de degré $\deg(N)$ et
- pour chaque composante réelle $(\mathbb{R}\Sigma_g)_s$ de Σ_g , la parité du degré du diviseur $D|_{(\mathbb{R}\Sigma_g)_s} = \sum_{x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_s} a_i x_i$ est donnée par $w_1(\mathbb{R}N)|_{(\mathbb{R}\Sigma_g)_s}$.

On dira qu'un tel diviseur est compatible avec (N, c_N) .

Le diviseur D nous fournit des sections privilégiées de la projection $(\bar{\partial}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N) \mapsto J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$.

Définition 1.4. Une section $\bar{\partial}_D : J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g) \mapsto (\bar{\partial}, J) \in \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ sera dite associée à D si pour chaque $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ le fibré $(N, \bar{\partial}_{D,J})$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\Sigma_g, J}(D)$.

Une section $\bar{\partial}_D$ associée à D induit un fibré en droites réelles sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ dont la fibre au-dessus de $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est l'ensemble des sections méromorphes réelles de $(N, c_N, \bar{\partial}_{D,J})$ ayant D pour diviseur. Comme $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile, ce fibré en droites est orientable. Un couple formé d'une section $\bar{\partial}_D$ associée à D et d'une orientation du fibré en droite induit sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est appelé section polarisée associée à D , et on le notera $\bar{\partial}_D^+$.

Remarque 1.6. — Le quotient de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ par l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ est le groupe de Picard universel $\mathbb{R}Pic_{w_1(\mathbb{R}N)}^{\deg(N)}(\Sigma_g)$, qui est un fibré principal sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ dont le groupe est la Jacobienne réelle de (Σ_g, c_Σ) . À un diviseur D compatible avec (N, c_N) est associée une section $\mathcal{O}_{\Sigma_g}(D) : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}Pic_{w_1(\mathbb{R}N)}^{\deg(N)}(\Sigma_g)$ de ce fibré. Le sous-ensemble $\mathbb{R}\mathcal{C}_D(N)$ des éléments de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ qui se projettent sur cette section forme un fibré principal sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de groupe $\mathbb{R}GL(N)/\mathbb{R}^*$. Nous avons donc la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\mathcal{C}_D(N) & \longleftarrow & \mathbb{R}\mathcal{C}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}Pic_{w_1(\mathbb{R}N)}^{\deg(N)}(\Sigma_g) \\ & & \searrow & & \nearrow \\ & & \mathbb{R}J(\Sigma_g) & & \\ & \swarrow \bar{\partial}_D & & \searrow \mathcal{O}_{\Sigma_g}(D) & \end{array}$$

Autrement dit, les sections associées à D sont les sections du fibré $\mathbb{R}\mathcal{C}_D(N) \rightarrow \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. En particulier, pour chaque structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, il existe un voisinage $J \in V \subset \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, des familles continues de coordonnées locales J' -holomorphes $(\zeta_{J', x_i})_{J' \in V}$ sur des voisinages disjoints $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariants U_{x_i} des x_i , et une famille continue d'isomorphismes entre $(N, \bar{\partial}_{D, J'}, c_N)_{J' \in V}$ et les fibrés en droites holomorphes réels définis comme le recollement de $(\Sigma_g \setminus \{x_i\}) \times \mathbb{C}$ et $U_{x_i} \times \mathbb{C}$ par les changements de cartes

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma_g \setminus \{x_i\}) \cap U_{x_i} \times \mathbb{C} & \rightarrow & U_{x_i} \cap (\Sigma_g \setminus \{x_i\}) \times \mathbb{C} \\ (z, v) & \mapsto & (z, \zeta_{J', x_i}(z)^{a_i} v). \end{array}$$

Le revêtement double $\mathbb{R}\mathcal{C}_D(N)^+$ de $\mathbb{R}\mathcal{C}_D(N)$ formé des opérateurs polarisés associés à D est un fibré principal sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de groupe $\mathbb{R}GL(N)/\mathbb{R}_+^*$. Ses sections sont les sections polarisées associées à D .

De plus, nous pouvons décrire comment passer d'une section associée à D à une autre.

Lemme 1.9. Si $\bar{\partial}_D$ et $\bar{\partial}'_D$ sont deux familles d'opérateurs de Cauchy-Riemann sur (N, c_N) associées au diviseur D , alors il existe une application continue $F : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(N)$ telle que pour tout J dans $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ on a $\bar{\partial}_{D,J} = F_J^* \bar{\partial}'_{D,J}$. De plus, cette application est unique à multiplication par une fonction continue de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ dans \mathbb{R}^* près.

Si les familles d'opérateurs sont polarisées et que l'on impose que F préserve les polarisations, alors F est défini de façon unique à homotopie près.

Démonstration. Le groupe $\mathbb{R}GL(N)/\mathbb{R}^*$ des automorphismes de N modulo les automorphismes constants agit librement sur $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$. En effet, un élément de $\mathbb{R}GL(N) = \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$

qui préserve un opérateur de Cauchy Riemann sur N est holomorphe, et est donc de la forme $v \in N \mapsto \lambda v \in N$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Par définition, pour chaque J dans $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ il existe un voisinage V de J et une unique application continue $[F]$ de V dans $\mathbb{R}GL(N)/\mathbb{R}^*$ telle que pour tout J' dans V on a $\bar{\partial}_{D,J'} = [F]_{J'}^* \bar{\partial}'_{D,J'}$. Par unicité, $[F]$ est en fait définie sur tout $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Puis, comme $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile $[F]$ admet un relevé dans $\mathbb{R}GL(N)$, c'est-à-dire une application continue $F : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(N)$ telle que pour tout J dans $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ on a $\bar{\partial}_{D,J} = F_J^* \bar{\partial}'_{D,J}$.

Si les deux familles sont polarisées, alors soit F soit $-F$ préserve les polarisations, et deux familles d'automorphismes qui envoient une famille polarisée sur l'autre diffèrent d'une fonction continue sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . \square

Considérons maintenant un quadruplet d'entiers positifs ou nuls $\mathbf{d} = (r^+, r^-, s^+, s^-) \in \mathbb{N}^4$. Nous pouvons alors considérer le sous-ensemble $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$ de $(\mathbb{R}\Sigma_g)^{r^++r^-} \times \Sigma_g^{s^++s^-} \setminus \Delta$, où Δ est la diagonale épaisse, formé des éléments $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{z}^+, \mathbf{z}^-)$, où $\mathbf{z}^+ = (z_1^+, c_\Sigma(z_1^+), \dots, z_{s^+}^+, c_\Sigma(z_{s^+}^+))$ et $\mathbf{z}^- = (z_1^-, c_\Sigma(z_1^-), \dots, z_{s^-}^-, c_\Sigma(z_{s^-}^-))$ et tels que le diviseur $D_{\mathbf{x}} = \sum_{x \in \mathbf{x}^+} x - \sum_{x \in \mathbf{x}^-} x +$

$\sum_{i=1}^{s^+} (z_i^+ + c_\Sigma(z_i^+)) - \sum_{i=1}^{s^-} (z_i^- + c_\Sigma(z_i^-))$ est compatible avec (N, c_N) . Si $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$ est non-vide, on dira que \mathbf{d} est adapté à (N, c_N) .

Considérons le fibré en espace affine $pr_1^* \mathbb{R}\mathcal{C}(N) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\mathbf{d}}$, où $pr_1 : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\mathbf{d}} \rightarrow \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est la première projection. On définit l'ensemble $\mathbb{R}\mathcal{C}_{compat}(N) \subset pr_1^* \mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ dont la fibre au-dessus de \mathbf{x} est $\mathbb{R}\mathcal{C}_{D_{\mathbf{x}}}(N)$. On dira qu'un élément $\bar{\partial}$ de $\mathbb{R}\mathcal{C}_{D_{\mathbf{x}}}(N)$ est polarisé si on a choisi une orientation de la droite réelle formée des sections méromorphes réelles de $(N, c_N, \bar{\partial})$ de diviseur $D_{\mathbf{x}}$.

Lemme 1.10. *L'ensemble $\mathbb{R}\mathcal{C}_{compat}(N)$ est un fibré $\mathbb{R}GL(N)/\mathbb{R}^*$ -principal au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\mathbf{d}}$. Son revêtement double $\mathbb{R}\mathcal{C}_{compat}^+(N)$ formé des opérateurs polarisés est un fibré $\mathbb{R}GL(N)/\mathbb{R}_+^*$ -principal.* \square

Remarque 1.7. — Le groupe $\mathbb{R}Aut(N)$ agit naturellement sur $\mathbb{R}\mathcal{C}_{compat}(N)$. Toutefois, il n'agit pas par automorphisme de fibré principal.

Pour chaque élément \mathbf{x} de $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$, le fibré $\mathbb{R}\mathcal{C}_{D_{\mathbf{x}}}(N)$ au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est trivialisable. Toutefois, le fibré total $\mathbb{R}\mathcal{C}_{compat}(N)$ ne l'est pas. Notons $\mathbb{R}GL(N)^+ \subset \mathbb{R}GL(N)$ le groupe des automorphismes au-dessus de l'identité qui préservent les orientations de $\text{Det}(N)$. Ce groupe est décrit dans [6]. Rappelons simplement le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle et (N, c_N) un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle. Soit $a \subset \Sigma_g$ une courbe simple orientée. On considère les éléments f_a de $\mathbb{R}GL(N)$ de la forme suivante.*

1. *Si a est une composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$, on choisit un voisinage tubulaire réel de a de la forme $(\theta, t) \in S^1 \times [-1, 1]$, où a correspond à $t = 0$ et $c_\Sigma(\theta, t) = (\theta, -t)$. On pose alors $f_a(\theta, t) = -e^{i\pi t}$ sur ce voisinage et on prolonge par 1 en dehors (voir Figure 2).*
2. *Si a est une courbe globalement stable par c_Σ , on choisit un voisinage tubulaire réel de a de la forme $(\theta, t) \in S^1 \times [-1, 1]$, où a correspond à $t = 0$ et $c_\Sigma(\theta, t) = (-\theta, -t)$. On pose alors $f_a(\theta, t) = -e^{i\pi t}$ sur ce voisinage et on prolonge par 1 en dehors (voir Figure 2).*
3. *Si $a \cap c_\Sigma(a) = \emptyset$, on choisit un voisinage tubulaire de a disjoint de son conjugué de la forme $(\theta, t) \in S^1 \times [-1, 1]$, où a correspond à $t = 0$. On pose alors $f_a(\theta, t) = -e^{i\pi t}$*

sur ce voisinage et on prolonge par $\overline{f_a \circ c_\Sigma}$ sur son conjugué et par 1 en dehors (voir Figure 2).

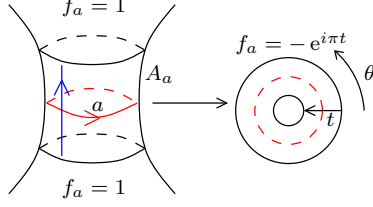


FIGURE 2 – Construction de f_a

Dans le premier cas, f_a est dans $\mathbb{R}GL(N)^+$ si et seulement si $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable au-dessus de a . Dans le second cas, f_a n'est jamais dans $\mathbb{R}GL(N)^+$. Dans le dernier cas, f_a est toujours dans $\mathbb{R}GL(N)^+$. \square

La démonstration de la Proposition 1.8 est essentiellement contenue dans celle de la Proposition 3.3 de [6]. Nous ne supposons pas ici que $\mathbb{R}\Sigma_g$ est non vide, mais les arguments utilisés dans [6] s'appliquent aussi à ce cas.

Définition 1.5. Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle au-dessus de (Σ_g, c_Σ) et soit \mathbf{d} un quadruplet adapté à (N, c_N) . Si la courbe est séparante et si aucune des composantes de $\mathbb{R}N$ n'est orientable, alors on note $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}(N)$ le fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal trivial au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\mathbf{d}}$. Dans tous les autres cas, $\mathbb{R}GL(N)^+$ est d'indice 2 dans $\mathbb{R}GL(N)$ et on considère le fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}(N) = \mathbb{R}C_{\text{compat}}^+(N)/\mathbb{R}GL(N)^+$ au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\mathbf{d}}$.

Notation 1. — Soit D un diviseur réel sur (Σ_g, c_Σ) . Pour un point $x \in \Sigma_g$, on notera $\text{mult}_D(x) \in \mathbb{Z}$ la multiplicité du point x dans le diviseur D . Si D est effectif, on note $\mathbb{R}\mathcal{J}_D$ le fibré vectoriel réel au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ dont la fibre est donnée par

$$\bigoplus_{x \in D|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left(\bigoplus_{m=0}^{\text{mult}_D(x)-1} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^m \right) \oplus \bigoplus_{\{z, \bar{z}\} \in D} \left(\bigoplus_{m=0}^{\text{mult}_D(z)-1} \mathbb{R} \bigoplus_{y \in \{z, \bar{z}\}} (T_y^* \Sigma_g)^m \right).$$

Le \mathbb{R} dans la deuxième somme dénote toujours l'ensemble des points fixes de l'involution induite par c_Σ .

Dans le cas général, on décompose D de façon unique en $D^+ - D^-$, où D^+ et D^- sont effectifs, de supports inclus dans celui de D et dont les points sont de multiplicités minimales, et on pose

$$\mathbb{R}\mathcal{J}_D = \mathbb{R}\mathcal{J}_{D^+} \oplus (\mathbb{R}\mathcal{J}_{D^-})^*.$$

Notons \mathfrak{S}_{2,s^\pm} les sous-groupes des groupes de permutations \mathfrak{S}_{s^\pm} engendrés par les transpositions $(2i-1 \ 2i)$, $1 \leq i \leq s^\pm$, et par les permutations de la forme $2i-1 \mapsto 2\sigma(i)-1$ et $2i \mapsto 2\sigma(i)$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{s^\pm}$. Par définition, le groupe produit $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}} = \mathfrak{S}_{r^+} \times \mathfrak{S}_{r^-} \times \mathfrak{S}_{2,s^+} \times \mathfrak{S}_{2,s^-}$ agit naturellement et librement sur $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$. On notera $\Sigma_g^{(\mathbf{d})}$ le quotient $\Sigma_g^{\mathbf{d}}/\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}$. On obtient un fibré vectoriel réel $\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d})}$ au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\mathbf{d})}$ pour chaque \mathbf{d} . D'autre part, l'action de $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}$ sur $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$ se relève naturellement en une action sur $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}(N)$. Le quotient $\mathfrak{D}_{(\mathbf{d})}(N)$ est un fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\mathbf{d})}$.

Remarque 1.8. — Le fibré $\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\underline{d})}$ est le quotient d'un fibré $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{d}}$ par le relevé trivial de l'action de $\mathfrak{S}_{\underline{d}}$ sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\underline{d}}$. Autrement dit, l'action de $\mathfrak{S}_{\underline{d}}$ sur $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{d}}$ est donnée par $(\sigma, (\underline{x}, v)) \in \mathfrak{S}_{\underline{d}} \times \mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{d}} \mapsto (\sigma, \underline{x}, v) \in \mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{d}}$. Le fibré $\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\underline{d})}$ n'est pas orientable en général.

Proposition 1.9. *Le fibré $\mathfrak{D}_{\underline{d}}(N)$ est trivialisable au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\underline{d}}$. De plus $\mathbb{R}Aut(N)$ agit par automorphismes de fibré principal sur $\mathfrak{D}_{\underline{d}}(N)$.*

Le fibré $\mathfrak{D}_{(\underline{d})}(N) \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\underline{d})})$ est trivialisable au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\underline{d})}$.

Démonstration. Commençons par la première partie de la Proposition. Fixons tout d'abord $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un lacet $(\underline{x}_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\Sigma_g^{\underline{d}}$. Il nous suffit de vérifier la trivialité de $\mathfrak{D}_{\underline{d}}(N)$ au-dessus des lacets de la forme $(\{J\} \times (\underline{x}_t))_{t \in [0,1]}$ car $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile. De plus, comme $\Sigma_g^{\underline{d}}$ est un produit, il nous suffit de considérer deux cas différents : soit tous les points de $(\underline{x}_t)_{t \in [0,1]}$ sont fixes sauf ceux qui sont sur une composante de la partie réelle de (Σ_g, c_{Σ}) , soit seuls les points complexes conjugués de $(\underline{x}_t)_{t \in [0,1]}$ bougent.

Prenons le premier cas. Supposons pour simplifier les notations que tous les points de $(\underline{x}_t)_{t \in [0,1]}$ se trouvent sur une composante particulière de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Choisissons une orientation de cette composante et numérotions ces points x_1^t, \dots, x_r^t dans un ordre cyclique donné par cette orientation. Prenons des lacets de coordonnées J -holomorphes $\xi_i^t : U_i^t \rightarrow D$, $t \in [0, 1]$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes et centrées en x_i^t . Quitte à perturber $(\underline{x}_t)_{t \in [0,1]}$, on peut supposer que les U_i^t ne s'intersectent pas à un t fixé. Pour tout $t \in [0, 1]$, notons $(N_t, \bar{\partial}_t, c_{N_t})$ les fibrés holomorphes obtenus par recollement de $\Sigma_g \setminus \underline{x}_t \times \mathbb{C}$ et $U_i^t \times \mathbb{C}$ grâce aux applications

$$\begin{aligned} (\Sigma_g \setminus \underline{x}_t) \cap U_i^t \times \mathbb{C} &\rightarrow U_i^t \cap (\Sigma_g \setminus \underline{x}_t) \times \mathbb{C} \\ (\xi_i^t, v) &\mapsto (\xi_i^t, (\xi_i^t)^{m_i} v), \end{aligned}$$

où $m_i \in \{-1, 1\}$ est donné par le signe de x_i^t dans \underline{x}_t . De plus, les opérateurs $\bar{\partial}_t$ viennent avec des sections méromorphes évidentes.

Fixons un opérateur $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ associé à \underline{x}_0 ainsi qu'une polarisation de $\bar{\partial}$ et un isomorphisme entre $(N, \bar{\partial}, c_N)$ et $(N_0, \bar{\partial}_0, c_{N_0})$ préservant les polarisations. Si on trivialise la famille de fibrés en droites complexes $(N_t, c_{N_t})_{t \in [0,1]}$, on obtient une famille continue d'opérateurs $(\bar{\partial}'_t)_{t \in [0,1]}$ sur N associés à $(\underline{x}_t)_{t \in [0,1]}$ et polarisés, définie à homotopie près. Il nous faut alors comparer $\bar{\partial}'_0 = \bar{\partial}$ à $\bar{\partial}'_1$. Autrement dit, il nous faut calculer l'automorphisme de (N_0, c_{N_0}) induit par la trivialisations de (N_t, c_{N_t}) . C'est ce que nous faisons maintenant.

