



HAL
open science

Eléments pour une théorie des réseaux en phase d'apprentissage

Jean Piniello

► **To cite this version:**

| Jean Piniello. Eléments pour une théorie des réseaux en phase d'apprentissage. 2010. hal-00713298v2

HAL Id: hal-00713298

<https://hal.science/hal-00713298v2>

Preprint submitted on 31 Jan 2013 (v2), last revised 1 Oct 2018 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ELEMENTS

pour une

THEORIE GENERALE des RESEAUX

en phase

d'APPRENTISSAGE

par Jean PINIELLO

www.theorie-reseau-piniello.fr

Monsieur Piniello est propriétaire et/ou détient les droits sur le contenu du site, à savoir notamment les textes.

Toute reproduction, représentation, modification, publication, transmission, dénaturation, totale ou partielle des textes et de leur contenu, par quelque procédé que ce soit, et sur quelque support que ce soit est interdit.

Toute exploitation non autorisée des textes engagerait la responsabilité de l'utilisateur et constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du Code de la Propriété Intellectuelle.

AVANT PROPOS

Cette étude est l'ébauche d'un ensemble d'éléments susceptibles de déboucher sur l'élaboration d'une **Théorie Générale des Réseaux en Phase d'Apprentissage**. Elle s'inspire un peu du formalisme utilisé en Mécanique quantique dans le **Modèle Standard** (Théories de jauge, invariance sous des transformations de symétrie,...). Conscient que nous n'avons fait qu'effleurer le sujet, nous serions heureux si des scientifiques, même « amateurs », intéressés par la question, et quelle que soit leur discipline, approfondissaient le sujet, tout en conservant l'idée de base : **un réseau est un système plongé dans un champ d'information et son évolution peut être déterminée en utilisant un formalisme s'inspirant des théories de jauge**.

D'autres approches que celle utilisée dans cette étude sont évidemment possibles. Il nous serait donc agréable d'échanger avec les lecteurs éventuels intéressés par le sujet et les en remercions par avance.

[Cliquez ici pour rentrer en contact avec l'auteur](#)

FOREWORD

This study is a rough draft of a set of elements capable of issuing forth the elaboration of a **Network General Theory during Apprenticeship Period**. It draws slightly inspiration from the formalism used in **Quantum mechanics**, particularly in the **Standard Model** (Gauge theories, invariance by symmetry transformations,...). We are conscious that we have only grazed the subject and we would be happy if scientists, even "amateurs", interested by the question, and whatever would be their speciality, could study the subject thoroughly, while keeping the basic idea: **a network is a system immersed into an information field and its evolution can be determined by using a formalism inspired by gauge theories**.

Obviously, other approaches than the one used in this study are possible. For the moment, we have not yet translated this study in English, and we apologise for that. However, we would be pleased to exchange ideas with eventual readers interested and we thank them for advance.

[Click here to write to the author](#)

Table des matières

| | |
|--|----|
| AVANT PROPOS | 2 |
| INTRODUCTION | 5 |
| CHAPITRE I PRELIMINAIRES ET DEFINITIONS | 6 |
| I 1 Relation d'information | 6 |
| I 2 Définition et propriétés d'un réseau | 6 |
| I 3 Exemples de réseaux et de leurs finalités objectives (constatées) | 6 |
| I 4 Configuration d'un réseau et d'un élément..... | 7 |
| I 5 Définitions et notations | 10 |
| CHAPITRE II GENERALITES DE BASE SUR LA THEORIE | 12 |
| II 1 Phase d'apprentissage | 12 |
| II 2 Analogie avec l'auto organisation | 12 |
| II 3 Formalisme de la théorie | 12 |
| II 4 Expression de la conactance. [4] [2] | 13 |
| II 5 Repérage des éléments | 14 |
| II 6 Unités de mesure. [2]..... | 15 |
| CHAPITRE III LE RESEAU LIBRE | 16 |
| III 1 Equations du réseau à l'équilibre..... | 16 |
| III 2 Conactance du réseau libre à l'équilibre | 16 |
| III 3 Transformation de symétrie conservant l'invariance de la conactance | 17 |
| CHAPITRE IV LE RESEAU CONNECTE | 19 |
| IV 1 Rappels..... | 19 |
| IV 2 Précisions sur la transposition des éléments $E_i \longleftrightarrow E_j$ | 19 |
| IV 3 Grandeurs et relations à conserver lors de la transposition..... | 19 |
| IV 4 Moyens pour y parvenir | 20 |
| IV 5 Détermination des Δf_i^k et des Δs_i | 20 |
| IV 6 Remarques..... | 25 |
| IV 7 Expression de la conactance | 25 |
| IV 8 Equations de Lagrange. Détermination des fonctions $a_i^k(t)$, $t_i^k(t)$, $l_k(t)$ | 26 |
| IV 9 Compléments sur une structure possible des solutions des l_k et des t_i^k | 29 |
| CHAPITRE V POINTS DE LA THEORIE EXPOSEE A APPROFONDIR..... | 31 |
| V 1 Equations aux dimensions/ Homogénéité/Unités de mesure..... | 31 |
| V 2 Résolution possible des équations de Lagrange du paragraphe IV.8d. | 31 |
| V 3 Simulation informatique..... | 32 |
| V 4 Champ de jauge à inclure dans l'expression de la conactance | 32 |

| | |
|---|----|
| CHAPITRE VI AUTRES VOIES POSSIBLES DE RECHERCHE | 33 |
| VI 1 Quelle est la finalité de ce genre de recherches ? | 33 |
| VI 2 Autres voies possibles de recherche concernant un seul réseau..... | 33 |
| VI 3 Autres voies de recherches concernant le couplage de plusieurs réseaux | 36 |
| CONCLUSION | 39 |
| NOTES - COMMENTAIRES - DEMONSTRATIONS | 40 |
| Note [1] SOCIETES D'INSECTES | 40 |
| Note [2] UNITES DE CONTACTANCE, DE FLUX D'INFORMATION..... | 40 |
| Note [3] FINALITE OBJECTIVE | 44 |
| Note [4] CONTACTANCE-CONNAISSANCE-INTELLIGENCE-INFORMATION-ENTROPIE- COMPLEXITE..... | 44 |
| Note [5] RESEAU LIBRE à L'EQUILIBRE | 48 |
| Note [6] EXPRESSION des EQUATIONS de LAGRANGE | 49 |
| BIBLIOGRAPHIE | 53 |

INTRODUCTION

Pourquoi une « Théorie générale des réseaux en phase d'apprentissage » ?
Plusieurs événements, espacés dans le temps, nous ont conduit à nous intéresser aux réseaux.

Tout d'abord, dans les années 80, des articles de différentes revues scientifiques nous avaient particulièrement frappé, car ils laissaient supposer que, contrairement à ce que nous pensions auparavant et en opposition au fonctionnement séquentiel des ordinateurs, des éléments disposés en réseau étaient susceptibles de s'auto organiser et d'acquérir une certaine forme d'intelligence par auto apprentissage.

Dans le même ordre d'idées, il est étonnant que des collectivités d'insectes sociaux (les abeilles par exemple) soient capables d'obtenir des résultats remarquables sans qu'il y ait un « chef » dirigeant la collectivité [1]. Ces collectivités constituant des réseaux, nous nous sommes intéressés à ce concept et avons cherché, en vain, dans la littérature une *théorie générale des réseaux* pouvant expliquer ce comportement remarquable.

Puis, quelques années plus tard, dans le cadre de cours de Mécanique Quantique et de débats épistémologiques dispensés par l'Université Ouverte de Lyon 1, de nombreuses discussions à caractère philosophique ont porté sur le libre arbitre, la conscience, l'esprit et la matière, etc... Cela nous a conduit, entre autres, à nous intéresser au fonctionnement du cerveau, réseau certainement le plus perfectionné et qui ne semble pas, lui aussi, être sous l'autorité d'un organe « chef ».

Cette question nous passionnant, et ne trouvant toujours pas dans la littérature de théorie explicative satisfaisante, certaines idées se sont fait jour, par analogie avec les problèmes traités en Mécanique Quantique. Certes, il existait de nombreux travaux et publications sur les réseaux neuronaux artificiels, mais, à notre connaissance, les auteurs cherchaient toujours à modéliser le fonctionnement d'un élément du réseau, **mais n'étudiaient pas le réseau dans son ensemble, en tant qu'objet global.**

Cet état de fait nous a conduit, par curiosité, à essayer d'élaborer les bases de ce que pourrait être une *Théorie générale des réseaux*, en considérant, par analogie, qu'un réseau connecté à son environnement par des échanges d'information se comporte comme une « particule » placée dans un champ (électromagnétique par exemple) : le réseau jouant le rôle de particule (ou de système de particules) et les informations auxquelles il est soumis par son environnement étant l'effet d'un champ d'information externe (comme la force à laquelle est soumise la particule est l'effet du champ électromagnétique). La formulation mathématique s'inspire alors des méthodes utilisées en physique pour l'élaboration du *Modèle Standard* (Principe de moindre action, théories de jauge, invariance sous les transformations de symétrie....).

C'est donc ce que, modestement, nous avons essayé de faire avec cette étude intitulée « **Éléments pour une théorie générale des réseaux en phase d'apprentissage** » (Il est en effet important de connaître comment évolue un réseau pendant cette phase initiale pour mieux comprendre sa conduite ultérieure). Nous avons parfaitement conscience des insuffisances de ce travail et imaginons bien qu'il y a d'autres voies possibles ; nous en suggérons d'ailleurs quelques unes vers la fin de l'étude.

Notre souhait serait donc, qu'après lecture, des personnes éventuellement intéressées et compétentes dans les divers domaines concernés (physiciens, neurobiologistes, mathématiciens, informaticiens, spécialistes en sciences cognitives....) reprennent une ou plusieurs idées suggérées et en poussent l'étude le plus loin possible.

CHAPITRE I PRELIMINAIRES ET DEFINITIONS

Note préliminaire : Toutes les expressions mathématiques ont été écrites à l'aide du logiciel Math Type

I 1 Relation d'information

➤ Il existe une *relation d'information* entre deux éléments A et B lorsque A et B se transmettent des signaux véhiculant une information compréhensible pour les deux éléments, ou tout au moins pour l'élément récepteur du signal.

➤ Ces signaux peuvent être de nature variée (électriques, chimiques, visuels...). De même on parle parfois de *liaison d'information*, mais cette liaison peut être matérielle (câblages) ou immatérielle (ondes).

➤ Dans ce qui suit, il est important de remarquer que **ce qui caractérise une relation d'information est, entre autres, le flux d'information qu'elle véhicule, exprimé en unités d'information**, et non en unités du signal support [2].

➤ On pourrait approfondir cette notion en examinant ses propriétés éventuelles (symétrie, transitivité,...).

I 2 Définition et propriétés d'un réseau

- a) Un réseau est un ensemble d'éléments
- qui ont chacun au moins une relation d'information avec un autre élément de l'ensemble
 - dont certains ont une relation d'information avec l'environnement du réseau
 - qui échange de l'énergie avec l'extérieur.

b) Un réseau a une *finalité objective* [3], constatée, une *fonction* qu'il va tenter de remplir au mieux.

c) Un réseau est une *structure dissipative* ; placé loin de son état d'équilibre, sous l'effet de l'énergie échangée avec son environnement et des contraintes d'information qui lui sont imposées --notamment les entrées et sorties en phase d'apprentissage-- il *s'auto organise*. Son évolution peut alors passer par des seuils d'instabilité, des bifurcations, dépendant des contraintes imposées, et peut avoir comme structure d'aboutissement un attracteur.

I 3 Exemples de réseaux et de leurs finalités objectives (constatées)

- Réseau de neurones artificiels (*Reconnaître des formes*)
- Réseau de (macro) molécules formant une cellule biologique (*Maintenir la cellule en vie pendant un certain temps*)
- Réseau de cellules constituant un organisme vivant (*Maintenir cet organisme vivant et perpétuer l'espèce*)

- Réseau de neurones (cerveau) (*Gérer les relations avec l'environnement de façon à ce que l'organisme vivant dont il fait partie reste en vie*)
- Réseau constitué par une société (insectes sociaux, mammifères,..) (*Perpétuer la société, l'espèce*) [1]
- Internet ?

I 4 Configuration d'un réseau et d'un élément

a) Pour formaliser la théorie, nous avons pris un modèle de configuration du réseau, donné par la **Figure I4-1**, et un modèle de configuration d'un élément du réseau, donné par la **Figure I4-2**.

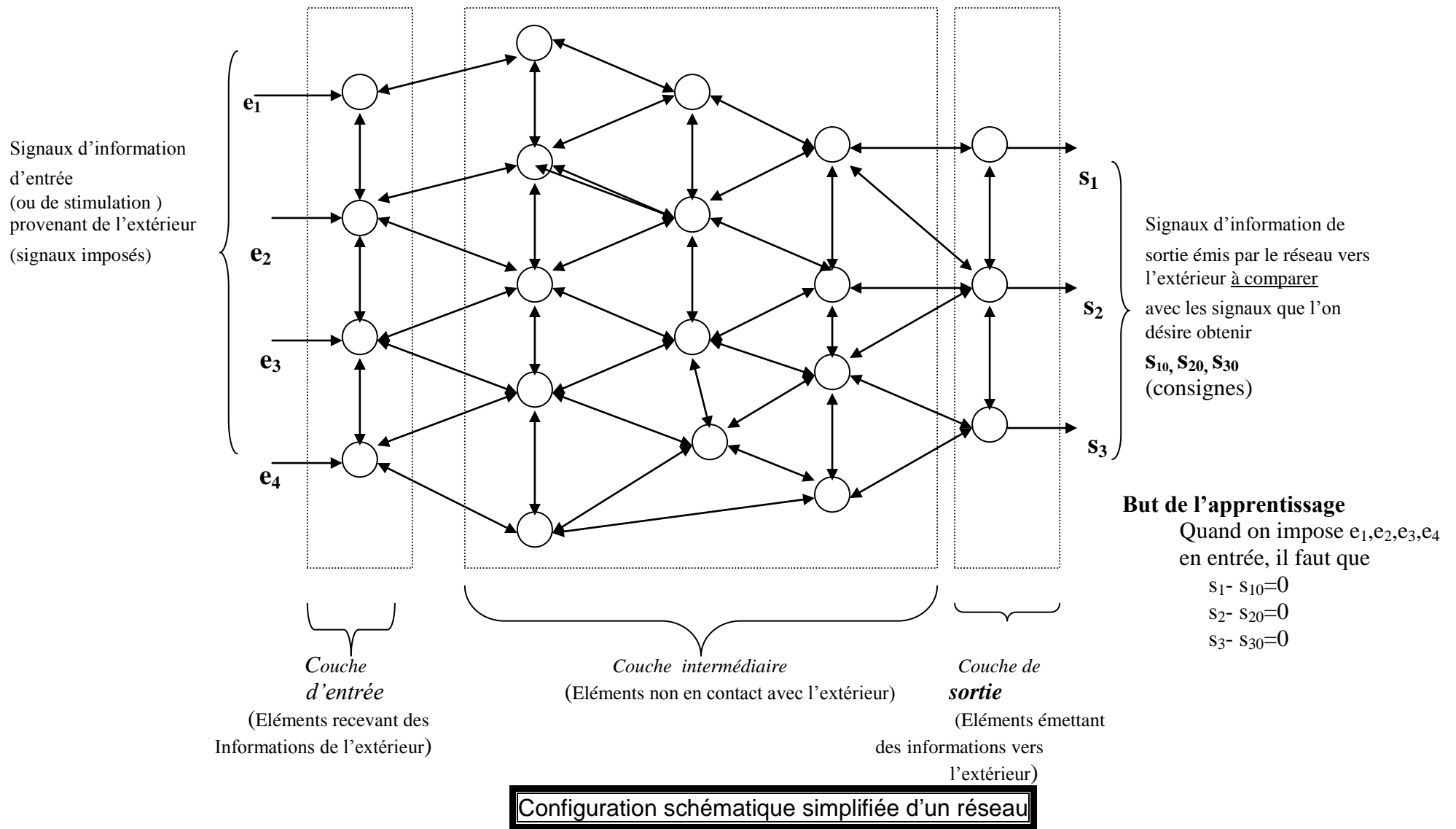
Nous avons essayé de prendre un cas suffisamment général, à savoir

- Tout le flux d'information provenant d'un élément est réinjecté à l'entrée de tous les éléments du réseau (*rétroaction*)
- A l'exception des flux d'information **des éléments de sortie**, qui sont comparés avec la valeur qu'ils doivent avoir en fin d'apprentissage. C'est cette **différence**, après comparaison, qui est réinjectée à l'entrée de tous les éléments (et non les flux d'information de sortie eux-mêmes de ces éléments de sortie)

b) Le modèle de configuration choisi est très général. Toutefois, en réalité, il n'est pas évident que le flux d'information généré par chaque élément soit réinjecté à l'entrée de tous les éléments du réseau.

