Algèbres pré-Gerstenhaber à homotopie près

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri

ALGÈBRE PRÉ-GERSTENHABER À HOMOTOPIE PRÈS

WALID ALOULOU, DIDIER ARNAL ET RIDHA CHATBOURI

RÉSUMÉ. On étudie le concept d'algèbre à homotopie près pour une structure définie par deux opérations . et [,]. Un exemple important d'une telle structure est celui d'algèbre de Gerstenhaber (commutative et de Lie). La notion d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près (G_∞ algèbre) est connue.

Ici nous proposons une définition d'algèbre pré-Gerstenhaber (pré-commutative et pré-Lie) permettant la construction d'une preG_∞ algèbre.

Partant d'une structure pré-commutative (Zinbiel) et pré-Lie, on utilise les opérades duales correspondantes. Nous donnons la construction explicite de l'algèbre à homotopie près associée. Celle-ci est une bicogèbre (Leibniz et permutative), munie d'une codifférentielle qui est une codérivation des deux coproduits.

Abstract.

This paper is concerned by the concept of algebra up to homotopy for a structure defined by two operations . and [,]. An important example of such a structure is the Gerstenhaber algebra (commutatitve and Lie). The notion of Gerstenhaber algebra up to homotopy (G_∞ algebra) is known.

Here, we give a definition of pre-Gerstenhaber algebra (pre-commutative and pre-Lie) allowing the construction of preG_∞ algebra.

Given a structure of pre-commutative (Zinbiel) and pre-Lie algebra and working over the corresponding dual operads, we will give an explicit construction of the associated pre-Gerstenhaber algebra up to homotopy, this is a bicogebra (Leibniz and permutative) equipped with a codifferential which is a coderivation for the two coproducts.

1. INTRODUCTION

En 69 [Q], Quillen a montré qu'il existe une dualité entre les structures d'algèbre de Lie et d'algèbre commutative dite dualité de Quillen.

En 94 [GK], Ginzbug et Kapranov ont montré qu'il existe une dualité entre d'autres types d'algèbres. Ils ont expliqué cette dualité en introduisant les notions d'opérade $\mathcal{P}$ et d'opérade duale $\mathcal{P}^!$ qui décrivent et déterminent le type d'algèbre sur l'opérade $\mathcal{P}$. On dit une $\mathcal{P}$-algèbre ou une algèbre sur l'opérade $\mathcal{P}$. Par exemple, les opérades classiques sont les opérades Lie, Ass, Com. Une Com-algèbre (resp. une Lie-algèbre) est une algèbre

Date: 19/06/2012.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 16A03, 16W30, 16E45.

Key words and phrases. Algèbre à homotopie près, cogèbres, algèbres différentielles graduées.

commutative (resp. de Lie). Les relations de définition de la structure (multiplication, crochet) sont quadratiques dans les lois (ainsi la relation d'associativité, celle de Jacobi font intervenir deux opérations). Les opérades Lie, Ass, Com sont quadratiques.

Ginzbug et Kapranov ont montré que toute opérade quadratique admet une opérade duale, ils retrouvent la dualité de Quillen sous la forme $Com^! = Lie$ et $Lie^! = Com$.

Ils ont démontré aussi que $Ass^! = Ass$.

La structure de $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un espace V est donnée par une codifférentielle Q (bilinéaire si la loi considérée est binaire) d'une cogèbre libre sur la $\mathcal{P}^!$-cogèbre sur V construite à partir de V. La relation $Q^2 = 0$ est l'équation de structure, elle est équivalente aux axiomes de définition de la strucutre d'algèbre.

Dans cette situation, la structure de $\mathcal{P}_\infty$ algèbre (ou $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près) sur un espace vectoriel V est la donnée d'une codifférentielle Q (non nécessairement bilinéaire) sur la $\mathcal{P}^!-$cogèbre sur V (voir [GK]).

Une algèbre pré-Lie est un espace vectoriel V muni d'une loi $\diamond$ telle que son antisymétrisée est une loi d'algèbre de Lie. Les axiomes de cette structure ont permis à Chapoton et Livernet ([ChL]) de réaliser la construction ci-dessus. Il existe donc une notion d'algèbre pré-Lie à homotopie près ([ChL]).

De même, il existe une notion d'algèbre pré-commutative, appelée algèbre de Zinbiel ([Liv]), ces algèbres sont équippées d'un produit $\wedge$, dont le symétrisé est associatif et commutatif. Les axiomes permettent de réaliser la construction ci-dessus et de définir des algèbres de Zinbiel à homotopie près ([Liv]).

Maintenant, une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel V muni de deux lois : un produit commutatif $\wedge$ de degré 0 et un crochet de Lie $[\ ,\ ]$ de degré -1, avec des relations de compatibilités. On peut réaliser la construction ci-dessus pour cette structure (voir [G], et surtout [BGHHW, AAC]). La construction complète nécessite celle d'une bicogèbre W (munie d'un coproduit Δ et d'un cocrochet κ avec des relations de compatibiltés) et les deux lois de notre algèbre permettent de construire une seule application Q qui est une codérivation à la fois de Δ et de κ. Les axiomes d'algèbre de Gerstenhaber sont équivalents à l'équation de structure $Q^2 = 0$. Ceci permet de définir les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près ([AAC]).

Précisons cette construction. Comme $(V, \wedge)$ est une algèbre commutative, on construit la cogèbre libre associée $(\mathcal{H}, \delta)$ et la codifférentielle notée D que définit $\wedge$. On remarque que le crochet de Lie $[\ ,\ ]$ se prolonge en un unique crochet de Lie sur $\mathcal{H}$ et que les relations de compatibiltés entre $\wedge$ et $[\ ,\ ]$ sont équivalentes à : D est une dérivation du crochet. On dispose alors d'une algèbre de Lie différentielle $(\mathcal{H}, [\ ,\ ], D)$. La construction ci-dessus permet de construire la cogèbre libre associée (W, Δ) et une codifférentielle Q, unique prolongement de $D + [\ ,\ ]$ à W. Enfin on prolonge de façon unique δ en un cocrochet κ sur W, on obtient la bicogèbre codifférentielle (W, Δ, κ, Q).

Dans [Ag], Aguiar propose une définition d'une algèbre pré-Gerstenhaber : un espace V qui possède à la fois une structure d'algèbre de Zinbiel pour $\wedge$ (de degré 0) et une structure d'algèbre pré-Lie pour $\diamond$ (de degré -1) avec des relations de compatibilités.

Reprenons la dernière construction pour une algèbre pré-Gerstenhaber au sens d'Aguiar, on construit d'une façon unique la cogèbre codifférentielle $(\mathcal{H}, \delta, D)$ définie pour les algèbres de Zinbiel par Livernet ([Liv]), Aguiar a défini un prolongement naturel du produit pré-Lie $\diamond$ à $\mathcal{H}$, noté R. $(\mathcal{H}, R)$ est bien une algèbre pré-Lie, malheureusement, D n'est pas une dérivation de R, parce que les relations de compatibilité entre $\wedge$ et $\diamond$ proposées sont trop faibles.

On se propose dans ce papier de donner une définition plus restrictive d'algèbre pré-Gerstenhaber que celle d'Aguiar. Plus précisément, on imposera des conditions de compatibilités plus fortes. On définit alors un autre prolongement, noté R_2 de $\diamond$ à $\mathcal{H}$ tel que $(\mathcal{H}, R_2, D)$ est une algèbre pré-Lie différentielle. On pourra alors achever la construction de la bicogèbre codifférentielle (W, Δ, κ, Q) dans le cadre des algèbres pré-Gerstenhaber. On a ainsi une construction explicite de l'algèbre pré-Gerstenhaber à homotopie près associée.

2. Algèbres à homotopie près ou $\mathcal{P}_\infty$ algèbres

2.1. **Généralités.**

Soit $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}$ gradué. Le degré d'un élément homogène x dans V est noté $|x|$. On notera $T^+(V)$ l'espace $\bigoplus_{n>0} \bigotimes^n V$, gradué par $|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Définition 2.1.
1) Une algèbre graduée est un espace vectoriel gradué V muni d'une application bilinéaire $b : V \otimes V \to V$ de degré 0 ($|b| = 0$) c'est à dire :

$$b(V_i \otimes V_j) \subset V_{i+j}.$$

2) Une dérivation d de l'algèbre (V, b) est une application vérifiant :

$$d \circ b = b \circ (d \otimes id + id \otimes d).$$

Si d est de degré 1 et $d^2 = 0$, on dit que d est une différentielle de (V, b).

Définition 2.2.
1) Une cogèbre graduée est un espace vectoriel gradué $\mathcal{C}$ muni d'une application linéaire $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ dite coproduit de $\mathcal{C}$ vérifiant :

$$\Delta \mathcal{C}_k \subset \sum_{i+j=k} \mathcal{C}_i \otimes \mathcal{C}_j$$

2) Une codérivation Q de la cogèbre $(\mathcal{C}, \Delta)$ est une application vérifiant :

$$\Delta \circ Q = (Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta.$$

Si Q est de degré 1 et $Q^2 = 0$, on dit que Q est une codifférentielle de $(\mathcal{C}, \Delta)$. Dans ce cas, on dit que $(\mathcal{C}, \Delta, Q)$ est une cogèbre codifférentielle.