Pour tout $t \in [0, 1]$, un isomorphisme entre (N_0, c_{N_0}) et (N_t, c_{N_t}) est décrit dans les trivialisations par les applications suivantes

$$\begin{aligned} (N_0)|_{U_i^0 \cap U_j^t} &\rightarrow (N_t)|_{U_j^t} \\ (z, v) &\mapsto (z, \eta_{i,j}^t(z)v) \\ (N_0)|_{U_i^0 \setminus \{x_j^t\}} &\rightarrow (N_t)|_{\Sigma_g \setminus \{x_j^t\}} \\ (z, v) &\mapsto (z, \psi_{i,j}^t(z)v) \\ (N_0)|_{(\Sigma_g \setminus \{x_i^0\}) \cap U_j^t} &\rightarrow (N_t)|_{U_j^t} \\ (z, v) &\mapsto (z, \theta_{i,j}^t(z)v) \\ (N_0)|_{\Sigma_g \setminus \{\underline{x}_0, \underline{x}_t\}} &\rightarrow (N_t)|_{\Sigma_g \setminus \underline{x}_t} \\ (z, v) &\mapsto (z, \phi^t(z)v) \end{aligned}$$

Il nous faut définir $\phi^t(z)$, $\eta_{i,j}^t(z)$, $\psi_{i,j}^t(z)$ et $\theta_{i,j}^t(z)$. Nous voulons de plus que pour $t = 0$ on ait $\eta_{i,i}^0(z) = 1$, $\psi_{i,i}^0(z) = (\xi_i^0)^{-m_i}(z)$, $\theta_{i,i}^0(z) = (\xi_i^0)^{m_i}(z)$ et $\phi^0(z) = 1$. Supposons pour simplifier

la démonstration que les disques U_i^t sont disjoints à chaque temps t et que un seul disque U_i^t à la fois peut intersecter U_j^0 pour chaque t . Notons $n_i^t \in \mathbb{N}$ le nombre de disques U_j^t disjoints de U_i^0 au temps t l'ayant touché à un temps précédent. Ainsi, on a $n_i^0 = 0$ et $n_i^1 = r$. On pose alors $\eta_{i,j}^t(z) = (-1)^{n_i^t}$. On définit aussi $\psi_{i,j}^t(z) = (-1)^{n_i^t} (\xi_j^t)^{-m_j}$ sur $(U_i^0 \setminus \{x_j^t\}) \cap U_j^t$, prolongée sur tout $U_i^0 \setminus \{x_j^t\}$ de sorte que lorsque $U_i^0 \cap U_j^t = \emptyset$, $\psi_{i,j}^t(z) = (-1)^{n_i^t}$. Puis $\theta_{i,j}^t(z) = (-1)^{n_i^t} (\xi_i^0)^{m_i}$ sur $(U_i^0 \setminus \{x_i^0\}) \cap U_j^t$, prolongée sur tout $(\Sigma_g \setminus \{x_i^0\}) \cap U_j^t$ de sorte que lorsque $U_i^0 \cap U_j^t = \emptyset$, $\theta_{i,j}^t(z) = (-1)^{n_i^t - 1}$. Enfin, on pose $\phi^t(z) = \psi_{i,j}^t(z) (\xi_i^0)^{m_i}$ sur $U_i^0 \setminus \{x_j^t\}$, $\phi^t(z) = \theta_{i,j}^t(z) (\xi_j^t)^{-m_j}$ sur $U_j^t \setminus \{x_i^0\}$, prolongée par 1 en dehors d'un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}\Sigma_g$ contenant tous les disques U_i^t . Ce dernier prolongement est possible car l'indice de $\phi^t(z)$ le long des deux lacets formés de $\mathbb{R}\Sigma_g$ où l'on a remplacé les intersections $\mathbb{R}\Sigma_g \cap U_i^0$ et $\mathbb{R}\Sigma_g \cap U_i^t$ par les bords supérieurs, respectivement inférieurs, des U_i^0 et U_i^t est nul pour tout temps t (voir Figures 3 et 4).

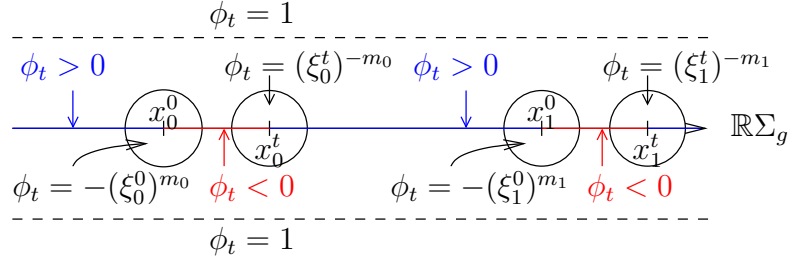


FIGURE 3 – Construction de ϕ_t lorsque $n_i^t = 1$

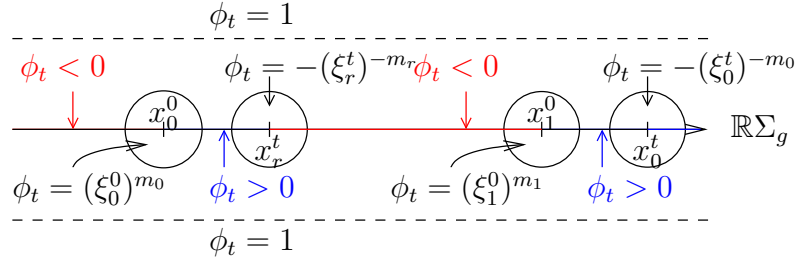


FIGURE 4 – Construction de ϕ_t lorsque $n_i^t = 2$

Par construction, ces fonctions sont compatibles avec les changements de cartes et fournissent bien une trivialisaton de $(N_t, c_{N_t})_{t \in [0,1]}$. Lorsque $t = 1$, on obtient un automorphisme de (N_0, c_{N_0}) donné par ϕ_1 . Cette fonction vaut 1 en dehors d'un voisinage de la composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ considérée, son signe sur celle-ci est égal à $(-1)^r$ et son indice transversalement à celle-ci vaut $r \pmod 2$. Ainsi, si $\mathbb{R}N$ est orientable sur cette composante, ϕ_t y est positif et son indice transversalement à cette composante est pair. Donc $\phi_t \in \mathbb{R}GL(N)^+$ d'après la Proposition 1.8.

Supposons maintenant que ce sont des points complexes conjugués de $(\mathbf{x}_t)_{t \in [0,1]}$ qui bougent. On peut supposer tout d'abord qu'une seule de ces paires est mobile et subdiviser à nouveau en deux cas : soit l'image de ces points forme un lacet sur Σ_g , globalement stable par c_Σ , soit elle est formée de deux composantes complexes conjuguées. En utilisant la même technique que dans le cas précédent et la Proposition 1.8, on montre le résultat voulu dans ce cas ci.

Passons maintenant à l'action de $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}$. Remarquons tout d'abord que la restriction à

$\{J\} \times \Sigma_g^{(\mathbf{d})}$ du fibré $\det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d})})$ est isomorphe en tant que fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal à $\Sigma_g^{\mathbf{d}}/\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}^+ \rightarrow \Sigma_g^{(\mathbf{d})}$, où $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}^+$ est le noyau de la signature sur $\mathfrak{S}_{\mathbf{d}}$. Or, la démonstration du premier point montre que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbf{d}}$ et $\underline{\mathbf{x}} \in \Sigma_g^{\mathbf{d}}$ tels que $\underline{\mathbf{x}}$ et $\sigma.\underline{\mathbf{x}}$ sont dans la même composante connexe de $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$, l'automorphisme de $\mathfrak{D}_{\underline{\mathbf{x}}}(N)$ induit par la trivialisaton de $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}(N)$ au-dessus d'un chemin joignant $\underline{\mathbf{x}}$ à $\sigma.\underline{\mathbf{x}}$ ne préserve les orientations que lorsque la signature de σ vaut 1. Ce qui montre le deuxième point. \square

Remarque 1.9. — Notons que la démonstration de la Proposition 1.9 montre que le fibré $\mathbb{R}\mathcal{C}_{\text{compat}}^+(N)$ n'est en général pas trivial.

Insistons aussi sur le fait que si $(\underline{\mathbf{x}}_t)_{t \in [0,1]}$ est un chemin de points de $\Sigma_g^{\mathbf{d}}$ où l'on ne fait qu'échanger deux points complexes conjugués, on a $D_{\underline{\mathbf{x}}_0} = D_{\underline{\mathbf{x}}_1}$, mais la trivialisaton de $\mathfrak{D}_{\mathbf{d}}(N)$ le long de $(\underline{\mathbf{x}}_t)_{t \in [0,1]}$ ne donne pas l'isomorphisme trivial $\mathfrak{D}_{\underline{\mathbf{x}}_0} = \mathfrak{D}_{\underline{\mathbf{x}}_1}$.

1.3.2 Action d'un automorphisme général

Rappelons que l'on note $\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) = \bigotimes_{i=1}^k \text{Pin}^+(\mathbb{R}N)_i$ si $\text{rg}(N) \geq 2$. Lorsque (N, c_N) est un fibré en droites complexes, on adopte la convention que $\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) = \mathbb{R}$. Tous les isomorphismes entre fibrés en droites réelles que nous considérons sont définis à homotopie près. Nous omettons de le préciser dans la suite pour soulager les énoncés.

Théorème 1.2. Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_{Σ}) .

1. Soit D un diviseur associé à $(\det(N), c_{\det(N)})$. Le fibré $\text{Det}(N)$ au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est canoniquement isomorphe à

$$\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \pi^* \mathfrak{D}_D(N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_D) \bigotimes_{x \in D|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\max(0, \text{mult}_D(x))},$$

où $\mathfrak{D}_D(N) = \mathbb{R}\mathcal{C}_D(\det(N))^+ / \mathbb{R}GL(\det(N))^+$.

2. Soit \mathbf{d} un quadruplet compatible avec (N, c_N) . Le fibré $\text{Det}(N)$ au-dessus de $pr_1^* \mathbb{R}\mathcal{C}(N) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\mathbf{d})}$ est canoniquement isomorphe à

$$\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \pi^* \left(\mathfrak{D}_{(\mathbf{d})}(N) \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d})}) \right) \otimes (pr_2 \circ \pi)^* T_{(\mathbf{d})} \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)},$$

où $T_{(\mathbf{d})}$ est le fibré tautologique sur $\Sigma_g^{(\mathbf{d})}$ de fibre $\bigotimes_{i=1}^{r^+} T_{x_i^+}^* \mathbb{R}\Sigma_g$ au-dessus du point

$$\underline{\mathbf{x}} = (x_1^+, \dots, x_{r^+}^+, x_1^-, \dots, x_{r^-}^-, \underline{\mathbf{z}}^+, \underline{\mathbf{z}}^-).$$

Remarque 1.10. — En particulier, si $(\Phi, \varphi) : (N, c_N) \rightarrow (N', c_{N'})$ est un isomorphisme entre deux fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_{Σ}) , alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \text{Det}(N) & \longrightarrow & \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \pi^* \left(\mathfrak{D}_{(\mathbf{d})}(N) \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d})}) \right) \otimes (pr_2 \circ \pi)^* T_{(\mathbf{d})} \\ & & \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \otimes \Phi \otimes \varphi^* \otimes d\varphi \\ \text{Det}(N') & \longrightarrow & \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N') \otimes (\pi')^* \left(\mathfrak{D}_{(\mathbf{d})}(N') \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d})}) \right) \otimes (pr'_2 \circ \pi')^* T_{(\mathbf{d})} \\ & & \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)}. \end{array}$$

Notons r_{min}^+ le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}N$ qui ne sont pas orientables. On appellera le quadruplet $\underline{\mathbf{d}}_{min} = (r_{min}^+, 0, \max(0, \deg(N) - r_{min}^+), -\min(0, \deg(N) - r_{min}^+))$ minimal. Dans ce cas, les fibrés $\mathfrak{D}_{\underline{\mathbf{d}}_{min}}(N)$ et $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{\mathbf{d}}_{min}}$ sont orientables et fixer une orientation au-dessus d'une composante connexe de $\Sigma_g^{\underline{\mathbf{d}}_{min}}$ en fixe une pour toutes les autres. Ainsi, pour tout $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$, on peut considérer l'action de Φ sur les deux orientations de $\mathfrak{D}_{\underline{\mathbf{d}}_{min}}(N)$ que l'on notera $\varepsilon(\Phi_{\mathfrak{D}_{min}})$. L'action de (Φ, φ) sur celles de $\mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{\mathbf{d}}_{min}}$ est notée $\varepsilon(\varphi_{\underline{\mathbf{d}}_{min}})$. Rappelons que comme dans le §1.1 nous notons σ_{φ}^- la permutation induite par φ sur les orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ au-dessus desquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable. Le Corollaire 1.3 est l'application directe du Théorème 1.2 au cas de $\underline{\mathbf{d}}_{min}$.

Corollaire 1.3. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_{Σ}) de partie réelle non vide. Soit $(\Phi, \varphi) \in \mathbb{R}Aut(N)$. Son action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par le produit $\varepsilon(\Phi_{\mathfrak{p}^+})\varepsilon(\Phi_{\mathfrak{D}_{min}})\varepsilon(\varphi_{\underline{\mathbf{d}}_{min}})\varepsilon(\sigma_{\varphi}^-)\det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)}$.*

Remarque 1.11. — On peut expliciter un peu plus le terme $\varepsilon(\varphi_{\underline{\mathbf{d}}_{min}})$ en termes topologiques. En effet, lorsque la courbe n'est pas séparante, il est égal à la signature de la permutation $\varphi_{\mathbb{R}\Sigma}$ induite par φ sur l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ au-dessus desquelles $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable. Lorsque la courbe est séparante, il est égal à cette même signature si et seulement si $\deg(N) - r_{min}^+$ est un multiple de 4 ou si φ préserve les deux composantes connexes de $\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$.

Avant de passer à la démonstration du Théorème 1.2 qui occupe le §1.3.3, énonçons le Lemme 1.11.

Lemme 1.11. *Soient (N, c_N) et $(N', c_{N'})$ deux fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_{Σ}) et D un diviseur réel associé à $(\det(N), c_{\det(N)})$ et $(\det(N'), c_{\det(N')})$. Une orientation sur $\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N)$ en induit naturellement une sur $\text{Det}(N') \otimes \mathfrak{D}_D(N') \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N')$.*

Lorsque $(N, c_N) = (\mathbb{C}, \text{conj})$, il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{D}_0(\mathbb{C}) = \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}).$$

Démonstration. La première affirmation est une reformulation de la Proposition 1.2 dans le cas d'un automorphisme relevant l'identité. En effet, prenons un isomorphisme $f : (N', c_{N'}) \rightarrow (N, c_N)$. Celui-ci induit naturellement un isomorphisme

$$\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) = \text{Det}(N') \otimes \mathfrak{D}_D(N') \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N').$$

Il nous suffit de vérifier que si $g : (N', c_{N'}) \rightarrow (N, c_N)$ est un autre isomorphisme, alors $g \circ f^{-1} \in \mathbb{R}GL(N)$ préserve les orientations de $\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N)$. En effet, $g \circ f^{-1}$ relève id_{Σ} donc d'après la Proposition 1.2 et la définition de $\mathfrak{D}_D(N)$, $g \circ f^{-1}$ préserve les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si $\det(g \circ f^{-1}) \otimes (g \circ f^{-1})$ préserve les orientations de $\mathfrak{D}_D(N) \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N)$.

Le second isomorphisme est une reformulation du Lemme 1.3. En effet, l'isomorphisme $\text{Det}(\mathbb{C})|_{\mathbb{R}J(\Sigma_g)} = \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$ induit un isomorphisme $t : \text{Det}(\mathbb{C}) \rightarrow \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$. Toutefois celui-ci ne respecte pas l'action de $\mathbb{R}GL(\mathbb{C})$. On obtient l'isomorphisme voulu de la façon suivante. Étant donnée une section polarisée $\bar{\partial}^+$ de $\mathbb{R}\mathcal{C}_0(\mathbb{C})$, il existe une famille $F : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(\mathbb{C})$ telle que $F^*\bar{\partial}^+ = \bar{\partial}_{can}^+$, où $\bar{\partial}_{can, J} = \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J)$ et est munie de la polarisation triviale. De plus, F est uniquement définie à homotopie près. On pose alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Det}(\mathbb{C})^* \otimes \det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \\ \bar{\partial}^+ &\mapsto v^* \otimes t \circ F(v), \end{aligned}$$

pour v une section quelconque de $\text{Det}(\mathbb{C})$. On vérifie que cet isomorphisme est bien défini à homotopie près, et que l'isomorphisme qu'il induit entre $\text{Det}(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{D}_0(\mathbb{C})$ et $\det(\mathcal{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$ commute avec l'action de $\mathbb{R}\text{Aut}(N)$ d'un côté et $\mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ de l'autre. \square

1.3.3 Transformations élémentaires réelles négatives

Supposons dans un premier temps que N est de rang un. La démonstration du Théorème 1.2 consiste à se ramener au cas déjà traité du fibré trivial sur la courbe (voir §1.2.1) au moyen de transformations élémentaires négatives. Tout ce paragraphe est consacré à l'étude de ces transformations. Fixons pour cela une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$. Notons \mathcal{N} le faisceau des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial})$.

Soit $D' = \sum_{x \in \mathbb{R}\Sigma_g} a_x x + \sum_{\{z, \bar{z}\} \in \Sigma_g^{(2)}} b_{\{z, \bar{z}\}}(z + \bar{z})$ un diviseur effectif réel. On notera

$$\begin{aligned} \Delta_{b_{\{z, \bar{z}\}}\{z, \bar{z}\}} &= \mathbb{R} \left(\bigoplus_{\substack{m=0 \\ a_x-1}}^{b_{\{z, \bar{z}\}}-1} \bigoplus_{y \in \{z, \bar{z}\}} \left((T_y^* \Sigma_g)^m \otimes N_y \right) \right) \\ \mathbb{R}N_{a_x x} &= \bigoplus_{m=0}^{a_x-1} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^m \otimes \mathbb{R}N_x \right) \\ \text{et } N|_{D'} &= \bigoplus_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} \mathbb{R}N_{a_x x} \quad \bigoplus_{\{z, \bar{z}\} \in D' - D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} \Delta_{b_{\{z, \bar{z}\}}\{z, \bar{z}\}}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour orienter $N|_{D'}$ il ne suffit pas d'orienter chaque droite apparaissant dans la somme. Il faut aussi prendre en compte l'ordre dans lequel ces droites apparaissent.