De plus, on peut imaginer des configurations d'apprentissage où aucun signal de sortie n'est imposé par l'extérieur (pas d'existence des s_i). On pourrait ainsi prendre l'exemple du cerveau, en tant que réseau, et de « l'apprentissage » d'un *qualia ou quale* (perception ressentie par un individu, comme la sensation de douleur, de couleur,...).

Ainsi, pour le qualia « rouge », qui correspond à une configuration interne des liaisons entre neurones, les stimuli d'entrée (les f_k^i dans nos notations) sont provoqués par des photons ayant la fréquence du rouge, via les neurones de la rétine, etc..., mais, à priori, l'environnement extérieur au cerveau ne semble pas imposer de signaux particuliers de sortie (les s_i).



Note : Toutes les liaisons entre les éléments ne sont pas représentées

Figure I4-1

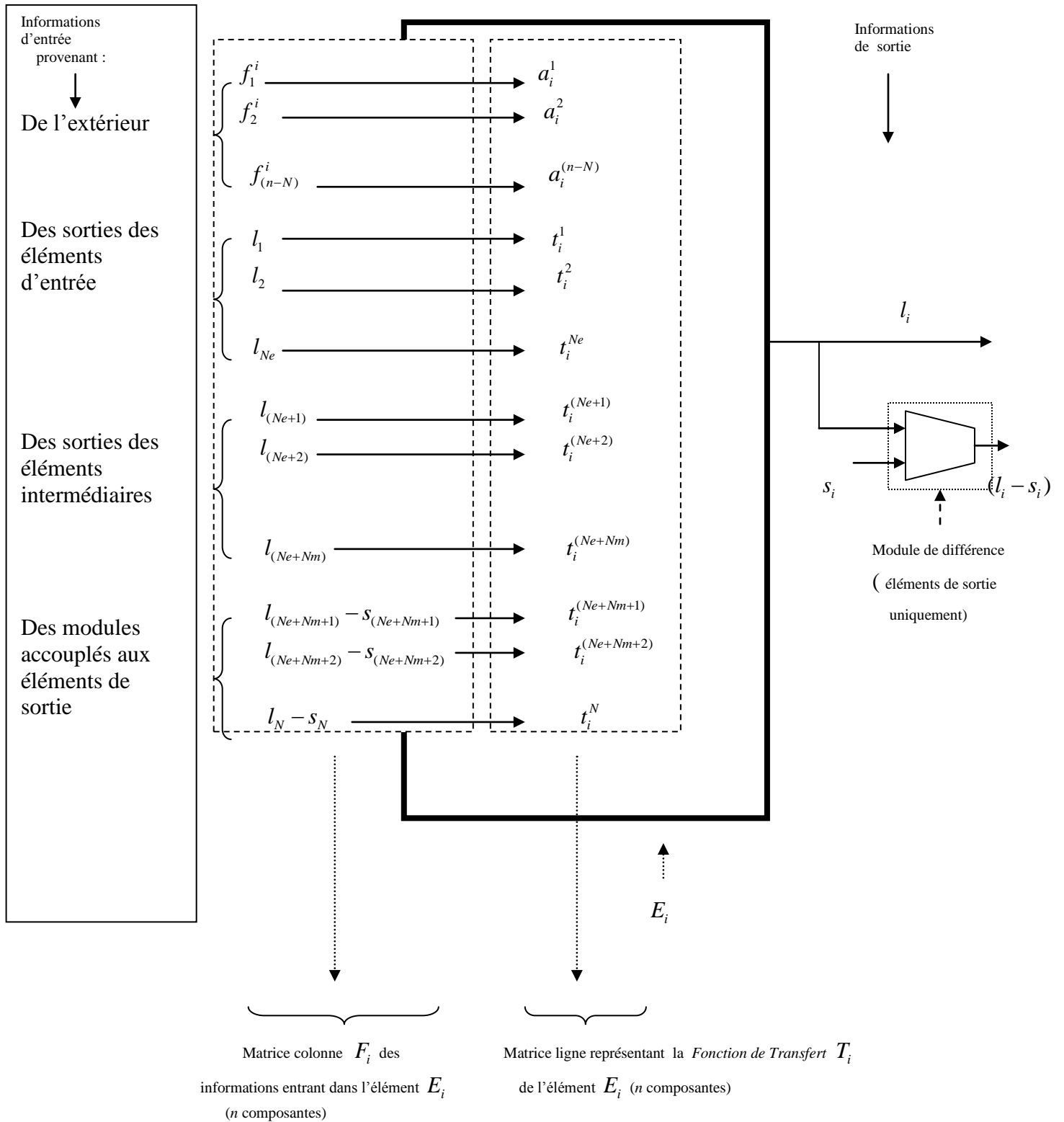


Figure I4-2

Configuration schématique d'un élément E_i du réseau

I 5 Définitions et notations

Dans le texte,

- Les **équations mathématiques** sont numérotées entre *parenthèses* ()
- Les **notes explicatives** sont numérotées entre *crochets* []
- Les **références bibliographiques** sont numérotées entre *doubles crochets* [[]]

Éléments d'entrée

- Éléments qui reçoivent des informations de l'extérieur. Leur nombre est N_e .
- sommation sur les éléments d'entrée : \sum_i avec $i=1$ à $i=N_e$
- chaque élément peut recevoir $(n-N)$ informations provenant de l'extérieur ; elles sont nommées $f_1^i, f_2^i, \dots, f_j^i, \dots, f_{(n-N)}^i$

Éléments intermédiaires

- Éléments n'ayant aucun contact direct avec l'extérieur. Leur nombre est N_m (m comme milieu)
- Sommation sur les éléments intermédiaires : \sum_i avec $i=(N_e+1)$ à $i=(N_e+N_m)$

Éléments de sortie

- Éléments qui fournissent des informations à l'extérieur. Leur nombre est N_s
- A chaque élément de sortie est adjoint un *module* calculant la différence entre l'information fournie à l'extérieur et l'information que cet élément devrait fournir (*consigne*). Exemple : $l_N - s_N$
- Sommation sur les éléments de sortie : \sum_i avec $i = N_e + N_m + 1$ à $i = N = N_e + N_m + N_s$
- Les éléments de sortie reçoivent de l'extérieur des *consignes* que les informations qu'ils émettent doivent évaluer.

Chaque élément du réseau E_i

- Reçoit en entrée n informations
- Emet en sortie une information **unique** l_i , qui est un scalaire (produit d'une matrice ligne par une matrice colonne)

Le réseau se compose de N éléments E_i avec $N = N_e + N_m + N_s$

Réseau libre : Réseau qui n'a aucune relation d'information avec l'extérieur (son environnement).

Réseau connecté : Réseau qui a une ou plusieurs relations d'information avec l'extérieur. Ces dernières peuvent

- Soit provenir de l'extérieur et être reçues par le réseau (les f_k^i , informations entrantes)
- Soit provenir du réseau et être reçues par l'extérieur (informations sortantes)
- L'extérieur peut aussi **imposer** une information de sortie au réseau (les s_i)

Symboles

l_i : signal d'information de sortie de l'élément E_i

f_j^i : $j^{\text{ème}}$ signal d'information venant de l'extérieur reçu par l'élément d'entrée E_i

s_i : signal d'information de sortie imposé par l'extérieur (consigne) à l'élément de sortie E_i . Pour cet élément, on veut : $l_i = s_i$, et on réinjecte en entrée de tous les éléments du réseau les quantités $(l_i - s_i)$

En fin d'apprentissage, il faut avoir : $l_i = s_i$ (finalité objective)

C : Conactance [4]

$$\dot{t}_i^j = \frac{dt_i^j}{dt} : \text{dérivée par rapport au temps de } t_i^j$$

$$\dot{l}_i = \frac{dl_i}{dt} : \text{dérivée par rapport au temps de } l_i$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} : \text{sommations ; nous n'avons pas adopté la convention d'Einstein pour les}$$

sommations de façon à ne pas perturber les lecteurs non familiarisés à ce type de notation.

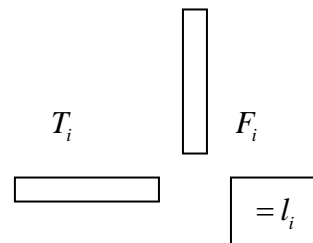
Matrice ligne représentant la fonction de transfert de l'élément E_i (imposée par le fait que chaque élément n'a qu'un seul et unique signal de sortie)

$$T_i = \left[a_i^1 a_i^2 \dots a_i^{(n-N)} t_i^1 \dots t_i^j \dots t_i^N \right]$$

Vecteur (ou matrice) colonne représentant les entrées dans l'élément E_i

$$F_i = \begin{pmatrix} f_1^i \\ \vdots \\ f_{(n-N)}^i \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{(Ne+Nm)} \\ l_{(Ne+Nm+1)} - s_{(Ne+Nm+1)} \\ \vdots \\ l_N - s_N \end{pmatrix}$$

On a : $T_i * F_i = l_i$



n : dimension de T_i et de F_i

CHAPITRE II GENERALITES DE BASE SUR LA THEORIE

II 1 Phase d'apprentissage

Il est important de rappeler que l'étude porte sur la **phase d'apprentissage du réseau**, à savoir :

- Qu'il reçoit des informations (stimuli) de l'extérieur (les signaux d'entrée f_k^i)
- Et qu'on lui impose les informations (signaux de sortie des éléments de sortie) qu'il doit fournir à l'extérieur (les s_i).

II 2 Analogie avec l'auto organisation

- Le réseau non connecté est un système *libre* qui trouve sa position d'équilibre stable (I_{io}, t_{io}^j) .
- Quand on le connecte avec l'extérieur par des liaisons d'information, c'est un *système dissipatif*
 - Qui se trouve dans un état éloigné de son équilibre stable
 - Que l'on maintient dans cet état par des *contraintes* (les f_j^i et les s_i)
- Il va donc probablement évoluer vers un *attracteur*, cette évolution pouvant rencontrer des seuils, des bifurcations, ...

D'où la probable complexité des équations d'évolution, qui ne seront pas linéaires.

II 3 Formalisme de la théorie

Ce formalisme s'inspire principalement (dans ce qu'il a de plus trivial !) de celui utilisé en physique en *Théorie quantique des champs*, dont les *théories de jauge*.

On peut faire la comparaison suivante, qui n'a pour but que de mieux faire comprendre la démarche suivie.

Prenons comme exemple *l'Electrodynamique quantique* qui traite des interactions entre l'électron et un champ électromagnétique.

a) Un système physique, l'électron, est plongé dans un champ électromagnétique \tilde{A} .

Par analogie, on considère que le réseau libre est plongé dans un *champ d'information* caractérisé, du point de vue de ses interactions, par les f_j^i et les s_i .

b) Si on considère *l'intégrale d'action (Principe de moindre action)* de l'électron seul, on s'aperçoit que son équation n'est pas invariante vis-à-vis de transformations de symétrie dépendant de la position de l'électron. Pour la rendre invariante, on ajoute un terme d'interaction (de couplage) et un champ, dit *champ de jauge*, qui se révèle être précisément le champ électromagnétique \tilde{A} .

Par analogie, on cherche à rendre invariante l'intégrale d'action du réseau libre vis-à-vis des transformations de symétrie retenues, par adjonction de termes dépendant du champ d'information dans lequel est plongé le réseau libre.

c) La quantité sous l'intégrale d'action, pour un système, se nomme *Fonction de Lagrange*. Elle caractérise le système (par exemple l'électron + le champ électromagnétique) et est homogène à une énergie.

Par analogie, nous appellerons **conactance** [4] la fonction caractéristique du réseau. Cette conactance est homogène à une *quantité d'information* [2].

d) Pour déterminer l'évolution de l'électron plongé dans le champ \tilde{A} , on résout les *Equations dites de Lagrange* (Optimisation de la « trajectoire »).

Par analogie, l'évolution du réseau dans sa phase d'apprentissage, c'est-à-dire depuis l'instant initial t_0 où il est connecté au champ d'information extérieur jusqu'à l'instant t_1 où ses informations de sortie sont correctes (c'est-à-dire égales aux s_i), sera déterminée par la résolution des équations de Lagrange appliquées à la conactance.

II 4 Expression de la conactance. [4] [2]

a) La **conactance** est la grandeur qui caractérise le réseau (équivalente au lagrangien en physique).

Elle est « *l'intelligence* » que possède le réseau pour parvenir à l'objectif qui lui a été fixé (ici obtenir des signaux de sortie bien déterminés égaux aux s_i lorsque les signaux d'entrée f_j^i sont imposés).

b) Comment exprimer cette conactance ? Nous adopterons le « *principe de simplicité* » :

▪ La conactance peut être considérée, dans un premier temps, comme la somme des flux d'information reçus par les différents éléments E_i du réseau.

Pendant le temps dt , l'élément E_i reçoit un accroissement de conactance dC_i tel que :

$$(2.1) \quad dC_i = \sum_{k=1}^{k=(n-N)} f_k^i dt + \sum_{j=1}^{j=N} l_j dt - \sum_{j=(Ne+Nm+1)}^{j=N} s_j dt$$

▪ Mais un flux d'information reçu a une « efficacité » qui dépend de la *réactivité* de l'élément qui le reçoit ; autrement dit, le flux l_j , pris en compte par le terme t_i^j de la fonction de transfert de E_i , sera d'autant plus efficace que t_i^j sera susceptible de réagir rapidement, c'est-à-dire que sa vitesse de variation sera plus grande.

Cette vitesse de variation s'exprime par la dérivée $\frac{dt_i^j}{dt} = \dot{t}_i^j$. Mais une dérivée peut être positive ou négative ; or la réactivité, telle que nous la concevons, ne peut s'exprimer que par une quantité nulle ou positive. En effet, le terme résultant $l_j t_i^j$ est composé de deux termes qui varient eux-mêmes en fonction du temps, et sa valeur à tout instant t dépend, bien sûr, entre autres, des dérivées par rapport au temps à l'instant précédent de l_j et t_i^j ; et ces dérivées peuvent être positives, nulles ou négatives. Mais, pour les t_i^j , une dérivée négative peut être plus réactive (plus « pentue ») qu'une dérivée positive.

C'est pourquoi nous prendrons comme mesure de la réactivité le terme $\left(\frac{dt_i^j}{dt}\right)^2 = \left(\dot{t}_i^j\right)^2 = \ddot{t}_i^{j2}$

Dans ces conditions, l'élément E_i reçoit pendant le temps dt un accroissement de conactance dC_i tel que :

$$(2.2) \quad dC_i = \sum_{k=1}^{k=(n-N)} f_k^i \cdot a_i \cdot dt + \sum_{k=1}^{k=N} l_k \cdot t_i \cdot dt - \sum_{k=(Ne+Nm+1)}^{k=N} s_k \cdot t_i \cdot dt$$

- Le flux d'information reçu par le réseau pendant le temps dt sera alors :

$$(2.3) \quad dC = \sum_{i=1}^{i=N} dC_i = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\sum_{k=1}^{k=(n-N)} f_k^i \cdot a_i \cdot dt + \sum_{k=1}^{k=N} l_k \cdot t_i \cdot dt - \sum_{k=(Ne+Nm+1)}^{k=N} s_k \cdot t_i \cdot dt \right]$$

- A l'instant t , la valeur de la conactance du réseau sera :

$$(2.4) \quad C = \int_0^t dC = \int_0^t \sum_{i=1}^{i=N} \left[\sum_{k=1}^{k=(n-N)} f_k^i \cdot a_i + \sum_{k=1}^{k=N} l_k \cdot t_i - \sum_{k=(Ne+Nm+1)}^{k=N} s_k \cdot t_i \right] dt$$

(On intègre à partir de $t=0$, considéré comme l'instant initial où le réseau est connecté à l'extérieur, c'est-à-dire où il commence son apprentissage).

- *L'action* (du principe de moindre action) s'exprime par :

$$(2.5) \quad S = \int_0^{t_1} C dt \quad (\text{Intégrale d'action})$$

t_1 étant l'instant final où le réseau a atteint son but, a terminé son apprentissage, c'est-à-dire est dans une structure telle que, lui ayant injecté les stimuli d'entrée f_k^i , il donne en sortie les s_i imposés.

II 5 Repérage des éléments

- a) Les éléments E_i doivent pouvoir être repérés physiquement : temporellement et spatialement.

b) Le *repérage temporel* se fait avec la variable temps (t) classique. Les grandeurs, les équations, dépendent du temps.

Note : Pour le moment, nous considèrerons que la variable temps est indépendante des variables spatiales, c'est-à-dire que nous ne nous plaçons pas dans une hypothèse relativiste. Mais un éventuel développement ultérieur de la théorie n'exclut pas cette hypothèse, d'autant plus que les flux d'information peuvent circuler à une vitesse très élevée.