Par définition, l'espace $V[1]$ est le même espace que V, mais avec un décalage du degré : le degré d'un élément homogène x dans $V[1]$ noté $deg(x)$ devient $deg(x) = |x| - 1$. Rappelons qu'on peut faire correspondre à toute application n-linéaire $|\ |$-antisymétrique (resp. $|\ |$-symétrique) $\phi : V \otimes \cdots \otimes V \to V$ une application n-linéaire deg-symétrique (resp. deg-antisymétrique) $\phi' : V[1] \otimes \cdots \otimes V[1] \to V[1]$ en posant

$$\phi'(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{\sum_{i=1}^{n}(n-i)deg(x_i)} \phi(x_1, \ldots, x_n)$$

(voir [AAC1]).

Les bonnes structures algèbriques sont des lois associées à une opérade quadratique $\mathcal{P}$ ([GK]). En effet, si V est un espace vectoriel gradué, on peut dans ce cas construire la cogèbre colibre (W, Δ) sur l'opérade duale $\mathcal{P}^!$ engendrée par le décalé $V[1]$ de V.

Dans cette situation, dire qu'une loi $b : V \otimes V \to V$ de degré 0 est une structure de type $\mathcal{P}$, c'est dire que sa décalée $b' : V[1] \otimes V[1] \to V[1]$ est bilinéaire, de degré 1 et vérifie les symétries associées à l'opérade $\mathcal{P}^!$, donc est prolongeable de façon unique en une codérivation Q de (W, Δ) et la loi b vérifie les axiomes de la structure si et seulement si, Q vérifie l'équation de structure $[Q, Q] = 2Q^2 = 0$.

Toujours dans ce cas, on parlera de $\mathcal{P}_\infty$ algèbre ou d'algèbre à homotopie près pour toute cogèbre codifférentielle (W, Δ, Q) correspondante à (W, Δ), Q quadratique ou non.

Définition 2.3. [GK]

Une structure de $\mathcal{P}_\infty$ algèbre sur un espace vectoriel V est définie par la donnée d'une codifférentielle Q sur la $\mathcal{P}^!$-cogèbre (W, Δ) construite à partir de V.

En particulier, si (V, b, d) est une algèbre différentielle, on peut prolonger $d + b'$ en une unique codérivation Q de degré 1 de (W, Δ) telle que $Q^2 = 0$, c'est à dire (W, Δ, Q) est une $\mathcal{P}_\infty$ algèbre. Décrivons quelques exemples.

2.2. **Algèbres de Lie et algèbres commutatives à homotopie près (L_∞ et C_∞ algèbres).**

Les structures d'algèbre de Lie et d'algèbre commutative sont associées à des opérades quadratiques : les opérades Lie et Com. De plus, Ginzburg et Kapranov ont montré que $Lie^! = Com$ et $Com^! = Lie$. On peut donc définir les notions de L_∞ et C_∞ algèbres.

2.2.1. *Algèbres de Lie et L_∞ algèbres.*

Définition 2.4.

Soit $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel gradué. Une structure d'algèbre de Lie graduée sur $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un crochet bilinéaire $[\ ,\ ]$ tel que :

– $[\ ,\ ]$ *est de degré 0 :*

$$\forall i, j, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j},$$

– $[\ ,\ ]$ *est antisymétrique :*

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad [x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x],$$

– $[\ ,\ ]$ *vérifie l'identité de Jacobi :*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad (-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|y||x|}[[y, z], x] + (-1)^{|z||y|}[[z, x], y] = 0.$$

Si de plus, il existe une différentielle $d : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ (i.e. $d^2 = 0$), telle que $|d| = 1$ et

$$d([x, y]) = [dx, y] + (-1)^{1.|x|}[x, dy].$$

On dit que $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], d)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée.

Rappelons qu'on a posé $deg(x) = |x| - 1$. on notera aussi simplement x ce degré. On note aussi

$$\varepsilon_x \left(\begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_n} \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon_x(\sigma)$$

la signature de la permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{smallmatrix} \right)$, en tenant compte des degrés de x_j, autrement dit, ε_x est l'unique morphisme de S_n dans $\mathbb{R}$ tel que $\varepsilon_x((i, j)) = (-1)^{x_i x_j}$.

Puisque l'opérade duale de Lie est Com, une $Lie^!$-cogèbre est une cogèbre coassociative et cocommutative.

Proposition 2.5.

Soit $\mathfrak{g}$ un espace gradué, notons $S^+(\mathfrak{g}[1])$ l'espace $T^+(\mathfrak{g}[1]) \big/ \langle x \otimes y - (-1)^{xy} y \otimes x \rangle$, alors la $Lie^!$-cogèbre colibre engendrée par $\mathfrak{g}[1]$ est

$$\Big(S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta \Big)$$

avec, si $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, x_I *désigne* $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ *et :*

$$\Delta(x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots n\} \\ \#I, \#J > 0}} \varepsilon_x \left(\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_I & & x_J \end{smallmatrix} \right) x_I \otimes x_J.$$

On vérifie directement (voir par exemple [AMM]) que cette cogèbre est coassociative :

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

et cocommutative : si τ est la volte $\tau(x \otimes y) = (-1)^{xy} y \otimes x$, alors

$$\tau \circ \Delta = \Delta.$$

Une structure de L_∞ algèbre sur $\mathfrak{g}$ est un triplet $\Big(S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta, Q\Big)$, formé de cette cogèbre cocommutative coassociative munie d'une codérivation Q de Δ de degré 1 et de carré nul. En particulier

Proposition 2.6. [AAC]

Si $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], d)$ *est une algèbre de Lie différentielle graduée, on pose :*

$$Q_1(x) = dx,\ Q_2(x.y) = (-1)^x [x, y],\ Q_k = 0, \forall k \geq 3,$$

et

$$Q(x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \varepsilon_x \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_J \end{smallmatrix} \right) Q_{\#I}(x_I).x_J.$$

Alors $(S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta, Q)$ *est une* L_∞ *algèbre dite la* L_∞ *algèbre enveloppante de* $\mathfrak{g}$.

2.2.2. *Algèbre commutative à homotopie près (C_∞ algèbre).*

Définition 2.7.

On dit que $(A, \boldsymbol{.}, d)$ *est une algèbre commutative différentielle graduée si :*

– $\boldsymbol{.}$ *est une loi de degré 0 et commutative :*

$$\forall x, y \in A,\ x\boldsymbol{.}y = (-1)^{|x||y|} y\boldsymbol{.}x,$$

– $\boldsymbol{.}$ *est associatif :*

$$\forall x, y, z \in A,\ (x\boldsymbol{.}y)\boldsymbol{.}z = x\boldsymbol{.}(y\boldsymbol{.}z),$$

– d *est une différentielle de degré 1, de carré nul, et telle que :*

$$\forall x, y \in A,\ d(x\boldsymbol{.}y) = dx\boldsymbol{.}y + (-1)^{|x|} x\boldsymbol{.}dy.$$

Comme l'opérade duale de Com est Lie, on construit la $Com^!$-cogèbre colibre ainsi :

– On considère $A[1]$ muni du degré $deg(x) = |x| - 1 = x$

– Une permutation $\sigma \in S_{p+q}$ $(p, q \geq 1)$ est dite un (p, q)-shuffle si elle vérifie :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

On note $Sh(p, q)$ l'ensemble des (p, q)-shuffles.

– On définit ensuite le produit shuffle sur $\bigotimes^+ A[1]$ par :

$$sh_{p,q}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \ldots \otimes x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in Sh(p,q)} \varepsilon_x(\sigma^{-1}) x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

– On définit alors l'espace quotient

$$\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+ A[1] = \bigoplus_{n \geq 1} {\bigotimes^n A[1]} \Big/ {\sum_{p+q=n} Im(sh_{p,q})}.$$

Proposition 2.8.

La $Com^!$-cogèbre colibre associée à A est l'espace $\mathcal{H}$ muni du cocrochet δ défini par :

$$\delta(x_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} x_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_j \bigotimes x_{j+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_n - \varepsilon_x(\tau) x_{j+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_n \bigotimes x_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_j.$$

Le coproduit δ est coantisymétrique :

$$\tau \circ \delta = -\delta$$

et vérifie l'identité de coJacobi (ici $\tau_{23} = id \otimes \tau$ et $\tau_{12} = \tau \otimes id$) :

$$\left(id^{\otimes 3} + \tau_{12} \circ \tau_{23} + \tau_{23} \circ \tau_{12}\right) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta = 0.$$

On dira que $(\mathcal{H}, \delta)$ est une cogèbre de Lie de cocrochet δ.

Une structure de C_∞ algèbre sur A est la cogèbre de Lie $\left(\mathcal{H}, \delta, Q\right)$ munie d'une codérivation Q de δ de degré 1 et de carré nul. En particulier

Proposition 2.9. [AAC]

Si $(A, ., d)$ est une algèbre commutative différentielle graduée, on pose :

$$Q_1(x) = dx, \; Q_2(x \underline{\otimes} y) = (-1)^x x.y, \; Q_k = 0, \forall k \geq 3,$$

et

$$Q(x_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_n) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{\sum_{i \leq j} x_i} x_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_j \underline{\otimes} Q_r(x_{j+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_{j+r}) \underline{\otimes} x_{j+r+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} x_n.$$

Alors $(\mathcal{H}, \delta, Q)$ est une C_∞ algèbre dite la C_∞ algèbre enveloppante de A.

3. Algèbre de Gerstenhaber à homotopie près (G_∞ algèbre)

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué, muni de deux lois de degrés différents et de symétries opposées. Voir [G, A].