Définition. Pour un diviseur effectif réel D' sur Σ_g dont tous les points sont de multiplicité au plus 1, la transformation élémentaire réelle négative en D' du faisceau \mathcal{N} est le faisceau localement libre $\mathcal{N}_{-D'}$ muni d'une structure réelle défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{-D'} \rightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{ev_{D'}} N|_{D'} \rightarrow 0.$$

On définit la transformation élémentaire réelle négative en un diviseur effectif réel quelconque en répétant le procédé ci-dessus. Le faisceau $\mathcal{N}_{-D'}$ obtenu est de rang un, de degré $\deg(N) - \deg(D')$ et sa partie réelle est de première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\mathbb{R}N) - (D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g})^{\text{PD}}$.

À première vue, une transformation élémentaire négative est une opération sur un fibré holomorphe. Toutefois, dans la suite du paragraphe, on montre qu'en fait cette opération est bien définie « à isomorphisme près » sur le fibré en droites complexes sous-jacent.

Comme nous l'avons remarqué dans [6], après une transformation élémentaire réelle négative en D' du faisceau \mathcal{N} , on retrouve un fibré en droites holomorphe réel $(N_{-D'}, \bar{\partial}_{-D'}, c_{N, -D'})$. On a de plus deux inclusions naturelles $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes

$$\begin{aligned} i_{-D'} &: L^{k,p}(\Sigma_g, N_{-D'}) \rightarrow L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-D'} \\ j_{-D'} &: L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-D'}) \rightarrow L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N) \end{aligned}$$

où $k \geq 1$, $p > 2$ et $L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-D'}$ désigne les éléments de $L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ qui s'annulent aux points de D' comptés avec multiplicités. De plus, les deux inclusions $i_{-D'}$ et $j_{-D'}$ induisent une application

$$t_{N_{-D'}, J} : \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N_{-D'})$$

telle que l'injection $i_{-D'}$ induise pour chaque opérateur $\bar{\partial}' \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ un isomorphisme entre le faisceau des sections holomorphes de $(N_{-D'}, t_{-D'}(\bar{\partial}'))$ et celui des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial}')$ qui s'annulent en D' à l'ordre donné par les multiplicités des points dans D' (voir par exemple [6] ou la Proposition 1.10 plus bas).

Si $(\Phi, \varphi) : (N, c_N) \rightarrow (M, c_M)$ est un isomorphisme entre deux fibrés en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) et D' un diviseur effectif réel, alors (Φ, φ) induit un isomorphisme entre $L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-D'}$ et $L^{k,p}(\Sigma_g, M)_{-\varphi_*(D')}$ qui n'en induit pas forcément un entre $L^{k,p}(\Sigma_g, N_{-D'})$ et $L^{k,p}(\Sigma_g, M_{-\varphi_*(D')})$. Nous avons toutefois la Proposition suivante.

Proposition 1.10. *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) et $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Soit D' un diviseur effectif réel et $(N', c_{N'})$ un fibré en droites complexes obtenu après transformation élémentaire réelle négative de (N, c_N) en un diviseur effectif réel D' . Alors, il existe une application $t_{N'} : \mathbb{R}\mathcal{C}(N)/\mathbb{R}GL(N)_0 \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}(N')/\mathbb{R}GL(N')_0$ définie naturellement et prolongeant $t_{N',J}$, où l'indice 0 indique que l'on prend la composante connexe de l'identité d'un groupe topologique.*

Soit (M, c_M) un autre fibré sur (Σ_g, c_Σ) et $(\Phi, \varphi) : (N, c_N) \rightarrow (M, c_M)$ un isomorphisme. Soit $(M', c_{M'})$ un fibré en droites complexes obtenu après transformation élémentaire réelle négative de (M, c_M) en $\varphi_(D')$. Alors (Φ, φ) induit un isomorphisme $(\Phi_{-D'}, \varphi) : (N', c_{N'}) \rightarrow (M', c_{M'})$ tel que $(\Phi_{-D'})^* \circ t_{M'} = t_{N'} \circ \Phi^*$. De plus, $(\Phi_{-D'}, \varphi)$ est uniquement défini à multiplication par une fonction de $\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ homotope à la fonction constante 1 près.*

Démonstration. Le fibré N' est défini comme le recollement de $N|_{\Sigma_g \setminus D'}$ et $N|_{U_{D'}}$, où $U_{D'}$ est une union disjointe de disques ouverts centrés aux points de D' et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant, par les applications de recollement

$$\begin{aligned} N_{U_{|a_{xx}} \cap (\Sigma_g \setminus D')} &\rightarrow N_{(\Sigma_g \setminus D') \cap U_{|a_{xx}}} \\ (\xi_x, v) &\mapsto (\xi_x, \xi_x^{a_{xx}} v) \end{aligned}$$

où $(U_{a_{xx}}, \xi_x)_{x \in D'}$ sont des cartes J -holomorphes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes. On voit donc que si $\bar{\partial}$ est un élément de $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$, alors ses restrictions à chaque ouvert $\Sigma_g \setminus \{D'\}$ et $U_{D'}$ se recollent et donnent l'opérateur $t_{N',J}(\bar{\partial})$.

On remarque ensuite que $t_{N',J}$ induit bien une application notée de la même façon de $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)/\mathbb{R}GL(N)_0$ dans $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N')/\mathbb{R}GL(N')_0$ car, pour tout $f \in \mathbb{R}GL(N)_0 = \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0 = \mathbb{R}GL(N')_0$, on a $t_{N',J}(f^*\bar{\partial}) = f^*(t_{N',J}(\bar{\partial}))$.

Soit $J_1 \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et $J_t \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, $t \in [0, 1]$, joignant J à J_1 . Prenons une famille continue $(U_{a_{xx}}, \xi_x^t)_{x \in D', t \in [0,1]}$ de cartes J_t -holomorphes et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante avec $\xi_x^0 = \xi_x$. On obtient alors pour chaque $t \in [0, 1]$ un fibré en droites complexes $(N'_t, c_{N'_t})$ qui est obtenu par transformation élémentaire réelle négative de (N, c_N) en D' . Comme $[0, 1]$ est contractile, il existe une unique famille continue d'isomorphismes $f'_t : N' \rightarrow N'_t$, $t \in [0, 1]$, à homotopie près trivialisant la famille $(N'_t, c_{N'_t})_{t \in [0,1]}$. On peut de plus supposer que $f'_0 = \text{id}_{N'}$. Posons alors $t_{N',J_1} = (f'_1)^* \circ t_{N'_1, J_1}$. Il nous faut vérifier que cette application ne dépend ni du chemin $(J_t)_{t \in [0,1]}$ choisi ni des coordonnées $(\xi_x^t)_{t \in [0,1]}$ choisies. Prenons une famille continue $(U_{a_{xx}}, \zeta_x^t)_{t \in [0,1]}$ de cartes J_t -holomorphes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes avec $\zeta_x^0 = \xi_x$. À nouveau on obtient une famille $(N''_t, c_{N''_t})_{t \in [0,1]}$ de fibrés en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) trivialisée par $f''_t : N' \rightarrow N''_t$, $t \in [0, 1]$. De plus, on a une famille d'isomorphismes F_t , dépendant de $t \in [0, 1]$, entre N'_t et N''_t donnée par l'identité sur $N|_{\Sigma_g \setminus D'}$ et par le quotient $\frac{(\zeta_x^t)^{a_{xx}}}{(\xi_x^t)^{a_{xx}}}$ sur $N|_{U_{a_{xx}}}$. On a de plus $(F_t)^* \circ t_{N''_t, J_t} = t_{N'_t, J_t}$. D'autre part, $F_t \circ f'_t : N' \rightarrow N''_t$, $t \in [0, 1]$, fournit une autre trivialisatation de $(N''_t, c_{N''_t})$, donc $F_1 \circ f'_1$ est égal à f''_1 à homotopie près. Ainsi, on a $(f''_1)^* \circ t_{N''_1, J_1} = (F_1 \circ f'_1)^* \circ t_{N'_1, J_1} = (f'_1)^* \circ t_{N'_1, J_1}$, ce qui montre l'indépendance de

notre définition par rapport au choix des cartes holomorphes. L'indépendance par rapport au choix du chemin $(J_t)_{t \in [0,1]}$ découle du fait que $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ est contractile.

Le fibré M' est défini de façon analogue à N en utilisant des cartes J_M -holomorphes $(V_{a_x x}, \zeta_x)_{x \in \varphi^*(D')}$ qui sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes. Prenons $J_t \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, $t \in [0, 1]$, un chemin joignant $J_0 = J$ à $J_1 = \varphi^* J_M$, et $(U_{a_x x}^t, \xi_x^t)_{x \in D', t \in [0,1]}$ un chemin de cartes J_t -holomorphes et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante avec $\xi_x^0 = \xi_x$ et $\xi_x^1 = \pm \zeta_x^1 \circ \varphi$. Le signe dans cette dernière égalité apparaît car on souhaite garder des coordonnées qui sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes. On obtient ainsi une famille $(N'_t, c_{N'_t})$ de fibrés en droites complexes. L'automorphisme (Φ, φ) induit naturellement un isomorphisme entre $(N'_1, c_{N'_1})$ et $(M', c_{M'})$ que l'on compose avec la trivialisations de la famille $(N'_t, c_{N'_t})$ pour obtenir un isomorphisme $(\Phi_{-D'}, \varphi)$ de $(N', c_{N'})$ dans $(M', c_{M'})$. Ce dernier n'est défini qu'à multiplication par un élément de $\mathbb{R}GL(N')$ homotope à l'identité près, et ne dépend pas des trivialisations choisies. Le fait que $(\Phi_{-D'})^* \circ t_{M'} = t_{N'} \circ \Phi^*$ découle directement des définitions. \square

Dans les Lemmes 1.12, 1.13 et 1.14, on définit des isomorphismes entre des objets associés à un fibré (N, c_N) (resp. (M, c_M)) et des objets associés à un fibré $(N', c_{N'})$ (resp. $(M', c_{M'})$) obtenu par transformation élémentaire en un diviseur effectif réel D' . La naturalité de ces isomorphismes signifie que pour tout isomorphisme $(\Phi, \varphi) : (N, c_N) \rightarrow (M, c_M)$, ceux-ci commutent avec l'action de Φ à droite et celle de $\Phi_{-D'}$ à gauche.

Les Lemmes 1.12 et 1.13 décrivent l'effet d'une transformation élémentaire réelle négative sur le fibré déterminant. Pour la démonstration, on renvoie à [6], Lemmes 3.16 et 3.17, ou à [23].

Lemme 1.12. *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) . Soit D' un diviseur effectif réel dont tous les points sont de multiplicité au plus 1 et $(N', c_{N'})$ un fibré en droites complexes obtenu après transformation élémentaire de (N, c_N) en D' . L'injection $i_{-D'}$ induit naturellement un isomorphisme entre $\mathbb{R}(\bigoplus_{x \in D'} N'_x)$ et $N|_{D'}$.* \square

Lemme 1.13. *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) . Soit D' un diviseur effectif réel et $(N', c_{N'})$ un fibré en droites complexes obtenu après transformation élémentaire de (N, c_N) en D' . Les inclusions $i_{-D'}$ et $j_{-D'}$ induisent un isomorphisme canonique entre $\text{Det}(N)$ et $((t_{N'})^* \text{Det}(N')) \otimes N|_{D'}$.* \square

Le Lemme 1.14 décrit l'effet d'une transformation élémentaire réelle négative sur le fibré $\mathfrak{D}_D(N)$.

Lemme 1.14. *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) et D un diviseur compatible avec ce fibré. Soit D' un diviseur effectif réel et $(N', c_{N'})$ un fibré en droites complexes obtenu après transformation élémentaire de (N, c_N) en D' . Il existe un isomorphisme canonique à homotopie près entre $\mathfrak{D}_D(N)$ et $\mathfrak{D}_{D-D'}(N') \bigotimes_{x \in D'|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\text{mult}_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{\text{mult}_{D'}(x)}$ au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$.*

Remarque 1.12. — Par abus de notations, on confond le fibré en droites réelles $\bigotimes_{x \in D'|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\text{mult}_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{\text{mult}_{D'}(x)}$ avec le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibré principal associé.

Démonstration. Fixons une section $\bar{\partial}_D^+$ associée à D . Elle induit une section de

$$\mathfrak{D}_{D-D'}(N') \bigotimes_{x \in D'|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\text{mult}_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{\text{mult}_{D'}(x)}$$

donnée par

$$[t_{N'}(\bar{\partial}_D^+)] \otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (d_x^{mult_D(x)} \sigma)^{mult_{D'}(x)},$$

où σ est une section méromorphe de $(N, \bar{\partial}_{D,J}^+)$ pour un J quelconque, de diviseur D et donnant la polarisation de $\bar{\partial}_D^+$. Cette section ne dépend pas du choix de σ . Supposons que $\bar{\partial}_D^{+'}$ est une autre section polarisée associée à D qui induit la même section de \mathfrak{D}_D que $\bar{\partial}_D^+$. Il nous faut démontrer que $\bar{\partial}_{D-D'}^{+'}$ induit la même section de $\mathfrak{D}_{D-D'}(N')$ $\otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{mult_{D'}(x)}$

que $\bar{\partial}_{D-D'}^+$ pour obtenir l'isomorphisme voulu. D'après le Lemme 1.9, il existe une famille continue $F_D : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(N)^+$ telle que $\bar{\partial}_D^{+'} = F^*(\bar{\partial}_D^+)$. D'après la Proposition 1.10, après transformation élémentaire, on obtient une famille continue $F_{D-D'} : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}GL(N')$ égale à F_D sous l'isomorphisme $\mathbb{R}GL(N) = \mathbb{R}C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) = \mathbb{R}GL(N')$. Remarquons qu'il y a des cas où $F_{D-D'}$ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}GL(N')^+$, auxquels cas $[t_{N'}(\bar{\partial}_D^{+'})] = -[t_{N'}(\bar{\partial}_D^+)]$, et une section de $\mathfrak{D}_D(N)$ n'induit pas une section de $\mathfrak{D}_{D-D'}(N')$.

D'après la Proposition 1.8 (voir aussi la Proposition 3.3 de [6]), le signe de l'action de $F_{D-D'}$ sur les orientations de $\text{Det}(N')$ se décompose en deux parties : l'une ne dépend pas de N' , l'autre compte le nombre de composantes orientables de $\mathbb{R}N'$ dont $F_{D-D'}$ échange les orientations. Ainsi $F_{D-D'}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}GL(N')^+$ si et seulement si la parité de ce dernier nombre ne change pas en faisant la transformation élémentaire. Calculons donc la différence de parité lors du passage de N à N' . Fixons une composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ de la partie réelle de Σ_g . Si D' a un nombre pair de points comptés avec multiplicités sur $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, alors $(\mathbb{R}N)_i$ et $(\mathbb{R}N')_i$ ont même orientabilité et cette composante ne contribue pas au signe recherché. Notons de plus que dans ce cas $F_{D-D'}$ agit toujours trivialement sur $\otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}_i} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{mult_{D'}(x)}$. Supposons maintenant que D' a un nombre impair de points sur $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$. Les fibrés $(\mathbb{R}N)_i$ et $(\mathbb{R}N')_i$ n'ont plus la même orientabilité. Deux cas se présentent :

1. soit $F_{D-D'}$ est positif sur $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ et cette composante ne contribue toujours pas au signe recherché,
2. soit $F_{D-D'}$ est négatif sur $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ et cette composante change le signe recherché.

De plus, dans le premier cas $F_{D-D'}$ agit trivialement sur $\otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}_i} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{mult_{D'}(x)}$ mais pas dans le second. Ainsi, lorsque $[\bar{\partial}_{D-D'}^+] = [\bar{\partial}_{D-D'}^{+'}]$, on a

$$\otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (d_x^{mult_D(x)} \sigma)^{mult_{D'}(x)} = \otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (d_x^{mult_D(x)} \sigma')^{mult_{D'}(x)} \in \otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{mult_{D'}(x)}$$

et lorsque $[\bar{\partial}_{D-D'}^+] = -[\bar{\partial}_{D-D'}^{+'}]$, on a

$$\otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (d_x^{mult_D(x)} \sigma)^{mult_{D'}(x)} = - \otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (d_x^{mult_D(x)} \sigma')^{mult_{D'}(x)} \in \otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{mult_{D'}(x)}.$$

La section de $\mathfrak{D}_{D-D'}(N')$ $\otimes_{x \in D'_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{mult_{D'}(x)}$ obtenue ne dépend donc

que de la section $[\bar{\partial}_D^+]$ de $\mathfrak{D}_D(N)$.

On vérifie de la même façon que l'application construite est bien un isomorphisme. La naturalité de celui-ci est immédiate. \square

Notons que la Proposition 1.10 et les Lemmes 1.13 et 1.14 montrent qu'une transformation élémentaire négative est une opération naturelle au niveau des fibrés en droites complexes. En effet, si (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) , D un diviseur compatible avec ce fibré, D' un diviseur effectif réel et $(N', c_{N'})$ et $(N'', c_{N''})$ deux fibrés en droites complexes obtenus après transformation élémentaire de (N, c_N) en D' , alors $\text{id}_N \in \mathbb{R}Aut(N)$ induit naturellement un isomorphisme F entre $(N', c_{N'})$ et $(N'', c_{N''})$, défini à homotopie près et tel que les trois diagrammes suivant commutent

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbb{R}\mathcal{C}(N')/\mathbb{R}GL(N')_0 & ((t_{N'})^* \text{Det}(N')) \otimes N|_{D'} \\
& \nearrow t_{N'} & \uparrow \\
\mathbb{R}\mathcal{C}(N)/\mathbb{R}GL(N)_0 & & \text{Det}(N) \\
& \searrow t_{N''} & \downarrow \\
& \mathbb{R}\mathcal{C}(N'')/\mathbb{R}GL(N'')_0 & ((t_{N''})^* \text{Det}(N'')) \otimes N|_{D'} \\
& & \uparrow F^* \otimes \text{id}_N
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \mathfrak{D}_{D-D'}(N') \otimes \bigotimes_{x \in D'|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\text{mult}_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{\text{mult}_{D'}(x)} & \\
& \nearrow & \uparrow F^* \otimes \text{id}_N \\
\mathfrak{D}_D(N) & & \\
& \searrow & \\
& \mathfrak{D}_{D-D'}(N'') \otimes \bigotimes_{x \in D'|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\text{mult}_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{\text{mult}_{D'}(x)} &
\end{array}$$

1.3.4 Étude de l'action des automorphismes associés à un diviseur

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 1.2 proprement dite. Nous commençons par le cas d'un fibré en droites complexes, puis nous montrons comment s'y ramener à partir du cas général.

