



**HAL**  
open science

## Formulations intégrales pour la modélisation des régions minces conductrices

Tung Le Duc, Gérard Meunier, Olivier Chadebec, Jean-Michel Guichon,  
Laurent Krähenbühl

► **To cite this version:**

Tung Le Duc, Gérard Meunier, Olivier Chadebec, Jean-Michel Guichon, Laurent Krähenbühl. Formulations intégrales pour la modélisation des régions minces conductrices. Numélec 2012, Jul 2012, Marseille, France. pp.66. hal-00714472

**HAL Id: hal-00714472**

**<https://hal.science/hal-00714472>**

Submitted on 5 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Formulations intégrales pour la modélisation des régions minces conductrices

Tung Le Duc<sup>1</sup>, Gérard Meunier<sup>1</sup>, Olivier Chadebec<sup>1</sup>, Jean-Michel Guichon<sup>1</sup> et Laurent Krähenbühl<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Grenoble, Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble G2Elab, CNRS UMR5269, France

<sup>2</sup>Université de Lyon, AMPERE, CNRS UMR5005, Ecole Centrale de Lyon, France

E-mail: tung.le-duc@g2elab.grenoble-inp.fr

**Résumé** — Ce papier présente une formulation intégrale économique pour modéliser les courants induits dans des régions minces conductrices non magnétiques en régime magnéto harmonique. La formulation est comparée avec une autre formulation intégrale et est validée sur un cas test axi-symétrique modélisé par la méthode des éléments finis.

### I. INTRODUCTION

Les régions minces sont souvent présentes dans des dispositifs électromagnétiques comme les conducteurs plans, les blindages magnétiques ou/et conducteurs. Leur modélisation numérique en 3D est souvent fastidieuse, voire impossible. En effet, le maillage des régions minces conduit, du fait des faibles épaisseurs, à un nombre très important d'éléments. De plus, la prise en compte de l'effet de peau dans ces régions, demande, dans le cas le plus général, une discrétisation importante suivant l'épaisseur et conduit à la résolution de problèmes dont la taille est incompatible avec les moyens de calculs disponibles (en place mémoire et en temps de calcul).

Une alternative à cette difficulté consiste en l'utilisation d'éléments spéciaux qui permettent de modéliser les régions minces par une description surfacique de ces dernières et en ne nécessitant qu'un maillage surfacique [1],[2]. Dans cet esprit, ce travail présente une formulation intégrale économique permettant la modélisation, en régime magnéto harmonique, de régions minces conductrices non magnétiques ( $\mu=\mu_0$ ) à épaisseur de peau quelconque ( $\delta \gg e$  ou  $\delta \approx e$  ou  $\delta \ll e$ ). Cette dernière est notamment comparée à une formulation intégrale plus générale, récemment développée [3].

### II. FORMULATION

#### A. Equation de la région mince

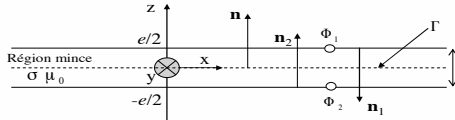


Fig. 1. Région mince conductrice

En régime magnéto harmonique, en présence de régions minces, la composante tangentielle du champ magnétique suivant l'épaisseur de la plaque peut être classiquement exprimée par l'expression (1) [1]-[3]:

$$\mathbf{H}_s(z) = \frac{1}{\text{sh}(ae)} \times \left[ \mathbf{H}_{1s} \cdot \text{sh}\left(\frac{ae}{2} + az\right) + \mathbf{H}_{2s} \cdot \text{sh}\left(\frac{ae}{2} - az\right) \right] \quad (1)$$

où  $a = (1 + j) / \delta$ ,  $\delta$  est l'épaisseur de peau,  $\mathbf{H}_{1s}$  et  $\mathbf{H}_{2s}$  sont les champs tangentiels sur les deux faces de la région mince. Après avoir appliqué la méthode de Galerkin pour l'équation de Maxwell-Faraday sur le côté "1", nous obtenons [1],[2]:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{grad}_s w (\alpha \mathbf{H}_{1s} - \beta \mathbf{H}_{2s}) d\Gamma + j\omega\mu_0 \int_{\Gamma_1} w \mathbf{H}_1 \mathbf{n}_1 d\Gamma = 0 \quad (2)$$

où  $\alpha = \frac{a}{\text{sth}ae}$ ,  $\beta = \frac{a}{\text{csh}ae}$ ,  $w$  est une fonction de pondération et  $\mathbf{n}_1$  est le vecteur normal du côté "1" de la région mince. En permutant les indices "1" et "2", nous obtenons l'équation pour le côté "2":

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{grad}_s w (\alpha \mathbf{H}_{2s} - \beta \mathbf{H}_{1s}) d\Gamma + j\omega\mu_0 \int_{\Gamma_2} w \mathbf{H}_2 \mathbf{n}_2 d\Gamma = 0 \quad (3)$$

où  $\mathbf{n}_2$  est le vecteur normal de la côté "2" de la région mince.

