HAL
open science

Analyse de sensibilité basée sur les polynômes du chaos pour des modèles de type boîte noire

Sabra Hamza, Floriane Anstett-Collin, Rimyaledgo Kiébré, Michel Basset

To cite this version:

Sabra Hamza, Floriane Anstett-Collin, Rimyaledgo Kiébré, Michel Basset. Analyse de sensibilité basée sur les polynômes du chaos pour des modèles de type boîte noire. 7ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2012, Jul 2012, Grenoble, France. pp.CDROM. hal-00716682

HAL Id: hal-00716682

https://hal.science/hal-00716682v1

Submitted on 11 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse de sensibilité basée sur les polynômes du chaos pour des modèles de type boîte noire

Sabra Hamza * **Floriane Anstett-Collin** ** **Rimyalegdo Kiebré** * **Michel Basset** *

* *Laboratoire Modélisation,Intelligence, Processus, Systèmes, Université de Haute Alsace, ENSISA, 12 Rue des frères Lumière. 68093 Mulhouse Cedex, France. sabra.hamza@uha.fr, rimyalegdo.kiebre@uha.fr, michel.basset@uha.fr*
** *Centre de Recherche en Automatique de Nancy, ESSTIN,2 rue Jean Lamour 54519 Vandoeuvre Lès Nancy, France. floriane.collin@esstin.uhp-nancy.fr*

Résumé : Ce papier a pour objectif de proposer une approche d'analyse de sensibilité pour des modèles de type boîte noire, présentant des paramètres qui suivent une loi arbitraire. L'approche est divisée en deux étapes. La première consiste à transformer les paramètres suivant une loi arbitraire en variables normales, par la transformation de Cornish-Fisher. L'avantage de cette transformation est qu'elle requiert uniquement les moments statistiques jusqu'à l'ordre 4 des variables d'entrée, mais pas la connaissance de leurs densités de probabilité marginale et conjointe, qui sont, en général, inconnues. La deuxième étape consiste à décomposer la sortie du modèle en polynômes du chaos en utilisant les variables transformées précédemment. Les indices de sensibilité, permettant de quantifier la contribution de chaque paramètre à la variance de la sortie, sont obtenus directement à partir des coefficients de la décomposition. L'approche proposée est ensuite appliquée sur un modèle de pneu de type boîte noire. Les paramètres les plus influents sont mis en évidence.

Mots-clés: Analyse de sensibilité, décomposition en polynômes du chaos, approximation de Cornish-Fisher, modèle de pneu.

1. INTRODUCTION

L'analyse de sensibilité permet d'analyser un modèle mathématique, en étudiant l'impact de la variabilité des paramètres du modèle sur la variable de sortie. Déterminer les paramètres responsables de cette variabilité permet de prendre les mesures nécessaires pour diminuer la variance de la sortie lorsque l'incertitude sur la sortie est importante. Déterminer les paramètres les moins influents peut permettre de simplifier le modèle, en fixant les paramètres à une valeur nominale de leur intervalle de variation, sans répercution significative sur la sortie. Différentes approches d'analyse de sensibilité ont été proposées dans la littérature Cukier et al. (1978); Saltelli et al. (2004); Sobol (1993). Les approches peuvent être locales ou globales. Les méthodes locales évaluent quantitativement l'impact d'une petite variation autour d'une valeur donnée des entrées. Les méthodes globales permettent de déterminer l'impact sur la sortie de variations des paramètres dans la totalité de leur intervalle d'incertitude. Dans ce papier, on s'intéresse à des méthodes globales, très fréquentes, qui sont basées sur l'analyse de la variance de la sortie (ANOVA, ANalysis Of VAriance), Saltelli et al. (2004); Sobol (1993). La fonction du modèle est décomposée en une somme de fonctions de dimensions croissantes Sobol (1993). Cette décomposition, appelée HDMR (High Dimensional Model Representation), permet de séparer les effets des différents paramètres, qui sont transmis dans la décomposition de la variance. Afin de quantifier la contribution d'un paramètre à la variance de la sortie, un indice de sensibilité est calculé, souvent de façon analytique, quand la fonction du modèle est connue et est relativement simple. Cependant, certains modèles peuvent être complexes, présenter un grand nombre de paramètres ou être de type boîte noire. Dans ce cas, le calcul analytique des indices n'étant plus possible, il est nécessaire de les estimer Cukier et al. (1978); Jacques et al. (2006). Très souvent, les indices sont estimés en utilisant des simulations de Monte Carlo. Cependant, dans certaines applications, cette approche peut nécessiter un nombre élevé d'évaluations du modèle, ce qui rend l'approche coûteuse en temps de calcul. De plus, les mesures ne sont pas toujours choisies librement à cause des contraintes de leur mise en œuvre. Dans ce cas, l'approche basée sur les simulations de Monte Carlo n'est plus adaptée. Pour pallier ce problème, le modèle est remplacé par une approximation analytique, par exemple, de type polynomial, qui est moins coûteuse. Les indices sont alors obtenus directement à partir de l'expression des coefficients de la décomposition polynomiale. Les polynômes du chaos (PC) sont un exemple d'approximation. La décomposition en PC de la sortie a récemment été utilisée de façon