Démonstration du Théorème 1.2. Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Commençons par fixer un diviseur D compatible avec $(\det(N), c_{\det(N)})$. Afin d'alléger les notations, nous sous-entendrons les tirés-en-arrière des fibrés et considérons qu'ils sont tous définis au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$.

Premier cas : $\text{rg}(N) = 1$

Écrivons D sous la forme $D = D^+ - D^-$ où D^+ et D^- sont effectifs et pour tout x dans le support de D , $\text{mult}_{D^+}(x) = \max(0, \text{mult}_D(x))$ et $\text{mult}_{D^-}(x) = -\min(0, \text{mult}_D(x))$. Prenons un fibré en droites complexes $(N', c_{N'})$ obtenu après transformation élémentaire réelle négative de (N, c_N) en D^+ (voir §1.3.3). D'après la Proposition 1.10 et les Lemmes 1.13 et 1.14, nous avons un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned}
\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) &= \text{Det}(N') \otimes \mathfrak{D}_{D-D^+}(N') \\
&\otimes \det(N|_{D^+}) \otimes \bigotimes_{x \in D^+|_{\mathbb{R}\Sigma_g}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{\text{mult}_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x \right)^{\text{mult}_D(x)}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Décomposons D^+ en trois diviseurs effectifs : $D^+ = D^+_{|\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g} + D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 0} + D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 1}$, où $D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 0}$, respectivement $D^-_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 1}$, contient les points réels de D^+ qui sont de multiplicité paire, respectivement impaire. On a alors les isomorphismes canoniques suivant : pour les points complexes conjugués

$$\det\left(\bigoplus_{\{z, \bar{z}\} \in D^+} \mathbb{R}\left(\bigoplus_{m=0}^{mult_D(z)-1} \bigoplus_{y \in \{z, \bar{z}\}} \left((T_y^* \Sigma_g)^m \otimes N_y\right)\right)\right) = \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{|D^+_{|\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g}}),$$

pour les points réels de multiplicités paires

$$\det\left(\bigoplus_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 0}} \left(\bigoplus_{m=0}^{mult_D(x)-1} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^m\right) \otimes \mathbb{R}N_x\right) = \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{|D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 0}}),$$

car pour chaque $x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 0}$, $\bigoplus_{m=0}^{mult_D(x)-1} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^m$ est de dimension paire,

$$\bigotimes_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 0}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x\right)^{mult_D(x)} = \mathbb{R},$$

et pour les points réels de multiplicités impaires

$$\begin{aligned} \det\left(\bigoplus_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 1}} \left(\bigoplus_{m=0}^{mult_D(x)-1} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^m\right) \otimes \mathbb{R}N_x\right) & \bigotimes_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 1}} \left((T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)} \otimes \mathbb{R}N_x\right)^{mult_D(x)} \\ & = \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{|D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 1}}) \bigotimes_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g, 1}} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi l'isomorphisme (*) devient

$$\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) = \text{Det}(N') \otimes \mathfrak{D}_{D-D^+}(N') \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{D^+}) \otimes \bigotimes_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)}. \quad (*')$$

Prenons maintenant un fibré $(N'', c_{N''})$ obtenu après transformation élémentaire de $(\mathbb{C}, conj)$ en D^- . Nous avons un autre isomorphisme naturel

$$\text{Det}(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{D}_0(\mathbb{C}) = \text{Det}(N'') \otimes \mathfrak{D}_{-D^-}(N'') \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{D^-}). \quad (**)$$

Remarquons de plus que $(N', c_{N'})$ et $(N'', c_{N''})$ sont isomorphes. D'après le Lemme 1.11, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N') \otimes \mathfrak{D}_{D-D^+}(N') = \text{Det}(N'') \otimes \mathfrak{D}_{-D^-}(N''). \quad (***)$$

En combinant les isomorphismes (*),(**) et (***), on obtient

$$\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) = \text{Det}(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{D}_0(\mathbb{C}) \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_D) \bigotimes_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)}.$$

Ainsi, d'après le Lemme 1.11, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) = \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_D) \bigotimes_{x \in D^+_{|\mathbb{R}\Sigma_g}} (T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g)^{mult_D(x)},$$

ce qui conclut le cas du rang un. Notons que cet isomorphisme ne dépend pas des choix de N' et N'' comme nous l'avons remarqué à la fin du §1.3.3.

Second cas : $\text{rg}(N) > 1$

D'après le Lemme 1.11, on a

$$\text{Det}(N) \otimes \mathfrak{D}_D(N) \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) = \text{Det}(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}) \otimes \mathfrak{D}_D(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}) \otimes \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1})).$$

D'après le Lemme 1.2, $\mathfrak{p}^+(\mathbb{R}(\det(N) \oplus \mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1})) = \mathbb{R}$. On conclut alors en utilisant le cas précédent, le Lemme 1.11 et la Proposition 1.2.

Pour le deuxième point, pour chaque élément $\underline{\mathbf{x}} = (x_1^+, \dots, x_{r^+}^+, x_1^-, \dots, x_{r^-}^-, \underline{\mathbf{z}}^+, \underline{\mathbf{z}}^-) \in \Sigma_g^{(\underline{\mathbf{d}})}$, nous avons un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) = \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \mathfrak{D}_{D_{\underline{\mathbf{x}}}}(N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{D_{\underline{\mathbf{x}}}}) \bigotimes_{i=1}^{r^+} T_{x_i^+}^* \mathbb{R}\Sigma_g.$$

En considérant une famille à un paramètre de diviseurs, on vérifie que la famille obtenue d'isomorphismes est bien continue. Ainsi, on obtient un isomorphisme canonique

$$pr_1^* \text{Det}(N) = \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \mathfrak{D}_{(\underline{\mathbf{d}})}(N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\underline{\mathbf{d}})}) \otimes T_{(\underline{\mathbf{d}})}.$$

□

1.3.5 Deux cas particuliers

Nous précisons l'énoncé du Théorème 1.2 dans deux cas particuliers : lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante puis lorsque la partie réelle du fibré (N, c_N) est orientable. Nous retrouverons ces deux cas au §2.

Le cas séparant Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe au-dessus d'une courbe (Σ_g, c_Σ) séparante. On désignera par $\mathbb{R}\Sigma_g^+$ (resp. $\mathbb{R}\Sigma_g^-$) la réunion des composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}N$ est orientable (resp. ne l'est pas). On note $k = b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$ et $k_- = b_0(\mathbb{R}\Sigma_g^-)$. Notons $O_{\mathbb{R}N}$ la droite réelle $\bigotimes_{c \in \mathbb{R}\Sigma_g^+} o((\mathbb{R}N)|_c)$, où $o((\mathbb{R}N)|_c)$ est la droite réelle

engendrée par les deux orientations opposées de $\mathbb{R}N$ restreint à la composante c de $\mathbb{R}\Sigma_g^+$. Un automorphisme $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ induit un élément Φ_o de $GL(O_{\mathbb{R}N})$. D'autre part, on note H la droite réelle engendrée par les deux orientations complexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Un difféomorphisme $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ d'une courbe (Σ_g, c_Σ) séparante induit une transposition $\sigma_\varphi^{\mathbb{R}\Sigma_g}$ sur les deux orientations complexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ et une permutation $\varphi_{|\mathbb{R}\Sigma_g^-}$ des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g^-$.

Corollaire 1.4. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_Σ) que l'on suppose séparante. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(N) = \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes O_{\mathbb{R}N} \otimes \det(H_0(\mathbb{R}\Sigma_g^-, \mathbb{R})) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes H^{\frac{\text{deg}(N)+k_-}{2}}.$$

En particulier, soit $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g, w_1(\mathbb{R}N))$ et $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ un relevé de φ . Le signe de l'action de Φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}^+}(\Phi) \det(\Phi_o) \varepsilon_N(\varphi),$$

où $\varepsilon_N(\varphi) = \varepsilon(\sigma_\varphi^{\mathbb{R}\Sigma_g})^{\frac{\text{deg}(N)+k_-}{2}} \varepsilon(\varphi_{|\mathbb{R}\Sigma_g^-}) \det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)}$ ne dépend que de φ et de (N, c_N) .

Démonstration. Prenons \mathbf{d}_{min} comme dans le Corollaire 1.3. D'après le Théorème 1.2, il existe un isomorphisme canonique entre fibrés en droites réelles au-dessus de $pr_1^* \mathbb{R}C(N)$

$$pr_1^* \text{Det}(N) = \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes \pi^*(\mathfrak{D}_{(\mathbf{d}_{min})} \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d}_{min})})) \otimes (pr_2 \circ \pi)^*(T_{(\mathbf{d}_{min})}).$$

Or, comme la courbe est séparante, on a un isomorphisme canonique entre $T_{(\mathbf{d}_{min})}$ au-dessus de $\Sigma_g^{(\mathbf{d}_{min})}$ et le fibré produit $\Sigma_g^{(\mathbf{d}_{min})} \times H^{k-}$. D'autre part, on a un isomorphisme canonique entre $\det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{(\mathbf{d}_{min})})$ et $(\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\mathbf{d}_{min})}) \times (\det(H_0(\mathbb{R}\Sigma_g^-, \mathbb{R})) \otimes H^{\frac{\text{deg}(N)-k-}{2}})$. Enfin, le fibré $\mathfrak{D}_{(\mathbf{d}_{min})}$ au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\mathbf{d}_{min})}$ est canoniquement isomorphe au fibré produit $(\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{(\mathbf{d}_{min})}) \times O_{\mathbb{R}N}$. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(\mathbf{d}_{min})} &\rightarrow O_{\mathbb{R}N} \\ \left[\bar{\partial}_{D,J}^+ \right] &\mapsto \bigotimes_{c \in \mathbb{R}\Sigma_g^+} \sigma|_c, \end{aligned}$$

où σ est une section méromorphe réelle de $(\det(N), c_{\det(N)}, \bar{\partial}_{D,J}^+)$ de diviseur D et donnant la polarisation de $\bar{\partial}_{D,J}^+$, est bien définie d'après le Corollaire 3.1 de [6] et donne l'isomorphisme canonique voulu. Ceci termine la démonstration. \square

Le cas *Spin* Lorsque la courbe n'est pas séparante, nous ne trouvons pas de résultat aussi général que le Corollaire 1.4. Nous pouvons toutefois préciser le Théorème 1.2. Nous utilisons pour cela des structures *Spin* associées à un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle (N, c_N) (qui est supposé de degré pair), dont nous notons $\mathbb{R}Spin(N)$ l'ensemble (voir [7] ou [6]). Insistons ici sur le fait que si l'on a encore une bijection entre les structures *Spin* sur N (muni d'une structure holomorphe) et les classes d'isomorphisme de racines carrées de son fibré déterminant $\det(N)$ (voir [2]), celle-ci dépend de la structure holomorphe sur N . Ainsi lorsque nous parlerons d'une structure *Spin* sur N comme d'une racine carrée du fibré déterminant, nous ferons attention à préciser l'opérateur de Cauchy-Riemann sur N considéré.

Enfin, comme nous considérerons des structures *Spin* réelles sur (N, c_N) (lorsque $w_1(\mathbb{R}N) = 0$), remarquons qu'une telle structure, donnée par un fibré en droite holomorphe L , induit une semi-orientation sur le fibré $\mathbb{R}N$; c'est-à-dire que si nous fixons une orientation sur une des composantes de $\mathbb{R}N$, toutes les autres sont automatiquement orientées (voir [7]). De plus, comme nous supposons toujours que $\mathbb{R}\Sigma_g$ est non vide, la structure réelle $c_{\det(N)}$ se relève en une structure réelle c_L sur L unique à multiplication par i près. Le choix d'un tel relevé fixe une orientation sur $\mathbb{R}N$, et l'autre relevé induit l'autre orientation. Notons $O_{\mathbb{R}N}^\xi$ la droite réelle engendrée par les deux semi-orientations de $\mathbb{R}N$ associées à la structure ξ . Si un automorphisme $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ préserve une structure *Spin* réelle ξ sur N , alors Φ induit une permutation $\Phi_{o,\xi}$ sur les semi-orientations associées à ξ .

Par ailleurs, la première classe de Stiefel-Whitney w_ξ d'une structure *Spin* réelle ξ est toujours bien définie et ne dépend pas de la structure holomorphe choisie sur N . Pour $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on pose $H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}) = \bigotimes_{w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{R})$.

Corollaire 1.5. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur une courbe (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Supposons de plus que le degré de N est pair et que la première classe de Stiefel Whitney de $\mathbb{R}N$ est nulle. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(N) = \mathfrak{p}^+(\mathbb{R}N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{\text{rg}(N)} \otimes (O_{\mathbb{R}N}^\xi)^{1-g} \otimes H_{w_\xi}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}).$$

entre fibrés en droites au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{C}(N) \times \mathbb{R}Spin(N)$.

En particulier, soit $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$ et $\Phi \in \mathbb{R}Aut(N)$ un relevé de φ qui préserve une structure *Spin* réelle $\xi \in \mathbb{R}Spin(N)$. Le signe de l'action de Φ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}^\pm}(\Phi)\varepsilon(\Phi_{\sigma,\xi})^{1-g}\varepsilon(\sigma_\varphi^{w_\xi})\det(\varphi^*)^{\text{rg}(N)},$$

où $\sigma_\varphi^{w_\xi}$ est la permutation induite par φ sur l'ensemble des orientations des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur lesquelles w_ξ est non nulle.

Démonstration. Supposons pour simplifier que N est de rang 1. Prenons une structure *Spin* réelle ξ sur N de première classe de Stiefel-Whitney $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Fixons un point x_i sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sur laquelle w est non nulle et prenons un diviseur D associé à N de la forme $D = \sum_{i=1}^l 2x_i + 2\frac{\deg(N) - 2l}{4}(z + \bar{z})$. D'après le Théorème 1.2, il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) = \pi^*\mathfrak{D}_D(N) \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1}) \otimes \det(\mathbb{R}\mathcal{J}_D),$$

car les points réels de D sont tous de multiplicité 2. De plus,

$$\det(\mathbb{R}\mathcal{J}_D) = \bigotimes_{i=1}^l T_{x_i}^*\mathbb{R}\Sigma_g = H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}),$$

car la multiplicité de z est paire.

Il nous faut vérifier que $\pi^*\mathfrak{D}_D(N) \otimes (O_{\mathbb{R}N}^\xi)^{1-g}$ est naturellement orienté. Prenons tout d'abord un élément $[\bar{\partial}_{D,J}^+]$ de $\mathfrak{D}_D(N)$. Remarquons qu'une section méromorphe réelle s associée à $\bar{\partial}_{D,J}^+$ induit une structure *Spin* réelle sur N : au-dessus d'un lacet sur Σ_g qui ne passe pas par un des points x_i , z ou \bar{z} , s donne une trivialisatation de N qui, par définition se relève dans la structure *Spin* induite. Si on homotope un lacet γ sur Σ_g pour le faire traverser un des points z ou \bar{z} et obtenir un lacet γ' , alors on a

$$[s \circ \gamma] = [s \circ \gamma'] + 2\frac{\deg(N) - 2l}{4}f = [s \circ \gamma'] \in H_1(\mathbb{R}N^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

où f est la classe de la fibre. Si on homotope un lacet γ sur Σ_g pour le faire traverser un des points x_i et obtenir un lacet γ' , alors on a

$$[s \circ \gamma] = [s \circ \gamma'] + 2f = [s \circ \gamma'] \in H_1(\mathbb{R}N^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

De plus, la structure *Spin* réelle donnée par $\mathcal{O}_{\Sigma_g, J}(\frac{D}{2})$ est la même que celle induite par une section méromorphe associée à $\bar{\partial}_{D,J}^+$, et nous la noterons ξ' . La section s induit une orientation de $\mathbb{R}N$ qui est compatible avec la semi-orientation donnée par ξ' .

Si $[\bar{\partial}'_{D,J'}^+]$ est un autre élément de $\mathfrak{D}_D(N)$ qui induit la même orientation de $\mathfrak{D}_D(N)$ que $[\bar{\partial}_{D,J}^+]$, notons ξ'' la nouvelle structure *Spin* réelle obtenue. Alors, d'après le Lemme 3.4 de [6], il existe un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)^+$ uniquement défini à homotopie près tel que $f^*\xi' = \xi''$ et f envoie l'orientation de $\mathbb{R}N$ fixée par $[\bar{\partial}_{D,J}^+]$ sur celle fixée par $[\bar{\partial}'_{D,J'}^+]$.

D'autre part, il existe un automorphisme $h \in \mathbb{R}GL(N)$ qui envoie la structure ξ sur ξ' . De plus, d'après le Lemme 3.4 de [6], l'automorphisme h est unique à homotopie et multiplication par -1 près. Si g est impair, alors h et $-h$ ont même action sur $\text{Det}(N)$. La structure ξ induit une orientation de $\mathfrak{D}_D(N)$ donnée par $h^*[\bar{\partial}_{D,J}^+]$. Celle-ci ne dépend pas du choix initial de la section $[\bar{\partial}_{D,J}^+]$, car l'orientation obtenue en utilisant $[\bar{\partial}'_{D,J'}^+]$ est donnée par

$h^* f^* [\bar{\partial}'_{D,J'}]^+$ et $f \in \mathbb{R}GL(N)^+$. Si g est pair, h et $-h$ ont des actions opposées sur $\text{Det}(N)$. Supposons par exemple que $h \in \mathbb{R}GL(N)^+$. Alors $h^* [\bar{\partial}'_{D,J}]^+$ induit une semi-orientation de ξ . Celle-ci ne dépend pas non plus du choix initial de la section $[\bar{\partial}'_{D,J}]^+$, car la semi-orientation obtenue en utilisant $[\bar{\partial}'_{D,J'}]^+$ est donnée par $h^* f^* [\bar{\partial}'_{D,J'}]^+$ et f envoie l'orientation de $\mathbb{R}N$ fixée par $[\bar{\partial}'_{D,J}]^+$ sur celle fixée par $[\bar{\partial}'_{D,J'}]^+$. Ceci fournit donc un isomorphisme $\mathfrak{D}_D(N) \rightarrow O_{\mathbb{R}N}^\xi$.