- c) Le *repérage spatial* peut se faire de deux façons :
- Soit par les coordonnées spatiales habituelles de l'espace physique à 3 dimensions (repérage par grandeurs continues).
 - Soit en *numérotant les éléments* E_i (repérage par des valeurs discrètes).

➤ **C'est cette 2^{ème} méthode que nous avons choisie.**

En effet, ce choix permet, dans les équations, de ne conserver que la variable temps (t) et de s'affranchir des coordonnées d'espace x , y et z . Sinon, il aurait fallu, pour donner la position d'un élément du réseau, lui attribuer un point, un « endroit » lui appartenant, dont les coordonnées spatiales auraient été par définition ses coordonnées.

De même pour les valeurs des signaux d'information, qui peuvent varier en fonction de la position spatiale où on les mesure.

Bref, le choix fait revient à considérer que les déplacements des éléments E_i se font à des vitesses très faibles par rapport à la vitesse des signaux d'information. Mais, comme il est dit plus haut, un développement ultérieur de la théorie n'exclut pas de repérer spatialement les événements, que ce soit la position des éléments du réseau ou les signaux d'information, et ceci, éventuellement, de façon relativiste.

On aurait alors à prendre en compte les variables t, x, y et z , et l'expression de la conactance ferait apparaître ces 4 variables et les dérivées partielles des différentes grandeurs par rapport à elles. On se rapprocherait alors d'une vraie théorie de champ car tout l'espace serait pris en compte.

II 6 Unités de mesure. [2]

a) Les équations de la théorie doivent être *homogènes*, au point de vue des unités de mesure choisies.

b) Les éléments t_i^j et a_i^k de la matrice ligne T_i représentant la *fonction de transfert* de E_i sont des expressions, des fonctions sans dimensions : elles agissent sur un signal d'information d'entrée et restituent en sortie, après addition, un flux d'information.

Ces fonctions peuvent être des opérateurs, des scalaires, mais globalement elles sont sans dimensions.

c) Les l_i ou f_k^i sont des *flux d'information*. Nous considérerons (provisoirement ?) qu'ils expriment des *quantités d'information par unité de temps*, ce qui suppose évidemment de définir une unité d'information

Est-ce le bit ? le shannon ?... Ce point est approfondi dans la note [2], mais par la suite nous ferons, dans le raisonnement théorique, comme si cette unité était bien définie.

CHAPITRE III LE RESEAU LIBRE

III 1 Equations du réseau à l'équilibre

a) Rappelons que le *réseau libre* n'a pas de relation d'information avec son environnement ; donc pour tous les exposants et indices on a : $f_j^i = s_i = 0$

b) A partir de l'instant $t = 0$ où le réseau est constitué, c'est-à-dire que chacun des éléments est relié par une relation d'information à tous les autres, des flux d'information (les l_i) vont circuler.

Nous faisons l'hypothèse qu'à un instant $t = t_0$, le réseau atteindra un équilibre, c'est-à-dire que les l_i ne varieront plus et prendront des valeurs l_{i0} .

Note : Dans ce qui suit, nous devrions donc écrire les variables à l'équilibre avec des indices 0, soit l_{i0} et t_{i0}^j . Pour ne pas alourdir les notations, nous omettrons d'écrire les indices 0.

A $t = t_0$, nous pouvons écrire le bilan des flux d'information autour de l'élément du réseau E_i :

$$(3.1) \quad l_i = \sum_{j=1}^{j=N} t_i^j l_j$$

Ou encore, en développant

$$t_i^1 l_1 + t_i^2 l_2 + \dots + t_i^i l_i + t_i^j l_j + \dots + t_i^N l_N = l_i$$

Soit

$$t_i^1 l_1 + t_i^2 l_2 + \dots + (t_i^i - 1) l_i + t_i^j l_j + \dots + t_i^N l_N = 0$$

Pour l'ensemble du réseau, on a le système homogène :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (t_1^1 - 1)l_1 + \dots + t_1^i l_i + t_1^j l_j + \dots + t_1^N l_N &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots &= 0 \\ t_i^1 l_1 + \dots + (t_i^i - 1)l_i + t_i^j l_j + \dots + t_i^N l_N &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots &= 0 \\ t_N^1 l_1 + \dots + t_N^i l_i + t_N^j l_j + \dots + (t_N^N - 1)l_N &= 0 \end{aligned} \quad \text{qui comporte N équations à N inconnues } l_i.$$

III 2 Conactance du réseau libre à l'équilibre

- o Elle découle de l'expression (2.4) dans laquelle les f_k^i et les s_k sont nuls, soit :

$$(3.3) \quad C_0 = \int_0^{t_0} \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{k=1}^{k=N} l_k t_i^{k2} dt \quad \text{les } l_k, t_i^k \text{ et } t_i^{k2} \text{ étant des fonctions du temps } t.$$

- o **Remarque** : En t_0 le réseau est stabilisé : les t_i^k et les l_k ne varient plus ; donc les $t_i^{k2} = 0$ et la conactance conserve sa valeur C_0 .

III 3 Transformation de symétrie conservant l'invariance de la conactance

a) Recherche d'une transformation.

- Etant donné que tous les éléments E_i ont même structure, même si leurs paramètres ne sont pas identiques au départ, il n'y a pas lieu de privilégier un élément par rapport à un autre.
- Par ailleurs, comme dans une première étape nous ne considérons pas les variables d'espace habituelles, nous ne prenons pas en compte le groupe de transformations continues de Lorentz (ou de Poincaré). Mais dans une approche relativiste ces groupes seraient à considérer comme groupes de symétrie du réseau.
- Enfin, le repérage des éléments se faisant par *dénombrement*, la transformation recherchée devra être *discrète*.
- Intuitivement, la transformation de symétrie pertinente semble être le **Groupe des Permutations**.

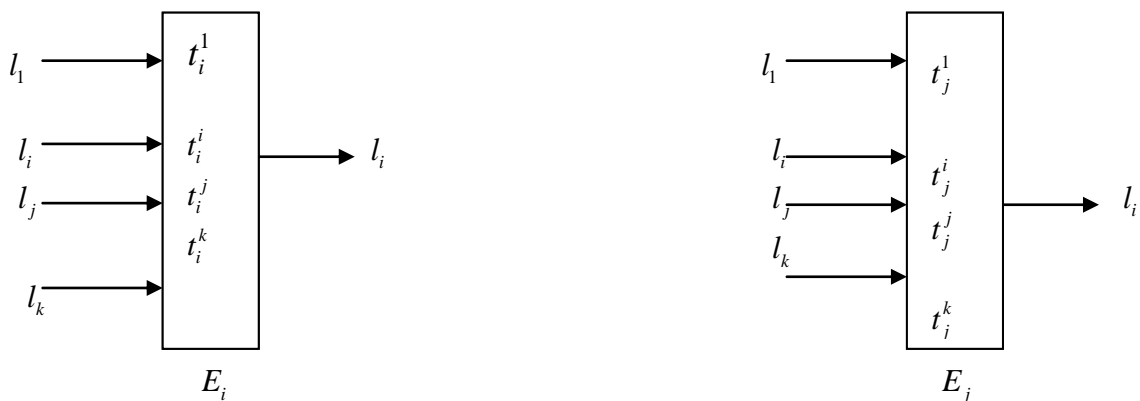
b) Etat du réseau libre à l'équilibre à l'instant t_0 .

- Cet état est conforme au système homogène (3.2).
- Nous faisons l'hypothèse que les solutions l_{i0} du système ne sont pas nulles. [5]
- Cela entraîne que le déterminant Δ_0 du système est nul : $\Delta_0=0$
- A l'instant t_0 les l_{i0} et t_{i0}^j sont bien déterminés.

c) Que se passe-t-il si l'on fait une permutation des éléments ?

- Toute permutation est le produit de *transpositions* (transposition= échange de 2 éléments).
- Nous regarderons donc ce qui se passe lorsqu'on fait une transposition échangeant les éléments E_i et E_j du réseau.
- Une telle transposition consiste à mettre E_i à la place de E_j et E_j à la place de E_i , **les liaisons d'information restant, elles, identiques**.
- Pour une meilleure compréhension, la **figure III 3.1** ci-après indique comment représenter ce qui se passe dans le cas de liaisons câblées (les flux d'information sont véhiculés par des signaux qui transitent par des conducteurs matériels).

1/ Avant transposition

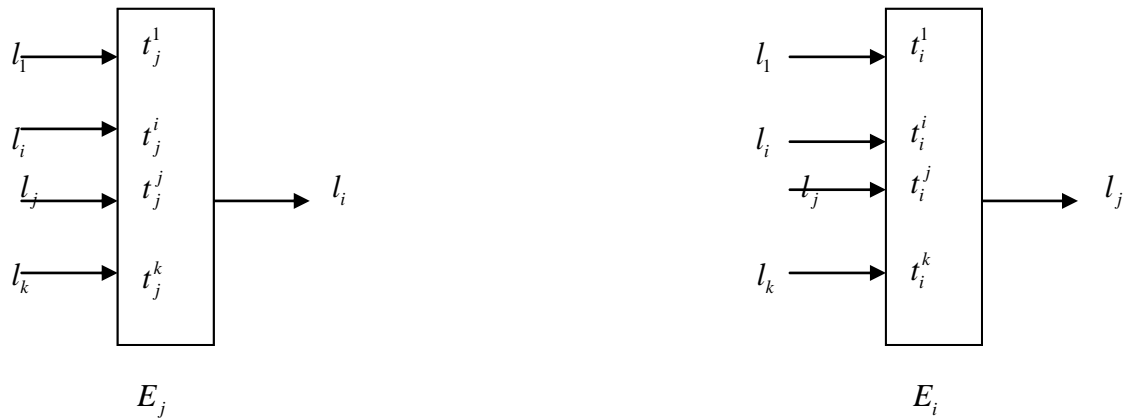


Termes de la conactance à intégrer :

$$\sum_{i=1}^{i=N} \sum_{k=1}^{k=N} l_k t_i^{k2}$$

$$\text{Soit : } \dots + l_i \overset{.2}{t_i^i} + l_j \overset{.2}{t_j^j} + l_k \overset{.2}{t_k^k} + \dots + l_i \overset{.2}{t_j^i} + l_j \overset{.2}{t_i^j} + l_k \overset{.2}{t_j^k} + \dots$$

2/ Après transposition



$$\text{Soit : } \dots + l_i \overset{.2}{t_j^i} + l_j \overset{.2}{t_i^j} + l_k \overset{.2}{t_j^k} + \dots + l_i \overset{.2}{t_i^i} + l_j \overset{.2}{t_i^j} + l_k \overset{.2}{t_i^k} + \dots$$

Figure III 3.1

▪ A priori, comme on retrouve les mêmes termes, on peut penser que la conactance reste invariante. Or, **il n'en est rien.**

En effet, le système homogène d'équations (3.2) change. La ligne correspondant à E_i

$$t_i^1 l_1 + \dots + (t_i^i - 1) l_i + t_i^j l_j + t_i^k l_k + \dots + t_i^N l_N = 0$$

devient

$$t_i^1 l_1 + \dots + t_i^i l_i + (t_i^j - 1) l_j + t_i^k l_k + \dots + t_i^N l_N = 0$$

Il en est de même pour la ligne concernant E_i .

Or nous avons supposé que les solutions l_{i0} n'étaient pas nulles, ce qui implique que le déterminant principal $\Delta_0 = 0$. Mais ce déterminant principal est fonction des coefficients des l_{i0} , c'est à dire des t_{i0}^j (ou des $(t_{i0}^j - 1)$). Comme l'on change ces coefficients (tout en conservant les t_{i0}^j identiques)---par exemple $(t_i^i - 1)$ devient t_i^i et t_i^j devient $(t_i^j - 1)$ ---, le nouveau déterminant principal après permutation n'est plus le même, et il n'y a aucune raison pour qu'il soit égal à 0. Pour satisfaire le système (3.2), tous les l_{i0} doivent être nuls.

Il en résulte que la **valeur de la conactance** aura changé, et **il n'y aura donc pas eu invariance de la conactance pour le groupe des permutations.**

Remarque : L'expression de la conactance, elle, reste invariante.

d) Que faire pour que la conactance reste invariante sous une permutation ?

➤ On va soumettre le réseau à un **champ d'information** qui jouera le rôle de **champ de jauge.**

➤ Pour cela, on connecte le réseau au champ d'information qui se manifeste par les flux d'information f_k^i et s_i .

➤ Mais cette connexion est en même temps **l'action qui configure le réseau pour le soumettre à un apprentissage**, c'est-à-dire à faire croître sa conactance pour qu'à la fin, quand on lui impose les f_k^i , il restitue en sortie les s_i .

CHAPITRE IV LE RESEAU CONNECTE

IV 1 Rappels

- a) Nous avons vu qu'en faisant une transposition sur le réseau libre, l'état de ce dernier était modifié. Les bilans entrées/sorties des flux d'information au niveau de chaque élément E_i ne sont plus assurés et la conactance n'est pas invariante.

D'où la nécessité de connecter le réseau à un champ d'information externe qui permettra de rétablir l'équilibre rompu, ce champ jouant le rôle d'un champ de jauge.

- b) On considère donc à présent, à l'instant t , le réseau *connecté*, c'est à dire
- Qu'il reçoit de l'extérieur les flux d'information f_k^i et s_i
 - Qu'à cet instant quelconque t les bilans des flux d'information aux bornes de chaque élément sont satisfaits. (les t_i^k , a_i^k et l_i sont des fonctions de t)

IV 2 Précisions sur la transposition des éléments $E_i \longleftrightarrow E_j$.

La signification d'une telle transposition est :

- On remplace E_i par E_j et réciproquement.
- Chacun de ces éléments garde, conserve, les caractéristiques qu'il avait avant la transposition (il « emporte » ses t_i^k et ses a_i^k avec lui).
- Les connexions, qu'on peut se représenter rigides pour la compréhension, conservent leurs noms : l_i , qui était la sortie de E_i avant transposition, s'appellera toujours l_i , mais sera après transposition la sortie de E_j .

IV 3 Grandeurs et relations à conserver lors de la transposition

- a) On veut que lors de la transposition
- les **valeurs des** l_i soient conservées (les flux « internes » d'information restent les mêmes).
 - les t_i^k **et** a_i^k ne changent pas et « suivent » les éléments auxquels ils appartiennent, comme vu en IV 2 ci-dessus.
- b) Mais on impose également, et cela est essentiel, que
- Les **bilans entrées/sorties** des flux d'information au niveau de chaque élément soient assurés.
 - La **conactance** soit invariante.

IV 4 Moyens pour y parvenir

a) Puisque les l_i , t_i^k et a_i^k doivent rester constants, le seul moyen de rétablir l'équilibre rompu et d'assurer les conditions du paragraphe IV 3 est la modification des flux d'information provenant de l'extérieur, les f_k^i et les s_i .

➤ Ainsi les f_k^i deviennent $(f_k^i + \Delta f_k^i)$

les s_i deviennent $(s_i + \Delta s_i)$

➤ C'est ce que nous pouvons appeler un *changement de jauge* des flux d'information générés par le champ d'information extérieur.

Et nous sommes ainsi amenés à dire, par assimilation, que **ce champ d'information est un champ de jauge**.

b) Ainsi, pour conserver l'invariance de la conactance et les bilans des flux, la **transformation de symétrie** à prendre en compte se compose :

▪ du **Groupe des permutations**

▪ **accompagné de façon concomitante par un changement de jauge simultané des f_k^i et des s_i .**

c) La connexion du réseau libre à un champ d'information externe peut s'interpréter de 2 manières :

▪ Physiquement, elle raccorde le réseau au champ externe qui lui impose les données dans la phase d'apprentissage.

▪ Mathématiquement, elle permet d'assurer, lors de la transformation de symétrie citée en IV 4 b, l'invariance de la conactance ainsi que les bilans des flux d'information aux bornes des éléments.

d) Ainsi des *termes de couplage* champ/réseau viendront s'insérer dans l'expression de la conactance.

IV 5 Détermination des Δf_k^i et des Δs_i

a) Conservation des bilans des flux entrée/sortie de chaque E_i .