originale pour l'analyse de sensibilité Blatman et Sudret (2008) et Blatman (2009). L'avantage de cette approche est qu'elle peut aussi être utilisée pour des modèles de type boîte noire car elle ne nécessite pas la connaissance de la structure du modèle. Dans Wiener (1938), il est montré que toute variable aléatoire qui suit une loi normale et qui possède une variance finie, peut être représentée par une décomposition en polynômes de Hermite, formant ainsi une base orthogonale. Cameron et Martin Xiu et Karniadakis (2003) ont étendu cette décomposition à d'autres types de distributions, qui sont associées à des familles spécifiques de polynômes. Par exemple, pour une variable d'entrée suivant une loi uniforme, les PC correspondants sont les polynômes de Legendre. Ainsi, les PC forment une base orthogonale assurant l'unicité de la décomposition et donc celle des indices de sensibilité. Cependant, dans certaines applications, la distribution des paramètres est arbitraire et le problème de trouver une base orthogonale de polynômes se pose.

L'objectif de ce papier est de proposer une approche d'analyse de sensibilité pour des modèles boîte noire qui présentent des paramètres de distribution arbitraire. L'approche est divisée en deux étapes. La première consiste à transformer les paramètres en variables suivant une loi normale. Dans la littérature, il existe différentes techniques de transformation, comme celle de Rosenblatt Rosenblatt (1952) ou de Nataf Nataf (1962), qui requièrent la connaissance des densités de probabilité des variables d'entrée. En pratique, les paramètres suivent une loi arbitraire dont les densités de probabilité marginale et conjointe sont inconnues. Dans l'approche proposée, l'approximation de Cornish-Fisher Zhao et Ono (2000); Cornish et Fisher (1937) ne nécessitant que la connaissance des moments d'ordre 3 et 4 des paramètres est utilisée, afin de normaliser les variables. La deuxième étape de l'approche consiste à calculer les indices de sensibilité en utilisant la décomposition en PC de la sortie du modèle, avec les variables transformées précédemment. L'approche est ensuite appliquée à l'analyse de sensibilité d'un modèle de pneu de type boîte noire, étudié dans le cadre d'un projet, au sein du laboratoire MIPS (Modélisation Intelligence Processus Systèmes). Dans les domaines aéronautique et automobile, la connaissance du comportement du pneu au sol est essentielle car le pneu est le seul point de contact avec le sol et la majorité des efforts passe par le pneu. Le modèle étudié permet de décrire la force latérale correspondant à la réaction du sol sur le pneu suivant la direction transversale, en fonction de la charge verticale et de l'angle entre l'axe longitudinal de la roue et sa direction de déplacement.

Le papier est organisé comme suit. Dans la section 2, l'expression des indices de sensibilité est donnée. Leur estimation basée sur la décomposition en PC est aussi détaillée. La section 3 présente l'approche proposée. Puis, dans la section 4, l'approche est appliquée sur un modèle de pneu de type boîte noire.

2. ANALYSE DE SENSIBILITÉ

2.1 Indices de sensibilité

On considère le modèle suivant :

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

où $y \in \mathbb{R}$ est la réponse du modèle et $x_i \in \mathbb{R}$, i=1,...,n, les n paramètres d'entrées du modèle. Les paramètres x_i sont supposés être des variables aléatoires réelles indépendantes.