On vérifie enfin que l'isomorphisme obtenu ne dépend pas du diviseur D choisit : tous les autres qui conviennent lui sont homotopes, et la construction précédente dépend continûment de D . \square

2 Orientabilité des espaces de modules de courbes réelles

Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension $2n$ au moins 4. Nous nous intéressons à l'orientabilité des espaces de modules de courbes réelles dans X . Nous rappelons tout d'abord succinctement la construction de ces espaces (en suivant principalement [23] et [26]) ainsi que le rapport avec le fibré déterminant. Nous énonçons ensuite des résultats concernant leur orientabilité.

2.1 Espaces de modules et fibré déterminant

Soit Σ_g une surface réelle compacte orientée de genre g , et l un entier assez grand. Nous notons comme précédemment $J(\Sigma_g)$ (resp. $J_\omega(X)$) l'espace des structures complexes de classe C^l sur Σ_g compatibles avec l'orientation fixée sur la surface (resp. sur X et calibrées par ω). Le sous-ensemble $\mathbb{R}J_\omega(X)$ de $J_\omega(X)$ est formé des structures presque complexe J telles que c_X est J -antiholomorphe. C'est une variété de Banach contractile (voir [26]).

Définition 2.1. *Une courbe pseudo-holomorphe paramétrée de genre g dans X est un triplet $(u, J_\Sigma, J) \in L^{k,p}(\Sigma_g, X) \times J(\Sigma_g) \times J_\omega(X)$, où $1 \ll k \ll l$ et $2 < p$, vérifiant*

$$du + J \circ du \circ J_\Sigma = 0.$$

On dit qu'une courbe pseudo-holomorphe (u, J_Σ, J) réalise la classe $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ si $u_([\Sigma_g]) = d$. Enfin, une courbe (u, J_Σ, J) est dite injective quelque part s'il existe un ouvert non vide $U \subset \Sigma_g$ tel que u est une immersion sur U et*

$$\forall x \in U, u^{-1}\{u(x)\} = \{x\}.$$

Définition 2.2. *Pour $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$, et $r \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ l'espace de modules des courbes pseudo-holomorphes paramétrées de genre g dans X , injectives quelque part, réalisant la classe d , avec r points marqués, c'est-à-dire,*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{g,r}^d(X) = \{ & (u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in L^{k,p}(\Sigma_g, X) \times J(\Sigma_g) \times J_\omega(X) \times \Sigma_g^r \mid du + J \circ du \circ J_\Sigma = 0 \\ & u_*([\Sigma_g]) = d \\ & u \text{ est injective quelque part} \\ & \forall 1 \leq i \neq j \leq r, z_i \neq z_j \}. \end{aligned}$$

Prenons une permutation τ de $\{1, \dots, r\}$ d'ordre 2 admettant au moins un point fixe. Comme expliqué dans [26], le groupe $\text{Diff}(\Sigma_g)$ des difféomorphismes de classe C^{l+1} de Σ_g

agit sur $\mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ par reparamétrage :

$$\begin{aligned} & (\phi, (u, J_\Sigma, J, \underline{z})) \in \text{Diff}(\Sigma_g) \times \mathcal{P}_{g,r}^d(X) \\ & \mapsto \begin{cases} (u \circ \phi^{-1}, (\phi^{-1})^* J_\Sigma, J, \phi(\underline{z})) & \text{si } \phi \in \text{Diff}^+(\Sigma_g) \\ (u \circ \phi^{-1}, -(\phi^{-1})^* J_\Sigma, J, (\phi(z_{\tau(1)}), \dots, \phi(z_{\tau(r)}))) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Une courbe pseudo-holomorphe est dite réelle si elle est fixée par l'action d'un élément non trivial c_Σ de $\text{Diff}(\Sigma_g)$ qui est alors unique (autrement dit, une courbe n'est fixée que par un seul difféomorphisme non trivial). De plus, le difféomorphisme c_Σ est une involution qui renverse l'orientation fixée sur Σ_g , c'est-à-dire une structure réelle. À chaque structure réelle c_Σ est alors associé $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$, l'ensemble de ses points fixes dans $\mathcal{P}_{g,r}^d(X)$. Notons $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ la réunion de tous ces ensembles. Cet espace est une variété de Banach séparable de classe C^{l-k} (voir Proposition 1.4 de [26]).

Remarquons qu'une structure réelle c_Σ agit sur Σ_g^r par

$$(z_1, \dots, z_r) \rightarrow (c_\Sigma(z_{\tau(1)}), \dots, c_\Sigma(z_{\tau(r)})).$$

Sur une courbe réelle marquée, la configuration de points \underline{z} est un élément de $\mathbb{R}_{c_\Sigma}(\Sigma_g^r)$, le lieu des points fixes de l'action de c_Σ sur Σ_g^r .

Prenons une structure réelle c_Σ sur Σ_g et considérons $(u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in \mathbb{R}_{c_\Sigma} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$. Le fibré $E_u = u^*TX$ est un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_Σ) , de rang n , de degré $c_1(X)d$, et c_X induit une structure réelle c_{E_u} dessus. On note $H_{c_1(X)d}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subset H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'image réciproque de $c_1(X)d$ par l'application d'augmentation $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \mapsto \sum w|_{(\mathbb{R}\Sigma_g)_i} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi, on a $w_1(\mathbb{R}E_u) \in H_{c_1(X)d}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Lemme 2.1. *L'application $w_{c_\Sigma} : (u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in \mathbb{R}_{c_\Sigma} \mathcal{P}_{g,r}^d(X) \mapsto w_1(\mathbb{R}E_u) \in H_{c_1(X)d}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est localement constante.* \square

Ainsi, on peut écrire $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \mathcal{P}_{g,r}^d(X) = \bigcup_{c \in H_{c_1(X)d}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} w_{c_\Sigma}^{-1}(c)$, où chaque $w_{c_\Sigma}^{-1}(c)$ est une

union de composantes connexes de $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$. On dira qu'un quadruplet d'entiers naturels $\underline{\mathbf{d}}$ est adapté à $c \in H_{c_1(X)d}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, si $\underline{\mathbf{d}}$ est adapté à (E_u, c_{E_u}) pour chaque courbe $(u, J_\Sigma, J, \underline{z}) \in w_{c_\Sigma}^{-1}(c)$ (voir §1.3.1). Posons alors

$$\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,r,\text{pol}}^d(X) = \bigsqcup_{\substack{c_\Sigma \in \text{Diff}^-(\Sigma_g) \\ (c_\Sigma)^2 = \text{id}_\Sigma}} \bigsqcup_{\substack{c \in H_{c_1(X)d}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \underline{\mathbf{d}} \text{ adapté à } c}} w_{c_\Sigma}^{-1}(c) \times \Sigma_g^{(\underline{\mathbf{d}})}$$

Autrement dit, on a ajouté à chaque courbe une configuration réelle de points marqués signés supplémentaire formant un diviseur adapté au tiré en arrière du tangent à la variété ambiante. Insistons sur le fait que deux composantes $w_{c_\Sigma}^{-1}(c) \times \Sigma_g^{(\underline{\mathbf{d}})}$ et $w_{c_\Sigma}^{-1}(c) \times \Sigma_g^{(\underline{\mathbf{d}'})}$ peuvent ne pas être disjointes en oubliant les signes des points marqués, mais elles apparaissent tout de même toutes les deux dans la réunion totale si $\underline{\mathbf{d}} \neq \underline{\mathbf{d}'}$.

Introduisons quelques fibrés sur ces espaces de modules.

Lemme 2.2. *1. Il existe un fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal \mathfrak{p}_X^+ au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ dont la fibre au-dessus d'un point (u, J_{Σ_g}, J) est $\bigotimes_{i=0}^{b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)} \text{Pin}^+((\mathbb{R}E_u)_i)$. De plus, l'action de $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ se relève naturellement sur \mathfrak{p}_X^+ .*

2. Il existe un fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal \mathfrak{D} au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{P}_{g,pol}^d(X)$ dont la fibre au-dessus d'un point $(u, J_{\Sigma_g}, J, \underline{\mathbf{x}})$ est $\mathfrak{D}_{J_{\Sigma_g}, D_{\underline{\mathbf{x}}}}(E_u)$ (voir la définition 1.5 au §1.3.1). De plus, l'action de $Diff^+(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_{g,pol}^d(X)$ se relève naturellement sur \mathfrak{D} .
3. Il existe un fibré en droites réelles T_{pol} au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{P}_{g,pol}^d(X)$ dont la fibre au-dessus d'un point $(u, J_{\Sigma_g}, J, \underline{\mathbf{x}})$ est $\det(\mathbb{R}\mathcal{J}_{\underline{\mathbf{x}}}) \otimes \bigotimes_{x \in \underline{\mathbf{x}}^+ \cap \mathbb{R}\Sigma_g} T_x^* \mathbb{R}\Sigma_g$ (voir §1.3.1). De plus, l'action de $Diff^+(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_{g,pol}^d(X)$ se relève naturellement sur T_{pol} .
4. Il existe un fibré en droites réelles $L_{r,pol}$ (resp. L_r) au-dessus de $\mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X)$ (resp. au-dessus de $\mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r}^d(X)$) dont la fibre au-dessus d'un point $(u, J_{\Sigma_g}, J, \underline{z}, \underline{\mathbf{x}})$ est $\det(\mathbb{R}\tau \bigoplus_{z \in \underline{z}} T_z \Sigma_g) \otimes \det(T_{\underline{\mathbf{x}}} \mathbb{R}\Sigma_g^{(\underline{\mathbf{d}})})$ (resp. $\det(\mathbb{R}\tau \bigoplus_{z \in \underline{z}} T_z \Sigma_g)$). De plus, l'action de $Diff^+(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X)$ (resp. sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_{g,r}^d(X)$) se relève naturellement sur $L_{r,pol}$ (resp. L_r).
5. Il existe un fibré en droites réelles H_{-1}^1 au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ dont la fibre au-dessus d'un point (u, J_{Σ_g}, J) est $\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})$. De plus, l'action de $Diff^+(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ se relève naturellement sur H_{-1}^1 .

Démonstration. Notons $ev : (u, J_{\Sigma}, J, z) \in \mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X) \times \Sigma_g \mapsto u(z) \in X$ et $E = ev^*TX$. Ce dernier est un fibré vectoriel complexe, et c_X induit une structure réelle c_E dessus, de sorte que la restriction de (E, c_E) au-dessus de $\{(u, J_{\Sigma}, J)\} \times \Sigma_g$ est égale à (E_u, c_{E_u}) . Prenons un voisinage $U \subset \mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ de (u, J_{Σ}, J) qui trivialise (E, c_E) . C'est-à-dire que l'on a une application F de classe C^l entre $(E, c_E)|_U$ et $(E_u, c_{E_u}) \times U$ telle que pour tout $(v, J'_{\Sigma}, J') \in U$, F induise un isomorphisme entre (E_v, c_{E_v}) et (E_u, c_{E_u}) . L'application F induit

un isomorphisme entre le fibré \mathfrak{p}_X^+ restreint à U et le fibré trivial $\bigotimes_{i=0}^{b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)} Pin^+((\mathbb{R}E_u)_i) \times U$.

Ceci définit la structure de fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal sur \mathfrak{p}_X^+ . De plus, un difféomorphisme $\varphi \in Diff^+(\Sigma_g)$ induit un isomorphisme $\varphi^* : (E_u, c_{E_u}) \rightarrow (E_{u \circ \varphi^{-1}}, c_{E_{u \circ \varphi^{-1}}}) = (\varphi^{-1})^*(E_u, c_{E_u})$ naturel, ce qui induit une action naturelle de $Diff^+(\Sigma_g)$ sur \mathfrak{p}_X^+ .

Notons $\Pi_{pol} : \mathbb{R}\mathcal{P}_{g,pol}^d(X) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ l'application d'oubli des points marqués. Reprenons les mêmes notations que ci-dessus. Le fibré $(\Pi_{pol})^*(E, c_E)$ est trivialisé par F au-dessus de $U \times \Sigma_g^{\underline{\mathbf{d}}}$ pour tout les $\underline{\mathbf{d}}$ adaptés. On a de plus une application $\eta : U \times \Sigma_g^{\underline{\mathbf{d}}} \rightarrow \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \Sigma_g^{\underline{\mathbf{d}}}$ d'oubli de X . L'application F induit alors un isomorphisme entre le fibré \mathfrak{D} restreint à $U \times \Sigma_g^{\underline{\mathbf{d}}}$ et le fibré $\eta^*\mathfrak{D}(E_u)$. Ceci donne à \mathfrak{D} une structure de fibré $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -principal. L'action de $Diff^+(\Sigma_g)$ sur \mathfrak{D} est donnée de la même façon que précédemment.

Les trois derniers points du Lemme sont immédiats. \square

Notons $\Pi_r : \mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}_{g,pol}^d(X)$ et $\Pi : \mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ les applications d'oubli des points marqués. Celles-ci sont $Diff^+(\Sigma_g)$ -équivariantes. D'après le Lemme 2.2, nous avons cinq fibrés $\Pi^*\mathfrak{p}_X^+$, $(\Pi_r)^*\mathfrak{D}$, $(\Pi_r)^*T_{pol}$, $L_{r,pol}$ et $\Pi^*H_{-1}^1$ sur $\mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X)$.

Nous voulons maintenant considérer des courbes non paramétrées. Pour cela, on remarque que $Diff^+(\Sigma_g)$ agit librement sur $\mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X)$. Nous notons $\mathbb{R}\tau\mathcal{M}_{g,r,pol}^d(X)$ le quotient de $\mathbb{R}\tau\mathcal{P}_{g,r,pol}^d(X)$ par l'action libre de $Diff^+(\Sigma_g)$. Les fibrés $\Pi^*\mathfrak{p}_X^+$, $(\Pi_r)^*\mathfrak{D}^+$, $(\Pi_r)^*T_{pol}$, $L_{r,pol}$ et $\Pi^*H_{-1}^1$ induisent des fibrés notés de la même façon sur $\mathbb{R}\tau\mathcal{M}_{g,r,pol}^d(X)$.

La projection naturelle $\pi : \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X) \rightarrow \mathbb{R}J_{\omega}(X)$ est une application Fredholm entre variétés de Banach (voir [26] et [16]). Il existe un fibré en droites réelles $\text{Det}(\pi)$ au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$ dont la fibre en $[u, J_{\Sigma}, J]$ est $\Lambda^{\max} \ker(d_{[u, J_{\Sigma}, J]}\pi) \otimes (\Lambda^{\max} \text{coker}(d_{[u, J_{\Sigma}, J]}\pi))^*$ (voir [19] Annexe A.2).

Théorème 2.1. *Le fibré $\Pi^* \text{Det}(\pi)$ est canoniquement isomorphe à $\Pi^* \mathfrak{p}_X^+ \otimes (\Pi_r)^*(\mathfrak{D} \otimes T_{pol}) \otimes \Pi^*(H_{-1}^1)^{\otimes n-1}$.*

En particulier, pour une structure presque complexe $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ générique, $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,r,pol}^d(X, J) = (\pi \circ \Pi)^{-1}\{J\}$ est une variété lisse vérifiant

$$w_1(\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,r,pol}^d(X, J)) = w_1\left(\Pi^* \mathfrak{p}_X^+ \otimes (\Pi_r)^*(\mathfrak{D}^+ \otimes T_{pol})\right)|_J + w_1\left(L_{r,pol} \otimes \Pi^*(H_{-1}^1)^{\otimes n-1}\right)|_J.$$

Remarque 2.1. — On peut remarquer que le fibré en droites réelles H_{-1}^1 sur $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$ est en fait le tiré en arrière d'un fibré sur $\mathbb{R}\mathcal{M}_g$ par l'application $\eta : \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{M}_g$ d'oubli de X . Et d'après le Corollaire 1.2, $w_1(H_{-1}^1) = \eta^* w_1(\mathbb{R}\mathcal{M}_g)$.

La deuxième partie du Théorème 2.1 découle de la première en remarquant d'une part que l'application Π est partout régulière, donc que $\text{coker}(d_{[u, J_\Sigma, J, \underline{z}, \underline{x}]}(\pi \circ \Pi)) = \text{coker}(d_{[u, J_\Sigma, J]}\pi)$, d'autre part que le noyau de $d_{[u, J_\Sigma, J, \underline{z}, \underline{x}]}(\pi \circ \Pi)$ entre dans la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \bigoplus_{z \in \underline{z}} T_z \Sigma_g \oplus \mathbb{R} T_{\underline{x}} \Sigma_g^d \rightarrow \ker(d_{[u, J_\Sigma, J, \underline{z}, \underline{x}]}(\pi \circ \Pi)) \xrightarrow{d_{[u, J_\Sigma, J, \underline{z}, \underline{x}]} \Pi} \ker(d_{[u, J_\Sigma, J]}\pi) \rightarrow 0,$$

puis en appliquant les Théorèmes de Sard et des fonctions implicites. Nous noterons dans la suite $\mathbb{R}J_\omega^{reg}(X)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}J_\omega(X)$ formé des valeurs régulières de π .

Le fibré vectoriel complexe (E, c_E) sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X) \times \Sigma_g$ induit deux fibrés de Banach \mathcal{E} et \mathcal{E}' sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ de fibres respectives en (u, J_Σ, J) , $\mathcal{E}_u = L^{k,p}(\Sigma_g, E_u)_{+1}$ et $\mathcal{E}'_u = L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda_{J_\Sigma}^{0,1} \Sigma_g \otimes E_u)_{+1}$. L'action de $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ s'étend de façon naturelle à ces deux fibrés. De plus, étant donnée une courbe $(u, J_\Sigma, J) \in \mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$, le fibré E_u est muni d'un opérateur de Cauchy Riemann réel généralisé noté D_u , dont la partie J -linéaire notée $\bar{\partial}_u$ induit un structure holomorphe sur E_u (voir [16]). On obtient ainsi un opérateur $D : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ qui est de plus $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ -équivariant (voir [26]).