Définition 3.1.
On dit que $(\mathcal{G},\wedge,[\ ,\ ],d)$ *est une algèbre de Gerstenhaber différentielle graduée si :*
– $(\mathcal{G},\wedge,d)$ *est une algèbre commutative différentielle graduée,* $|\wedge|=0$*,*
– $(\mathcal{G}[1],[\ ,\ ],d)$ *est une algèbre de Lie différentielle graduée,* $|[\ ,\ ]|=-1$*,*
– *La relation de compatibilité suivante (relation de Leibniz) entre* $\wedge$ *et* $[\ ,\ ]$ *est vérifiée :*

$$[\alpha,\beta\wedge\gamma]=[\alpha,\beta]\wedge\gamma+(-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)}\beta\wedge[\alpha,\gamma].$$

Le prototype des algèbres de Gerstenhaber est l'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des multichamps de vecteurs muni du crochet de Schouten $[\ ,\ ]$ et du produit extérieur $\wedge$.

Pour définir la notion d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près, on procède en trois étapes.

On construit d'abord la cogèbre de Lie $(\mathcal{H},\delta)$ associée à $(\mathcal{G},\wedge,d)$ comme ci-dessus. On prolonge à $\mathcal{H}$ l'application $d+\wedge$ en une codérivation de δ de carré nul, que l'on note maintenant D.

On prolonge ensuite le crochet $[\ ,\ ]$ de $\mathcal{G}[1]$ à $\mathcal{H}$ en posant (voir [F, AAC]), si $X=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$, $Y=\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$:

$$[X,Y]=\sum_{\substack{\sigma\in Sh(p,q)\\ k,\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

On note $deg(X)=deg(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p)=\alpha_1+\dots+\alpha_p=x$. Alors :

Proposition 3.2.
$(\mathcal{H},[\ ,\ ],D)$ *est une algèbre de Lie différentielle graduée.*

On peut ensuite construire la L_∞ algèbre enveloppante $(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta,Q)$ de $\mathcal{H}$.

On considère l'espace $\mathcal{H}[1]$, muni du degré $deg'(X)=deg(X)-1=x'$. On pose $\ell_2(X.Y)=(-1)^{x'}[X,Y]$, et on prolonge D et ℓ_2 en m et ℓ à $S^+(\mathcal{H}[1])$ par :

$$m(X_1\dots X_n)=\sum_{j=1}^n\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix}x_1\dots x_n\\ x_j,x_1,\dots\widehat{j}\dots x_n\end{pmatrix}D(X_j).X_1\dots\widehat{j}\dots X_n,$$

et

$$\ell(X_1\dots X_n)=\sum_{i<j}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix}x_1\dots x_n\\ x_i,x_j,x_1,\dots\widehat{i,j}\dots x_n\end{pmatrix}\ell_2(X_i.X_j).X_1\dots\widehat{ij}\dots X_n.$$

On obtient une codérivation $Q = (m + \ell)$ de Δ vérifiant $deg'(Q) = 1$ et $Q^2 = 0$.

Enfin (voir [BGHHW, AAC]), le cocrochet δ de la C_∞ algèbre $(\mathcal{H}, \delta, D)$ se prolonge en l'application κ, définie sur $S^+(\mathcal{H}[1])$, par :

$$\kappa(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x'_i} \sum_{\substack{U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u'_s} \times$$

$$\times \left(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \; u_s \; v_s \; x_J \end{smallmatrix} \right) X_I.U_s \bigotimes V_s.X_J + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \; v_s \; u_s \; x_J \end{smallmatrix} \right) X_I.V_s \bigotimes U_s.X_J \right),$$

avec

$$\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \; u_s \; v_s \; x_J \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \; x_s \; x_J \end{smallmatrix} \right) (-1)^{\sum_{\substack{i<s \\ i \in J}} x'_i} (-1)^{\sum_{\substack{i>s \\ i \in I}} x'_i}.$$

κ est cosymétrique et vérifie les relations de coJacobi et coLeibniz avec Δ :

$$(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau'_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta$$

ou

$$(\Delta \otimes id) \circ \kappa = (id \otimes \kappa) \circ \Delta + \tau'_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta.$$

De plus, l'opérateur $Q = m + \ell$ est une codérivation de κ.

Définition 3.3. [AAC]

Une structure de G_∞ algèbre sur $\mathcal{G}$ est la donnée d'une codifférentielle Q de la bicogèbre $\left(S^+(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa \right)$ telle que Q est une codérivation de Δ et de κ, de degré 1 et de carré nul.

En particulier, si $(\mathcal{G}, \wedge, [\ ,\ ], d)$ est une algèbre de Gerstenhaber différentielle, alors $\left(S^+(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa, Q = m + \ell \right)$ est une G_∞ algèbre dite la G_∞ algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$.

4. Algèbre pré-Lie et pré-commutative à homotopie près

4.1. **Algèbre pré-Lie à homotopie près ($preL_\infty$ algèbre).**

La notion d'algèbre pré-Lie a été étudiée par Livernet et Chapoton ([Liv, ChL]). Une loi pré-Lie est une loi binaire dont l'antisymétrisé est un crochet de Lie. Plus précisément :

Définition 4.1.
Une algèbre pré-Lie (à droite) graduée $(V, \diamond)$ *est un espace gradué* V *muni d'un produit* $\diamond$ *de degré* 0 *vérifiant :*

$$\forall x, y, z \in V, \ \ (x \diamond y) \diamond z - x \diamond (y \diamond z) = (-1)^{|y||z|}\big((x \diamond z) \diamond y - x \diamond (z \diamond y)\big).$$

Si de plus, $d : V \longrightarrow V$ *est une différentielle de degré* 1 *telle que*

$$d(x \diamond y) = dx \diamond y + (-1)^{1.|x|} x \diamond dy,$$

on dira que $(V, \diamond, d)$ *est une algèbre pré-Lie différentielle graduée.*

Cette structure est associée à une opérade quadratique, l'opérade $preLie$. L'opérade duale, déterminée par [ChL], est l'opérade permutative : $preLie^! = Perm$.

Rappelons qu'une algèbre permutative (à droite) $(V, .)$ est un espace gradué V muni d'un produit . de degré 0, vérifiant :

$$\forall x, y, z \in V, \ \ x.(y.z) = (-1)^{|y||z|} x.(z.y).$$

Définition 4.2.
Une $preLie^!$*-cogèbre (ou cogèbre permutative) est un espace vectoriel gradué* $\mathcal{C}$ *muni d'une comultiplication* $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ *de degré* 0 *vérifiant :*

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = \tau_{23} \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Proposition 4.3. [ChL]

Soit V *un espace vectoriel gradué. Alors la cogèbre permutative colibre associée à* $V[1]$ *est* $\Big(V[1] \otimes S(V[1]), \Delta\Big)$ *où* Δ *est défini par* $\Delta(x \otimes 1) = 0$ *et :*

$$\Delta(x_0 \otimes x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ \sigma \in Sh_{k,1,n-k-1}}} \varepsilon_x(\sigma) x_0 \otimes (x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}) \bigotimes x_{\sigma(k+1)} \otimes (x_{\sigma(k+2)} \dots x_{\sigma(n)}).$$

(Ici, $Sh_{k,1,n-k-1}$ *est l'ensemble des permutations* σ *de* S_n *telles que* $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ *et* $\sigma(k+2) < \cdots < \sigma(n)$*).*

Remarque 4.4.
Identifions $S^{n+1}(V[1])$ *avec un sous espace de* $V[1] \otimes S^n(V[1])$ *en posant*

$$x_0 \dots x_n = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \varepsilon_x(\sigma^{-1}) x_{\sigma(0)} \otimes x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

On a alors :

$$\Delta(x_0 \otimes x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1,\dots,n\} \\ J \neq \emptyset}} \varepsilon_x\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_I & & x_J \end{smallmatrix}\right)(x_0 \otimes x_I) \bigotimes x_J$$
$$= x_0 \bigotimes x_1 \dots x_n + (-1)^{x_0} x_0 \otimes \Delta'(x_1 \dots x_n)$$

où $\Delta'(x_1 \dots x_n)$ *est le coproduit de la cogèbre cocommutative colibre* $S^+(V[1])$.

Il est alors clair que $\Delta(x_0 \dots x_n) = \Delta'(x_0 \dots x_n)$.

Définition 4.5.

Une $preL_\infty$ *algèbre est une cogèbre permutative codifférentielle* $\Big(V[1] \otimes S(V[1]), \Delta, Q\Big)$ *telle que* Q *est une codérivation de* Δ *de degré* 1 *et* $Q^2 = 0$.

Proposition 4.6. [ChL]

Si $(V, \diamond, d)$ *est une algèbre pré-Lie différentielle graduée. On pose*

$$Q_1(x) = dx, \;\; Q_2(x_1 \otimes x_2) = (-1)^{x_1} x_1 \diamond x_2, \;\; Q_k = 0, \forall k \geq 3$$

et

$$Q(x_0 \otimes x_1 \dots x_n) = Q_1(x_0) \otimes x_1 \dots x_n + (-1)^{x_0} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\sum_{i<k} x_i} x_0 \otimes x_1 \dots Q_1(x_k) \dots x_n +$$
$$+ \sum_{\sigma \in Sh_{1,n-1}} \varepsilon_x(\sigma) Q_2(x_0 \otimes x_{\sigma(1)}) \otimes x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} +$$
$$+ (-1)^{x_0} \sum_{\sigma \in Sh_{1,1,n-2}} \varepsilon_x(\sigma) x_0 \otimes Q_2(x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)}).x_{\sigma(3)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Alors $\Big(V[1] \otimes S(V[1]), \Delta, Q\Big)$ *est une* $preL_\infty$ *algèbre dite la* $preL_\infty$ *algèbre enveloppante de* $(V, \diamond, d)$.