Dans [3], une formulation intégrale générale pour la modélisation des régions minces conductrices non magnétiques a été développée à partir des équations (1) à (3), en discrétisant la surface moyenne. Cette formulation qui nécessite l'évaluation d'intégrales suivant cette surface mais aussi suivant l'épaisseur de la région conductrice est relativement complexe à mettre en œuvre. Nous proposons ci-dessous une formulation alternative plus simple et plus économique.

#### B. Formulation intégrale simplifiée

Avec cette nouvelle formulation, les équations sont écrites sur la surface moyenne  $\Gamma$  de la région mince. La soustraction des équations (3) et (2) conduit à :

$$(\alpha + \beta) \int_{\Gamma} \mathbf{grad}_s w \cdot (\mathbf{H}_{2s} - \mathbf{H}_{1s}) d\Gamma + j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} w (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma = 0 \quad (4)$$

Le champ magnétique dans l'air est décrit par une formulation en potentiel scalaire magnétique réduit:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_t \quad (5)$$

avec  $\mathbf{H}_0$  le champ source et  $\mathbf{H}_t$  le champ créé par les courants induits. Les champs tangentiels sur les deux côtés de la plaque s'écrivent :

$$\mathbf{H}_{1s} = \mathbf{H}_{os} - \mathbf{grad}_s \phi_1 \quad \mathbf{H}_{2s} = \mathbf{H}_{os} - \mathbf{grad}_s \phi_2 \quad (6)$$

où  $\mathbf{H}_{os}$  est la partie tangentielle du champ source et où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  représentent les potentiels scalaires magnétique réduits de chaque côté de la plaque. En introduisant  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$  comme étant l'induction magnétique normale moyenne des surfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et en combinant les équations (4) et (6), nous obtenons:

$$(\alpha + \beta) \int_{\Gamma} \mathbf{grad}_s w \cdot \mathbf{grad}_s \delta \phi d\Gamma + 2j\omega \int_{\Gamma} w \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (7)$$

où  $\delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  est le saut de potentiel scalaire. L'intégrale de la densité de courant  $\mathbf{K}$  suivant l'épaisseur s'exprime à partir de  $\delta\phi$  suivant [1],[2]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \text{grad}_s \delta\phi$$

Nous faisons l'hypothèse d'une continuité de  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  à travers la région mince et écrivons que la contribution des courants de Foucault au champ magnétique normal peut être calculée à partir de  $\mathbf{K}$  suivant Biot et Savart :

$$\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{r}}{r^3} d\Gamma \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

L'équation (7) s'écrit alors :

$$(\alpha + \beta) \int_{\Gamma} \text{grad}_s \mathbf{w} \cdot \text{grad} \delta\phi d\Gamma + \frac{2j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{n} \times \text{grad} \delta\phi \times \mathbf{r}}{r^3} d\Gamma \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -2j\omega\mu_0 \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{H}_o \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (9)$$

Pour résoudre cette équation, la surface est maillée en  $n$  éléments finis surfaciques et le saut de potentiel  $\delta\phi$  est discrétisé suivant une interpolation nodale. Nous obtenons ainsi un système d'équations comportant autant d'inconnues que de nœuds du maillage de la région mince (l'air n'est pas maillé), soit deux fois moins que la formulation générale [3] et quatre fois moins qu'une formulation intégrale de frontière [1]. Après résolution, le champ magnétique en un point quelconque est déterminé par l'expression (8).