D'autre part, pour une structure réelle donnée c_Σ sur Σ_g , on a deux fibrés de Banach \mathcal{T} et \mathcal{T}' au-dessus de $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre respectives $\mathcal{T}_{J_\Sigma} = L^{k,p}(\Sigma_g, T\Sigma_g)_{+1}$ et $\mathcal{T}'_{J_\Sigma} = L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda_{J_\Sigma}^{0,1} \Sigma_g \otimes T\Sigma_g)_{+1}$ et un opérateur $\bar{\partial} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ valant $\bar{\partial}_{J_\Sigma}$ au point J_Σ . De plus, cet opérateur est $\mathbb{R}\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ -équivariant. En tirant en arrière ces objet par l'application d'oubli de X , on obtient deux fibrés de Banach \mathcal{T} et \mathcal{T}' au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ et un opérateur $\bar{\partial} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ qui est $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ -équivariant.

On notera $\text{Det}(D)$, respectivement $\text{Det}(\bar{\partial})$, les fibrés en droites réelles au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$ dont la fibre en une courbe $[u, J_\Sigma, J]$ est $\text{Det}(D_u)$, respectivement $\text{Det}(\bar{\partial}_{J_\Sigma})$. Rappelons maintenant la Proposition 2.1 (voir [23] Corollaires 2.2.3 et 1.5.4, et [26]).

Proposition 2.1. *Il existe un isomorphisme canonique $\text{Det}(\pi) = \text{Det}(D) \otimes \text{Det}(\bar{\partial})^*$. \square*

Démonstration du Théorème 2.1. Le Théorème 2.1 découle maintenant de la Proposition 2.1, du Théorème 1.2 et du Corollaire 1.1. En effet, en combinant ces trois résultats on a

$$\begin{aligned} \Pi^* \text{Det}(\pi) &= \Pi^* \text{Det}(D) \otimes \Pi^* \text{Det}(\bar{\partial})^* \\ &= \left(\Pi^* \mathfrak{p}_X^+ \otimes (\Pi_r)^* \mathfrak{D}^+ \otimes \Pi^*(H_{-1}^1)^{\otimes n} \otimes (\Pi_r)^* T_{pol} \right) \otimes (\Pi^* H_{-1}^1). \end{aligned}$$

\square

2.2 Deux cas particuliers

Nous précisons le Théorème 2.1 dans les deux cas traités au §1.3.5.

2.2.1 Le cas séparant

Nous pouvons partitionner $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$) en sous-ensembles $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$) qui contient les courbes réelles séparantes et $\mathbb{R}_\tau^{nsep} \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau^{nsep} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$) qui contient les courbes réelles non séparantes.

Remarquons que sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$, nous avons une fonction localement constante k_- à valeurs dans $\{0, \dots, g+1\}$ qui associe à la courbe $[u, J_\Sigma, J, \underline{z}]$ le nombre de composantes de $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \Sigma_g$ sur lesquelles $\mathbb{R}E_u$ n'est pas orientable.

Considérons sur $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ le fibré en droites réelles O_X de fibre $O_{\mathbb{R}E_u}$ au-dessus de $(u, J_\Sigma, J, \underline{z})$ (voir §1.3.5).

Enfin, lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante notons H_{c_Σ} l'ensemble constitué des deux orientations de $\mathbb{R}_{c_\Sigma} \Sigma_g$ provenant de l'orientation fixée sur Σ_g et $\mathbb{R}\Sigma_g^-$ la réunion des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ au-dessus desquelles $\mathbb{R}E_u$ n'est pas orientable. Posons H (resp. \mathbb{R}_w) le fibré en droites réelles sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ associé au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibré principal de fibre H_{c_Σ} (resp. $\det(H_0(\mathbb{R}\Sigma_g^-, \mathbb{R}))$) au-dessus de $(u, J_\Sigma, J, \underline{z})$.

Tous ces fibrés en droites sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ induisent des fibrés sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ que nous noterons de la même façon. Le Corollaire suivant découle de la Proposition 2.1 et du Corollaire 1.4.

Corollaire 2.1. *Le fibré $\Pi^* \text{Det}(\pi)$ sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ est canoniquement isomorphe au fibré en droites*

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes \mathbb{R}_w \otimes H^{\frac{c_1(X)d+k_-}{2}} \otimes \mathfrak{p}_X^+ \otimes O_X.$$

□

Le cas des courbes séparantes a déjà été traité par plusieurs auteurs. Welschinger dans [27] a calculé la première classe de Stiefel-Whitney du compactifié de l'espace $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{0, \frac{c_1(X)d}{2}}^d(X)$ lorsque (X, ω, c_X) est une variété symplectique réelle fortement semi-positive dont la partie réelle est Pin^\pm . Le Corollaire 2.1 et le Lemme 2.3 nous permettent de retrouver une partie de ce résultat (voir Corollaire 2.2).

Lemme 2.3. 1. *Si τ n'est pas l'identité, alors les fibrés L_r et H sur $\mathbb{R}_\tau^{sep} \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ sont orientables.*

2. *Les fibrés L_r et H sont orientables sur les composantes connexes de $\mathbb{R}_{\text{id}}^{sep} \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ qui regroupent les courbes dont au moins une composante de la partie réelle contient trois points marqués.*

Démonstration. Prenons $[u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0] \in \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ et choisissons un lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = [u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0]$. Ce lacet se relève en un chemin $(u_t, (J_\Sigma)_t, J_t, \underline{z}_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathbb{R}_\tau \mathcal{P}_{g,r}^d(X)$ joignant $(u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0)$ à $(u_1, (J_\Sigma)_1, J_1, \underline{z}_1) = \varphi \cdot (u_0, (J_\Sigma)_0, J_0, \underline{z}_0)$, où $\varphi \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$. On obtient alors une trivialisations de L_r (resp. de H) au-dessus de $[0, 1]$ en choisissant une famille continue $\phi_t \in \mathbb{R}Diff^+(\Sigma_g)$, $t \in [0, 1]$, telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi_t^{-1}(\underline{z}_t) = \underline{z}_0$. La valeur de la première classe de Stiefel-Whitney du fibré L_r (resp. de H) appliquée à γ est alors donnée par le signe de l'action de $d\phi_1^{-1} \circ d\varphi$ sur les orientations de $\mathbb{R}(T_{\underline{z}_0} \Sigma_g^m)$ (resp. de H_{c_Σ}).

Dans le premier cas, \underline{z}_0 contient au moins une paire de points complexes conjugués. En particulier, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ fixe ces deux points. Comme les courbes considérées sont séparantes, cela implique que $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les deux orientations de $\mathbb{R}\Sigma_g$ provenant de l'orientation fixée sur Σ_g . Ainsi, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les orientations de $\mathbb{R}(T_{\underline{z}_0} \Sigma_g^m)$ et de H_{c_Σ} .

Dans le second cas, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ fixe trois points sur une des composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$. En particulier $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les orientations de cette composante. À nouveau, $\phi_1^{-1} \circ \varphi$ préserve les orientations de $\mathbb{R}(T_{z_0}\Sigma_g^m)$ et de H_{c_Σ} . \square

Remarque 2.2. — En général, le fibré H n'est pas orientable. Considérons par exemple $\mathbb{R}^{sep}\mathcal{M}_{0,0}^1(\mathbb{C}P^2)$. La première classe de Stiefel-Whitney de H n'est pas nulle au-dessus d'un faisceau de droites réelles passant par un point fixé.

Corollaire 2.2. *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension au moins 4. Supposons que la partie réelle de X admet une structure $Spin$. Alors pour tout $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d \geq 0$, $m \geq 3$, et $J \in \mathbb{R}J_\omega(X)$ générique, la variété $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{0,m}^d(X, J)$ est orientable.* \square

2.2.2 Le cas $Spin$

Pour $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d$ est pair, notons $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^{d,0}(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau\mathcal{P}_{g,r}^{d,0}(X)$) l'union des composantes de $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^d(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau\mathcal{P}_{g,r}^{d,0}(X)$) sur lesquelles nous avons $w_1(\mathbb{R}E_u) = 0$. Considérons $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^{d,Spin}(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau\mathcal{P}_{g,r}^{d,Spin}(X)$) le revêtement à 2^{g+k-1} feuilletés associé au $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+k-1}$ -fibré principal sur $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^{d,0}(X)$ (resp. $\mathbb{R}_\tau\mathcal{P}_{g,r}^{d,0}(X)$) dont la fibre en $[u, J_\Sigma, J, z]$ est formée des structures $Spin$ réelle sur E_u . Nous disposons sur $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^{d,Spin}(X)$ du fibré en droites réelles O_X^{Spin} associé au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -fibré principal dont la fibre au-dessus de $([u, J_\Sigma, J, z], \xi)$ est composée des deux semi-orientations de $\mathbb{R}E$ associées à ξ (voir §1.3.5). D'autre part, sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}_\tau\mathcal{P}_{g,r}^{d,Spin}(X)$, toutes les structures $Spin$ réelles ont même première classe de Stiefel-Whitney. On définit donc le fibré $H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}_\tau\mathcal{P}_{g,r}^{d,Spin}(X)$ de fibre $\bigotimes_{w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=1} H^1([\mathbb{R}\Sigma_g]_i, \mathbb{R})$ au-dessus (u, J_Σ, J, z, ξ) , où ξ est de première classe de

Stiefel-Whitney w . On note encore $H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R})$ le fibré induit sur $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^{d,Spin}(X)$.

Le Corollaire suivant découle de la Proposition 2.1 et du Corollaire 1.5.

Corollaire 2.3. *Soit $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1(X)d$ est pair. Le fibré $\Pi^*\text{Det}(\pi)$ sur $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^{d,Spin}(X)$ est canoniquement isomorphe au fibré*

$$\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes H_w^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{R}) \otimes (O_X^{Spin})^{1-g} \otimes \mathfrak{p}_X^\pm.$$

\square

Il existe une famille de variétés donnée dans le Lemme 2.4 pour laquelle on peut obtenir un résultat plus précis (voir Corollaire 2.4).

Lemme 2.4. *Soit $X_\delta \subset \mathbb{C}P^N$ une hypersurface complexe lisse de degré δ . Supposons que N est supérieur ou égal à quatre et vérifie $N \equiv 0$ ou $3 \pmod{4}$, que $\delta \equiv N+1 \pmod{2}$ et que X_δ est de partie réelle non vide. Alors X_δ admet une unique structure $Spin$ réelle ξ_0 , et sa partie réelle est $Spin$. De plus, si $\delta \equiv N+1 \pmod{4}$, alors la première classe de Stiefel-Whitney de ξ_0 est nulle.*

Démonstration. Notons i l'inclusion de X_δ dans $\mathbb{C}P^N$. D'après la formule d'adjonction, nous avons $c_1(X_\delta) + \delta i^*h = (N+1)i^*h$, où h est le générateur de $H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$. Comme $\delta \equiv N+1 \pmod{2}$, $c_1(X_\delta)$ est divisible par deux dans $H^2(X_\delta, \mathbb{Z})$. En particulier X_δ admet une structure $Spin$. D'autre part, d'après le Théorème de l'hyperplan de Lefschetz, on a

$H^1(X_\delta, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^1(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$. Ainsi X_δ admet une unique structure *Spin*, qui est donc réelle, et que l'on note ξ_0 .

L'existence de ξ_0 implique que $\mathbb{R}X_\delta$ est orientable. De nouveau grâce à la formule d'adjonction on a $w_2(\mathbb{R}X_\delta) = \frac{N(N+1)}{2}t^2$, où t est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ainsi, sous les hypothèses faites sur N , $w_2(\mathbb{R}X_\delta) = 0$ et $\mathbb{R}X_\delta$ est *Spin*. \square

Notons que $\mathbb{C}P^{N-1}$ vérifie les hypothèses du Lemme 2.4 lorsque N est pair. En appliquant le Théorème 2.3 et la Proposition 2.1 aux cas mis en avant dans le Lemme 2.4, on obtient le Corollaire 2.4 suivant.

Corollaire 2.4. *Soit X_δ une hypersurface lisse de degré δ de $\mathbb{C}P^N$, $N \geq 4$, $N = 0$ ou $3 \pmod{4}$, de partie réelle non vide et vérifiant $\delta = N + 1 \pmod{4}$ et $\delta \leq N + 1$. Soit $d \in H_2(X_\delta, \mathbb{Z})$, $r \geq 1$ et τ une permutation de $\{1, \dots, r\}$ d'ordre 2 et ayant au moins un point fixe. Pour $J \in \mathbb{R}J_{\omega_{Fab}}^{reg}(X_\delta)$ on a*

$$w_1(\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X_\delta, J)) = w_1(L_r) + (\delta - 1)w_1(\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})).$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.4, la partie réelle de X_δ est *Spin*, donc la première classe de Stiefel-Whitney de $(O_X^{Spin})^{1-g} \otimes \mathfrak{P}^\pm$ est nulle. D'après ce même Lemme, X_δ admet une unique structure *Spin* réelle qui est de plus de première classe de Stiefel-Whitney nulle. Cette structure fournit une section du revêtement $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^{d,Spin}(X_\delta) \rightarrow \mathcal{M}_{g,r}^d(X_\delta)$. On conclut alors grâce au Théorème 2.3 et à la Proposition 2.1. \square

Donnons l'analogie du Lemme 2.3 qui donne une condition pour calculer le terme $w_1(L_r)$ du Corollaire 2.4.

Lemme 2.5. *Le fibré L_r est orientable sur les composantes connexes de $\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^{d,Spin}(X)$ qui regroupent les courbes dont toutes les composantes de la partie réelle contiennent trois points marqués.* \square

2.3 Polarisation

Le but de ce paragraphe est de déduire du Théorème 2.1 des résultats sur la première classe de Stiefel-Whitney des espaces $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, J)$. Nous y parvenons en prenant une polarisation sur (X, ω, c_X) (§2.3.1). En effet, celle-ci induit une polarisation sur certaines courbes (§2.3.2) ce qui nous donne le Théorème 2.2. Dans le §2.3.3, nous discutons l'existence de polarisations sur (X, ω, c_X) .

2.3.1 Diviseurs admissibles

Considérons (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension $2n$, $n \geq 2$.

Définition 2.3. *Un diviseur réel sur (X, ω, c_X) est une somme finie $D = \sum a_V V$, où $a_V \in \mathbb{Z}$ et $V \subset X$ est une sous-variété symplectique de dimension $2n - 2$, telle que $(c_X)_* D = D$.*

Lemme 2.6. *Soit D un diviseur réel sur (X, ω, c_X) . Supposons qu'il existe un élément $J_0 \in \mathbb{R}J_D(X) := \{J \in \mathbb{R}J_\omega(X) \mid \forall V \in D, V \text{ est } J\text{-holomorphe}\}$ qui soit compatible avec ω , c'est-à-dire tel que $\omega(J_0, J_0) = \omega(\cdot, \cdot)$. Alors $\mathbb{R}J_D(X)$ est une sous-variété de Banach contractile de $\mathbb{R}J_\omega(X)$. Son espace tangent en un point $J \in \mathbb{R}J_D(X)$ est isomorphe à $\{W \in \Gamma^l(X, \Lambda^{0,1}X \otimes TX)_{+1} \mid \forall V \in D, W(TV) \subset TV\}$.*

Démonstration. Notons $\|\cdot\|_{J_0}$ la norme induite par la métrique $\omega(\cdot, J_0 \cdot)$ sur $\Gamma^l(X, \text{End}_{\mathbb{R}}(TX))$ et posons $\mathcal{W} = \{W \in \Gamma^l(X, \text{End}_{\mathbb{R}}(TX)) \mid J_0 W = -W J_0 \text{ et } \|W\|_{J_0} < 1\}$. Cet ensemble est muni d'une involution $(c_X)^*$. La transformation de Sévenec

$$J \in J_{\omega}(X) \rightarrow (J + J_0)^{-1} \circ (J - J_0) \in \mathcal{W}$$

est un difféomorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant (voir [26]). L'image de $\mathbb{R}J_D(X)$ sous cette application est égale à

$$\mathbb{R}\mathcal{W} \cap \{W \in \mathcal{W} \mid \forall V \in D, \forall x \in V, W(T_x V) \subset T_x V\}.$$

Ce dernier espace est une sous-variété de Banach contractile de \mathcal{W} , ce qui prouve le Lemme. \square

Définition 2.4. *On dira qu'un diviseur réel D est admissible si*

- toutes ses composantes s'intersectent transversalement,
- toutes ses composantes apparaissent avec une multiplicité ± 1 ,
- et s'il existe un élément dans $\mathbb{R}J_D(X)$ qui soit compatible avec ω .

On notera D_r la partie de D formée des composantes stables par c_X .

Un diviseur admissible D tel que $D^{\text{PD}} = c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ et $(\mathbb{R}D_r)^{\text{PD}} = w_1(\mathbb{R}X) \in H^1(\mathbb{R}X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est appelé une polarisation de (X, ω, c_X) , qui sera alors dite polarisée.

Remarque 2.3. — Pour un diviseur réel admissible quelconque, $\mathbb{R}D$ n'est pas égal à $\mathbb{R}D_r$. En effet, deux composantes complexes conjuguées de D s'intersectent en une sous-variété symplectique de dimension $2n - 4$ stable par c_X qui peut avoir une partie réelle non vide de dimension $n - 2$.

2.3.2 Transversalité

Fixons un diviseur D admissible sur (X, ω, c_X) . Nous commençons par décrire dans le Lemme 2.7 le comportement local d'une courbe pseudo-holomorphe réelle $u : (\Sigma_g, c_{\Sigma}, J_{\Sigma}) \rightarrow (X, c_X, J)$ au voisinage d'un point d'intersection avec D . Nous prenons pour ceci des coordonnées locales de la forme suivante.