➤ Avant transposition, à l'instant t , on a la système suivant : (avec $p = N_e + N_m + 1$)

$$\begin{aligned}
 (t_1^1 - 1)l_1 + \dots + t_1^i l_i + t_1^j l_j + t_1^k l_k + \dots + t_1^N l_N &= -f_1^1 a_1^1 - \dots - f_l^1 a_l^1 - \dots - f_{(n-N)}^1 a_1^{(n-N)} + t_1^p s_p + \dots + t_1^N s_N \\
 \dots &= \dots \\
 t_i^1 l_1 + \dots + (t_i^i - 1)l_i + t_i^j l_j + t_i^k l_k + \dots + t_i^N l_N &= -f_1^i a_1^1 - \dots - f_l^i a_l^1 - \dots - f_{(n-N)}^i a_i^{(n-N)} + t_i^p s_p + \dots + t_i^N s_N \\
 (4.1) \quad t_j^1 l_1 + \dots + t_j^i l_i + (t_j^j - 1)l_j + t_j^k l_k + \dots + t_j^N l_N &= -f_1^j a_1^1 - \dots - f_l^j a_l^1 - \dots - f_{(n-N)}^j a_j^{(n-N)} + t_j^p s_p + \dots + t_j^N s_N \\
 t_k^1 l_1 + \dots + t_k^i l_i + t_k^j l_j + (t_k^k - 1)l_k + \dots + t_k^N l_N &= -f_1^k a_1^1 - \dots - f_l^k a_l^1 - \dots - f_{(n-N)}^k a_k^{(n-N)} + t_k^p s_p + \dots + t_k^N s_N \\
 \dots &= \dots \\
 t_N^1 l_1 + \dots + t_N^i l_i + t_N^j l_j + t_N^k l_k + \dots + (t_N^N - 1)l_N &= -f_1^N a_1^1 - \dots - f_l^N a_l^1 - \dots - f_{(n-N)}^N a_N^{(n-N)} + t_N^p s_p + \dots + t_N^N s_N
 \end{aligned}$$

➤ Après transposition, seuls les f_k^i et les s_i ont changé et sont devenus $(f_k^i + \Delta f_k^i)$ et $(s_i + \Delta s_i)$, de façon à ce que ce système d'inconnues l_i donne les mêmes solutions pour les l_i .

On a alors, avec $n - N = q$

(4.2)

$$\begin{aligned}
 (t_1^1 - 1)l_1 + \dots + t_1^i l_i + t_1^j l_j + t_1^k l_k + \dots + t_1^N l_N &= -(f_1^1 + \Delta f_1^1) a_1^1 - \dots - (f_l^1 + \Delta f_l^1) a_l^1 - \dots - (f_q^1 + \Delta f_q^1) a_1^q + t_1^p (s_p + \Delta s_p) + \dots + t_1^N (s_N + \Delta s_N) \\
 \dots &= \dots \\
 t_j^1 l_1 + \dots + (t_j^i - 1)l_i + t_j^j l_j + t_j^k l_k + \dots + t_j^N l_N &= -(f_1^j + \Delta f_1^j) a_1^1 - \dots - (f_l^j + \Delta f_l^j) a_l^1 - \dots - (f_q^j + \Delta f_q^j) a_j^q + t_j^p (s_p + \Delta s_p) + \dots + t_j^N (s_N + \Delta s_N) \\
 t_i^1 l_1 + \dots + t_i^i l_i + (t_i^j - 1)l_j + t_i^k l_k + \dots + t_i^N l_N &= -(f_1^i + \Delta f_1^i) a_1^1 - \dots - (f_l^i + \Delta f_l^i) a_l^1 - \dots - (f_q^i + \Delta f_q^i) a_i^q + t_i^p (s_p + \Delta s_p) + \dots + t_i^N (s_N + \Delta s_N) \\
 t_k^1 l_1 + \dots + t_k^i l_i + t_k^j l_j + (t_k^k - 1)l_k + \dots + t_k^N l_N &= -(f_1^k + \Delta f_1^k) a_1^1 - \dots - (f_l^k + \Delta f_l^k) a_l^1 - \dots - (f_q^k + \Delta f_q^k) a_k^q + t_k^p (s_p + \Delta s_p) + \dots + t_k^N (s_N + \Delta s_N) \\
 \dots &= \dots \\
 t_N^1 l_1 + \dots + t_N^i l_i + t_N^j l_j + t_N^k l_k + \dots + (t_N^N - 1)l_N &= -(f_1^N + \Delta f_1^N) a_1^1 - \dots - (f_l^N + \Delta f_l^N) a_l^1 - \dots - (f_q^N + \Delta f_q^N) a_N^q + t_N^p (s_p + \Delta s_p) + \dots + t_N^N (s_N + \Delta s_N)
 \end{aligned}$$

➤ On veut que les solutions, pour les l_i soient les mêmes pour le système (4.2) que pour le système (4.1). Or chaque valeur de solution de l_i est égale au rapport de 2 déterminants.

Donnons cette expression pour l_i .

➤ Avec (4.1) on obtient :

(4.3)

$$l_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_0} = \frac{\begin{vmatrix} (t_1^1 - 1) & \cdots - (f_1^1 a_1^1 + \cdots + f_l^1 a_1^l + \cdots + f_q^1 a_1^q - t_1^p s_p - \cdots - t_1^N s_N) & t_1^j & t_1^k & \cdots t_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_i^1 & \cdots - (f_1^i a_i^1 + \cdots + f_l^i a_i^l + \cdots + f_q^i a_i^q - t_i^p s_p - \cdots - t_i^N s_N) & t_i^j & t_i^k & \cdots t_i^N \\ t_j^1 & \cdots - (f_1^j a_j^1 + \cdots + f_l^j a_j^l + \cdots + f_q^j a_j^q - t_j^p s_p - \cdots - t_j^N s_N) & (t_j^j - 1) & t_j^k & \cdots t_j^N \\ t_k^1 & \cdots - (f_1^k a_k^1 + \cdots + f_l^k a_k^l + \cdots + f_q^k a_k^q - t_k^p s_p - \cdots - t_k^N s_N) & t_k^j & (t_k^k - 1) & \cdots t_k^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_N^1 & \cdots - (f_1^N a_N^1 + \cdots + f_l^N a_N^l + \cdots + f_q^N a_N^q - t_N^p s_p - \cdots - t_N^N s_N) & t_N^j & t_N^k & \cdots (t_N^N - 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_1^1 - 1) & \cdots t_1^i & t_1^j & t_1^k & \cdots t_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_i^1 & \cdots (t_i^i - 1) & t_i^j & t_i^k & \cdots t_i^N \\ t_j^1 & \cdots t_j^i & (t_j^j - 1) & t_j^k & \cdots t_j^N \\ t_k^1 & \cdots t_k^i & t_k^j & (t_k^k - 1) & \cdots t_k^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_N^1 & \cdots t_N^i & t_N^j & t_N^k & \cdots (t_N^N - 1) \end{vmatrix}}$$

➤ Avec (4.2) on obtient de même :

(4.4)

$$l'_i = \frac{\Delta'_i}{\Delta'_0} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cccc} (t_1^1 - 1) & \cdots - \left((f_1^1 + \Delta f_1^1) a_1^1 + \cdots + (f_l^1 + \Delta f_l^1) a_l^1 + \cdots + (f_q^1 + \Delta f_q^1) a_1^q - t_1^p (s_p + \Delta s_p) - \cdots - t_1^N (s_N + \Delta s_N) \right) & t_1^j & t_1^k & \cdots t_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_i^1 & \cdots - \left((f_1^j + \Delta f_1^j) a_i^1 + \cdots + (f_l^j + \Delta f_l^j) a_i^l + \cdots + (f_q^j + \Delta f_q^j) a_i^q - t_i^p (s_p + \Delta s_p) - \cdots - t_i^N (s_N + \Delta s_N) \right) & (t_i^j - 1) & t_i^k & \cdots t_i^N \\ t_j^1 & \cdots - \left((f_1^i + \Delta f_1^i) a_j^1 + \cdots + (f_l^i + \Delta f_l^i) a_j^l + \cdots + (f_q^i + \Delta f_q^i) a_j^q - t_j^p (s_p + \Delta s_p) - \cdots - t_j^N (s_N + \Delta s_N) \right) & t_j^j & t_j^k & \cdots t_j^N \\ t_k^1 & \cdots - \left((f_1^k + \Delta f_1^k) a_k^1 + \cdots + (f_l^k + \Delta f_l^k) a_k^l + \cdots + (f_q^k + \Delta f_q^k) a_k^q - t_k^p (s_p + \Delta s_p) - \cdots - t_k^N (s_N + \Delta s_N) \right) & t_k^j & (t_k^k - 1) & \cdots t_k^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_N^1 & \cdots - \left((f_1^N + \Delta f_1^N) a_N^1 + \cdots + (f_l^N + \Delta f_l^N) a_N^l + \cdots + (f_q^N + \Delta f_q^N) a_N^q - t_N^p (s_p + \Delta s_p) - \cdots - t_N^N (s_N + \Delta s_N) \right) & t_N^j & t_N^k & (t_N^N - 1) \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccccc} (t_1^1 - 1) & \cdots t_1^i & t_1^j & t_1^k & \cdots t_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_i^1 & \cdots t_i^i & (t_i^j - 1) & t_i^k & \cdots t_i^N \\ t_j^1 & \cdots (t_j^i - 1) & t_j^j & t_j^k & \cdots t_j^N \\ t_k^1 & \cdots t_k^i & t_k^j & (t_k^k - 1) & \cdots t_k^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_N^1 & \cdots t_N^i & t_N^j & t_N^k & \cdots (t_N^N - 1) \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Pour que le système (4.2) donne les mêmes solutions que le système (4.1) il faut que $\frac{\Delta'_i}{\Delta'_0} = \frac{\Delta_i}{\Delta_0}$

Ou encore

$$(4.5) \quad \Delta'_i \Delta_0 = \Delta_i \Delta'_0$$

Cela donne une équation linéaire dont les inconnues sont les Δf_k^i et les Δs_k .

Il y a : N **équations** (autant que de l_i)

et $(n-N)N + N_s$ **inconnues** (les Δf_k^i + les Δs_k)

b) Conservation de la conactance.

- Avant transposition, à l'instant t , la conactance est :

$$C(t) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{i=N} \left[\sum_{k=1}^{k=n-N} f_k^i a_i + \sum_{k=1}^{k=N} l_k t_i - \sum_{k=(N_e+N_m+1)}^{k=N} s_k t_i \right] dt$$

- Après transposition, cette expression devient :

$$C'(t) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{i=N} \left[\sum_{k=1}^{k=n-N} (f_k^i + \Delta f_k^i) a_i + \sum_{k=1}^{k=N} l_k t_i - \sum_{k=(N_e+N_m+1)}^{k=N} (s_k + \Delta s_k) t_i \right] dt$$

- Les termes en $l_k t_i$ restent identiques.
- Si on fait $C(t) = C'(t)$, il restera :

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{k=1}^{k=n-N} \Delta f_k^i a_i - \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{k=(N_e+N_m+1)}^{k=N} \Delta s_k t_i = 0 \quad \text{qui est une équation linéaire dont}$$

les inconnues sont les Δf_k^i et les Δs_k .

Soit 1 équation

et $(n-N)N + N_s$ **inconnues**

c) Au total, pour déterminer les Δf_k^i et les Δs_k , on aura, d'après a) et b), un système à

$(N+1)$ équations

et $(n-N)N + N_s$ **inconnues**

- Pour que le système soit soluble, il suffit que

$$(4.7) \quad (n-N)N + N_s \geq (N+1)$$

Ce qui est pratiquement réalisé dès que $n \geq N+1$

IV 6 Remarques

a) Le changement de jauge, qui se réalise par l'intermédiaire des Δf_k^i et des Δs_k , **dépend de la transposition effectuée. Elle accompagne cette dernière.**

- Les valeurs des Δf_k^i et des Δs_k sont déterminées à un nombre de degrés de liberté près d avec :

$$(4.8) \quad d = (n - N)N + N_s - N - 1$$

- Ce qui veut dire qu'à travers ces degrés de liberté, donc du choix arbitraire de d valeurs de Δf_k^i ou Δs_k , on peut générer une infinité de solutions pour les Δf_k^i et les Δs_k sans que la conactance et les bilans de flux d'information soient changés : On a là une forme d'indépendance de jauge pour la théorie.

b) Permutations.

- Une permutation peut être vue comme un produit de transpositions ou comme l'action de transpositions successives.

- Si une permutation P est la succession des transpositions $T_1 \cdots T_i T_j T_k \cdots T_p$, soit $P = T_1 \otimes \cdots \otimes T_i \otimes T_j \otimes T_k \otimes \cdots \otimes T_p$, le changement de jauge ${}^j \Delta f_j^i$, lorsqu'on fera la transposition T_j , sera calculé en partant de l'état de f_j^i résultant de la transposition précédente $T_i T_i$ et on peut remonter de proche en proche.

- Si l'état avant permutation est par exemple f_j^i on a :

$$\begin{aligned} \text{Après } T_1 & \quad (f_j^i + {}^1 \Delta f_j^i) \\ \text{Après } T_2 & \quad (f_j^i + {}^1 \Delta f_j^i) + {}^2 \Delta f_j^i \\ & \quad \dots\dots\dots \\ \text{Après } T_j & \quad (f_j^i + {}^1 \Delta f_j^i + {}^2 \Delta f_j^i + \dots + {}^i \Delta f_j^i) + {}^j \Delta f_j^i \\ \text{Après } T_p & \quad (f_j^i + {}^1 \Delta f_j^i + {}^2 \Delta f_j^i + \dots + {}^j \Delta f_j^i + \dots + {}^p \Delta f_j^i) \end{aligned}$$

Ce qui donne, pour une permutation P , les valeurs résultantes des Δf_j^i et des Δs_i .

$$(4.9) \quad {}^P \Delta f_j^i = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \alpha \Delta f_j^i$$

IV 7 Expression de la conactance

a) Nous reprenons l'expression du paragraphe IV.5b pour laquelle nous prendrons pour origine des temps $t_0 = 0$, instant où le réseau est connecté au champ extérieur. Par ailleurs, nous pouvons également considérer que la conactance acquise par le réseau libre, avant connexion, est nulle si l'on considère la « finalité » du réseau connecté.

$$(4.10) \quad C(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{i=N} \left[\sum_{k=1}^{k=n-N} f_k^i \cdot a_i^{k2} + \sum_{k=1}^{k=N} l_k \cdot t_i^{k2} - \sum_{k=(N_e+N_m+1)}^{k=N} s_k \cdot t_i^{k2} \right] dt$$

b) Cette expression se compose de 3 types de termes.

- Termes de type A : $C_{ik}^A = \int_0^t f_k^i \left(\dot{a}_i^k \right)^2 dt$ dans lequel f_k^i est une constante et a_i^k une fonction de t à déterminer.
- Termes de type B : $C_{ik}^B = \int_0^t l_k \left(\dot{t}_i^k \right)^2 dt$ dans lequel l_k et t_i^k sont des fonctions de t à déterminer.
- Termes de type C : $C_{ik}^C = \int_0^t s_k \left(\dot{t}_i^k \right)^2 dt$ dans lequel s_k est une constante et t_i^k une fonction de t à déterminer.

c) $C(t)$ est une **somme** (additivité des intégrales) d'un grand nombre de termes.

C'est « l'équation caractéristique » du réseau, ou encore sa « **fonction de Lagrange** »

IV 8 Equations de Lagrange. Détermination des fonctions $a_i^k(t)$, $t_i^k(t)$, $l_k(t)$.

a) Pour chacune des fonctions à déterminer, on fait intervenir son *équation de Lagrange*.

Si $f(t)$ est cette fonction, on doit avoir :

$$(4.11) \quad \frac{\partial C}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial C}{\partial \dot{f}} = 0 \quad \text{avec} \quad \dot{f} = \frac{df}{dt}$$

b) On calcule donc cette expression pour chacune des fonctions $a_i^k(t)$, $t_i^k(t)$, $l_k(t)$, en tenant compte du fait que $C(t)$ se compose de termes pouvant contenir, pour un certain nombre, la même fonction. Les opérations de dérivation étant additives, il suffira d'additionner les contributions de chacun des termes impliqués.

c) L'équation de Lagrange comprend 2 termes : l'un relatif à $f(t)$, l'autre à $\dot{f}(t)$.

Si l'un de ces termes est absent de l'expression de $C(t)$, le terme correspondant de l'équation de Lagrange est nul. Par exemple, si $f(t)$ n'apparaît pas explicitement dans $C(t)$, l'équation de

Lagrange se réduit à $\frac{d}{dt} \frac{\partial C}{\partial \dot{f}(t)} = 0$

De même, si $\dot{f}(t)$ n'apparaît pas, elle se réduit à $\frac{\partial C}{\partial f(t)} = 0$

Par la suite, nous n'avons donc calculé que les termes des équations de Lagrange qui subsistaient.

d) Expression des équations de Lagrange.

Après calculs détaillés dont le principe est donné dans la **Note [6]**, les fonctions à déterminer satisfont aux équations de Lagrange ci-après :

- Fonctions $l_k(t)$

[Des termes type B]

(4.12)

$$\frac{\partial C}{\partial l_k} = \sum_{i=1}^{i=N} \int_0^t \frac{\dot{t}_i}{\dot{l}_k} \left[2l_k \ddot{t}_i + \dot{l}_k \dot{t}_i \right] dt = 0$$

Il y a N équations de ce type.

- Fonctions $t_i^k(t)$

[Des termes type B et C]

(4.13)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial C}{\partial t_i} = \frac{\dot{t}_i}{\ddot{t}_i} \left[2l_k \ddot{t}_i + \dot{l}_k \dot{t}_i \right] = 0$$

Il y a N^2 équations de ce type.