4.2. **Algèbre pré-commutative (de Zinbiel) à homotopie près (Z_∞ algèbre).**

Une loi d'algèbre pré-commutative, ou d'algèbre de Zinbiel, est une loi binaire dont le symétrisé est une loi commutative et associative. Plus précisément :

Définition 4.7. [L1, Liv]

On dit que $(V, \wedge, d)$ *est une algèbre de Zinbiel (ou pré-commutative) à droite, différentielle et graduée si* V *est un espace gradué muni d'un produit* $\wedge$ *de degré* 0 *et d'une différentielle* d *de degré* 1 *vérifiant :*

– $\forall x, y, z \in V,\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) + (-1)^{|y||z|} x \wedge (z \wedge y)$,
– $\forall x, y \in V,\ d(x \wedge y) = dx \wedge y + (-1)^{|x|} x \wedge dy$.

Cette structure est associée à une opérade quadratique, l'opérade $Zinb$. L'opérade duale, déterminée par [L1, Liv], est l'opérade Leibniz : $Zinb^! = Leib$.

Rappelons qu'une algèbre de Leibniz (à droite) $(V, [\ ,\ ])$ est un espace gradué V muni d'un crochet $[\ ,\ ]$ de degré 0 vérifiant :

$$\forall x, y, z \in V,\ \ [[x, y], z] = [x, [y, z]] + (-1)^{|y||z|}[[x, z], y].$$

Définition 4.8. [Liv]

Une $Zinb^!$-cogèbre ou cogèbre de Leibniz est un espace vectoriel gradué $\mathcal{C}$ muni d'une comultiplication $\delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ de degré 0 vérifiant :

$$(id \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes id - \tau_{23} \circ (\delta \otimes id)) \circ \delta.$$

La cogèbre de Leibniz colibre engendrée par $V[1]$ est donnée par :

Proposition 4.9. [Liv]

Soit V un espace vectoriel gradué. Alors la cogèbre de Leibniz colibre graduée engendrée par $V[1]$ est $(T^+(V[1]), \delta)$ où δ est défini par :

$$\delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{1 \leq k \leq n-1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \bigotimes \mu_{n-k}(x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n),$$

les μ_j sont définis par récurrence ainsi : $\mu_1 = id$, et, si τ_n est le cycle $(1, \ldots, n)$ de S_n,

$$\mu_{n+1} = \mu_n \otimes id - (\mu_n \otimes id) \circ \tau_{n+1}^{-1}.$$

(Comme pour la volte, l'action des μ_j sur les produits tensoriels est signée).

On peut montrer par récurrence :

Lemme 4.10.
Pour tout p, q positif,

$$\mu_{p+q} \circ sh_{p,q} = 0.$$

Définition 4.11.
Une structure de Z_∞ algèbre est la donnée d'une cogèbre de Leibniz codifférentielle $\Big(T^+(V[1]), \delta, Q\Big)$ telle que Q est une codérivation de δ de degré 1 et de carré nul.

Proposition 4.12. [Liv]

Soit $(V, \wedge, d)$ *une algèbre de Zinbiel différentielle graduée. On pose*

$$Q_1(x) = dx,\ Q_2(x \otimes y) = (-1)^x x \wedge y,\ Q_k = 0,\ \forall k \geq 3,$$

et

$$\begin{aligned} Q(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\sum_{i<k} x_i} x_1 \otimes ... \otimes x_{k-1} \otimes Q_1(x_k) \otimes x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n + \\ & + Q_2(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_n + \\ & + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<k} x_i} x_1 \otimes \cdots \otimes Q_2 \circ \mu_2(x_k \otimes x_{k+1}) \otimes \cdots \otimes x_n . \end{aligned}$$

Alors $\Big(T^+(V[1]), \delta, Q\Big)$ *est une* Z_∞ *algèbre appelée la* Z_∞ *algèbre enveloppante de* $(V, \wedge, d)$.

5. Algèbre pré-Gerstenhaber

Une algèbre pré-Gerstenhaber est une bialgèbre graduée $\mathcal{G}$, pour une loi $\wedge$ pré-commutative, de degré 0 sur $\mathcal{G}$, et une loi $\diamond$ pré-Lie sur $\mathcal{G}[1]$ (donc de degré -1 sur $\mathcal{G}$), avec des relations de compatibilités.

Lorsqu'on symétrise $\wedge$ et antisymétrise $\diamond$, on obtient une structure d'algèbre de Gerstenhaber sur $\mathcal{G}$.

Plus précisément, nous proposons ici la définition suivante :

Définition 5.1.
On dit que $(\mathcal{G}, \wedge, \diamond)$ *est une algèbre pré-Gerstenhaber à droite graduée si :*

– $(\mathcal{G}, \wedge)$ *est une algèbre de Zinbiel à droite graduée,* $|\wedge| = 0$.
– $(\mathcal{G}[1], \diamond)$ *est une algèbre pré-Lie à droite graduée,* $|\diamond| = -1$.
– *On impose les relations de compatibilité suivantes entre* $\wedge$ *et* $\diamond$ *:*

$$\begin{aligned} &\alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta), \\ &\alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma, \\ &(\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma = (-1)^{(|\beta|-1)|\gamma|} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta. \end{aligned}$$

Si on pose $[\alpha, \beta] = \alpha \diamond \beta - (-1)^{(|\alpha|-1)(|\beta|-1)} \beta \diamond \alpha$ et $\alpha . \beta = \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha$, ces relations impliquent que $(\mathcal{G}, ., [\ ,\ ])$ est une algèbre de Gerstenhaber, c'est à dire que la relation de Leibniz est vraie :

$$[\alpha, \beta . \gamma] = [\alpha, \beta] . \gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)} \beta . [\alpha, \gamma].$$

Mais on obtient aussi les deux relations suivantes :

$$\alpha \wedge [\beta, \gamma] = 0,$$
$$[\alpha, \beta \wedge \gamma] = [\alpha, \beta] \wedge \gamma.$$

Dans [Ag], Aguiar a proposé une définition d'algèbre pré-Gerstenhaber avec d'autres conditions de compatibilités. Pour une algèbre à droite, sa définition est équivalente aux conditions de compatibilités suivantes :

$$[\alpha, \beta] \wedge \gamma = \alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) - (-1)^{(|\alpha|-1)|\beta|} \beta \wedge (\alpha \diamond \gamma),$$
$$(\alpha.\beta) \diamond \gamma = (-1)^{|\alpha|(|\gamma|-1)} \alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) + (-1)^{(|\alpha|+|\gamma|-1)|\beta|} \beta \wedge (\alpha \diamond \gamma).$$

Il a aussi construit une telle structure sur $T^+(\mathfrak{g})$, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre pré-Lie.

Les deux relations ci-dessus sont une conséquence de nos relations de compatibilités, notre notion d'algèbre pré-Gerstenahber est plus stricte que celle d'Aguiar.

La première étape de la construction d'une $preG_\infty$ algèbre consiste, comme ci-dessus à construire la Z_∞ algèbre enveloppante $(\mathcal{H}, \delta, D)$ de l'algèbre pré-commutative $(\mathcal{G}, \wedge)$. Cette construction ne dépend pas des conditions de compatibilités.

La deuxième étape, que nous allons présenter dans la section suivante, consiste à prolonger la loi $\diamond$ en une loi R_2 sur $\mathcal{H}$, de telle façon que $(\mathcal{H}, R_2, D)$ soit une algèbre pré-Lie différentielle. Mais les conditions de compatibilités proposées par Aguiar sont insuffisantes pour que D soit une dérivation de R_2, alors que les conditions proposées dans la définition ci-dessus garantissent cette propriété.

Avant de présenter cette construction, donnons un exemple d'algèbre pré-Gerstenhaber.

Exemple 5.2. *Soit $\mathcal{G}$ l'espace des formes différentielles sur une variété M. Si α est une k-forme, on définit le degré de α par : $|\alpha| = k + 1$.*

Soient α et β deux formes différentielles, on définit :

$$\alpha \curlywedge \beta = \frac{1}{|\beta|} \alpha \wedge d\beta \qquad \textit{et} \qquad \alpha \diamond \beta = \alpha \wedge \beta.$$

Alors, on vérifie que $|\curlywedge| = 0$ et $|\diamond| = -1$.

Pour α, β et γ dans $\mathcal{G}$, on vérifie aussi que :

$$(\alpha \curlywedge \beta) \curlywedge \gamma = \alpha \curlywedge (\beta \curlywedge \gamma) + (-1)^{|\beta||\gamma|} \alpha \curlywedge (\gamma \curlywedge \beta),$$

et

$$(\alpha \diamond \beta) \diamond \gamma - \alpha \diamond (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \Big((\alpha \diamond \gamma) \diamond \beta - \alpha \diamond (\gamma \diamond \beta) \Big).$$

Les relations de compatibilités entre $\curlywedge$ et $\diamond$ sont aussi vérifiées :

$$\begin{aligned}
&\alpha \curlywedge (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \alpha \curlywedge (\gamma \diamond \beta),\\
&\alpha \diamond (\beta \curlywedge \gamma) = (\alpha \diamond \beta) \curlywedge \gamma,\\
&(\alpha \diamond \beta) \curlywedge \gamma = (-1)^{(|\beta|-1)|\gamma|} (\alpha \curlywedge \gamma) \diamond \beta.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{G}, \curlywedge, \diamond)$ est bien une algèbre pré-Gerstenhaber.