Dans Sobol (1993), un indicateur de l'influence du paramètre x_i sur la sortie y est proposé. Il est noté S_i et est défini par :

$$S_i = \frac{V_i}{V(y)} = \frac{V\left(E\left(y|x_i\right)\right)}{V(y)} \tag{2}$$

où $V_i = V(E(y|x_i))$ représente la variance conditionnelle de y au paramètre x_i et $V(y)$ la variance totale de y.

L'indice de sensibilité S_i est compris entre 0 et 1. Plus l'indice est proche de 1, plus le paramètre x_i est influent.

La variance du modèle à entrées indépendantes peut se décomposer comme suit :

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i \le i < j \le n} V_{ij} + \cdots + V_{1\ldots n} \tag{3}$$

avec :

$$\begin{aligned} &V_{ij} = V\left(E\left(y|\, x_i, x_j\right)\right) - V_i - V_j \\ &\cdots \\ &V_{1\ldots n} = V(y) - \sum_{i=1}^{n} V_i - \sum_{i \le i < j \le n} V_{ij} - \cdots - \\ &\qquad \sum_{i \le i_1 < \ldots < i_{n-1} \le n} V_{i_1 \ldots i_{n-1}} \end{aligned} \tag{4}$$

Dans Sobol (1993), basée sur cette décomposition, les indices de sensibilité d'ordre deux sont donnés par :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V(y)} \tag{5}$$

Cet indice exprime l'influence due à l'interaction entre x_i et x_j. Les indices de sensibilité d'ordre supérieur sont définis sur le même principe. L'indice de sensibilité total S_{T_i} de x_i, reflétant l'influence individuelle et collective de x_i, est défini par :

$$S_{Ti} = S_i + \sum_{j \ne i} S_{ij} + \sum_{j \ne i, k \ne i, j < k} S_{ijk} + \ldots \tag{6}$$

Le calcul analytique de ces indices peut parfois être difficile (grand nombre de paramètres, modèle de type boîte noire, ...). Pour pallier ce problème, l'estimation des indices est nécessaire. Dans la littérature, différentes méthodes d'estimation ont été proposées Cukier et al. (1978). L'approche fréquemment utilisée pour sa simplicité d'implémentation est basée sur des simulations de Monte Carlo. Cependant, le nombre d'évaluations du modèle peut devenir élevé et coûteux en temps de calcul. Pour éviter cet inconvénient, le modèle est remplacé par sa décomposition en PC, qui est une représentation analytique dans une base polynomiale orthogonale. Les indices de sensibilité sont obtenus directement d'après les coefficients de la décomposition en PC, comme expliqué dans la section suivante.

2.2 Estimation des indices de sensibilité par PC

Dans Berveiller et al. (2006), il est montré que toute variable aléatoire possédant une variance finie (moment d'ordre 2 fini) peut se décomposer en une somme de PC. En supposant que la sortie y du modèle (1) possède une variance finie, elle peut s'approximer par un développement en PC :

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \psi_j(x_1, \ldots, x_n) \tag{7}$$

avec les coefficients déterministes a_j qui sont inconnus, à estimer, ψ_j des polynômes multivariables qui dépendent de x_1,...,x_n et qui résultent du produit tensoriel des polynômes unidimensionnels $\phi_{\alpha_k^j}(x_k)$:

$$\psi_j(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{\alpha_k^j}(x_k) \tag{8}$$

A la distribution des paramètres x_i est associée une famille de polynômes $\phi_{\alpha_k^j}(x_k)$, afin de former une base orthogonale, assurant ainsi l'unicité de la décomposition (7) Xiu et Karniadakis (2003). Par exemple, si x_i suit une loi normale, les $\phi_{\alpha_k^j}$ sont des polynômes de Hermite. Si x_i suit une loi uniforme, les $\phi_{\alpha_k^j}$ sont des polynômes de Legendre, ... Le terme α_k^j représente le degré des polynômes $\phi_{\alpha_k^j}(x_k)$. Le degré α^j du polynôme ψ_j n'excède pas le degré p souhaité de telle sorte que la relation suivante soit vérifiée, pour j donné :

$$\alpha^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \leq p \tag{9}$$

En pratique, le développement est tronqué à l'ordre M qui est fini :

$$y \approx \sum_{j=0}^{M} a_j \psi_j(x_1, \ldots, x_n) \tag{10}$$

Le nombre de coefficients a_j à déterminer est $M+1$. Il dépend du nombre n des variables x_k et du degré p des polynômes :

$$M + 1 = \frac{(n+p)!}{n!p!} \tag{11}$$

Dans la littérature, deux classes de méthodes ont été développées pour calculer les coefficients des PC, les méthodes intrusives Xiu et Karniadakis (2003), qui modifient le code de calcul, et les méthodes non intrusives Berveiller et al. (2006), comme la technique de projection ou la méthode des moindres carrés que l'on retiendra dans la suite, pour sa simplicité d'implémentation.