1. Si V est une composante du support de D_r , pour chaque $p \in u^{-1}(\mathbb{R}V) \cap \mathbb{R}\Sigma_g$ (resp. pour chaque $q, c_{\Sigma}(q) \in u^{-1}(\mathbb{R}V) \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$) on prend une carte locale J_{Σ} -holomorphe centrée en p et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante (resp. deux cartes locales J_{Σ} -holomorphes complexes conjuguées centrées en q et $c_{\Sigma}(q)$), et des coordonnées locales $(v_1, \dots, v_{2n-2}, x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ centrées en $u(p)$ (resp. en $u(q) = u(c_{\Sigma}(q))$), $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes, c'est-à-dire telles que $(v_1, \dots, v_{2n-2}, x, y) \circ c_X = (v_1, \dots, -v_{2n-2}, x, -y)$, et telles que (v_1, \dots, v_{2n-2}) soient des coordonnées locales pour V , $x = y = 0$ et $J \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ le long de V ,
2. Si V est une composante du support de $D - D_r$, pour chaque $p \in u^{-1}(V \cap \mathbb{R}X) \cap \mathbb{R}\Sigma_g$ (resp. pour chaque $q, c_{\Sigma}(q) \in u^{-1}(V \cap \mathbb{R}X) \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$) on prend une carte locale J_{Σ} -holomorphe centrée en p et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante (resp. deux cartes locales J_{Σ} -holomorphes complexes conjuguées centrées en q et $c_{\Sigma}(q)$), et des coordonnées locales $(v_1, \dots, v_{2n-2}, x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ centrées en $u(p)$ (resp. en $u(q) = u(c_{\Sigma}(q))$), $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes, c'est-à-dire telles que $(v_1, \dots, v_{2n-2}, x, y) \circ c_X = (v_1, \dots, -v_{2n-4}, x, -y, v_{2n-3}, -v_{2n-2})$, et telles que (v_1, \dots, v_{2n-2}) soient des coordonnées locales pour V , $x = y = 0$ et $J \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ le long de V ,

3. Si V est une composante du support de D , pour chaque $q, c_\Sigma(q) \in u^{-1}(V \setminus (V \cap \mathbb{R}X)) \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$, on prend des cartes J_Σ -holomorphes complexes conjuguées centrées en q et $c_\Sigma(q)$, et des coordonnées locales $(v_1, \dots, v_{2n-2}, x, y)$ centrées en $u(q)$ et $(v_1, \dots, -v_{2n-2}, x, -y) \circ c_X$ centrées en $u(\bar{q})$ telles que (v_1, \dots, v_{2n-2}) soient des coordonnées locales de V au voisinage de $u(q)$, $x = y = 0$ et $J \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ le long de V ,

Nous pouvons maintenant énoncer le Lemme 2.7 qui est la version réelle du Lemme 3.4 de [15].

Lemme 2.7. *Soit $J \in \mathbb{R}J_D(X)$ et fixons une composante V du support de D . Soit $u : (\Sigma_g, c_\Sigma, J_\Sigma) \rightarrow (X, c_X, J)$ une courbe J -holomorphe réelle qui n'est pas contenue dans V . Alors, dans les coordonnées locales données ci-dessus,*

Cas 1 il existe un entier $m \geq 1$ et un réel $a \in \mathbb{R}^$ (resp. un complexe $a \in \mathbb{C}^*$) vérifiant*

$$\begin{aligned} u(z) &= (O(|z|), az^m + O(|z^{m+1}|)), \text{ au voisinage de } p \\ \text{resp. } u(z) &= (O(|z|), az^m + O(|z^{m+1}|)), \text{ au voisinage de } q \\ \text{et } u(z) &= (O(|z|), \bar{a}z^m + O(|z^{m+1}|)), \text{ au voisinage de } c_\Sigma(q) \end{aligned}$$

Cas 2 il existe un entier $m \geq 1$ et un réel $a \in \mathbb{R}^$ (resp. un complexe $a \in \mathbb{C}^*$) vérifiant*

$$\begin{aligned} u(z) &= (O(|z|), az^m + O(|z^{m+1}|), az^m + O(|z^{m+1}|)), \text{ au voisinage de } p \\ \text{resp. } u(z) &= (O(|z|), O(|z|), az^m + O(|z^{m+1}|)) \text{ au voisinage de } q, \\ \text{et } u(z) &= (O(|z|), \bar{a}z^m + O(|z^{m+1}|), O(|z|)) \text{ au voisinage de } \bar{q}. \end{aligned}$$

Cas 3 il existe un entier $m \geq 1$ et un complexe $a \in \mathbb{C}^$ vérifiant*

$$\begin{aligned} u(z) &= (O(|z|), az^m + O(|z^{m+1}|)) \text{ au voisinage de } q, \\ u(z) &= (O(|z|), \bar{a}z^m + O(|z^{m+1}|)) \text{ au voisinage de } \bar{q}. \end{aligned}$$

De plus, dans tous les cas, l'entier m est défini indépendamment des choix de coordonnées locales. On le notera $\text{mult}_V(u, p)$ (resp. $\text{mult}_V(u, q)$). \square

En particulier, si $J \in \mathbb{R}J_D(X)$, une courbe J -holomorphe qui n'est pas contenue dans D intersecte le diviseur positivement en un nombre fini de points. De plus, il n'est pas difficile de voir qu'un point d'intersection de multiplicité m avec une composante V compte pour m dans le calcul de l'intersection homologique $u(\Sigma_g) \bullet V$.

Proposition 2.2. *Soit D un diviseur admissible sur (X, ω, c_X) . La restriction de la projection $\pi : \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X) \rightarrow \mathbb{R}J_\omega(X)$ à l'ouvert $\{[u, J_\Sigma, J] \in \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X) \mid u(\Sigma_g) \not\subset D\}$ est transverse à $\mathbb{R}J_D(X)$.*

La démonstration suit celle de la Proposition 1.11 de [26], nous passons donc assez rapidement.

Démonstration. Soit $J \in \mathbb{R}J_D(X)$ et $(u, J_\Sigma, J) \in \mathbb{R}\mathcal{P}_g^d(X)$ telle que $u(\Sigma_g)$ n'est pas contenue dans D . Notons N_u le fibré normal à u et $D^N : L^{k,p}(\Sigma_g, N_u) \rightarrow L^{k-1,p}(\Sigma_g, N_u)$ l'opérateur de Cauchy-Riemann généralisé induit par D sur N_u (voir [23] et [26]). Le conoyau de $d_{[u, J_\Sigma, J]}\pi$ est canoniquement isomorphe à $H_{D^N}^1(\Sigma_g, N_u)_{+1}$. Soit $\psi \in (H_{D^N}^1(\Sigma_g, N_u)_{+1})^* = H_{D^N}^0(\Sigma_g, K_\Sigma \otimes (N_u)^*)_{-1}$ non nul. Il nous faut trouver $\dot{J} \in T_J\mathbb{R}J_D(X)$ tel que $\langle \psi, \dot{J} \circ du \circ J_\Sigma \rangle \neq 0$.

D'après le Lemme 2.7, il existe un ouvert $U \subset \Sigma_g$ non vide tel que $u(U) \cap D = \emptyset$. On peut de plus supposer que $c_\Sigma(U) = U$ et que la restriction de u à U est un plongement. Comme les zéros de ψ sont isolés (voir [16]), on impose enfin que ψ ne s'annule pas sur U . Il existe alors une section réelle α de $\Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes E_u$ à support dans U et telle que $\langle \psi, \alpha \rangle \neq 0$. On prend alors $\dot{J} \in T_J\mathbb{R}J_\omega(X)$ à support dans un voisinage de U et vérifiant $\dot{J} \circ du \circ J_\Sigma = \alpha$. Il est alors immédiat que $\dot{J} \in T_J\mathbb{R}J_D(X)$ et vérifie $\langle \psi, \dot{J} \circ du \circ J_\Sigma \rangle \neq 0$. \square

D'après la Proposition 2.2, l'intersection $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D) := \pi^{-1}(\mathbb{R}J_D(X)) \cap \{[u, J_\Sigma, J] \in \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X) \mid u(\Sigma_g) \not\subset D\}$ est une sous-variété de Banach de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X)$.

Supposons à partir de maintenant que D est une polarisation de (X, ω, c_X) . Décomposons D en $D^+ - D^-$, où D^+ et D^- sont deux diviseurs effectifs. On dira qu'un quadruplet d'entiers naturels \underline{d} est adapté à (D, d) si $d_1 + 2d_3 = d \bullet D^+$ et $d_2 + 2d_4 = d \bullet D^-$. En reprenant les mêmes notations qu'au §2.1, posons

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X, D) = \{ & [u, J_\Sigma, J, \underline{x}] \in \mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X) \mid [u, J_\Sigma, J] \in \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D) \\ & \text{et } \underline{x} \in \Sigma_g^{(\underline{d})} \text{ avec } \underline{d} \text{ adapté à } (D, d)\} \\ & \subset (\Pi_{pol})^{-1}(\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)). \end{aligned}$$

Pour tout quadruplet d'entiers \underline{d} , le produit symétrique $\Sigma_g^{(\underline{d})}$ admet un revêtement $\Sigma_g^{\underline{d}}$ non ramifié de groupe de transformations $\mathfrak{S}_{\underline{d}}$ (voir §1.3.1). La variété $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X, D)$ hérite aussi d'un revêtement non ramifié $\eta : \widetilde{\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X, D)} \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X, D)$ donné par la numérotation des points marqués et dont le groupe est $\mathfrak{S}_{\underline{d}}$ au-dessus des composantes contenant les courbes dont les points marqués sont dans $\Sigma_g^{(\underline{d})}$.

Nous disposons alors d'une application d'évaluation

$$ev_{pol} : \widetilde{\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X, D)} \rightarrow X^{pol}$$

où $X^{pol} = \bigsqcup_{\substack{r_+ + 2s_+ = d \bullet D^+ \\ r_- + 2s_- = d \bullet D^-}} (\mathbb{R}X)^{r_+ + r_-} \times (\mathbb{R}X^2)^{s_+ + s_-}$. Notons enfin pour tout $\underline{d} = (r_+, r_-, s_+, s_-) \in \mathbb{N}^4$, $D^{\underline{d}} = (\mathbb{R}D^+)^{r_+} \times (\mathbb{R}D^-)^{r_-} \times (\mathbb{R}(D^+)^2)^{s_+} \times (\mathbb{R}(D^-)^2)^{s_-}$ et $D^{pol} = \bigsqcup_{\underline{d} \text{ adapté à } (D, d)} D^{\underline{d}} \subset X^{pol}$.

Lemme 2.8. *Soit D une polarisation de (X, ω, c_X) .*

–

$$\eta(ev_{pol}^{-1}(D^{pol})) \subset (\Pi_{pol})^{-1}\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$$

où

$$\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural = \{[u, J_\Sigma, J] \in \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D) \mid \forall V \in D, \forall p \in u(\Sigma_g) \cap V, mult_V(u, p) = 1 \\ \forall V' \neq V \in D, u(\Sigma_g) \cap (V \cap V') = \emptyset\}.$$

- Pour tous $(r_+, r_-, s_+, s_-) \in \mathbb{N}^4$ et $(r'_+, r'_-, s'_+, s'_-) \in \mathbb{N}^4$ distincts tels que $r_+ + 2s_+ = r'_+ + 2s'_+ = d \bullet D^+$ et $r_- + 2s_- = r'_- + 2s'_- = d \bullet D^-$, $ev_{pol}^{-1}(D^{(r_+, r_-, s_+, s_-)}) \cap ev_{pol}^{-1}(D^{(r'_+, r'_-, s'_+, s'_-)}) = \emptyset$.
- L'application ev_{pol} est transverse à D^{pol} .

Démonstration. Soit $[u, J_\Sigma, J, \underline{x}] \in ev_{pol}^{-1}(D^{pol})$. On a alors

$$\text{card}(\underline{x}) = d \bullet (D^+ + D^-) = \sum_{p \in u^{-1}(D)} \sum_{V \in D^\pm} mult_V(u, p) \geq \text{card}(\underline{x}).$$

La première égalité provient de la définition de $\mathbb{R}\mathcal{M}_{g,pol}^d(X, D)$. La seconde est une conséquence du Lemme 2.7. L'inégalité n'est une égalité que lorsque u est de multiplicité 1 en chaque point d'intersection avec D et que ceux-ci ne se trouvent pas sur deux composantes de D distinctes. Ceci montre le premier point.

Le deuxième point est immédiat. Le troisième découle du premier. \square

Le Lemme 2.8 implique que $\eta(\text{ev}_{pol}^{-1}(D^{pol}))$ est une sous-variété de $(\Pi_{pol})^{-1}\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)$. De plus, la restriction de Π_{pol} à $\eta(\text{ev}_{pol}^{-1})$ est un difféomorphisme sur l'ouvert $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$ de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)$. L'inverse de Π_{pol} est donnée par l'intersection des éléments de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$ avec D .

Remarque 2.4. — Les éléments de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$ sont les courbes dont tous les points d'intersection avec D sont de multiplicité 1 et se trouvent sur une seule composante de D . En particulier, d'après le Lemme 2.7, le complémentaire $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D) \setminus \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$ est formé d'une strate de codimension 1 qui contient les courbes qui ont exactement un point d'intersection réel avec D de multiplicité 2 ou bien un point d'intersection réel de multiplicité 1 avec deux composantes distinctes de D , et de strates de codimensions supérieures (voir aussi [14]).

Définition. Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle de dimension $2n$ et polarisée par le diviseur D . Une section polarisante associée à D est une section s réelle de $\det_J(TX) = \Lambda_J^n TX$ pour un certain $J \in \mathbb{R}J_D(X)$ vérifiant

- $s^{-1}(\{0\}) = D$,
- s s'annule transversalement le long de chaque composante de D sauf aux endroits où deux telles composantes s'intersectent,
- le signe de chaque composante de D est donné par la comparaison de l'orientation induite par s avec celle venant de la forme symplectique.

Nous discutons l'existence d'une telle section dans le §2.3.3.

Théorème 2.2. Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle polarisée par le diviseur D . Le fibré en droites réelles $\text{Det}(\pi : \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural \rightarrow \mathbb{R}J_D(X))$ est canoniquement isomorphe à

$$\mathfrak{p}_X^+ \otimes (\Pi_{pol})_* \mathfrak{D} \otimes \det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})^{n-1} \otimes (\Pi_{pol})_* T_{pol}$$

au-dessus de $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$.

De plus, si (X, ω, c_X) admet une section polarisante, alors le choix d'une telle section oriente le fibré \mathfrak{D} .

Démonstration. La première partie du résultat provient directement du Théorème 2.1.

Supposons donc que (X, ω, c_X) admet une section polarisante s_{J_0} de $\det_{J_0}(TX)$, pour un certain $J_0 \in \mathbb{R}J_D(X)$. Comme $\mathbb{R}J_D(X)$ est contractile, il existe une famille continue d'isomorphismes $F_J : (\det_{J_0}(TX), dc_X) \rightarrow (\det_J(TX), dc_X)$ uniquement déterminée à homotopie près. On obtient ainsi une famille continue de section réelles polarisantes $(s_J = F_J(s_{J_0}))_{J \in \mathbb{R}J_D(X)}$ de $\det_J(TX)$.

Prenons maintenant $[u, J_\Sigma, J] \in \mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$. Notons $\mathbb{R}\Gamma_D(\det(E_u))$ l'espace des sections réelles s de $\det(E_u)$ s'annulant seulement et transversalement aux points de $D_u = u^{-1}(u(\Sigma_g) \cap D)$ et dont l'indice d'annulation en un point est donné par le signe de ce point dans D_u . En particulier, la section s_J induit un élément s_u de $\mathbb{R}\Gamma_D(\det(E_u))$. Choisissons une famille de coordonnées locales J_Σ -holomorphes (U_x, ζ_x) , centrées au points $x \in D_u$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes, ainsi qu'une famille de trivialisations locales ϕ_x de $\det(E_u)$ sur les ouverts U_x . On peut alors homotoper s_u dans $\mathbb{R}\Gamma_D(\det(E_u))$ en une section réelle \tilde{s}_u de $\det(E_u)$ telle que dans la trivialisations ϕ_x , $x \in D_u$, on ait $\tilde{s}_u = \pm \zeta_x$ si $\text{mult}_{D_u}(x) = +1$ et $\tilde{s}_u = \pm \overline{\zeta_x}$ si $\text{mult}_{D_u}(x) = -1$. En effet, soit $x \in D_u$ de multiplicité $+1$. Alors $d_x s_u$ est de déterminant strictement positif. Si les deux valeurs propres de $d_x s_u$ ne sont pas réelles positives, alors $(1-t)s_u + t\zeta_x$, $t \in [0, 1]$, fournit une homotopie localement autour de x que l'on prolonge sans problème. Si les deux valeurs propres de $d_x s_u$ sont réelles positives, alors

on homotope s_u à $-\zeta_x$ sur U_x . Si x est de multiplicité -1 , on remplace localement s_u par son conjugué et on applique le même procédé que ci-dessus.

On pose enfin $\tilde{s}_u = \tilde{s}_u$ sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{\substack{x \in D_u, \\ \text{mult}_{D_u}(x) = -1}} U_x$ et $\tilde{s}_u = \frac{1}{\pm \zeta_x}$ sur U_x pour $x \in D_u$ de

multiplicité -1 . On obtient alors un opérateur de Cauchy-Riemann polarisé sur $\det(E_u)$ de la façon suivante. Sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{x \in D_u} U_x$, on a $\bar{\partial} = \tilde{s}_u \bar{\partial}_0(\frac{1}{\tilde{s}_u})$ et sur U_x , $\bar{\partial} = \frac{\tilde{s}_u}{\zeta_x^{\text{mult}_{D_u}(x)}} \bar{\partial}_0(\frac{\zeta_x^{\text{mult}_{D_u}(x)}}{\tilde{s}_u})$, où

$\bar{\partial}_0$ dénote l'opérateur standard sur les fonctions sur Σ_g . De plus, la section \tilde{s}_u est méromorphe pour cet opérateur, de diviseur D_u . Notons de plus que l'opérateur obtenu est le seul ayant \tilde{s}_u comme polarisation. On obtient donc une orientation de \mathfrak{D}_{D_u} . De plus, celle-ci ne dépend pas des choix de trivialisations locales faits.