6. L'ALGÈBRE PRÉ-LIE DIFFÉRENTIELLE $(\mathcal{H}, R_2, D)$

Soit $(\mathcal{G}, \wedge, \diamond)$ une algèbre pré-Gerstenhaber graduée. Puisque $\wedge$ est une loi pré-commutative, on lui associe une cogèbre de Leibniz codifférentielle $(\mathcal{H}, \delta, D)$. Dans cette section, on montre que $\mathcal{H}$ est aussi munie d'une structure d'algèbre pré-Lie différentielle.

Pour cela, on prolonge $\diamond$ à $\mathcal{H}$ en R_2 de telle façon que $(\mathcal{H}, R_2, D)$ soit une algèbre pré-Lie différentielle. Soient $X = \alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p$, et $Y = \alpha_{p+1} \otimes ... \otimes \alpha_{p+q}$ deux éléments de $\mathcal{H}$, on pose :

$$\begin{aligned}
&R_2(X,Y) =\\
&= (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-1,q-1}} (-1)^{(\alpha_2+\cdots+\alpha_p)\alpha_{p+1}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\
&+ \sum_{\substack{2 \le k \le p\\ \sigma \in Sh_{p-k,q-1}}} (-1)^{(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_p)\alpha_{p+1}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \cdots\\
&\qquad \cdots \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)},
\end{aligned}$$

avec : $[\alpha_k, \alpha_{p+1}] = \alpha_k \diamond \alpha_{p+1} - (-1)^{\alpha_k \alpha_{p+1}} \alpha_{p+1} \diamond \alpha_k$.

On rappelle que $deg(X) = deg(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = x$.

Théorème 6.1.
Le triplet $(\mathcal{H}, R_2, D)$ est une algèbre pré-Lie différentielle graduée.

Démonstration.
Montrons d'abord que $(\mathcal{H}, R_2)$ est une algèbre pré-Lie graduée. Soient

$$\begin{aligned}
X &= \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p,\\
Y &= \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q},\\
Z &= \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q+r}
\end{aligned}$$

trois éléments de $\mathcal{H}$. Vérifions la relation $(*)$ suivante :

$$R_2\big(R_2(X,Y),Z\big)-R_2\big(X,R_2(Y,Z)\big)-(-1)^{yz}\Big(R_2\big(R_2(X,Z),Y\big)-R_2\big(X,R_2(Z,Y)\big)\Big)=0.$$

Dans cette relation, il apparaît 4 types de termes :

1. Dans $(*)$, il apparaît des termes avec deux $\diamond$:

$$(\alpha_1\diamond\alpha_{p+1})\diamond\alpha_{p+q+1},\quad \alpha_1\diamond(\alpha_{p+1}\diamond\alpha_{p+q+1}),\quad (\alpha_1\diamond\alpha_{p+q+1})\diamond\alpha_{p+1},\quad \alpha_1\diamond(\alpha_{p+q+1}\diamond\alpha_{p+1}).$$

Ces termes apparaissent sous la forme $\pm terme\otimes\alpha_{\sigma^{-1}(2)}\otimes\dots\alpha_{\sigma^{-1}(p+q+r)}$ où σ est un shuffle de $\{1,\dots,p+q+r\}\setminus\{1,p+1,p+q+1\}$: $\sigma\in Sh_{p-1,q-1,r-1}$. Plus précisément, on pose :

$$\varepsilon_\sigma=\varepsilon_\alpha(\sigma)(-1)^{(x-\alpha_1)\alpha_{p+1}}(-1)^{(x+y-\alpha_1-\alpha_{p+1})\alpha_{p+q+1}},$$

et

$$A_\sigma=\alpha_{\sigma^{-1}(2)}\otimes\dots\widehat{p+1}\dots\widehat{p+q+1}\dots\otimes\alpha_{\sigma^{-1}(p+q+r)}.$$

La contribution des termes correspondants est $C\otimes(\varepsilon_\sigma A_\sigma)$ avec :

$$\begin{aligned}C=&(\alpha_1\diamond\alpha_{p+1})\diamond\alpha_{p+q+1}-\alpha_1\diamond(\alpha_{p+1}\diamond\alpha_{p+q+1})-\\&-\varepsilon'\big((\alpha_1\diamond\alpha_{p+q+1})\diamond\alpha_{p+1}-\alpha_1\diamond(\alpha_{p+q+1}\diamond\alpha_{p+1})\big),\end{aligned}$$

où ε' est le signe :

$$\varepsilon'=(-1)^{yz}(-1)^{(y-\alpha_{p+1})(z-\alpha_{p+q+1})}(-1)^{\alpha_{p+q+1}(y-\alpha_{p+1})+\alpha_{p+1}(z-\alpha_{p+q+1})}=(-1)^{\alpha_{p+1}\alpha_{p+q+1}}.$$

Ces termes se simplifient grâce à la relation pré-Lie de $\diamond$.

2. Dans $(*)$, il apparaît des termes avec un double crochet ou un $\diamond$ dans un crochet :

$$[[\alpha_k,\alpha_{p+1}],\alpha_{p+q+1}],\quad [\alpha_k,\alpha_{p+1}\diamond\alpha_{p+q+1}],\quad [[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}],\alpha_{p+1}],\quad [\alpha_k,\alpha_{p+q+1}\diamond\alpha_{p+1}].$$

Ces termes apparaissent pour $1<k\leq p$ sous la forme

$$\begin{aligned}&\pm(\alpha_1\otimes\dots\otimes\alpha_{k-1})\otimes terme\otimes\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\otimes\dots\widehat{p+1}\dots\widehat{p+q+1}\dots\otimes\alpha_{\sigma^{-1}(p+q+r)}\\=&\pm A_k\otimes terme\otimes B_\sigma.\end{aligned}$$

où σ est dans $Sh_{p-k,q-1,r-1}$ agissant sur $\{k+1,\dots,p+q+r\}\setminus\{p+1,p+q+1\}$. On obtient donc les termes $\varepsilon_\alpha(\sigma)A_k\otimes C\otimes B_\sigma$ avec, le même ε' que ci-dessus :

$$\begin{aligned}C=&[[\alpha_k,\alpha_{p+1}],\alpha_{p+q+1}]-[\alpha_k,\alpha_{p+1}\diamond\alpha_{p+q+1}]-\varepsilon'[[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}],\alpha_{p+1}]+\\&\qquad+\varepsilon'[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}\diamond\alpha_{p+1}]\\=&[[\alpha_k,\alpha_{p+1}],\alpha_{p+q+1}]-[\alpha_k,[\alpha_{p+1},\alpha_{p+q+1}]]-(-1)^{\alpha_{p+1}\alpha_{p+q+1}}[[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}],\alpha_{p+1}]\\=&\,0.\end{aligned}$$

3. Dans $(*)$, il apparaît des termes de la forme

$$\dots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\dots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots,\quad \dots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+q+1}]\otimes\dots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots.$$

Plus précisément :

- Dans $R_2\big(R_2(X,Y),Z\big)$, pour tout $k\in\{2,\dots,p\}$, les termes qui apparaissent sont :
(1.1) : $\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $k<\ell\leq p$,
(1.2) : $\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $p+1<\ell\leq p+q$,
(1.3) : $\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $1<\ell<k$.

- Dans $R_2\big(X,R_2(Y,Z)\big)$, pour tout $k\in\{2,\dots,p\}$, les termes qui apparaissent sont :
(2.1) : $\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $p+1<\ell\leq p+q$.

- Dans $R_2\big(R_2(X,Z),Y\big)$, pour tout $k\in\{2,\dots,p\}$, les termes qui apparaissent sont :
(3.1) : $\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $k<\ell\leq p$,
(3.2) : $\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $p+q+1<\ell\leq p+q+r$,
(3.3) : $\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $1<\ell<k$.

- Dans $R_2\big(X,R_2(Z,Y)\big)$, pour tout $k\in\{2,\dots,p\}$, les termes qui apparaissent sont :
(4.1) : $\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots\otimes[\alpha_\ell,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $p+q+1<\ell\leq p+q+r$.

Il est clair que $(1.2)-(2.1)=0$ et $(3.2)-(4.1)=0$. En utilisant la commutativité des shuffles, on vérifie que $(1.1)=(3.3)$ et $(1.3)=(3.1)$.

4. Enfin, dans $(*)$, il apparaît des termes de la forme

$$\alpha_1\diamond\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots,\qquad \alpha_1\diamond\alpha_{p+q+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\dots.$$

Plus précisément,

- Dans $R_2\big(R_2(X,Y),Z\big)$, les termes qui apparaissent sont :
$(1.1)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $1<k\leq p$,
$(1.2)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $p+1<k\leq p+q$,
$(1.3)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+q+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $1<k\leq p$.

- Dans $R_2\big(X,R_2(Y,Z)\big)$, les termes qui apparaissent sont :
$(2.1)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $p+1<k\leq p+q$.

- Dans $R_2\big(R_2(X,Z),Y\big)$, les termes qui apparaissent sont :
$(3.1)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+q+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $1<k\leq p$,
$(3.2)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+q+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\cdots$, avec $p+q+1<k\leq p+q+r$,
$(3.3)'$: $\alpha_1\diamond\alpha_{p+1}\otimes\cdots\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+q+1}]\otimes\cdots$, avec $1<k\leq p$.

- Dans $R_2\big(X,R_2(Z,Y)\big)$, les termes qui apparaissent sont :

$(4.1)'$: $\alpha_1 \diamond \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes \cdots$, avec $p+q+1 < k \leq p+q+r$.