Estimation des coefficients Soient B le vecteur des coefficients a_j, $j = 0, \ldots, M$, à déterminer, Y le vecteur contenant les N échantillons de la sortie y et Z la matrice contenant les polynômes ψ_j :

$$Z = \begin{pmatrix} \psi_0(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) & \ldots & \psi_M(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_0(x_1^{(N)}, \ldots, x_n^{(N)}) & \cdots & \psi_M(x_1^{(N)}, \ldots, x_n^{(N)}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

avec $x_k^{(i)}$ représente le ième échantillon de x_k.
Le vecteur de sortie Y est donné par $Y = ZB$. L'estimateur du vecteur B, noté $\hat{B}$, est donné par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{B} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y \tag{13}$$

La sortie estimée $\hat{Y} = \left(\hat{y}^{(1)} \ldots \hat{y}^{(N)}\right)^T$ est ainsi donnée par l'expression suivante :

$$\hat{Y} = Z\hat{B} \tag{14}$$

Estimation des indices de sensibilité Après la détermination des coefficients des PC comme expliqué précédemment, il est possible de réordonner les différents termes du polynôme obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y \approx a_0 &+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in \Gamma_k} a_j \psi_j(x_k) \\ &+ \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n} \sum_{j \in \Gamma_{k_1,k_2}} a_j \psi_j(x_{k_1}, x_{k_2}) \\ &+ \ldots + \sum_{1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_s \leq n} \sum_{j \in \Gamma_{k_1,\ldots,k_2}} a_j \psi_j(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}) \\ &+ \ldots + \sum_{j \in \Gamma_{1,\ldots,M}} a_j \psi_j(x_{k_1}, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{15}$$

avec $\Gamma_{k_1,\ldots,k_s}$ l'ensemble des multi-indices j qui correspond aux polynômes dépendant uniquement des variables x_{k_1},... x_{k_s}. D'après l'expression (15), l'estimée de l'indice de sensibilité du premier ordre $\hat{S}_i$ est donnée par :

$$\hat{S}_i = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_i))}{\sum_{j=1}^{M} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_1, \ldots, x_n))} \tag{16}$$

où $\hat{a}_j$ sont les coefficients estimés par (13) et l'ensemble Γ_i correspond aux polynômes ψ_j dependant uniquement de x_i.
De la même façon, l'estimation de l'indice de sensibilité $\hat{S}_{il}$ dû à l'interaction entre les variables x_i et x_l est donnée par :

$$\hat{S}_{il} = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{il}} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_i, x_l))}{\sum_{j=1}^{M} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_1, \ldots, x_n))} \tag{17}$$

Par ailleurs, l'indice de sensibilité estimé S_{Ti} total est écrit sous cette forme :

$$\hat{S}_{Ti} = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{i+}} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_i))}{\sum_{j=1}^{M} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_1, \ldots, x_n))} \tag{18}$$

Les PC doivent former une base orthogonale afin d'assurer l'unicité de la décomposition et donc l'unicité des indices de sensibilité (16), (17) et (18). Pour cela, à une distribution donnée des paramètres correspond une famille de polynômes. Cependant, en pratique, les paramètres peuvent suivre une distribution arbitraire. Dans ce cas, il convient de transformer les paramètres en variables suivant une loi connue telle que la loi normale. L'approche proposée dans ce papier est basée sur cette transformation. Elle est décrite dans la section suivante.

3. APPROCHE PROPOSÉE

On considère un modèle de type boîte noire dont les paramètres d'entrée suivent une loi arbitraire et dont on cherche à déterminer l'influence sur la sortie. L'approche proposée est divisée en deux étapes. La première étape consiste à transformer les variables d'entrée en variables

normales. La seconde consiste à développer la sortie en PC en utilisant ces variables ainsi transformées. Le principe de l'approche proposée est illustré sur la figure 1.