(4.14)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial C}{\partial t_i} = 2s_k \dot{t}_i = 0$$

Il y a $N(N - N_e - N_m)$ équations de ce type.

- Fonctions $a_i^k(t)$

[Des termes type A]

(4.15)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial C}{\partial a_i} = 2f_k^i \dot{a}_i = 0$$

Il y a $N(n - N)$ équations de ce type.

e) Commentaires sur ces équations.

- Fonctions $a_i^k(t)$.

(4.15) donne $a_i^k = \text{Constante}$

Les a_i^k sont en fait des constantes. Quelle est leur valeur ? Nous pouvons supposer que c'est celle qu'ils avaient au moment $t=0$ où le réseau a été connecté sur l'extérieur.

Remarque : Il est curieux et intéressant de noter que dans une autre voie d'approche du problème qui a été abandonnée, une des conditions était que les a_i^k soient constants....

- Fonctions $t_i^k(t)$. Pour $i=1$ à N et $k=(N_e + N_m + 1)$ à N

(4.14) donne $t_i^k = \text{constante}$

Ici aussi on peut penser que la valeur de ces t_i^k est celle qu'ils avaient au moment où le réseau a été connecté à l'extérieur. Ces éléments des *fonctions de transfert* reçoivent des signaux provenant de l'extérieur (les s_k ou les l_k qui émettent vers l'extérieur).

D'où l'on peut émettre l'hypothèse suivante :

Les composantes a_i^k et t_i^k des fonctions de transfert qui reçoivent des signaux d'information imposés par l'extérieur ou transférés vers l'extérieur sont des constantes dont la valeur est celle qu'elles avaient au moment de la connexion.

- Il reste à résoudre les équations (4.12) et (4.13)

Dans le cas où les l_k et les \dot{t}_i^k ne sont pas des constantes, le terme $\dot{t}_i^k \left[2l_k \ddot{t}_i^k + \dot{l}_k \dot{t}_i^k \right]$ figurant dans (4.13) se retrouve sous le signe intégrale de (4.12); autrement dit, si les équations (4.13) sont satisfaites, les équations (4.12) le sont automatiquement.

Résoudre le système d'équations (4.12) et (4.13) revient finalement à résoudre uniquement le système (4.13).

- Par ailleurs, les solutions des équations (4.14) satisfont les équations (4.13) car $\dot{t}_i^k = 0$.

- Enfin, les l_k peuvent être déterminés en fonction des t_i^k , des a_i^k , des f_k^i et des s_i [voir (4.3)], par le rapport de 2 déterminants :

$$(4.16) \quad l_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_0}$$

f) Approches possibles pour la résolution des équations (4.13).

- Ces équations sont du type $2x \ddot{y} + \dot{x} \dot{y} = 0$ x et y étant des fonctions de la variable t ,

$$\text{Avec } \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

- Ce type d'équation peut s'écrire sous une forme apparemment plus simple, après intégration et passage par les logs

$$x = \frac{K}{\dot{y}^2} \quad K \text{ étant une constante par rapport au temps } t, \text{ à déterminer par les conditions aux limites.}$$

Ce qui donne, en revenant aux notations habituelles :

$$(4.17) \quad l_k = \frac{K_{ik}}{\dot{t}_i^{k2}}$$

- Compte tenu de (4.16), on peut écrire :

$$(4.18) \quad \Delta_k \dot{t}_i^{k2} = \Delta_0 K_{ik} \quad \text{qui peut être considérée comme}$$

l'équation type du système à résoudre.

- Qu'obtient-on si on développe (4.18) ?

Après des calculs assez fastidieux (et s'il n'y a pas d'erreur !...), on obtient une expression de la forme :

$$(4.19) \quad \left[\sum f_q^j a_j^q \left[\left(t_{m_1}^{n_1} \cdots t_{m_{(N-1)}}^{n_{(N-1)}} \right) + \left(t_{p_1}^{q_1} \cdots t_{p_{(N-2)}}^{q_{(N-2)}} \right) \right] - \sum t_j^l S_l \left[\left(t_{m_1}^{n_1} \cdots t_{m_{(N-1)}}^{n_{(N-1)}} \right) + \left(t_{p_1}^{q_1} \cdots t_{p_{(N-2)}}^{q_{(N-2)}} \right) \right] \right] \cdot t_i^{k2}$$

$$= K_{ik} \left[\sum \left(t_{m_1}^{n_1} \cdots t_{m_N}^{n_N} \right) + \sum \left(t_{p_1}^{q_1} \cdots t_{p_{(N-1)}}^{q_{(N-1)}} \right) \right]$$

On aboutit donc à un système d'équations différentielles extrêmement complexe et il n'est pas du tout certain que l'on possède les outils mathématiques pour les résoudre.

Pourraient-elles représenter les équations **d'attracteurs** ?

g) Constantes d'intégration ; conditions aux limites.

En supposant les équations résolues, les constantes d'intégration seront déterminées par les conditions aux limites, c'est-à-dire initiales et finales de l'apprentissage.

- Pour $t=0$ on connaît les $a_i^k(0)$ et les $t_i^k(0)$
- Pour $t=t_f$ on a, pour les éléments de sortie, $l_k = s_k$

Et, par ailleurs, les $a_i^k(t_f) = a_i^k(0)$ et, pour $(N_e + N_s + 1) \leq k \leq N$, $t_i^k(t_f) = t_i^k(0)$

IV 9 Compléments sur une structure possible des solutions des l_k et des t_i^k .

a) Lorsque l'apprentissage du réseau, pour les entrées f_k^i imposées et les sorties s_k imposées, est terminé, il faut que, **dans le futur**, lorsque **ces mêmes entrées** f_k^i seront connectées au réseau, **les sorties l_k des éléments de sortie deviennent le plus rapidement possible égales aux s_k** .

Il y a donc une **fonction mémoire** à introduire dans l'expression des l_k de sortie.

b) D'autre part, et ceci par observation du cerveau, réseau le plus perfectionné, il faut que des connexions peu utilisées, c'est-à-dire véhiculant un faible flux d'information, tendent à ne plus être prises en compte ; cela peut se faire en **affaiblissant** les t_i^k auxquelles elles aboutissent.

Il y a donc une **fonction affaiblissement** à introduire dans l'expression des t_i^k .

c) Fonction mémoire.

▪ Si on fait l'hypothèse que les l_k sont de la forme $l_k = qv(t)$, on peut faire dépendre q (appelée ici **amplitude de l_k**) de

➤ la somme des f_k^i qui ont servi à l'apprentissage, ces f_k^i étant normés (valeur comprise entre 0 et 1)

➤ le s_k , valeur finale que doit prendre le l_k de sortie le plus rapidement possible. (Pour les éléments qui ne sont pas dits « de sortie », les $s_k = 0$)

➤ ainsi les l_k seraient de la forme :

$$(4.20) \quad l_k(t) = s_k e^{-\sum |f_k^i - a f_k^i| v(t)}$$

où f_k^i sont les valeurs réelles des entrées et ${}_a f_k^i$ sont celles imposées lors de l'apprentissage.

En effet : **1/** Si les mêmes connexions f_k^i que lors de l'apprentissage sont excitées et avec les mêmes valeurs que lors de cet apprentissage, tous les termes $|f_k^i - {}_a f_k^i|$ sont nuls, $e^{-\sum} = e^0 = 1$ et l'amplitude de l_k prend la valeur s_k .

2/ Si les mêmes connexions f_k^i que lors de l'apprentissage sont excitées mais avec des valeurs différentes que lors de cet apprentissage, les $|f_k^i - {}_a f_k^i|$ ne sont pas nuls ; \sum est une somme de valeurs positives, $-\sum$ est négatif et $e^{-\sum} < 1$. Ce $e^{-\sum}$ est d'autant plus petit que les écarts entre les f_k^i et les ${}_a f_k^i$ sont plus grands.

3/ Si d'autres f_k^i sont excités, ils ne sont pas pris en compte dans l'expression de \sum .

4/ Si une partie seulement des f_k^i de l'apprentissage sont excités, le \sum est différent de 0, car ceux non excités donnent des termes non nuls ; $|0 - {}_a f_k^i| = {}_a f_k^i$ et $e^{-\sum} < 1$

- Quelle pourrait être la forme de $v(t)$?

Pour les éléments de sortie, il faut qu'au temps $t = t_f$ on ait $l_k = s_k$. D'où

$$s_k = s_k e^{-\sum |f_k^i - {}_a f_k^i|} v(t_f) \quad \text{ce qui impose que } v(t_f) = 1$$

D'autre part, à partir de l'instant $t=0$ où l'on connecte le réseau, qui a déjà fait son apprentissage, t va croître jusqu'à t_f pour avoir $l_k = s_k$ (cette égalité pouvant éventuellement être atteinte pour $t \leq t_f$), mais il faut, pour éviter des valeurs de l_k tendant vers l'infini, que l_k reste bornée à la valeur s_k . Cette condition évoque **l'échelon d'Heavyside** ou un autre type de **distribution**.

d) Fonction affaiblissement.

- Tout t_i^k reçoit l'information l_k et la transforme (agit en opérateur sur l_k).

Lorsque l'information transférée par l_k s'affaiblit au cours du temps et à la limite peut devenir nulle, nous voulons que t_i^k devienne inopérant (équivalence avec des synapses désactivées).

- Si on suppose que t_i^k est de la forme $t_i^k = pu(t)$, on peut faire l'hypothèse que l'amplitude p est égale ou proportionnelle à la *valeur moyenne* de l_k .

A l'instant t cette dernière est : $\langle l_k \rangle_0^t = \frac{1}{t} \int_0^t l_k dt$

D'où **(4.21)** $t_i^k(t) = \frac{T_{ik}}{t} \left[\int_0^t l_k dt \right] u(t)$ T_{ik} étant une constante de

normalisation.

- Pour une valeur quelconque de t , les deux termes précédant $u(t)$ restent finis ; il faut donc, pour éviter les infinis, que $u(t)$ soit une fonction bornée, comme $v(t)$

CHAPITRE V POINTS DE LA THEORIE EXPOSEE A APPROFONDIR

Dans le cadre des choix faits dans la théorie telle qu'exposée, il reste à approfondir un certain nombre de points. Ils sont listés ci-après.

V 1 Equations aux dimensions/ Homogénéité/Unités de mesure.

▪ Les l_k , les f_k^i et les s_k sont des *flux d'information*. En quelle unité les exprimer ? En *bits* de base 0 et 1 ? Ou bien en unités d'*entropie* ? **Voir à ce sujet la note [2]**

▪ Les t_i^k et les a_i^k jouent le rôle d'opérateurs ; ils sont donc en principe sans dimensions. Mais comme ils participent, sous forme de leurs dérivées premières ou secondes par rapport au temps, aux équations différentielles du paragraphe **IV. 8d**, dans lesquelles ils sont imbriqués aux l_k , f_k^i , s_k et leurs dérivées, il faut que ces équations aient une forme homogène et que les différents termes aient la *même dimension*.

Par exemple, dans l'équation **(4.12)** le terme $l_k \overset{..k}{t}_i$ doit avoir la même dimension que $\overset{\cdot}{l}_k \overset{\cdot k}{t}_i$.

Or, que signifient $\overset{\cdot}{l}_k$, dérivée par rapport au temps d'une entropie, par exemple, et $\overset{..k}{t}_i$, dérivée seconde de l'opérateur t_i^k ?

V 2 Résolution possible des équations de Lagrange du paragraphe IV.8d.

▪ A priori, ces équations sont très complexes et difficiles à résoudre ; leurs solutions représentent-elles des équations d'*attracteurs* ?

▪ Nous avons émis des idées générales, **des pistes possibles** sur la structure des solutions, en essayant de prendre en compte le **comportement futur** du réseau, une fois l'apprentissage terminé (**fonction mémoire** résultant de l'apprentissage et **affaiblissement** des connexions peu utilisées).

▪ Mais nous n'en sommes restés qu'à des généralités : aller plus loin supposerait **l'étude de ces équations par de bons mathématiciens**.

V 3 Simulation informatique

Une simulation du comportement du réseau, basée sur les équations du paragraphe **IV.8d**, permettrait peut-être à des informaticiens (ou des mathématiciens ou des cognitivistes), sur un **cas simple**, de tester la validité de ces mêmes équations du comportement, et surtout de voir si, pour des conditions initiales données, le **système converge bien vers les valeurs de s_k** de fin d'apprentissage.

V 4 Champ de jauge à inclure dans l'expression de la conactance .

- La conactance est composée de *termes de couplage* entre le réseau (les t_i^k et les a_i^k) et le champ d'information (par l'intermédiaire des f_k^i et des s_k).
- Peut-être faudrait-il **ajouter un terme concernant le champ d'information seul**, sachant que l'information entrante véhiculée par l'ensemble des f_k^i est égale à celle imposée en sortie sous une autre forme par les s_k .

CHAPITRE VI AUTRES VOIES POSSIBLES DE RECHERCHE

Nous sommes bien conscient que certains trouveront tout ce qui précède, comment dire...un peu farfelu. Eh bien, assumons cette appréciation jusqu'au bout et faisons part ici d'idées, aussi bizarres qu'elles puissent paraître, concernant des voies possibles de recherche.

VI 1 Quelle est la finalité de ce genre de recherches ?

- Certes, il est intéressant de savoir comment évolue un réseau pendant sa phase d'apprentissage ; il est également utile de savoir qu'une fois ce stade terminé, soumis à un certain ensemble de stimuli, ce réseau restituera en sortie les mêmes informations : c'est précisément le but de l'apprentissage.

Ces capacités pourront ainsi être utilisées pour résoudre des problèmes pratiques, tels la *Reconnaissance de formes* par exemple.

- Mais si nous nous intéressons au fonctionnement du réseau que l'on peut considérer comme le plus complexe, à savoir le cerveau, un des problèmes principaux à résoudre est probablement celui du couplage, de l'interaction, de plusieurs réseaux entre eux.

- Nous scinderons donc en 2 parties les voies possibles de recherche

- celles concernant un réseau seul (en phase d'apprentissage ou en « utilisation » après cette phase).

- celles relatives au couplage de plusieurs réseaux.

VI 2 Autres voies possibles de recherche concernant un seul réseau.

a) Dans tout l'exposé précédent nous avons caractérisé le réseau par sa *fonction caractéristique*, grandeur que nous avons appelée *conactance*, et par l'invariance par rapport au groupe de transformations de symétrie que sont les *permutations*.

b) Mais on peut évidemment imaginer une autre théorie, traitée suivant le même principe et le même formalisme, dans laquelle la conactance serait remplacée par une autre grandeur (à imaginer) qui caractériserait mieux le réseau et les permutations par d'autres transformations de symétrie, continues celles- la, qui laisseraient invariante la grandeur remplaçant la conactance.

De même, il serait judicieux de parfaire l'analogie avec le formalisme de la Physique quantique en introduisant les notions de Vecteur d'état, d'observables, d'invariants....

c) Passons en revue différentes idées :

- **Vecteur d'état.**

➤ On peut suggérer un vecteur à N [voir **(6.3) ci-après**] composantes qui seraient des fonctions des l_i , N devant normalement dépendre du groupe de transformations de symétrie laissant la

conactance invariante.

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Psi_1 \\ \cdot \\ \Psi_i \\ \cdot \\ \Psi_N \end{vmatrix}$$

➤ Mais on a vu que les l_i dépendaient de la position de l'élément E_i par rapport à celles des autres éléments. Si on choisit une configuration de référence, toutes les autres configurations possibles seront obtenues par les permutations possibles qui sont au nombre de $N!$ Il faut donc préciser la configuration α dans laquelle on se place par un **indice** indiquant la permutation correspondante ; le vecteur d'état s'écrira Φ_α .

Lorsque le réseau reçoit des stimuli d'entrée identiques à ceux qui lui ont été imposés pendant la phase d'apprentissage, les composantes Ψ_i de Φ_α prennent les valeurs qu'elles avaient acquises à la fin de cet apprentissage. Mais si ces stimuli varient peu par rapport à ceux imposés lors de l'apprentissage, on peut scinder Φ_α en une somme de 2 termes, l'un Φ_{α_0} correspondant aux sorties de fin d'apprentissage, et l'autre Ψ_α correspondant aux variations engendrées. (Détermination par un *calcul des variations* ?)

$$\text{On a alors : } \Phi_\alpha = \Phi_{\alpha_0} + \Psi_\alpha$$

▪ **Observables et Invariants.**

➤ **La conactance** (ou toute autre expression formant l'équation caractéristique du réseau)

Nous avons travaillé sur une approche s'appuyant sur les travaux de **G. Edelman [11]**. L'équation caractéristique du réseau (la *densité lagrangienne*) est alors son **entropie statistique**. Les relations d'information sont caractérisées par ce qu'Edelman appelle des *informations mutuelles* et il introduit également la notion de *complexité neuronale*. Nous n'avons pas poursuivi dans cette voie--à tort probablement--, notamment parce que la prise en compte des probabilités rendait les équations très complexes, **mais il est possible que ce soit une voie très féconde qu'il conviendrait d'approfondir ; d'autant plus qu'intuitivement, étant donné le grand nombre d'éléments E_i concernés, un formalisme faisant intervenir des probabilités nous paraîtrait particulièrement adapté.**

Est-il possible de quantifier la *conactance*, comme l'est l'observable *énergie* par exemple ?