Il est clair que $(1.2)' - (2.1)' = 0$ et $(3.2)' - (4.1)' = 0$. En utilisant la commutativité des battements, on vérifie que $(1.1)' = (3.3)'$ et $(1.3)' = (3.1)'$.

Montrons maintenant que la différentielle D est une dérivation de R_2. Pour $X = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$, on vérifie que

$$D \circ R_2(X,Y) = R_2\big(D(X), Y\big) + (-1)^x R_2\big(X, D(Y)\big)$$

Rappelons que

$$D(\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p) = D_2(\alpha_1, \alpha_2) \otimes \alpha_3 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$$
$$+ \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<k} \alpha_i} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1} \otimes D_2 \circ \mu_2(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \otimes \alpha_{k+2} \otimes \cdots \otimes \alpha_n.$$

On pose $m_2 = D_2 \circ \mu_2$ et on note symboliquement $D = D_2 + m_2$.

De même, R_2 s'écrit :

$$R_2(X,Y) =$$
$$= (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-1,q-1}} (-1)^{(\alpha_2 + \cdots + \alpha_p)\alpha_{p+1}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$
$$+ \sum_{\substack{2 \leq k \leq p \\ \sigma \in Sh_{p-k,q-1}}} (-1)^{(\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_p)\alpha_{p+1}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes$$
$$\cdots \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Ce qu'on note symboliquement $R_2 = \diamond + [\ ,\ ]$.

La relation à montrer s'écrit donc :

$$(1) = D \circ R_2 = R_2 \circ (D \otimes id) + R_2 \circ (id \otimes D) = (2) + (3).$$

Avec nos notations symboliques, on trouve :

$$(1) = D_2 \circ \diamond + D_2 \circ [\ ,\ ] + m_2 \circ [\ ,\ ] + \diamond \otimes m_2 + D_2 \otimes [\ ,\ ] + \big(m_2 \otimes [\ ,\ ] + [\ ,\ ] \otimes m_2\big)$$
$$= (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) + (1.5) + (1.6).$$

De même :

$$(2) = \diamond \circ (D_2 \otimes id) + [\ ,\ ] \circ (m_2 \otimes id) + \diamond \otimes m_2 + D_2 \otimes [\ ,\ ] + \big(m_2 \otimes [\ ,\ ] + [\ ,\ ] \otimes m_2\big)$$
$$= (2.1) + (2.2) + (2.3) + (2.4) + (2.5),$$
$$(3) = \diamond \circ (id \otimes D_2) + [\ ,\ ] \circ (id \otimes D_2) + \diamond \otimes m_2 + [\ ,\ ] \otimes m_2$$
$$= (3.1) + (3.2) + (3.3) + (3.4).$$

La preuve consiste à vérifier les 6 égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1.1) = (2.1) + (3.1),\\
&(1.2) = 0,\\
&(1.3) = (2.2) + (3.2),\\
&(1.4) = (2.3) + (3.3),\\
&(1.5) = (2.4),\\
&(1.6) = (2.5) + (3.4).
\end{aligned}$$

Les trois premières font intervenir les conditions de compatibilités et nous les détaillons ci-dessous.

1. $(1.1) = (2.1) + (3.1)$.
   Les termes de (1.1) sont :

$$(1.1) = \sum_{\sigma \in Sh_{p-1,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma)(-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_2+\cdots+\alpha_p)} D_2(\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}, \alpha_{\sigma^{-1}(2)}) \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

   Comme σ est un shuffle, on a $\sigma^{-1}(2) = 2$ ou $\sigma^{-1}(2) = p+2$.
   De même,

$$(2.1) = (D_2(\alpha_1, \alpha_2) \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-2,q-1}} (-1)^{(\alpha_3+\cdots+\alpha_p)\alpha_{p+1}} \varepsilon_\alpha(\sigma) \alpha_{\sigma^{-1}(3)} \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)},$$

   et

$$\begin{aligned}(3.1) = (\alpha_1 \diamond D_2(\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2})) \otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-2,q-1}} & (-1)^{(\alpha_2+\cdots+\alpha_p)(\alpha_{p+1}+\alpha_{p+2})} \varepsilon_\alpha(\sigma) \\ & \alpha_{\sigma^{-1}(3)} \otimes \cdots \widehat{p+1\ p+2} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.\end{aligned}$$

   Avec les relations de compatibilité :

$$\alpha \diamond (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma \quad \text{et} \quad (\alpha \diamond \beta) \wedge \gamma = (-1)^{(|\beta|-1)|\gamma|} (\alpha \wedge \gamma) \diamond \beta,$$

   ceci prouve la relation $(1.1) = (2.1) + (3.1)$.

2. $(1.2) = 0$.
   Les termes de (1.2) sont :

$$(1.2) = D_2(\alpha_1, [\alpha_2, \alpha_{p+1}]) \otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-2,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_3+\cdots+\alpha_p)} \alpha_{\sigma^{-1}(3)} \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

   Avec la relation de compatibilité :

$$\alpha \wedge (\beta \diamond \gamma) = (-1)^{(|\beta|-1)(|\gamma|-1)} \alpha \wedge (\gamma \diamond \beta),$$

   ceci prouve la relation $(1.2) = 0$.

3. $(1.3) = (2.2) + (3.2)$.

Les termes de (1.3) sont :

$$(1.3) = \sum_{3\leq k\leq p} (-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_p)}\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-2} \otimes m_2(\alpha_{k-1}, [\alpha_k, \alpha_{p+1}])\otimes$$
$$\otimes \sum_{\sigma\in Sh_{p-k,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma)\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}+$$
$$+ (-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_k+\cdots+\alpha_p)}\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-2} \otimes \sum_{\sigma\in Sh_{p-k-1,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma)m_2([\alpha_{k-1}, \alpha_{p+1}], \alpha_{\sigma^{-1}(k)})\otimes$$
$$\otimes \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Comme σ est un shuffle, on a $\sigma^{-1}(k) = k$ ou $\sigma^{-1}(k) = p + 2$.

De même,

$$(2.2) = \sum_{3\leq k\leq p} (-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_p)}\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-2} \otimes [m_2(\alpha_{k-1}, \alpha_k), \alpha_{p+1}]\otimes$$
$$\otimes \sum_{\sigma\in Sh_{p-k,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma)\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \ldots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Et

$$(3.2) = \sum_{3\leq k\leq p} (-1)^{(\alpha_{p+1}+\alpha_{p+2})(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_p)}\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-2} \otimes [\alpha_{k-1}, D_2(\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2})]\otimes$$
$$\otimes \sum_{\sigma\in Sh_{p-k,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma)\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \cdots \widehat{p+1\ p+2} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Avec la relation de compatibilité :

$$[\alpha, \beta \wedge \gamma] = [\alpha, \beta] \wedge \gamma,$$

ceci prouve la relation $(1.3) = (2.2) + (3.2)$.

Il reste 3 relations ne dépendant pas des relations de compatibilités. On expose ici de façon moins détaillée leur preuve :

4. $(1.4) = (2.3) + (3.3)$.

Les termes de (1.4) sont :

$$(1.4) = (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \sum_{\substack{k\in\{2,\ldots,p+q-1\}\setminus\{p+1\}\\ \sigma\in Sh_{p-1,q-1}}} (-1)^{\alpha_1+\alpha_{p+1}+\alpha_{\sigma^{-1}(2)}+\cdots+\alpha_{\sigma^{-1}(k-1)}}(-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_2+\cdots+\alpha_p)}$$
$$\varepsilon_\alpha(\sigma)\alpha_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Dans (1.4), les termes qui correspondent à ($\sigma^{-1}(k) \in \{2, \ldots, p\}$ et $\sigma^{-1}(k + 1) \in \{p + 2, \ldots, p + q\}$) et ($\sigma^{-1}(k + 1) \in \{2, \ldots, p\}$ et $\sigma^{-1}(k) \in \{p + 2, \ldots, p + q\}$) se simplifient entre eux. Il ne reste que les termes qui correspondent à

$\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(k+1) \in \{2, \ldots, p\}$: ces termes correspondent à ceux de (2.3),
$\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(k+1) \in \{p+2, \ldots, p+q\}$: ces termes sont ceux de (3.3).

5. $(1.5) = (2.4)$.
   Les termes de (1.5) sont :

$$(1.5) = D_2(\alpha_1, \alpha_2) \otimes \sum_{3 \leq k \leq p} (-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_p)} \alpha_3 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes$$
$$\otimes \sum_{\sigma \in Sh_{p-k,q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma) \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \ldots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Ceci est exactement le terme (2.4).

6. $(1.6) = (2.5) + (3.4)$.
   Les termes de (1.6) sont :

$$(1.6) = \sum_{2 \leq k \leq p} (-1)^{\alpha_{p+1}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_p)} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes \sum_{\substack{\sigma \in Sh_{p-k,q-1} \\ k+1 \leq j \leq p+q-1}} \varepsilon_\alpha(\sigma)$$
$$\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)} \otimes \cdots \otimes m_2\big(\alpha_{\sigma^{-1}(j)}, \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)}\big) \otimes \cdots \widehat{p+1} \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Dans (1.6), les termes qui correspondent à ($\sigma^{-1}(j) \in \{2, \ldots, p\}$ et $\sigma^{-1}(j+1) \in \{p+2, \ldots, p+q\}$) et ($\sigma^{-1}(j+1) \in \{2, \ldots, p\}$ et $\sigma^{-1}(j) \in \{p+2, \ldots, p+q\}$) se simplifient entre eux. Il ne reste que les termes qui correspondent à
$\sigma^{-1}(j), \sigma^{-1}(j+1) \in \{2, \ldots, p\}$: ces termes correspondent à ceux de (2.5),
$\sigma^{-1}(j), \sigma^{-1}(j+1) \in \{p+2, \ldots, p+q\}$: ces termes sont ceux de (3.4).