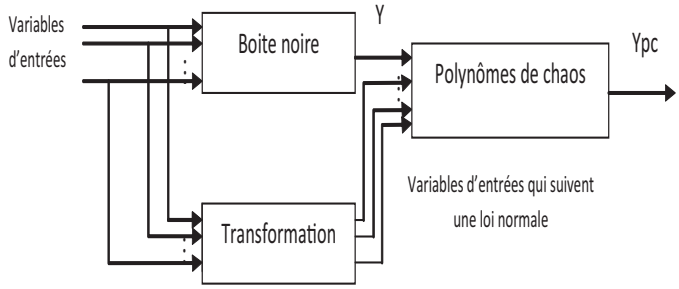

FIGURE 1. Principe de l'approche proposée

Dans la littérature, il existe différentes transformations pour ramener des données à une distribution normale Rosenblatt (1952); Nataf (1962), qui nécessitent la connaissance des densités de probabilité marginales des variables d'entrée. Cependant, en pratique, l'expression de ces densités n'est pas toujours connue. En revanche, les caractéristiques probabilistes de ces variables peuvent être exprimées à l'aide de leurs moments statistiques. Pour cela, l'approximation de Cornish-Fisher Zhao et Ono (2000); Cornish et Fisher (1937), utilisant uniquement les moments d'ordre 3 et 4 des variables d'entrée, est considérée. Elle est décrite dans la section suivante.

3.1 Transformation des variables d'entrée

Le développement d'Edgeworth est une approximation de la fonction de répartition d'une variable. Son inverse, le développement de Cornish-Fisher, permet d'approximer les quantiles d'une distribution quelconque par ceux d'une distribution normale Cornish et Fisher (1937). L'approximation est basée sur un développement en séries dont les coefficients dépendent des moments de la distribution que l'on cherche à approximer. Le développement de Cornish-Fisher s'applique à des variables centrées réduites qui suivent une loi de distribution proche de la normale Zhao et Ono (2000). Pour cela, on effectue le changement de variables suivant, sur chaque variable aléatoire x_i, $i = 1, \ldots, n$, de distribution arbitraire :

$$x_{si} = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{19}$$

avec μ_i et σ_i qui sont, respectivement, la moyenne et l'écart type de x_i.

On note u la variable aléatoire normale centrée réduite. La transformation x-u, en appliquant le developpement de Cornish-Fisher et en tenant compte des quatre premiers moments de la distribution, est donnée par Zhao et Ono (2000) :

$$\begin{aligned} u_i = {} & x_{si} - \frac{1}{6}\beta_3(x_{si}^2 - 1) - \frac{1}{24}\left(\beta_4 - 3\right)\left(x_{si}^3 - 3x_{si}\right) \\ & + \frac{1}{36}\beta_3^2(4x_{si}^3 - 7x_{si}) + \frac{1}{144}\beta_3\left(\beta_4 - 3\right)\left(11x_{si}^4 - 42x_{si}^2\right. \\ & \left. +15\right) - \frac{1}{648}\beta_3^3(69x_{si}^4 - 187x_{si}^2 + 52) \\ & + \frac{1}{384}\left(\beta_4 - 3\right)^2\left(5x_{si}^5 - 32x_{si}^3 + 35x_{si}\right) \\ & - \frac{1}{864}\beta_3^2\left(\beta_4 - 3\right)\left(111x_{si}^5 - 547x_{si}^3 + 456x_{si}\right) \\ & + \frac{1}{7776}\beta_3^4(948x_{si}^5 - 3628x_{si}^3 + 2473x_{si}) \end{aligned} \tag{20}$$

avec β_3 et β_4, respectivement, les moments d'ordre 3 et 4 correspondant aux degrés d'asymétrie et d'aplatissement de la distribution, définis par :

$$\beta_3 = \frac{E\left(x_{si} - \mu_i\right)^3}{\sigma_i^3} \tag{21}$$

$$\beta_4 = \frac{E\left(x_{si} - \mu_i\right)^4}{\sigma_i^4} \tag{22}$$

Une fois, la transformation (20) effectuée, la seconde étape de l'approche est la décomposition en PC de la sortie, en utilisant les variables d'entrée u_i transformées précédemment, comme expliqué dans la section suivante.