La conactance étant exprimée en unités d'information, est-ce que le **bit** d'information pourrait être le **quantum de conactance** ?

➤ **Repérage des éléments du réseau.** Jusqu'ici nous avons positionné les éléments les uns par rapport aux autres ; comme il y a $N!$ permutations possibles, cela oblige à préciser dans quelle configuration on se place par rapport à une configuration de départ par un indice α . On passe d'un indice α à un indice β par une *permutation*. Le groupe des permutations est donc un groupe de transformations de symétrie pour le réseau.

Remarque : Multiplets. Les éléments du réseau sont semblables (ils ont une même structure générale) mais en même temps ils sont différents et individualisés (paramétrage différent des caractéristiques). Par ailleurs, quelle que soit la position relative des éléments les uns par rapport aux autres (ou quel que soit l'indice de permutation α) **au départ**, le réseau libre atteindra un équilibre, qui ne sera pas bien sûr le même que pour une autre configuration β ; de même, à la fin de la phase d'apprentissage, les flux d'information d'entrée et de sortie reliant le réseau à l'extérieur seront les mêmes quelle que soit la configuration de départ, mais les flux d'information internes ne seront pas identiques pour des configurations différentes.

Autrement dit, pour des configurations de départ différentes, le même but recherché sera atteint, mais avec des structures internes du réseau (les t_i^j et les l_i) différentes. Ceci incite à considérer l'ensemble de ces $N!$ configurations d'un réseau à N éléments comme un **multiplet ($N!$ -plet),** dont N serait l'invariant (le « *casimir* »)

➤ **Position des éléments du réseau dans l'espace physique habituel.** Nous avons déjà évoqué cette possibilité au paragraphe II 5. Outre qu'il conviendrait de bien définir quel est le point d'un élément E_i qui précise la position de l'élément, les équations de la théorie devraient être invariantes sous les transformations du groupe de Poincaré.

➤ **Flux d'information l_i**

Le réseau est caractérisé par un ensemble de termes $\mathbf{L} = \{l_1 \cdots l_i \cdots l_N\}$ qui peut être représenté sous forme de vecteur (mais encore faut-il s'assurer qu'il s'agit bien d'un vecteur...) ou de matrice ligne ou colonne.

Quel *opérateur* pourrait être associé à l'observable \mathbf{L} ? Il est curieux de constater qu'à tout instant, pour le réseau libre, du fait que ce dernier s'adapte en permanence, on a :

$$(6.1) \quad \begin{aligned} & t_1^1 l_1 + \cdots + t_1^i l_i + t_1^j l_j + \cdots + t_1^N l_N = l_1 \\ & \dots\dots\dots = \\ & t_i^1 l_1 + \cdots + t_i^i l_i + t_i^j l_j + \cdots + t_i^N l_N = l_i \\ & \dots\dots\dots = \\ & t_N^1 l_1 + \cdots + t_N^i l_i + t_N^j l_j + \cdots + t_N^N l_N = l_N \end{aligned}$$

Soit encore, si $|T| = \begin{vmatrix} t_1^1 & \cdots & t_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_N^1 & \cdots & t_N^N \end{vmatrix}$ et $|L| = \begin{vmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i \\ \vdots \\ l_N \end{vmatrix}$

$$(6.2) \quad |T| \bullet |L| = 1 |L|$$

Serait-ce une *équation aux valeurs propres* ? Dans ce cas, $|T|$ serait l'opérateur correspondant à l'observable \mathbf{L} et $|L|$ serait un *état propre* du réseau. [Rappelons que le *vecteur d'état* du réseau appartient à un espace vectoriel qui est le produit tensoriel des espaces vectoriels correspondant aux différentes observables constituant l'**ECOC** (Ensemble commun d'observables qui commutent) du système] $\mathcal{R} = \mathcal{C} \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{L} \otimes \dots$

\mathcal{L} étant l'espace de l'observable \mathbf{L} , dont la base choisie sert à déterminer les $|L|$.

Etant donné que les l_i , composantes de $|L|$, peuvent prendre des valeurs différentes, entraînant pour $|L|$ des valeurs différentes, cela signifie qu'il y a plusieurs *états propres* du réseau dans l'espace de l'observable \mathbf{L} (leur nombre étant d'ailleurs égal au nombre de vecteurs de base dans l'espace \mathcal{L}) ; pourquoi donc n'y aurait-il qu'une seule valeur propre égale à 1 pour tous ces états propres ? Que signifierait ce 1 ? A quel type de mesure correspondrait-il ?

Par ailleurs, si les $|L_k|$ constituent par exemple une base dans \mathcal{L} à p **dimensions**, comme ce sont des états propres du réseau, on peut écrire :

$$(6.3) \quad \Phi_\alpha = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_i \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=p} P_k \begin{pmatrix} l_{k1} \\ \vdots \\ l_{ki} \\ \vdots \\ l_{kN} \end{pmatrix} \quad P_k \text{ étant la } \underline{\text{probabilité}} \text{ qu'une mesure donne le}$$

résultat $|L_k|$

Chaque composante de Φ_α peut alors s'exprimer sous la forme

$$(6.4) \quad \Psi_i = \sum_{k=1}^{k=p} P_k l_{ki}$$

-- Si les l_i sont quantifiés, comme la conductance dans le cas où celle-ci le serait, l'équation (6.4) ci-dessus est valable, et chaque l_i peut s'écrire $l_i = n_i b$ n_i étant un nombre entier et b représentant le *quantum* d'information.

-- Si les l_i sont continus, on écrira

$$(6.5) \quad \Psi_i = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k l_{ki} dl_{ki}$$

➤ Les t_i^j sont-ils des observables ?

Théoriquement, on peut déduire leurs valeurs lorsqu'on connaît les l_i , les f_k^i et les s_k ; autrement dit, ils n'apportent rien de plus à la connaissance du réseau si on connaît ces 3 dernières grandeurs.

Signalons toutefois que la prise en compte de la notion d'entropie statistique chez Edelman conduit à une expression faisant intervenir les fonctions de transfert T_i des éléments, donc les t_i^j , sous forme de probabilités.

$S_i(t) = A \int p(T_i) \log p(T_i) dT_i$ où $S_i(t)$ est l'entropie statistique de l'élément E_i et $p(T_i)$ est la probabilité de la configuration T_i , qui s'exprime en fonction des t_i^j .

▪ « Equation de Shrödinger »

Si l'on connaissait l'équivalent du *hamiltonien* du réseau, on pourrait écrire une équation de Shrödinger qui donnerait l'évolution du **réseau libre**, jusqu'à ce qu'il atteigne son équilibre.

$$i\hbar \frac{d\Phi_\alpha}{dt} = R\Phi \quad \text{où } R \text{ serait cet « hamiltonien »}$$

VI 3 Autres voies de recherches concernant le couplage de plusieurs réseaux

▪ Prenons l'exemple du cerveau, puisque nous l'avons déjà évoqué. A tout moment, il reçoit une quantité énorme de stimuli, internes ou externes. Chaque type de stimulus est traité par un *sous réseau* particulier, qui élabore sa réponse en fonction de l'apprentissage qu'il a « subi ». Tous ces sous réseaux, correspondant aux divers stimuli, s'interconnectent entre eux pour générer ce qu'on appelle un *état de conscience*. Cette interconnexion est telle qu'elle assure une certaine cohérence, représentée par cet état de conscience.

▪ Ces *sous réseaux* ne sont autres que ce que les **réseaux ayant subi un apprentissage, tels que nous les avons étudiés jusqu'ici**. On voit donc l'importance de savoir comment évolue un ensemble de réseaux interconnectés. Nous pouvons supposer que si l'on sait comment évolue un ensemble de 2 réseaux interconnectés, on sera apte, par itération, à connaître l'évolution d'un nombre quelconque de réseaux couplés.

▪ **Interconnexion de 2 réseaux.**

➤ L'idée est de faire une analogie avec l'interconnexion de 2 particules, 2 électrons par exemple. La méthode consiste à évaluer, à partir de l'ensemble initial (les 2 électrons indépendants), la *probabilité* d'obtenir un ensemble final donné.

Pour cela, on figure, à l'aide des *diagrammes de Feynman*, les différentes configurations possibles d'émission et d'absorption des bosons vecteurs des forces d'interaction, ces configurations étant qualifiées de « 1^{er} ordre », « 2^{ème} ordre », etc..., en fonction du degré de précision que l'on veut obtenir.

Chaque émission ou absorption est figurée par un *vertex*, et le « parcours » d'une particule libre par une *ligne*. Essentiellement, la probabilité recherchée s'obtient en multipliant un certain nombre de termes, à savoir :

Les *propagateurs*, expressions mathématiques des lignes.

Les *courants, charges* (au sens le plus général) et *champs de jauge*, expressions mathématiques des vertex.

Exemple de calcul de probabilité $S_{se}^{(1)}$ d'un évènement:

$$S_{se}^{(1)} = -i \int dx^4 dy^4 q_f \overline{\Psi}_f(x) \gamma_\mu \Psi_i(x) \left[\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon} \right] q_F \overline{\Psi}_F(y) \gamma^\mu \Psi_I(y)$$

où le champ \tilde{A} est représenté par la multiplication de 3 termes de cette expression.

➤ Supposons donc que 2 réseaux se connectent entre eux, et essayons de voir quels pourraient être les termes correspondant à ceux du paragraphe ci-dessus.

Appelons R_1 et R_2 les 2 réseaux, Φ_1 et Φ_2 leurs vecteurs d'état, I_1 et I_2 les champs d'information extérieurs auxquels ils sont connectés.

--Les vecteurs d'état initiaux Ψ_i et Ψ_I seraient remplacés par Φ_{1i} et Φ_{2I} (états initiaux des 2 réseaux) et $\overline{\Psi}_f$ et $\overline{\Psi}_F$ par $\overline{\Phi}_{1f}$ et $\overline{\Phi}_{2F}$ (états finaux des 2 réseaux)

--Le champ électromagnétique sous jacent A serait remplacé par la réunion des 2 champs I_1 et I_2 , car en fait ils ne forment qu'un seul champ d'information, induisant des entrées différentes sur les 2 réseaux. ($I = I_1 \cap I_2$).

--La charge électrique, grandeur qui ne se manifeste qu'en présence d'un champ, serait remplacée par une grandeur à déterminer; ici, quelle pourrait-être la grandeur qui se manifeste en présence d'un champ d'information? Les I_i du réseau? Les flux d'information de sortie s_k ? Ou bien une combinaison de ces valeurs qui est égale à une constante?

➤ Mais il y a ici une difficulté majeure. Supposons en effet que nous possédions le formalisme mathématique permettant de calculer, à partir d'un état initial des 2 réseaux, la probabilité d'atteindre un état final donné. Nous ne sommes pas dans la même situation qu'en physique, où on connaît l'état final étudié. En effet, ici, **nous voulons savoir quel état final résulterait de l'interaction.**

Il faudrait donc envisager tous les états finaux possibles et attribuer à chacun sa probabilité d'advenir. Travail de titan compte tenu des états finaux possibles !...

➤ **Remarque** : Si cela se réalisait, on obtiendrait pour chaque état final sa probabilité d'occurrence. En transposant cela au cerveau, et compte tenu du nombre de réseaux couplés entre eux, **pour des stimuli identiques**, internes ou externes, **les états conscients résultants ne seraient pas déterminés**, étant donné qu'il faut raisonner en termes de **probabilités**. Cela rejoint le problème du libre arbitre, mais nous entrons là dans la philosophie, voire la métaphysique !....

CONCLUSION

▪ Dans cette étude, nous avons essayé de formuler une **Théorie des réseaux en phase d'apprentissage**, décrivant l'évolution des grandeurs qui caractérisent le réseau, à savoir les l_i et les t_i^k .

En reprenant une partie du formalisme des théories de jauge, qui se sont avérées très performantes dans la construction du modèle standard en physique des particules (principe de moindre action, invariance du Lagrangien par transformation de symétrie,...), nous avons établi une formulation mathématique de la théorie qui s'exprime essentiellement par un système d'équations différentielles du type [voir équation **(4.18)**]

$$\Delta_k t_i^k = \Delta_0 K_{ik}$$

- Δ_0 et Δ_k , eux-mêmes fonctions des t_i^k , étant les *déterminants* intervenant dans la résolution du système de Cramer exprimant, à l'instant t , le bilan des flux d'information autour de chaque élément du réseau.
- Mais, pour cela, nous avons fait intuitivement **deux hypothèses** :
 - L'une sur l'expression mathématique de la fonction caractéristique du réseau, que nous avons appelée **conactance**.
 - L'autre sur la nature de la transformation de symétrie, que nous avons assimilée au **groupe des permutations**.

Il est donc évident qu'en prenant des hypothèses différentes, **mais en s'appuyant toujours sur les bases des théories de jauge**, on aboutirait à une expression mathématique différente de la théorie.

▪ Par ailleurs, il nous semble que, compte tenu du nombre N d'éléments très grand que peut présenter un réseau, la théorie devrait avoir un **caractère statistique**. L'inconvénient possible étant que l'évolution globale statistique du réseau pourrait se faire au détriment de la connaissance de l'évolution de chaque élément particulier. De même une **approche probabiliste** (cf. Mécanique quantique) pourrait s'avérer fertile. En ce sens, la voie que nous avons évoquée s'appuyant sur les travaux de G. Edelman ' et qui reste creuser, nous paraît prometteuse.

▪ Quoi qu'il en soit, les voies à explorer ne manquent pas, y compris celle traitant du **couplage de réseaux**, que nous avons évoquée au chapitre VI.

Bien évidemment, nous n'oublions pas que toute théorie, pour être considérée comme valable, doit être *validée par l'expérience*.

C'est pourquoi, comme nous l'avons déjà évoqué dans l'avant-propos, **nous serions très intéressé à échanger sur ces questions avec les lecteurs éventuels de cette étude**. Nous les remercions par avance pour leurs apports sur les différents problèmes posés.

NOTES - COMMENTAIRES - DEMONSTRATIONS

Note [1] SOCIETES D'INSECTES

▪ On peut expliquer et modéliser le comportement d'une société d'insectes (fourmis, abeilles,...) en attribuant à chaque individu 2 ou 3 contraintes simples ; on retrouve le comportement du groupe, ainsi que les constructions réalisées par ce groupe qui pourtant n'a pas de chef. Voir [\[2\]](#)

▪ On part donc de lois locales régissant le comportement de chaque individu pour aboutir à une loi globale régissant le comportement du groupe.

Mais notre tentative, notre approche, est l'inverse :

Nous voulons partir d'une loi globale régissant l'évolution du groupe imposée par l'environnement, pour en déduire les lois locales régissant chaque individu.

[Retour page 5 : Introduction](#)
[Retour page 6 : Chapitre 1 paragraphe 3 : Exemples de réseaux et de leurs finalités objectives](#)

Note [2] UNITES DE CONACTANCE, DE FLUX D'INFORMATION

1) Remarque préliminaire—Vocabulaire.

▪ Les divers documents concernant la *Théorie de l'information* considèrent la quantité d'information apportée à un récepteur qui reçoit un message. Cette quantité d'information est ce que nous appelons dans l'exposé *conactance* (ou plus généralement une connaissance).

▪ Pour des raisons de cohérence de vocabulaire, nous remplacerons le terme *quantité d'information* habituellement utilisé par celui de *conactance*. (Voir **Note [4]** sur la raison du choix de ce mot)

2) Quelques rappels sur la Théorie de l'information (Résumé)

▪ Les différents ouvrages n'utilisant pas tous les mêmes définitions, nous prendrons en compte celles qui semblent les plus communément admises.

▪ **Message** : C'est une suite de symboles tirés d'un alphabet.

▪ **Conactance apportée par un message** :

$$C_m = -\log_{\alpha} p_m \quad \text{avec} \quad p_m : \text{probabilité d'occurrence du message}$$

$$\log_{\alpha} : \text{log de base } \alpha \quad \rightarrow [\log_{\alpha} \alpha = 1]$$

○ **Entropie d'une source émettant des messages.**

→ Cas discret : $H_s = -\sum_m p_m \log(p_m)$ m étant à sommer pour tous les

messages possibles que peut émettre la source.

→ Cas continu : $H_s = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x) dx$ x étant la variable continue de codage.

L'entropie est donc la quantité moyenne de conactance que peut fournir un message.

▪ **Unités de conactance** :

→ Elles dépendent de la base de logarithmes choisie.