□

Maintenant, puisque $(\mathcal{H}, R_2, D)$ est une algèbre pré-Lie différentielle graduée, on construit comme dans la section précédente, sa $preL_\infty$ algèbre enveloppante $(\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1]), \Delta, Q)$. Explicitement, dans $\mathcal{H}[1]$, le degré est $deg'(X) = deg(X) - 1 = x'$, on pose

$$R'_2(X,Y) = (-1)^{x'} R_2(X,Y) \quad \text{et} \quad \ell_2(X,Y) = R'_2(X,Y) + (-1)^{x'y'} R'_2(Y,X).$$

On prolonge ensuite à $\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1])$, D et R'_2 en m et R par :

$$\begin{aligned} m(X_0 \otimes X_1 \ldots X_n) &= D(X_0) \otimes X_1 \ldots X_n + \\ &\qquad + (-1)^{x'_0} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_j \; x_1 \ldots \hat{j} \ldots x_n \end{smallmatrix} \right) X_0 \otimes D(X_j) X_1 \ldots \hat{j} \ldots X_n \\ &= D(X_0) \otimes X_1 \ldots X_n + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes m'(X_1 \ldots X_n), \end{aligned}$$

où m' est la codérivation donnée comme ci-dessus dans le cas des algèbres de Gerstenhaber.

De même,

$$R(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x'} \begin{pmatrix} & x_1 \dots x_n \\ x_i & x_1 \dots \hat{\imath} \dots x_n \end{pmatrix} R'_2(X_0, X_i) \otimes X_1 \dots \widehat{\imath} \dots X_n +$$

$$+ (-1)^{x'_0} \sum_{i<j} \varepsilon_{x'} \begin{pmatrix} & & x_1 \dots x_n \\ x_i & x_j & x_1 \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots x_n \end{pmatrix} X_0 \otimes \ell_2(X_i, X_j) X_1 \dots \widehat{ij} \dots X_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x'} \begin{pmatrix} & x_1 \dots x_n \\ x_i & x_1 \dots \hat{\imath} \dots x_n \end{pmatrix} R'_2(X_0, X_i) \otimes X_1 \dots \widehat{\imath} \dots X_n + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes \ell'(X_1 \dots X_n),$$

où ℓ' est la codérivation donnée comme ci-dessus dans le cas des algèbres de Gerstenhaber.

Si on pose $Q = (m + R)$, alors Q est une codérivation de Δ vérifiant $deg'(Q) = 1$ et $Q^2 = 0$. Ainsi :

Corollaire 6.2.
Le triplet $(\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1]), \Delta, Q = m + R)$ est une cogèbre permutative codifférentielle, c'est à dire une $preL_\infty$ algèbre.

Il reste à construire sur cette $preL_\infty$ algèbre le coproduit κ qui fera de $\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1])$ une cogèbre de Leibniz. C'est le but de la section suivante.

7. Le coproduit κ

D'abord, on a vu que $(\mathcal{H}, \delta)$ est une cogèbre de Leibniz. On rappelle que :

$$\delta(X) = \delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{1 \le k \le n-1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \bigotimes \mu_{n-k}(x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_n).$$

On note simplement le coproduit δ :

$$\delta(X) = \sum_{U \otimes V = X} U \otimes \mu V.$$

On se place maintenant dans $\mathcal{H}[1]$, le coproduit δ symétrisé sera noté κ.

Définition 7.1.
Sur $\mathcal{H}[1]$, on définit le cocrochet suivant :

$$\kappa(X_0) = \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{u'_0} \Big(U_0 \bigotimes \mu V_0 + (-1)^{u'_0 v'_0} \mu V_0 \bigotimes U_0 \Big)$$

Ce cocrochet κ se prolonge en un coproduit, toujours noté κ, défini sur $\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1])$ par :

$$\kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1,\dots,n\}}} (-1)^{u'_0} \times \Big(\varepsilon_{x'} \Big(\begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J \end{smallmatrix} \Big) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 . X_J$$
$$+ \varepsilon_{x'} \Big(\begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I \end{smallmatrix} \Big) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 . X_I \Big) + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes \kappa'(X_1 \dots X_n),$$

où κ' est le cocrochet sur $S^+(\mathcal{H}[1])$, défini comme dans la section sur les algèbres de Gerstenhaber par :

$$\kappa'(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x'_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u'_s} \times$$
$$\times \Big(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I\ u_s\ v_s\ x_J \end{smallmatrix} \right) X_I . U_s \bigotimes \mu V_s . X_J + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I\ v_s\ u_s\ x_J \end{smallmatrix} \right) X_I . \mu V_s \bigotimes U_s . X_J \Big).$$

Maintenant κ est un coproduit de degré 1 qui, en un certain sens, prolonge le coproduit de Leibniz δ, de degré 0, défini sur $\mathcal{H}$. En fait, on peut dire que $(\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1]), \kappa)$ est une cogèbre de Leibniz, en tenant compte de ce décalage de degré. C'est à dire :

Proposition 7.2.
Le coproduit κ vérifie :

$$-(id \otimes \kappa) \circ \kappa = \big(\kappa \otimes id + \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \big) \circ \kappa.$$

Démonstration.
D'une part, on a

$$- (id \otimes \kappa) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) =$$
$$= -(id \otimes \kappa) \Big(\sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1,\dots,n\}}} (-1)^{u'_0} \times \Big(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 . X_J +$$
$$+ \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 . X_I \Big) + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes \kappa'(X_1 \dots X_n) \Big)$$
$$= - \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1,\dots,n\}}} (-1)^{u'_0} \times \Big(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \kappa'(\mu V_0 . X_J) +$$
$$+ \varepsilon_{x'} \Big(\begin{smallmatrix} u_0 v_0 x_1 \dots x_n \\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I \end{smallmatrix} \Big) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes \kappa'(U_0 . X_I) \Big) - (-1)^{x'_0} X_0 \otimes (id \otimes \kappa') \circ \kappa'(X_1 \dots X_n)$$
$$= (1.1) + (1.2),$$

où $(1,2)$ est le dernier terme, en $X_0 \otimes \kappa' \circ (id \otimes \kappa')$.

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
&(\kappa\otimes id)\circ\kappa(X_0\otimes X_1\dots X_n)=\\
&=(\kappa\otimes id)\Big(\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}}}(-1)^{u_0'}\times\Big(\varepsilon_{x'}\Big(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\Big)U_0\otimes X_I\bigotimes\mu V_0.X_J\\
&\qquad+\varepsilon_{x'}\Big(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\Big)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes U_0.X_I\Big)+(-1)^{x_0'}X_0\otimes\kappa'(X_1\dots X_n)\Big)\\
&=\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}}}(-1)^{u_0'}\times\Big(\varepsilon_{x'}\Big(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\Big)\kappa(U_0\otimes X_I)\bigotimes\mu V_0.X_J+\\
&\qquad+\varepsilon_{x'}\Big(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\Big)\kappa(\mu V_0\otimes X_J)\bigotimes U_0.X_I\Big)+(-1)^{x_0'}\kappa(X_0)\otimes\kappa'(X_1\dots X_n)+\\
&\qquad+(-1)^{x_0'}X_0\otimes(\kappa'\otimes id)\circ\kappa'(X_1\dots X_n)\\
&=(2.1)+(2.2),
\end{aligned}
$$

où $(2,2)$ est le dernier terme, en $X_0\otimes(\kappa'\otimes id)\circ\kappa'$.

Et on a aussi :

$$
\begin{aligned}
&\tau_{23}\circ(\kappa\otimes id)\circ\kappa(X_0\otimes X_1\dots X_n)=\\
&=\tau_{23}\Big(\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}}}(-1)^{u_0'}\times\Big(\varepsilon_{x'}\big(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\big)\,\kappa(U_0\otimes X_I)\bigotimes\mu V_0.X_J+\\
&\qquad+\varepsilon_{x'}\big(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\big)\,\kappa(\mu V_0\otimes X_J)\bigotimes U_0.X_I\Big)+(-1)^{x_0'}\kappa(X_0)\otimes\kappa'(X_1\dots X_n)\Big)+\\
&\qquad+(-1)^{x_0'}X_0\otimes\tau_{23}\circ(\kappa'\otimes id)\circ\kappa'(X_1\dots X_n)\\
&=(3.1)+(3.2),
\end{aligned}
$$

où (3.2) est le terme en $X_0\otimes\tau_{23}\circ(\kappa'\otimes id)\circ\kappa'$.

L'identité de coJacobi est vérifiée par κ' : elle se montre comme pour les G_∞-algèbres ([AAC]), donc $(1.2)=(2.2)+(3.2)$.

Dans tous les termes restants, l'élément X_0 a été coupé au moins une fois. Ces termes correspondent donc au cas où on coupe deux fois X_0 par κ et au cas où on coupe une fois X_0 et une fois un des X_t ($t>0$) par κ.

Commençons d'abord par le cas où on coupe deux fois X_0 par κ. Notons $X_0\mapsto U_0\otimes V_0\otimes W_0$ cette double césure.