Le fibré \mathfrak{D} sur $\mathbb{R}\mathcal{M}_g^d(X, D)^\natural$ est ainsi orienté. \square

Remarque 2.5. — On montre que lorsque (X, ω, c_X) admet une section polarisante, \mathfrak{D} est orientable et orienté. La question naturelle qui se pose est à quelle condition deux sections polarisantes donnent la même orientation ? Par exemple, si $\mathbb{R}X$ est orientable, si les deux sections induisent la même orientation sur $\mathbb{R}X$ elles donnent la même orientation de \mathfrak{D} au-dessus des composantes de l'espace des modules qui contiennent les courbes séparantes.

2.3.3 Exemples

Lemme 2.9. *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle, de partie réelle non vide, polarisée par D et telle que $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Alors (X, ω, c_X) admet une section polarisante.*

Démonstration. Notons $D = \sum_{i=1}^r a_i V_i + \sum_{j=1}^s a_j (W_j + c_X(W_j))$, où les V_i sont symplectiques et fixes par c_X , et les W_j sont symplectiques avec $W_j \pitchfork c_X(W_j)$. Fixons $J \in \mathbb{R}J_D(X)$.

Prenons $1 \leq i \leq r$ et fixons un voisinage tubulaire équivariant U_i de V_i , c'est-à-dire que $c_X(U_i) = U_i$ et qu'il existe un difféomorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant et préservant les orientations $\varphi : U_i \rightarrow \nu(N_{V_i})$, où $\nu(N_{V_i})$ est un voisinage de la section nulle du fibré normal à V_i dans X , envoyant V_i sur la section nulle (voir [4]). Le fibré $\pi : N_{V_i} \rightarrow V_i$ hérite d'une structure complexe et d'une structure réelle venant de celles de TX et TV_i , ce qui en fait un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle au-dessus de V_i . Choisissons une famille de trivialisations locales $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante $f_i^k : (N_{V_i})|_{U_i^k} \rightarrow U_i^k \times \mathbb{C}$ au-dessus d'une famille d'ouverts $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante $U_i^k \subset V_i$, $k \in I$, et notons $g_i^{kl} : U_i^k \cap U_i^l \rightarrow \mathbb{C}^*$, $k, l \in I$, les changements de trivialisations. Posons $U_i^k = \varphi^{-1}((N_{V_i})|_{U_i^k})$, $s_i^k = pr_2 \circ f_i^k \circ \varphi : U_i^k \rightarrow \mathbb{C}$, et $U_i^\infty = X \setminus V_i$ et $s_i^\infty = 1 : U_i^\infty \rightarrow \mathbb{C}$. Alors les fonctions $G_i^{kl} = \frac{s_i^l}{s_i^k} : U_i^k \cap U_i^l \rightarrow \mathbb{C}^*$, $k, l \in I \cup \{\infty\}$, sont bien définies, et même pour $k, l \in I$, $G_i^{kl} = g_i^{kl} \circ \pi$. De plus, elles définissent un fibré en droites complexes L_{V_i} qui admet une structure réelle naturelle et une section $s_i = (s_i^k)_{k \in I \cup \{\infty\}}$ réelle qui s'annule transversalement et positivement exactement le long de V_i .

Prenons maintenant $1 \leq j \leq s$. On construit de la même façon que précédemment un fibré en droites complexes M_{W_j} muni d'une section t_j s'annulant transversalement et positivement le long de W_j . Alors le fibré en droites complexes $L_{W_j} = M_{W_j} \otimes \overline{c_X^* M_{W_j}}$ est naturellement muni d'une structure réelle et d'une section réelle $s_{j+r} = t_j \otimes \bar{t}_j \circ c_X$ qui s'annule transversalement et positivement le long de W_j et $c_X(W_j)$ sauf au niveau de leur intersection.

Considérons le fibré en droites complexes $L_D = \bigotimes_{i=1}^r L_{V_i}^{a_i} \bigotimes_{j=1}^s L_{W_j}^{a_j}$. Il est muni d'une structure réelle et d'une section $\sigma = s_1 \otimes \dots \otimes s_{r+s}$ polarisante. De plus, il est isomorphe à $\det_J(TX)$ en tant que fibré en droites complexes, et sa partie réelle a même première classe de Stiefel-Whitney que $\mathbb{R}X$. Comme $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$, on sait que L_D et $\det_J(TX)$ sont isomorphes par un isomorphisme équivariant (voir par exemple [20]). On obtient ainsi la section voulue pour $\det_J(TX)$. \square

Remarque 2.6. — On peut relâcher la condition de simple connexité. Soulignons toutefois que ce problème d'existence d'une section polarisante associée à une polarisation donnée est relié à la classification des fibrés en droites complexes munis d'une structure réelle sur (X, c_X) , problème qui est non trivial en général (voir par exemple [20]).

Hypersurfaces projectives Reprenons les notations du §2.2.2 et considérons $X_\delta \xrightarrow{i} \mathbb{C}P^N$, $N \geq 3$, une hypersurface lisse réelle de partie réelle non vide et de degré δ . Nous construisons maintenant des polarisations de X_δ pour appliquer le Théorème 2.2. D'après la formule d'adjonction, on a d'une part $c_1(X_\delta) = (N + 1 - \delta)i^*h$, où $h \in H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$ est le générateur hyperplan et $w_1(\mathbb{R}X_\delta) = (N + 1 - \delta)i^*t$, où $t \in H^1(\mathbb{R}P^N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le générateur.

Notons Q_N la variété des quadriques projectives de $\mathbb{C}P^N$. D'après le Théorème de Bertini, le sous-ensemble $U \subset Q_N$ formé des quadriques lisses qui intersectent X_δ transversalement est un ouvert de Zariski non vide. D'autre part, le sous-ensemble $V \subset Q_N$ formé des quadriques sans point réel et qui intersectent transversalement leur conjugué est un ouvert non vide pour la topologie analytique. Ainsi il existe une quadrique lisse $Q \subset \mathbb{C}P^N$ telle que $(Q + \text{conj}(Q)) \cap X_\delta$ soit un diviseur. Si $\delta = N + 1 \pmod{4}$ nous obtenons la polarisation voulue sous la forme d'une somme de quadriques complexes conjuguées sans point réel en répétant ce procédé. Si $\delta = N \pmod{2}$, on utilise un hyperplan réel avec le signe adéquat en plus de ces quadriques complexes conjuguées. Enfin, lorsque $\delta = N + 3 \pmod{4}$, on ajoute une quadrique lisse réelle sans point réel aux quadriques complexes conjuguées. L'existence de ces polarisations est à nouveau garantie par le Théorème de Bertini.

Grâce à ces polarisations, nous retrouvons en particulier le Corollaire 2.4, et nous précisons les cas non traités précédemment.

Corollaire 2.5. *Soit $N \geq 3$ et X_δ une hypersurface lisse réelle de $\mathbb{C}P^N$ de partie réelle non vide et de degré $1 \leq \delta \leq N + 1$. Soit D_δ une polarisation de X_δ donnée comme ci-dessus, $J \in \mathbb{R}J_{D_\delta}^{\text{reg}}(X_\delta)$, $g, r \in \mathbb{N}$, τ une permutation de $\{1, \dots, r\}$ ayant au moins un point fixe et $d \in H_2(X_\delta, \mathbb{Z})$. Si $\delta = N + 1 \pmod{4}$,*

$$w_1(\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X, J)) = w_1(\mathfrak{p}^\pm) + w_1(L_r) + Nw_1(\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})).$$

Si $\delta = N + 3 \pmod{4}$

$$w_1(\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X, J)) = w_1(\mathfrak{p}^\pm) + w_1((\Pi_{\text{pol}})_* T_{\text{pol}}) + w_1(L_r) + Nw_1(\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})).$$

Si $\delta = N \pmod{2}$

$$w_1(\mathbb{R}_\tau \mathcal{M}_{g,r}^d(X, D_\delta, J)^\natural) = w_1(\mathfrak{p}^\pm) + w_1((\Pi_{\text{pol}})_* T_{\text{pol}}) + w_1(L_r) + Nw_1(\det(H^1(\Sigma_g, \mathbb{R})_{-1})).$$

\square

On peut interpréter la classe $w_1((\Pi_{pol})_*T_{pol})$ dans le cas $\delta = N + 3 \pmod{4}$ du Corollaire 2.5 de la façon suivante. La polarisation D_δ contient une quadrique réelle sans point réel notée Q . L'intersection d'un élément générique de $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^d(X, J)$ avec Q donne d paires de points complexes conjugués. En choisissant un point dans chaque paire et en identifiant deux tels choix s'ils diffèrent d'un nombre pair de points, on obtient un revêtement double de $\mathbb{R}_\tau\mathcal{M}_{g,r}^d(X, J)$ dont la classe est $w_1((\Pi_{pol})_*T_{pol})$.

D'autre part, dans le cas des hypersurfaces réelles de $\mathbb{C}P^N$ il est aisé de déterminer lesquelles ont une partie réelle Pin^\pm ce qui permet de déterminer les cas où $w_1(\mathfrak{p}^\pm)$ est nulle.

Hypersurfaces de Donaldson Nous généralisons le résultat du paragraphe précédent à toutes les variétés symplectiques réelles. Rappelons pour ceci une version équivariante d'un Lemme dû à Gompf [13].

Lemme 2.10. *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle et soient V et W deux sous-variétés symplectiques réelles de codimension 2 dans X . Supposons de plus que V et W s'intersectent transversalement le long d'une sous-variété symplectique de codimension 4 dont l'orientation venant de ω et celle venant de l'intersection coïncident. Alors il existe une isotopie $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ à support dans un voisinage de $V \cap W$ telle que*

1. $\psi_0 = \text{id}_X$,
2. $\forall t \in [0, 1], \psi_t \in \text{Symp}(X, \omega)$ et $\psi_t \circ c_X = c_X \circ \psi_t$,
3. $\psi_1(W)$ et V s'intersectent orthogonalement pour ω le long de $W \cap V$.

□

La démonstration de Gompf s'adapte sans problème au cas équivariant en prenant garde à considérer un voisinage tubulaire réel de l'intersection (voir [4]). Nous renvoyons donc au Lemme 2.3 de [13].

Proposition 2.3. *Toute variété symplectique réelle admet une polarisation et une section polarisante associée.*

Démonstration. Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle. Soit ω' une forme symplectique entière sur X proche de ω et vérifiant $(c_X)^*\omega' = -\omega'$. Fixons sur X une structure presque complexe réelle J compatible avec ω' . Soit L un fibré en droites complexes sur X de classe de Chern $[\omega']$ sur lequel on fixe une métrique hermitienne. Notons $M = \det_J(TX)$ et fixons une métrique hermitienne réelle sur M . D'après Gayet [12] (voir aussi [8]), il existe un entier $N \geq 2$ tel que $L^{\otimes N}$ admette une structure réelle et tel qu'il existe une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sections réelles de $L^{\otimes Nk}$ et une suite de sections réelles $(s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $M \otimes L^{\otimes Nk}$ qui sont asymptotiquement J -holomorphes, c'est-à-dire que la partie \mathbb{C} -antilinéaire de leurs dérivées covariantes sont bornées indépendamment de k , et transverses à 0, c'est-à-dire que leur dérivée covariante est minorée par $\eta\sqrt{k}$ là où les sections s'annulent, où $\eta > 0$ est indépendante de k . La suite $(s_k \oplus s'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sections réelles de $(M \oplus \mathbb{C}) \otimes L^{\otimes Nk}$ est alors asymptotiquement J -holomorphe. À nouveau d'après Gayet [12] (voir aussi [3]), on peut transversaliser cette dernière suite pour obtenir une suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sections réelles de $(M \oplus \mathbb{C}) \otimes L^{\otimes Nk}$ qui est encore asymptotiquement J -holomorphe et transverse à 0. De plus, on a des estimations sur σ_k qui assurent que les projections σ_k^M et $\sigma_k^{\mathbb{C}}$ de σ_k sur les deux facteurs sont asymptotiquement J -holomorphes et transverses à 0. Ainsi, pour k assez grand, $V_k = (\sigma_k^M)^{-1}(\{0\})$ et $W_k = (\sigma_k^{\mathbb{C}})^{-1}(\{0\})$ sont deux sous-variétés symplectiques réelles de codimension 2 de (X, ω, c_X) qui s'intersectent transversalement le long d'une sous-variété symplectique réelle dont l'orientation induite par l'intersection est la même que celle induite

par ω . Prenons alors $(\psi_t^k)_{t \in [0,1]}$ comme dans le Lemme 2.10. En trivialisant la famille de fibrés en droites complexes munis de structures réelle $(\psi_t^k)^*(L^{\otimes Nk})$, $t \in [0,1]$, on obtient une section réelle $\tilde{\sigma}_k^{\mathbb{C}}$ de $(\psi_1^k)^*(L^{\otimes Nk})$ qui s'annule transversalement et dont l'ensemble des zéros est $\psi_1(W_k)$. D'autre part, le diviseur $V_k - \psi_1(W_k)$ est une polarisation. En effet, comme V_k et $\psi_1(W_k)$ s'intersectent orthogonalement pour ω , il existe une structure presque complexe réelle compatible avec ω pour laquelle V_k et $\psi_1(W_k)$ sont simultanément holomorphes. De plus, on a un isomorphisme $(M, c_M) = ((M, c_M) \otimes (L, c_L)^{\otimes Nk}) \otimes \overline{(L, c_L)^{\otimes Nk}}$ qui induit une section polarisante $\sigma_k^M \otimes \overline{\tilde{\sigma}_k^{\mathbb{C}}}$ de (M, c_M) . \square

Remarque 2.7. — Dans [12], Gayet montre que l'on peut choisir W_k de partie réelle vide. Dans notre cas, il serait plus intéressant encore de pouvoir prendre W_k « imaginaire pure », c'est-à-dire telle que W_k et $c_X(W_k)$ s'intersectent orthogonalement pour ω . Ceci permettrait d'annuler une partie de la contribution de T_{pol} à l'orientabilité de l'espace de module (voir §2.3.3). De même, on peut se demander si lorsque $\mathbb{R}X$ est orientable on peut choisir V_k de partie réelle vide, et si lorsque (M, c_M) admet une racine carée réelle, on peut choisir V_k imaginaire pure.

Références

- [1] Enrico ARBARELLO, Maurizio CORNALBA et Phillip A. GRIFFITHS : *Geometry of algebraic curves*, volume 268 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2011.
- [2] Michael ATIYAH : Riemann surfaces and *Spin* structures. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 22(2):47–62, 1989.
- [3] D. AUROUX : Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6):971–995, 1997.
- [4] Glen E. BREDON : *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.
- [5] Cheol-Hyun CHO : Counting real *J*-holomorphic discs and spheres in dimension four and six. *J. Korean Math. Soc.*, 45(5):1427–1442, 2008.
- [6] Rémi CRÉTOIS : Automorphismes réels d'un fibré et opérateurs de Cauchy-Riemann. Preprint arXiv :1110.6899v1.
- [7] Alex DEGTYAREV, Ilia ITENBERG et Viatcheslav KHARLAMOV : On the number of components of a complete intersection of real quadrics. Preprint math.AG/0806.4077v2, 2008.
- [8] S. K. DONALDSON : Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. *J. Differential Geom.*, 44(4):666–705, 1996.
- [9] C. J. EARLE : *On moduli of closed Riemann surfaces with symmetries*, pages 119–130. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, Annals of Mathematics Studies 66. Princeton University press and University of Tokyo press, 1971.
- [10] C. J. EARLE et J. EELLS : The diffeomorphism group of a compact Riemann surface. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(4):557–559, 1967.
- [11] Kenji FUKAYA, Yong-Geun OH, Hiroshi OHTA et Kaoru ONO : *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part II*, volume 46 de *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

- [12] Damien GAYET : Hypersurfaces symplectiques réelles et pinceaux de Lefschetz réels. *J. Symplectic Geom.*, 6(3):247–266, 2008.
- [13] Robert E. GOMPF : A new construction of symplectic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 142(3):527–595, 1995.
- [14] Eleny-Nicoleta IONEL : GW invariants relative normal crossings divisors. Preprint arXiv :1103.3977v2.
- [15] Eleny-Nicoleta IONEL et Thomas H. PARKER : Relative Gromov-Witten invariants. *Ann. of Math. (2)*, 157(1):45–96, 2003.
- [16] Sergey IVASHKOVICH et Vsevolod SHEVCHISHIN : Structure of the moduli space in a neighborhood of a cusp-curve and meromorphic hulls. *Inventiones mathematicae*, 136(3):571–602, 1999.
- [17] Robion KIRBY et Laurence TAYLOR : *Pin* structures on low-dimensional manifolds. In *Geometry of low-dimensional manifolds (Durham, 1989)*, numéro 151 de London Mathematical Society, Lecture note series, pages 177–242. Cambridge University Press, 1990.
- [18] S. KRAVETZ : On the geometry of Teichmüller spaces and the structure of their modular groups. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, 278:1–35, 1959.
- [19] Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON : *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, volume 52 de *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2004.
- [20] Christian OKONEK et Andrei TELEMAN : Abelian Yang-Mills theory on real tori and theta divisors of Klein surfaces. Preprint arXiv :1011.1240v2.
- [21] Nicolas PUIGNAU : Sur la première classe de Stiefel-Whitney de l’espace des applications stables réelles vers l’espace projectif. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(1):149–168, 2010.
- [22] Mika SEPPÄLÄ : Teichmüller spaces of Klein surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Mathematica Dissertationes*, 15:1–37, 1978.
- [23] Vsevolod SHEVCHISHIN : Pseudoholomorphic curves and the symplectic isotopy problem. Preprint math.SG/0010262, 2000.
- [24] Jake SOLOMON : *Intersection theory on the moduli space of holomorphic curves with Lagrangian boundary conditions*. Thèse de doctorat, MIT, 2008.
- [25] Jean-Yves WELSCHINGER : Real structures on minimal ruled surfaces. *Commentarii mathematici helvetici*, 78:418–446, 2003.
- [26] Jean-Yves WELSCHINGER : Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. *Inventiones mathematicae*, 162(1):195–234, 2005.
- [27] Jean-Yves WELSCHINGER : Spinor states of real rational curves in real algebraic convex 3-manifolds and enumerative invariants. *Duke Mathematical Journal*, 127:89–121, 2005.

UNIVERSITÉ DE LYON
 CNRS UMR 5208
 UNIVERSITÉ LYON 1
 INSTITUT CAMILLE JORDAN
 43 blvd. du 11 novembre 1918
 F-69622 Villeurbanne cedex
 France
 cretois@math.univ-lyon1.fr