→ Pour une base de logarithmes α [soit $\log_{\alpha}(\alpha) = 1$], la valeur de l'unité de conactance est celle d'un message de probabilité $\frac{1}{\alpha}$.

→ Pour $\alpha = 2$ (habituellement utilisé) l'unité de conactance est le *bit* ou le *shannon*. C'est la quantité de conactance portée par le résultat du jeu de pile ou face.

→ Pour $\alpha = 10$, l'unité est le *décit* ou le *hardley*.

→ Pour $\alpha = e$ (logs népériens), l'unité est le *nat*.

▪ On passe d'une conactance exprimée en unités de \log_{α} à la même conactance exprimée en \log_{β} par la formule : $C_{\alpha}(x) = C_{\beta}(x) \log_{\alpha}(\beta)$

▪ Rappelons que la Théorie de l'information ne traite que des *quantités* de conactance, mais ne précise pas le *sens* de la conactance.

3) Conactance apportée par un message composé de caractères i d'un alphabet.

▪ Cas discret : $C_m = \sum_i C_i = -\sum_i \log_{\alpha}(p_i)$ p_i étant la probabilité d'apparition du caractère i .

▪ Cas continu : Par analogie nous dirons :

$C_m = -\int_a^b \log p(x) dx$ x étant la variable continue variant entre a et b et constituant l'alphabet.

4) Flux d'information

Définition : C'est, à un coefficient près, la quantité de conactance apportée divisée par le temps pendant laquelle elle a été transmise (quantité de conactance par unité de temps).

Flux d'information moyen :

Si un message, dont la durée de transmission est Δt_m , a apporté un accroissement de conactance de ΔC_m , le flux moyen d'information est :

○ Cas discret : $F_M = k_0 \frac{\Delta C_m}{\Delta t_m} = -\frac{k_0}{\Delta t_m} \sum_i \log_{\alpha}(p_i)$ avec i sommé sur tous les caractères de l'alphabet présents dans le message et $p_i =$ probabilité d'apparition du caractère i .

○ Cas continu : $F_M = -\frac{k_0}{\Delta t_m} \int_a^b \log p(x) dx$

▪ **Flux d'information à l'instant t** :

○ Ce sont les l_i de l'exposé.

○ Un message demande un certain temps pour être transmis complètement. Mais au fur et à mesure que les caractères qui le composent arrivent les uns après les autres, l'accroissement de conactance qu'il apporte est pratiquement continu (les paliers, dans le cas discret, correspondent au temps de transmission d'un caractère). Ceci résulte de la sommation \sum_i ou \int_a^b .

A un instant t , dans un canal de liaison reliant l'émetteur au récepteur, un message quelconque est en cours de transfert, et l'accroissement de conactance du récepteur, depuis le début d'émission du message, soit $\Delta C(t)$, se situe entre 0 et ΔC_m (ΔC_m étant l'accroissement total de conactance du récepteur lorsque la totalité du message a été transmise).

$\Delta C(t)$ est une **fonction continue** du temps t .

Par définition, le flux d'information à l'instant t est, à un coefficient près, la **dérivée de la conactance par rapport au temps**, soit $F(t) = k_0 \frac{dC(t)}{dt}$

Le coefficient k_0 correspond aux $\frac{1}{t_i^k}$ de l'exposé, supposés constants pendant l'intervalle de temps $[t, (t+dt)]$

$F(t)$ est l'analogie d'une vitesse.

➤ On voit ainsi que la quantité de conactance apportée par le message est, si k_0 est considéré constant pendant toute la durée de ce dernier :

$$\Delta C_m = \frac{1}{k_0} \int_0^{\Delta t_m} F(t) dt = \frac{1}{k_0} \int_0^{\Delta t_m} k_0 \frac{dC}{dt} dt = C(\Delta t_m)$$

➤ **Remarque** : Il ne faut pas confondre le flux d'information à l'instant t , qui est, à un facteur de proportionnalité près, la dérivée de la conactance par rapport au temps, et la dérivée par rapport au temps du signal support de ce flux d'information.

Par exemple, si le signal support est une intensité électrique sinusoïdale, de fréquence donnée, ce signal a à chaque instant une dérivée qui s'exprime par une grandeur de dimension « intensité/temps », alors que le flux d'information s'exprime par une grandeur de dimension « conactance/temps ».

▪ **Cas d'un flux d'information constant.**

➤ Ce sont les f_k^i de l'exposé.

➤ On envoie toujours le même message et on ne considère que le 1^{er} message émis, puisque tous les autres sont identiques.

Le flux d'information considéré est alors le flux d'information moyen, c'est-à-dire

$$F_M = k_0 \frac{\Delta C_m}{\Delta t_m}, \text{ la conactance du récepteur s'étant accrue de } \Delta C_m.$$

➤ Si un seul caractère c de l'alphabet, envoyé indéfiniment, constitue le flux d'information,

et si sa probabilité d'apparition est p_c , on a : $\Delta C_c = \frac{1}{k_0} F_M \Delta t_c = \frac{1}{k_0} \left(-\frac{k_0}{\Delta t_c} \log(p_c) \right) \Delta t_c = -\log(p_c)$

Δt_c étant le temps de transmission de ce caractère.

5) Unités de flux d'information et de champ d'information.

▪ Un flux d'information s'exprime par $F(t) = k_0 \frac{dC(t)}{dt}$. Sa dimension est, en \log_2 , un « shannon/temps », si l'on considère que k_0 est un opérateur sans dimension.

▪ Le champ d'information \tilde{I} auquel le réseau est couplé est l'équivalent d'une source d'information.

▪ Par analogie avec la relation donnant les composantes du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ en fonction du champ électrique, le quadrivecteur \tilde{A} $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ on peut remarquer que :

$$l_i \text{ ou } f_k^i \text{ ou } F(t) = k_0 \frac{dC(t)}{dt}$$

Autrement dit

➤ De même que les composantes du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$, c'est-à-dire les E_μ et B_μ (champs électrique et magnétique habituels), sont des observables (grandeurs mesurables), déduites par dérivation par rapport aux variables d'espace temps du quadrivecteur champ électromagnétique \tilde{A}

➤ De même les l_i et les f_k^i , c'est-à-dire les flux d'information, sont des observables déduites par dérivation par rapport au temps du champ d'information \tilde{I} . (Les f_k^i étant les flux d'information générés par le champ \tilde{I} et les l_i ceux générés par le champ créé par les éléments du réseau).

▪ Autre expression de l'analogie :

- De même qu'en électromagnétisme un champ \tilde{A} met en mouvement des particules chargées qui à leur tour créent un champ
- De même ici un champ d'information \tilde{I} transmet des flux d'information aux éléments du réseau qui acquièrent de la conactance et ainsi, à leur tour, créent un champ d'information.

▪ On en déduit que le champ \tilde{I} s'exprime dans les mêmes unités qu'une conactance, et on aura :

$$f_k^i = k_1 \frac{d\tilde{I}}{dt} \quad \text{et} \quad l_i = k_0 \frac{dC}{dt}$$

▪ Le champ d'information \tilde{I} , en un point, est le *potentiel* de délivrer une certaine quantité de conactance au récepteur auquel ce point est relié.

Comment peut-on caractériser ce potentiel ?

- Dans le cas discret, si l'émission des messages se fait à partir d'un alphabet donné, ce pourrait être l'ensemble des messages qui peuvent être émis, c'est-à-dire la somme de la conactance de tous les messages possibles à partir de cet alphabet ; mais on voit que l'on peut construire des messages aussi longs que l'on veut, et donc que le potentiel serait infini.
- On pourrait alors poser que ce potentiel est égal à *l'entropie de la source* (voir paragraphe 2° ci-dessus) qui est la quantité moyenne d'information que peut fournir un message. Cette valeur, même si on constitue des messages de longueur non limitée, n'est probablement pas infinie du fait de la pondération par les probabilités.

[Retour page 6 : chapitre 1 paragraphe 1 : Relation D'information](#)

[Retour page 12 : chapitre 2 paragraphe 3 : Formalisme de la Théorie](#)

[Retour page 13 : chapitre 2 paragraphe 4 : Expression de la conactance](#)

[Retour page 15 : chapitre 2 paragraphe 6 : Unités de mesure](#)

[Retour page 31: chapitre 5 paragraphe 1: Équations aux dimensions/ Homogénéité/Unités de mesure](#)

Note [3] FINALITE OBJECTIVE

▪ Plutôt que *téléonomie*, terme utilisé par **Jacques Monod** dans « *Le hasard et la nécessité* » et que sous-tend l'idée d'une *finalité*, d'un projet, imposé par l'extérieur ou l'intérieur, **Pierre Naslin** [3] préfère utiliser l'expression de **finalité objective**, qui signifie :
« *Tout se passe comme si* » *il y avait une finalité*

▪ On est bien obligé de le constater ; mais cette expression ne prétend pas expliquer s'il existe vraiment une finalité endogène ou exogène.

[Retour page 6 : chapitre 1 paragraphe 2 : Définitions et propriétés du réseau](#)
[Retour page 44 : Note 4](#)

Note [4] CONACTANCE-CONNAISSANCE-INTELLIGENCE-INFORMATION-ENTROPIE-COMPLEXITE....

1)Nécessité de définir les termes utilisés

▪ Dans le langage commun, on utilise souvent certains termes sans bien préciser leur signification exacte ; c'est ainsi que l'on parle de connaissance, d'intelligence, d'information...
▪ Dans le présent exposé sur l'apprentissage des réseaux, il nous a paru nécessaire d'employer des termes adéquats, bien définis, et, pour cela, nous avons construit un nouveau terme, peut être pas très élégant, que nous avons appelé **CONACTANCE**.

2) La conactance

▪ Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que tout réseau a une *finalité objective* (voir [3]), c'est-à-dire que tout se passe comme si – et on le constate effectivement – il avait pour objectif d'accomplir une mission, de réaliser un but.

▪ **Nous appelons conactance la capacité qu'a le réseau d'utiliser des informations pertinentes pour agir en vue de réaliser sa finalité objective.**

▪ Le mot **conactance** vient de

CONnaissance consacrée à
une **ACT**ion visant à réaliser une mission précise
le **ANCE** final étant utilisé par analogie avec connaissance.

- La conactance a une signification plus restrictive que la connaissance car elle s'applique à un domaine particulier : c'est une *connaissance juste nécessaire* pour atteindre une finalité objective bien précise.
- On peut faire un parallèle avec le mot *intelligence* : on sait qu'il est difficile de définir l'intelligence en général ; par contre, on parle de différents types d'intelligence adaptés à différents types de situations.

3) Comment s'élabore la conactance ?

- Elle se constitue par le fait que le réseau *reçoit des flux d'information* qui lui permettent
 - d'organiser au mieux sa structure (les fonctions de transfert T_i des éléments E_i) pour faire face à sa mission ; on peut parler de *conactance structurelle*.
 - d'agir, compte tenu de cette conactance structurelle, en prenant en compte de façon efficace et pertinente ces flux d'information ; on pourrait parler de *conactance de traitement des données*.
- Il est important de souligner que les flux d'information doivent être « *traités* » par les éléments du réseau pour se transformer en conactance. Une simple addition de flux d'information ne produit pas de la conactance.

4) Potentiel d'information—Champ d'information \tilde{I}

- Le *potentiel d'information* en un point \vec{x} est la capacité à générer un flux d'information vers un réseau lorsque ce point \vec{x} est relié à ce réseau par une liaison d'information qui peut être de nature quelconque.
 - Ce potentiel, pas nécessairement présent en tous les points de l'espace, constitue un champ d'information.
 - Ce champ, qui dépend du temps et des coordonnées spatiales, est généré par l'environnement du réseau, mais les éléments du réseau eux-mêmes peuvent à leur tour générer un champ d'information, puisque des flux d'information circulent entre les éléments.
 - On peut faire une analogie entre le champ électromagnétique \tilde{A} (quadrivecteur) et le champ d'information \tilde{I} :
 - Lorsqu'on place au point \vec{x} une particule chargée (électron par exemple), le champ \tilde{A} agit sur elle pour lui communiquer de l'énergie qui se caractérise par du mouvement.
 - De manière analogue, lorsqu'un réseau (ou un élément de celui-ci) est connecté par une liaison d'information à un point \vec{x} où est présent le champ d'information \tilde{I} , ce dernier agit sur le réseau pour lui communiquer de l'information qui se concrétise, après traitement par le réseau, par une évolution de la conactance.

Le tableau ci-après résume cette analogie :

| Champ en \vec{x} | Système | Observables | Bosons d'interaction | Effet |
|--------------------|--|---|-------------------------------------|----------------------------|
| \tilde{A} | Particule (électron) placée en \vec{x} | Champ électrique \vec{E} Champ magnét. \vec{B} | Photon | Evolution de l'énergie |
| \tilde{I} | Réseau relié au point \vec{x} | Flux d'information l_i, f_k^i | « Infoton » (unité d'information ?) | Evolution de La conactance |

Remarque : A « particule placée en \vec{x} » correspond « réseau relié à \vec{x} »

5) Considérations sur l'équivalence *Energie/ Conactance*.

▪ **Hypothèse** : Nous exprimons ici l'idée que l'énergie (et donc aussi la masse) et la conactance sont *équivalentes* et, par voie de conséquence, seraient exprimables par le même type d'unité.

Nous aurions alors $E = mc^2 = kC$ C étant la conactance.

Tout le problème reviendrait alors à trouver k .

Remarque : Ceci peut se concevoir dans le cadre de la physique actuelle, régie par des lois s'appuyant sur les *concepts* de masse, d'énergie, etc...Si ces concepts étaient un jour abandonnés, du fait de nouvelles théories, l'hypothèse que nous faisons serait alors à reconsidérer.

▪ Exemple (très) trivial. Expérience de pensée.

➤ Supposons 2 frères jumeaux A et B possédant les mêmes caractéristiques physiques et intellectuelles. A la date t_0 ils se trouvent dans la nature, en un même lieu L et, chacun avec un seau, doit ramener de l'eau d'une source dont ils ne connaissent pas la localisation.

➤ Un 3^{ème} personnage C, lui, connaît l'emplacement de la source et comment y accéder facilement. Il communique l'information à A (information qui, traitée par le cerveau de ce dernier, se traduit en conactance).

➤ Bien entendu A, qui a reçu l'information adéquate, va aller directement à la source et ramènera assez rapidement le seau plein au lieu L. B, par contre, qui ignore où est la source, va chercher, longtemps peut être, et dépensera de l'énergie pour cette recherche ; quand il aura trouvé la source, il ramènera son seau plein en L.

➤ A la date t_1 les 2 jumeaux A et B seront au même endroit L avec chacun un seau plein d'eau. En apparence, ils seront dans le même état ; mais physiologiquement il n'en sera pas de même, car B aura dépensé beaucoup plus d'énergie que A dans sa recherche.

➤ Autrement dit, l'information qu'a reçue A et qui s'est traduite en conactance lui a permis d'économiser de l'énergie (approximativement celle que B a dépensée pour trouver la source).

Cet exemple très trivial montre *qu'intuitivement la conactance est équivalente à de l'énergie*.

▪ Relation d'équivalence conactance/énergie.

➤ L'information, pour permettre une économie d'énergie, doit être transformée en conactance par son récepteur. (Exemple : une information donnée en anglais à une personne ne comprenant pas cette langue ne sera pas transformée en conactance et ne pourra donc pas permettre une économie d'énergie).

➤ L'énergie économisée par un même accroissement de conactance ne semble pas facilement mesurable. Dans l'exemple trivial choisi, elle dépend de ce qu'aurait fait A s'il n'avait pas eu l'information.

➤ Comment évaluer cette énergie ? Peut être **sous forme probabiliste**, connaissant entre autres la psychologie de A et la configuration du terrain.

Autrement dit, il faudrait envisager **toutes les possibilités, tous les chemins** que pourrait prendre un individu recevant une information, censée lui faire économiser de l'énergie, pour aboutir à un résultat. (Dans notre exemple, toutes les dépenses d'énergie correspondant à tous les chemins possibles pour aller de L à la source)

➤ Si on veut généraliser, on pourrait dire qu'il faudrait envisager toutes les possibilités qu'a un système récepteur d'information d'atteindre un but donné, à supposer qu'il n'ait à priori aucune information sur la solution minimale en dépense d'énergie. Ceci, bien entendu, dépend du récepteur et du but à atteindre.

On pense alors inévitablement à la *décomposition du vecteur d'état* en mécanique quantique (ou encore aux intégrales de chemin de Feynman).

$|\Psi\rangle = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle$ où $|\Psi_i\rangle$ est un *état propre* ou un ket de la base choisie p_i son amplitude de probabilité d'apparition si l'on fait une mesure.