### III. VALIDATION

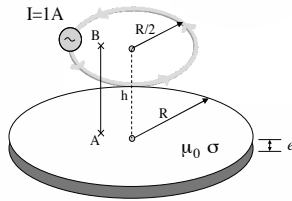


Fig. 2. Disque mince conducteur et le chemin où le champ magnétique est calculé (A (0.25, 0, 0.1), B (0.25, 0, 0.25))

Nous considérons un disque mince conducteur ( $R = 1\text{m}$ ,  $e = 20\text{mm}$ ,  $\sigma = 6e+7\text{ S/m}$ ). Ce disque est placé dans un champ magnétique créé par un conducteur alimenté par une source de courant  $I = 1\text{A}$  (Fig. 2,  $h=R/4$ ). Outre la méthode proposée, les calculs sont conduits avec la méthode intégrale plus générale [3] et la méthode des éléments finis en axisymétrie qui servira de référence [4].

Les calculs ont été effectués pour 2 fréquences :  $f=1\text{Hz}$ , cas où l'épaisseur de peau est grande par rapport à l'épaisseur  $e$  ( $\delta = 65\text{mm}$ ,  $\delta > e$ ) et  $f=50\text{Hz}$ , cas où l'épaisseur de peau est faible par rapport à l'épaisseur  $e$  ( $\delta = 9.2\text{mm}$ ,  $\delta < e$ ). Pour chaque cas, nous avons calculé et comparé le champ magnétique dans la région d'air (chemin AB, Fig. 2).

La méthode intégrale générale présente des résultats très proches comparativement à la méthode éléments finis axisymétrique (Fig.3). Les écarts maximums sont de 0,1% dans le cas  $f=1\text{Hz}$  et 0,2% dans le cas  $f=50\text{Hz}$  et sont donc

très faibles (Fig.4). Par ailleurs, la méthode intégrale simplifiée présente des résultats très similaires aux deux autres méthodes. En la comparant avec la méthode des éléments finis, les différences maximales sont de 0,6% avec  $f=1\text{Hz}$  et 2% avec  $f=50\text{Hz}$  (Fig.4). L'écart de 2% dans le cas  $f = 50\text{Hz}$  est liée au calcul approché du champ normal (8), là où la formulation générale intègre la densité de courant suivant l'épaisseur et tient compte de valeurs de  $\mathbf{H}_o$  différentes de chaque coté de la plaque (significatif lorsque les inducteurs sont proches de la plaque).

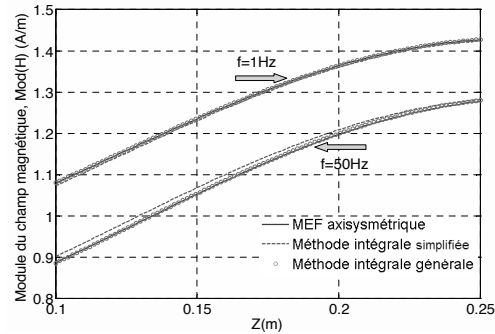


Fig. 3. Module du champ magnétique le long de AB

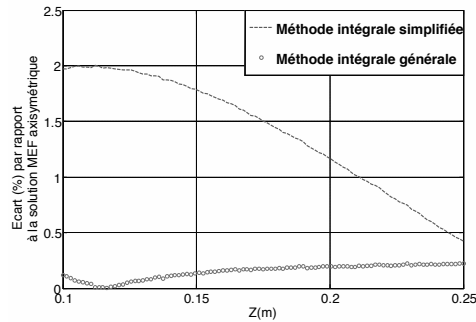


Fig. 4. Ecart (%) par rapport à la solution MEF axisymétrique ( $f=50\text{Hz}$ )

### IV. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons présenté et validé une formulation intégrale économique et simple à mettre en œuvre, permettant la prise en compte des régions minces conductrices avec épaisseur de peau quelconque. Les travaux futurs visent à étendre cette formulation intégrale à la prise en compte de régions magnétiques et conductrices.

### REFERENCES

- [1] L. Krähenbühl and D. Müller, "Thin Layers in electrical engineering. Example of Shell Models in Analyzing Eddy-Currents by Boundary and Finite Element Methods," IEEE Trans. on Magn., vol.29, no.2, pp. 1450-1455, 1993.
- [2] C. Guérin, G. Tanneau, G. Meunier and P. Labie, "A Shell Element for Computing 3D Eddy Current - Application to Transformers," IEEE Trans. on Magn., vol.31, no.3, pp. 1360-1363, 1994.
- [3] T. Le-Duc, G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, "A New Integral Formulation for Eddy Current Computation in Thin Conductive Shells", IEEE Trans. on Magn., vol.48, no.2, pp. 427-430, 2012.
- [4] Flux Cedrat. Meylan, France: www.cedrat.com