3.2 Développement en PC

Après avoir transformé les variables d'entrée en variables normales par la transformation précédente, les indices de sensibilité sont estimés par l'approche basée sur les PC. Comme détaillé dans la section 3, la sortie y du modèle peut s'approximer par :

$$y \approx \sum_{j=0}^{M} a_j \psi_j(u_1, \ldots, u_n) \tag{23}$$

$$\psi_j(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{\alpha_k^j}(u_k) \tag{24}$$

où $\phi_{\alpha_k^j}(u_k)$ sont des polynômes de Hermite car les variables u_k suivent une loi normale. Les coefficients a_j sont calculés par (13). Les indices de sensibilité de u_k sont obtenus par (16), (17) et (18).
L'approximation de Cornish-Fischer étant une normalisation des variables, l'influence des variables u_k sur la sortie y correspond à celle des variables x_k. Ainsi, les indices de sensibilité de u_k correspondent à ceux de x_k.

3.3 Résumé de l'approche proposée

L'approche proposée peut se résumer comme suit :

(1) Obtention des variables centrées réduites x_{si} (19).
(2) Calcul des moments d'ordre 3 et 4, β_3 et β_4, des variables x_i (equations (21) et (22)).

(3) Approximation de Cornish-Fisher en fonction de β_3, β_4 et x_{si} (equation (20)).

(4) Développement en PC de y, en fonction de u_i (equations (23) et (24)).

(5) Calcul des indices de sensibilité de u_i (equations (16), (17) et (18)).

Dans la section suivante, l'approche proposée est appliquée sur un modèle de pneu de type boîte noire.

4. APPLICATION AU MODÈLE D'INTERFACE PNEU/SOL

Un pneu peut être soumis à des efforts dits longitudinaux (cas de l'accélération ou du freinage) et/ou à des efforts dits latéraux (cas du virage) Fiala (1954); Pacejka (2006). Dans cette étude, on s'intéressera à ce dernier type d'effort qui correspond à la réaction du sol sur le pneu suivant la direction transversale, lors d'une manoeuvre de virage, par exemple.
Le modèle considéré dans ce papier a été proposé au laboratoire MIPS, dans le cadre d'un projet. Il s'agit d'un modèle de type boîte noire, dont les variables d'entrée sont l'angle de glissement, $x_1 = \alpha_y$, qui est l'angle entre l'axe longitudinal de la roue et sa direction de déplacement, et la charge verticale, $x_2 = F_z$. La sortie du modèle représente la force latérale $y = F_y$. Les données de mesure sont issues du domaine aéronautique.
Par ailleurs, le modèle est en régime permanent (vitesse constante, courbure du virage constante,...).
L'objectif envisagé est d'étudier l'influence de la charge verticale F_z et de l'angle de glissement α_y sur la variance de la force latérale F_y. Pour ce faire, on applique l'approche proposée dans la section précédente.
(1) Variables centrées réduites : on considère un échantillon de mesures de taille N=1048 pour la charge verticale F_z et l'angle de glissement α_y qui varient, respectivement, dans les intervalles [34.479 kN; 155.586kN] et [−0.051rad; 0.0047rad]. Leurs distributions sont représentées sur les figures 2 et 3. La moyenne et l'écart-type de F_z et α_y sont donnés dans le tableau suivant :

	$x_1 = \alpha_y$	$x_2 = F_z$
Moyenne μ_i	-0.0192 rad	113.02 kN
Ecart-type σ_i	0.0112 rad	19.087 kN

TABLE 1. Moyenne et écart-type de α_y et F_z

Les variables α_y et F_z sont centrées réduites par (19).
(2) Calcul des moments d'ordre 3 et 4 : les moments d'ordre 3 et 4 de α_y et de F_z sont donnés dans le tableau suivant :

	α_y	F_z
β_3	0.1848 rad	-0.7410 N
β_4	2.5294 rad	3.5485 N

TABLE 2. Moments d'ordre 3 et 4 de α_y et F_z

(3) Approximation de Cornish-Fisher : les variables x_{s1} et x_{s2} sont transformées en variables normales, u_1 et u_2, par l'approximation (20). Les variables u_1 et u_2 sont ensuite ramenées dans leur intervalle de variation, qui n'est pas conservé par l'approximation de Cornish-Fisher. Les distributions de u_1 et u_2 sont représentées sur les figures 2 et 3.