➤ Donc si on connaît l'énergie $|W_i\rangle$ (ou W_i car l'énergie est un scalaire) à dépenser pour chacune des voies que pourrait choisir le récepteur de l'information pour atteindre son but, ainsi que l'amplitude de probabilité qu'il choisisse cette voie, on peut subodorer qu'une approche de l'énergie économisée pourrait être

$$W = \sum_i p_i W_i$$

On pourrait alors écrire $C = kW = k \sum_i p_i W_i$ C étant la conactance acquise par réception

de l'information et k étant un coefficient tel que l'équation aux dimensions soit satisfaite. k a donc la dimension d'une *unité d'information sur une unité d'énergie*.

➤ Difficultés pour calculer k .

Supposons que l'on puisse réaliser un grand nombre d'expériences identiques et que l'on puisse mesurer C (en unités d'information) ainsi que les W_i et leurs probabilités ; on pourrait alors déterminer k .

Cependant, on risque de se heurter à un problème de précision compte tenu qu'une très faible quantité d'information peut être équivalente à une très grande quantité d'énergie. Ceci fait penser à l'équation $E = mc^2$ dans laquelle une très faible quantité de masse peut dégager une énergie considérable.

La raison, peut être, en est que la façon dont nous appréhendons par nos sens, à notre échelle humaine, les différents concepts de masse, d'énergie, d'information,... nous conduit à choisir des unités en rapport avec nos possibilités. D'autres unités, moins anthropomorphiques, pourraient faciliter le calcul de k .

▪ Différence fondamentale entre l'énergie et la conactance.

➤ Lorsqu'un système A fournit une énergie ΔE à un système B, l'énergie de B augmente de ΔE , mais celle de A diminue de ΔE . (On suppose négligeables, pour simplifier, les pertes d'énergie dégradée)

➤ Lorsqu'un système A fournit une information ΔI à un système B, la conactance de B s'accroît de ΔC (ΔC est fonction de ΔI), mais la conactance de A reste égale à ce qu'elle était auparavant.

➤ Autrement dit, le fait pour A de générer une information s'apparente à l'action d'un champ qui, par exemple, peut générer un mouvement en communiquant de l'énergie *mais sans perdre de son potentiel*.

Ceci conforte l'assertion qu'un champ d'information \tilde{I} est homogène à une conactance.

[Retour page 10 : chapitre 1 paragraphe 5 : Définitions et notations](#)
[Retour page 12 : chapitre 2 paragraphe 3 : Formalisme de la théorie](#)
[Retour page 13 : chapitre 2 paragraphe 4 : Expression de la conactance](#)
[Retour page 40 : note 2](#)

Note [5] RESEAU LIBRE à L'EQUILIBRE

1)

- Lorsque les éléments E_i du réseau sont connectés entre eux, sans aucune liaison d'information avec l'extérieur (les f_k^i et s_i sont nuls), le réseau finit par atteindre, au temps t_0 , une position d'équilibre. C'est à partir de cette position d'équilibre que l'on connecte le réseau avec l'extérieur.

- Lorsque le réseau libre a atteint sa position d'équilibre, on a un système de N équations à N inconnues (les l_i).

$$l_i = \sum_{j=1}^{j=N} t_i^j l_j$$

C'est un système homogène qui, normalement, n'admet que des solutions toutes nulles $l_i = 0$.

2) Nous faisons l'hypothèse que ces solutions ne sont pas nulles, donc qu'il existe des solutions $l_i \neq 0$.

- Cela implique que le déterminant $\Delta_0 = 0$ soit

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} (t_1^1 - 1) & \dots & t_1^i & \dots & t_1^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i^1 & \dots & (t_i^i - 1) & \dots & t_i^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_N^1 & \dots & t_N^i & \dots & (t_N^N - 1) \end{vmatrix} = 0$$

- **Justifications.**

- Cela est possible parce que les t_i^j évoluent en fonction du temps ; ils peuvent donc s'ajuster pour que $\Delta_0 = 0$.

- Si, à l'équilibre, tous les $l_i = 0$, cela voudrait dire que quelle que soit la position des E_i les uns par rapport aux autres, on aboutirait toujours, à l'équilibre, aux $l_i = 0$.

Donc, en faisant une permutation quelconque des éléments du réseau, la conactance resterait invariante et il n'y aurait aucune raison d'ajouter un champ de jauge, c'est-à-dire de connecter le réseau à l'extérieur, pour rétablir l'invariance de la conactance.

- **Remarques**

- Lorsque le réseau libre est stabilisé, les t_i^j restent constants, donc les \dot{t}_i^j sont nuls, donc la conactance du réseau libre ne croît plus et reste égale à une valeur C_0 .

On peut toutefois se poser une question : que signifie la conactance du réseau libre, étant donné qu'il n'y a pas de finalité objective ?

➤ Nous considérons que l'état d'équilibre du réseau libre est atteint au temps t_0 ; ce temps t_0 est également l'instant où le réseau est connecté avec l'extérieur. Nous aurions dû, en toute rigueur, indexer les valeurs avec l'indice 0 .

l_i aurait dû s'écrire l_{i0}

t_i^j aurait dû s'écrire t_{i0}^j

Nous ne l'avons pas fait pour ne pas surcharger les notations.

Au reste, on pourra considérer que $t_0 = 0$ (Origine des temps pour l'évolution du réseau connecté avec l'extérieur).

[Retour page 17 : chapitre 3 paragraphe 3 : Transformation de symétrie conservant l'invariance de la conactance](#)

Note [6] EXPRESSION des EQUATIONS de LAGRANGE

1) Nous avons, dans l'expression de la conactance C, une somme de termes de type général

$$L(t) = \int_0^t p(t) \left[\dot{q}(t) \right]^2 dt \quad \text{[correspondant par exemple à } \int_0^t l_k \left[\dot{t}_i^k \right]^2 dt \text{]}$$

La question posée est : Que valent les expressions suivantes qui seront utilisées pour constituer les équations de Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, $\frac{\partial L}{\partial p}$?

2) Calcul de $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, puis de $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$L = \int_0^t p \dot{q}^2 dt \quad (\text{p et q étant des fonctions de t et } \dot{q} \equiv \dot{q}(t))$$

Faisons le changement de variable $t \rightarrow \dot{q}$ La fonction inverse donne $t = t(\dot{q})$

$$\text{On a alors : } p(t) \rightarrow p[t(\dot{q})] = p_1(\dot{q})$$

$$d\dot{q} = \ddot{q} dt = \ddot{q} [t(\dot{q})] dt = \ddot{q}_1(\dot{q}) dt \equiv \tilde{q}_1(\dot{q}) dt$$

[$\tilde{q}_1(\dot{q})$ est la transformée en \dot{q} de $\ddot{q}(t)$]

$$L \text{ devient } L_1 \text{ avec } L_1(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} p_1(\dot{q}) \dot{q} \frac{1}{\tilde{q}_1(\dot{q})} d\dot{q}$$

Donnons un accroissement fini, mais aussi petit que l'on veut, $\Delta \dot{q}$, à \dot{q} .

$$L_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) = \int_0^{\dot{q} + \Delta \dot{q}} p_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) \cdot (\dot{q} + \Delta \dot{q})^2 \frac{1}{\tilde{q}_1(\dot{q} + \Delta \dot{q})} d\dot{q}$$

Note : $d(\dot{q} + \Delta \dot{q}) = d\dot{q} + d\Delta \dot{q} = d\dot{q}$ car $\Delta \dot{q}$ est une quantité constante arbitraire.

Cherchons la limite de $\frac{L_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) - L_1(\dot{q})}{\Delta \dot{q}}$ lorsque $\Delta \dot{q} \rightarrow 0$

➤ Tout d'abord, le dénominateur $\tilde{q}_1(\dot{q} + \Delta \dot{q})$ peut s'écrire :

$$\tilde{q}_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) = \tilde{q}_1(\dot{q}) + \Delta \dot{q} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \dot{q}} \quad (\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre, en négligeant les termes supérieurs en } \Delta \dot{q})$$

En supposant que $\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \dot{q}}$ a une valeur finie en \dot{q} (dérivée), si $\Delta \dot{q} \rightarrow 0$, $\tilde{q}_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) \rightarrow \tilde{q}_1(\dot{q})$

car $\Delta \dot{q} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \dot{q}} \rightarrow 0$

➤ D'autre part $p_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) = p_1(\dot{q}) + \Delta \dot{q} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}}$ et $(\dot{q} + \Delta \dot{q})^2 = \dot{q}^2 + 2\dot{q}\Delta \dot{q} + \Delta \dot{q}^2$

Donc : $[p_1(\dot{q} + \Delta \dot{q})](\dot{q} + \Delta \dot{q})^2 = [p_1(\dot{q}) + \Delta \dot{q} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}}](\dot{q}^2 + 2\dot{q}\Delta \dot{q} + \Delta \dot{q}^2)$

$$= \dot{q}^2 p_1(\dot{q}) + 2\dot{q} p_1(\dot{q}) \Delta \dot{q} + p_1(\dot{q}) \Delta \dot{q}^2 + \dot{q}^2 \Delta \dot{q} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}} + 2\dot{q} \Delta \dot{q}^2 \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}} + \Delta \dot{q}^3 \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}}$$

Quand $\Delta \dot{q} \rightarrow 0$, on néglige les termes en $\Delta \dot{q}^2$ et $\Delta \dot{q}^3$ et il reste

$$\dot{q}^2 p_1(\dot{q}) + 2\dot{q} p_1(\dot{q}) \Delta \dot{q} + \dot{q}^2 \Delta \dot{q} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}}$$

Il vient alors

$$\frac{L_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) - L_1(\dot{q})}{\Delta \dot{q}} = \int_0^{\dot{q}} \frac{\Delta \dot{q} [2\dot{q} p_1(\dot{q}) + \dot{q}^2 \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}}]}{\Delta \dot{q} \tilde{q}_1(\dot{q})} d\dot{q} \quad \Delta \dot{q} \text{ étant considéré comme une}$$

quantité arbitraire.

Quand $\Delta \dot{q} \rightarrow 0$, $\frac{L_1(\dot{q} + \Delta \dot{q}) - L_1(\dot{q})}{\Delta \dot{q}} \rightarrow \int_0^{\dot{q}} \frac{2\dot{q} p_1(\dot{q}) + \dot{q}^2 \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}}}{\tilde{q}_1(\dot{q})} d\dot{q} = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}}$ (par définition de la dérivée)

➤ Faisons le changement de variable inverse $\dot{q}(t) \rightarrow t$

- $2\dot{q} p_1(\dot{q}) \rightarrow 2\dot{q}(t)p(t)$ et $2\dot{q} p_1(\dot{q})d\dot{q} \rightarrow 2\dot{q}(t)p(t)\ddot{q}(t)dt$ car $d\dot{q} = \ddot{q}(t)dt$
- $\tilde{q}_1(\dot{q}) \rightarrow \ddot{q}(t)$
- $\frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \frac{\partial p}{\partial t} dt = \dot{p}(t)dt$ et $\dot{q}^2 \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \dot{q}^2 \dot{p}(t)dt$

$$\text{D'où } \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \int_0^t \frac{\dot{q}(t)[2p(t)\ddot{q}(t) + \dot{q}(t)\dot{p}(t)]}{\ddot{q}(t)} dt$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}(t)}{\ddot{q}(t)} [2p(t)\ddot{q}(t) + \dot{q}(t)\dot{p}(t)]$$

3) Calcul de $\frac{\partial L}{\partial p}$

$$L = \int_0^t p(t) \dot{q}^2(t) dt$$

Faisons le changement de variable $t \rightarrow p$ La fonction inverse donne $t = t(p)$

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}[t(p)] = \tilde{q}_1(p) \quad \text{et} \quad dp = \dot{p} dt \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dp}{\dot{p}} = \frac{1}{\tilde{p}_1(p)} dp$$

$$L_1(p) = \int_0^p p \tilde{q}_1^2(p) \frac{dp}{\tilde{p}_1(p)}$$

Donnons à p un accroissement arbitraire Δp , que l'on peut prendre aussi petit que l'on veut ;
 $p \rightarrow p + \Delta p$

$$L_1(p + \Delta p) = \int_0^{p+\Delta p} (p + \Delta p) \frac{[\tilde{q}_1(p + \Delta p)]^2}{\tilde{p}_1(p + \Delta p)} dp$$

Cherchons la limite de $\frac{L_1(p + \Delta p) - L_1(p)}{\Delta p}$ quand $\Delta p \rightarrow 0$

$$\text{➤ Tout d'abord, } \tilde{p}_1(p + \Delta p) = \tilde{p}_1(p) + \Delta p \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p} \quad (\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \Delta p)$$

Quand $\Delta p \rightarrow 0$, si $\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p}$ a une valeur finie,

$$\tilde{p}_1(p + \Delta p)$$

$$(p + \Delta p)[\tilde{q}_1(p + \Delta p)]^2 = p\tilde{q}_1^2(p) + 2p\tilde{q}_1(p)\Delta p \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + p\Delta p^2 \left(\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} \right)^2 + \Delta p \tilde{q}_1^2(p) + 2\Delta p^2 \tilde{q}_1(p) \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + \Delta p^3 \left(\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} \right)^2$$

$$\rightarrow \tilde{p}_1(p)$$

$$\text{➤ } \tilde{q}_1(p + \Delta p) = \tilde{q}_1(p) + \Delta p \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} \quad \text{et} \quad [\tilde{q}_1(p + \Delta p)]^2 = \tilde{q}_1^2(p) + 2\tilde{q}_1(p)\Delta p \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + \Delta p^2 \left(\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} \right)^2$$

$$(p + \Delta p)[\tilde{q}_1(p + \Delta p)]^2 = p\tilde{q}_1^2(p) + 2p\tilde{q}_1(p)\Delta p \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + p\Delta p^2 \left(\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} \right)^2 + \Delta p \tilde{q}_1^2(p) + 2\Delta p^2 \tilde{q}_1(p) \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + \Delta p^3 \left(\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} \right)^2$$

Au 1^{er} ordre en Δp , ne subsistent que les termes

$$p\tilde{q}_1^2(p) + 2p\tilde{q}_1(p)\Delta p \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + \Delta p \tilde{q}_1^2(p)$$

On a alors :
$$\frac{L_1(p+\Delta p) - L_1(p)}{\Delta p} = \int_0^p \frac{\Delta p}{\tilde{p}_1(p)\Delta p} [2p\tilde{q}_1(p) \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + \tilde{q}_1(p)] dp$$

Quand $\Delta p \rightarrow 0$, on voit que
$$\frac{L_1(p+\Delta p) - L_1(p)}{\Delta p} = \frac{\partial L_1}{\partial p} = \int_0^p \frac{1}{\tilde{p}_1(p)} [2p\tilde{q}_1(p) \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p} + \tilde{q}_1(p)] dp$$

Faisons le changement de variable inverse $p \rightarrow t$ avec $dp = \dot{p}(t)dt$

$$\tilde{p}_1(p) \rightarrow \dot{p}(t) \quad \tilde{q}_1(p) \rightarrow \dot{q}(t)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_1(p)}{\partial p} dp = \frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial t} dt = \ddot{q}(t)dt$$

D'où :
$$\frac{\partial L_1}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial p} = \int_0^t \frac{\dot{q}(t)}{\dot{p}(t)} [2p(t)\ddot{q}(t) + \dot{p}(t)\dot{q}(t)] dt$$

4) Passage aux l_k et t_i^k .

➤ Rappel : L est la conactance d'un seul terme de l'expression de la conactance du réseau. Il y aura donc des sommations à faire.

➤ Pour revenir aux notations de l'étude, il faut faire les remplacements suivants :

$$p(t) \quad \text{devient} \quad l_k \quad \text{ou} \quad f_k^i \quad \text{ou} \quad s_k$$

$$q(t) \quad \text{devient} \quad t_i^k$$

Finalement cela donne :

$$\frac{\partial L}{\partial l_k} = \int_0^t \frac{\dot{t}_i^k}{l_k} [2l_k \ddot{t}_i^k + \dot{l}_k \dot{t}_i^k] dt$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}_i^k} = \frac{\dot{t}_i^k}{\ddot{t}_i^k} [2l_k \ddot{t}_i^k + \dot{l}_k \dot{t}_i^k]$$

➤ Les l_k , t_i^k sont des fonctions du temps t et les 2 relations ci-dessus ont été retenues parce que , au final, ce sont les seules qui subsistent.

BIBLIOGRAPHIE

[[1]] Comment la matière devient conscience. De Gérald M. EDELMAN et Giulio TONINI
Éditions Odile Jacob Sciences
(en particulier les chapitres 10 et 11)

[Retour](#)

[[2]] La nouvelle Physique. Sous la direction de Paul DAVIES
Éditions Flammarion sciences.
(en particulier le chapitre 11 par Grégoire NICOLIS)

[Retour](#)

[[3]] La complexité—Artifices et Nature. De Pierre NASLIN
Éditions Sirpe.
(en particulier le chapitre 15)

[Retour](#)

[[4]] Symétries, Champs de jauge, Interactions électrofaibles. De Michel LAMBERT
Institut de Physique Nucléaire de Lyon