(4) Décomposition en PC : la sortie mesurée F_y est décomposée en PC, en utilisant les variables u_1 et u_2, par (14). Le nombre de paramètres est $n = 2$ et le degré souhaité pour les polynômes est fixé à $p = 3$. D'après (11), le nombre $M + 1$ de coefficients a_j est égale à 10. Les polynômes $\phi_{\alpha_k^j}(u_k)$ sont des polynômes de Hermite définis par :

$$\phi_{\alpha_k^j}(u_k) = (-1)^k e^{u_k^2/2} \frac{d^k}{du_k^k} e^{-u_k^2/2} \tag{25}$$

Les évolutions de la sortie réelle F_y et de la sortie estimée $\hat{y}$ sont représentées sur la figure 4. L'erreur relative entre les mesures réelles et la sortie du modèle décrit par les PC est de 24.5 %. Une autre étude, non présentée ici, a permis de mettre en évidence que les mesures sont bruitées, expliquant cette erreur.

(5) Indices de sensibilité : les indices de sensibilité d'ordre 1, S_1 et S_2, correspondant respectivement à l'angle de glissement $x_1 = \alpha_y$ et à la charge verticale $x_2 = F_z$, sont estimés par (16).

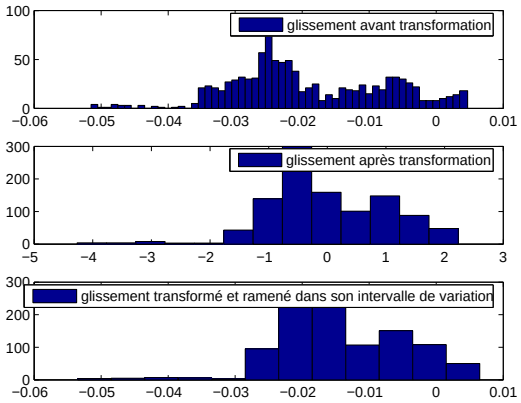

FIGURE 2. Histogramme des effectifs du glissement α_y

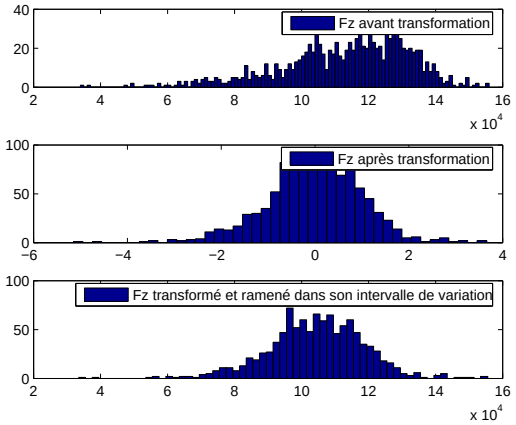

FIGURE 3. Histogramme des effectifs de la charge verticale F_z

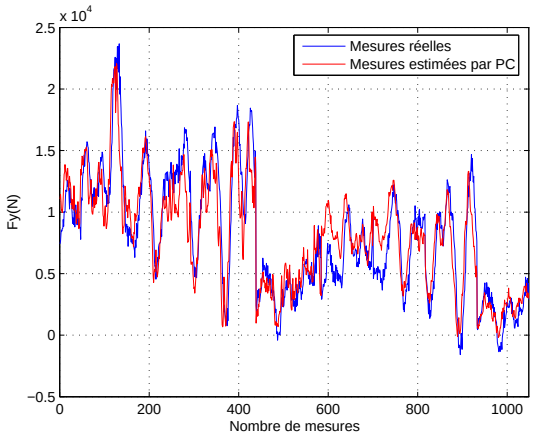

FIGURE 4. Evolutions de la sortie réelle et de la sortie estimée par PC

De même, l'indice d'ordre 2, S_{12}, dû à l'interaction entre F_z et α_y, est estimé par (17). Enfin, les indices totaux, S_{T1} et S_{T2} sont estimés par (18). Ces indices sont présentés dans le tableau 3 :

	$x_1 = \alpha_y$	$x_2 = F_z$
Indice d'ordre 1	$S_1 = 0.8406$	$S_2 = 0.1378$
Indice d'ordre 2	$S_{12} = 0.0215$	
Indice total	$S_{T1} = 0.8621$	$S_{T2} = 0.1594$

TABLE 3. Indices de sensibilité

On constate que le paramètre α_y a l'indice de sensibilité le plus élevé ($S_1 = 0.8406$). Ensuite vient le paramètre F_z ($S_2 = 0.1378$). En réalité, l'angle de glissement détermine la déformation latérale du pneu et la force latérale est la conséquence de cette déformation. Ceci explique l'importance de la contribution de l'angle de glissement. Par ailleurs, pour un angle de glissement donné, la variation de la charge verticale entraîne une variation de la valeur de la force latérale, mais cette variation de l'effort reste inférieure à celle due à une variation de l'angle de glissement du même ordre Fiala (1954). Ces résultats sont conformes à ceux attendus dans le domaine du pneu.
Par ailleurs, les indices de sensibilité totaux sont proches des indices du premier ordre car la contribution due à l'interaction entre α_y et F_z ($S_{12} = 0.0215$) est faible. Cela signifie que les contributions de α_y et F_z sont additives.

5. CONCLUSION

Dans ce papier, une approche d'analyse de sensibilité pour des modèles de type boîte noire, présentant des paramètres qui suivent une distribution arbitraire a été proposée. Les indices de sensibilité sont estimés par la méthode basée sur la décomposition en PC de la sortie du modèle. L'avantage de cette approche est que le nombre d'évaluations du modèle est peu élevé et les indices sont directement obtenus à partir des coefficients des PC. De plus, cette approche convient bien aux modèles de type boîte noire. Lorsque la distribution des paramètres d'entrée est arbitraire, ce qui est courant en pratique, il est nécessaire de transformer ces paramètres en variables normales, afin d'assurer l'unicité de la décomposition en PC et donc celle des indices de sensibilité. L'approximation de Cornish-Fisher a été utilisée pour cette transformation. Outre sa simplicité d'implémentation, elle a l'avantage de ne pas nécessiter la connaissance des densités de probabilité des paramètres qui, en général, ne sont pas connues. Par ailleurs, l'approche proposée a été appliquée sur un modèle de pneu de type boîte noire. Ce modèle décrit le comportement de la force latérale en fonction de la charge verticale et de l'angle de glissement. Il a été montré que l'angle de glissement, déterminant la déformation latérale du pneu, est la variable la plus influente sur la force latérale, résultat conforme à celui attendu dans le domaine du pneu. Le modèle adopté dépend de deux paramètres, il serait intéressant d'étudier l'influence des paramètres pour des modèles plus complexes.

RÉFÉRENCES

Berveiller, M., Sudret, B., et Lemaire., M. (2006). Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-2-3), 81–92.

Blatman, G. (2009). *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II.

Blatman, G. et Sudret, B. (2008). Sparse polynomial chaos expansion and adaptive stochastic finite element using a regresion approach. *Comptes rendus de Mécanique*, 336(6), 518–523.

Cornish, E.A. et Fisher, R.A. (1937). Moments and cumulants in the specification of distributions. *Review of the International Statistical Institute*, 5, 307–320.

Cukier, R.I., Levine, R.I., et Shuler, K.E. (1978). Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. *Journal of Computational Physics*, 26(1), 1–42.

Fiala, E. (1954). Lateral forces on rolling pneumatic tires. *Zeitschrift V.D.I*, 29.

Jacques, J., Lavergne, C., et Devictor., N. (2006). Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs. *Reliability Engineering System Safety*, 91(10-11), 1126–1134.

Nataf, A. (1962). Détermination des distributions de probabilité dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 225, 42–43.

Pacejka, H.B. (2006). *Tyre and Vehicle Dynamics*. Elsevier.

Rosenblatt, M. (1952). Remarks on the multivariate transformation. *The Annals of Mathematics Statistics*, 23(3), 470–472.

Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F., et Ratto., N. (2004). *Sensitivity Analysis in Practice. A Guide to Assessing Scientific Models*.

Sobol, I.M. (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modeling and Computational Experiment*, 1(4), 407–414.

Wiener, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4), 897–936.

Xiu, D. et Karniadakis, G. (2003). Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 187(1), 137–167.

Zhao, Y.G. et Ono, T. (2000). Third-moment standardization for structural reliability analysis. *Journal of strutural engineering*, 126(6), 724–732.