- Dans (1.1), on trouve les termes :

$$
\varepsilon_1U_0\bigotimes V_0\bigotimes W_0+\varepsilon_2U_0\bigotimes W_0\bigotimes V_0+\varepsilon_3W_0\bigotimes U_0\bigotimes V_0+\varepsilon_4W_0\bigotimes V_0\bigotimes U_0.
$$

- Dans (2.1), on trouve les termes :

$$\nu_1 U_0 \bigotimes V_0 \bigotimes W_0 + \nu_2 V_0 \bigotimes U_0 \bigotimes W_0 + \nu_3 V_0 \bigotimes W_0 \bigotimes U_0 + \nu_4 W_0 \bigotimes V_0 \bigotimes U_0.$$

- Dans (3.1), on trouve les termes :

$$\rho_1 U_0 \bigotimes W_0 \bigotimes V_0 + \rho_2 V_0 \bigotimes W_0 \bigotimes U_0 + \rho_3 V_0 \bigotimes U_0 \bigotimes W_0 + \rho_4 W_0 \bigotimes U_0 \bigotimes V_0.$$

On vérifie que $\varepsilon_1 = \nu_1$, $\varepsilon_2 = \rho_1$, $\varepsilon_3 = \rho_4$, $\varepsilon_4 = \nu_4$, $\nu_2 = -\rho_3$ et $\nu_3 = -\rho_2$. Expliquons par exemple l'égalité $\varepsilon_1 = \nu_1$.

Pour ε_1, on a effectué les opérations ($Y_0 = V_0 \otimes W_0$) :

$$X_0 \stackrel{\kappa}{\longmapsto} (-1)^{u'_0} U_0 \bigotimes Y_0 \stackrel{-id\otimes\kappa}{\longmapsto} -(-1)^{u'_0}(-1)^{u'_0+v'_0} U_0 \bigotimes V_0 \bigotimes W_0.$$

Donc $\varepsilon_1 = (-1)^{v'_0+1}$.

Pour ν_1, on a effectué les opérations ($Y_0 = U_0 \otimes V_0$, $y'_0 = u'_0 + v'_0 + 1$) :

$$X_0 \stackrel{\kappa}{\longmapsto} (-1)^{u'_0+v'_0+1} Y_0 \bigotimes W_0 \stackrel{\kappa\otimes id}{\longmapsto} (-1)^{u'_0}(-1)^{u'_0+v'_0+1} U_0 \bigotimes V_0 \bigotimes W_0.$$

Donc $\nu_1 = (-1)^{v'_0+1} = \varepsilon_1$.

Etudions maintenant le cas où on coupe une fois X_0 et une fois un des X_t ($t > 0$) par κ.

Posons $X_0 \mapsto U_0 \otimes V_0$, et $X_t \mapsto U_t \otimes V_t$. Cherchons les termes correspondants. L'influence des X_s ($s \neq t$) sur le signe provient uniquement de l'application de la règle de Koszul. On peut donc les négliger dans la suite du calcul.

- Dans (1.1), nécessairement κ agit sur X_0 et $(id \otimes \kappa)$ sur X_t. On a donc les opérations

$$X_0 \otimes X_1 \dots X_n \stackrel{\kappa}{\longmapsto} \pm U_0 X_t \bigotimes V_0 \pm U_0 \bigotimes V_0 X_t \pm V_0 X_t \bigotimes U_0 \pm V_0 \bigotimes U_0 X_t.$$

On applique ensuite $-(id \otimes \kappa)$ sur $U_0 \bigotimes V_0 X_t$, les termes correspondants sont :

$$\varepsilon_1 U_0 \bigotimes V_0 U_t \bigotimes V_t + \varepsilon_2 U_0 \bigotimes V_0 V_t \bigotimes U_t + \varepsilon_3 U_0 \bigotimes U_t \bigotimes V_t V_0 + \varepsilon_4 U_0 \bigotimes V_t \bigotimes U_t V_0.$$

De même, on applique $-(id \otimes \kappa)$ sur $V_0 \bigotimes U_0 X_t$, les termes correspondants sont :

$$\varepsilon_5 V_0 \bigotimes U_0 U_t \bigotimes V_t + \varepsilon_6 V_0 \bigotimes U_0 V_t \bigotimes U_t + \varepsilon_7 V_0 \bigotimes U_t \bigotimes V_t U_0 + \varepsilon_8 V_0 \bigotimes V_t \bigotimes U_t U_0.$$

- On trouve de même 8 termes dans (2.1) et 8 autres termes dans (3.1), donc 16 termes dans $(2.1) + (3.1)$, 8 d'entre eux sont ceux de (1.1), les 8 restants se simplifient deux à deux.

  Par exemple le premier terme de (1.1) est $\varepsilon_1 U_0 \bigotimes V_0 U_t \bigotimes V_t$. Il apparaît avec le signe :

$$\varepsilon_1 = -(-1)^{u'_0}(-1)^{u'_0+v'_0}(-1)^{u'_t} = (-1)^{u'_t+v'_0+1}.$$

Ce terme n'apparaît pas dans (3.1) et il apparaît une seule fois dans (2.1), lorsque κ coupe X_t et $(\kappa \otimes id)$ coupe X_0. Il apparaît avec le signe :

$$(-1)^{u'_t}(-1)^{u'_0+v'_0+1}(-1)^{u'_0} = (-1)^{u'_t+v'_0+1} = \varepsilon_1.$$

Enfin un exemple de simplification : dans (2.1) on trouve un seul terme de la forme $(U_0 \otimes U_t) \bigotimes V_t \bigotimes V_0$. Il apparaît ainsi :

$$X_0 \otimes X_t \mapsto \pm(U_0 \otimes X_t) \bigotimes V_0 \mapsto \varepsilon_2(U_0 \otimes U_t) \bigotimes V_t \bigotimes V_0.$$

Ce terme apparaît une seule fois dans (3.1), précisément dans $\tau_{23}(\kappa(X_0)\otimes\kappa'(X_1 \dots X_n))$, ainsi :

$$X_0 \otimes X_t \mapsto \pm(X_0 \otimes U_t) \bigotimes V_t \mapsto \pm(U_0 \otimes U_t) \bigotimes V_0 \bigotimes V_t \mapsto \varepsilon_3(U_0 \otimes U_t) \bigotimes V_t \bigotimes V_0.$$

On obtient alors puisque $x'_0 = u'_0 + v'_0 + 1$ et $x'_t = u'_t + v'_t + 1$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= (-1)^{u'_0}(-1)^{v'_0x'_t}(-1)^{u'_t+u'_0} = (-1)^{u'_t+v'_0x'_t},\\ \varepsilon_3 &= (-1)^{x'_0+u'_t}(-1)^{u'_0+v'_0u'_t}(-1)^{v'_0v'_t} = -\varepsilon_2.\end{aligned}$$

□

En fait, les coproduits de Leibniz, κ et permutatif, Δ ont des propriétés de compatibilités, ce qui fait de $(\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa)$ une bicogèbre au sens de Loday ([L2]).

Proposition 7.3.
Les coproduits Δ et κ vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$\begin{aligned}&(1) : (id \otimes \kappa) \circ \Delta = \tau_{23} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta,\\ &(2) : (id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta,\\ &(3) : (\Delta \otimes id) \circ \kappa = (id \otimes \kappa) \circ \Delta + \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \Delta.\end{aligned}$$

Démonstration.
(1) On rappelle que :

$$\Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = X_0 \bigotimes X_1 \dots X_n + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes \Delta'(X_1 \dots X_n).$$

où $\Delta'(X_1 \dots X_n)$ est le coproduit défini sur la cogèbre cocommutative $S^+(\mathcal{H}[1])$. On a donc :

$$(id \otimes \kappa) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \Big(X_0 \bigotimes \kappa' + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes \big(id \otimes \kappa'\big) \circ \Delta'\Big)(X_1 \dots X_n).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\tau_{23} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) =\\ &\qquad = \Big(X_0 \bigotimes \tau_{23} \circ \kappa' + (-1)^{x'_0} X_0 \otimes \big(id \otimes \tau_{23} \circ \kappa'\big) \circ \Delta'\Big)(X_1 \dots X_n).\end{aligned}$$

Comme κ' est cosymétrique, $\tau_{23} \circ \kappa' = \kappa'$. Ainsi,

$$\tau_{23} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta = (id \otimes \kappa) \circ \Delta.$$

(2) D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
&(id \otimes \Delta) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
&= (id \otimes \Delta)\Big(\sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J = \{1,\dots,n\}}} (-1)^{u_0'} \Big(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 . X_J + \\
&\qquad + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 . X_I \Big) + (-1)^{x_0'} X_0 \otimes \kappa'(X_1 \dots X_n) \Big) \\
&= \sum_{\substack{U_0 \otimes V_0 = X_0 \\ I \cup J \cup K = \{1,\dots,n\}; K \neq \emptyset}} (-1)^{u_0'} \Big\{ \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_{J \cup K} \end{smallmatrix} \right) \Big(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} v_0 & x_{J \cup K} \\ v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 . X_J \bigotimes X_K + \\
&\qquad + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} v_0 & x_{J \cup K} \\ x_K & v_0 & x_J \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes X_K \bigotimes \mu V_0 . X_J \Big) + \\
&\qquad + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_{I \cup K} \end{smallmatrix} \right) \Big(\varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & x_{I \cup K} \\ u_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 . X_I \bigotimes X_K + \\
&\qquad + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & x_{I \cup K} \\ x_K & u_0 & x_I \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes X_K \bigotimes U_0 . X_I \Big) \Big\} + \\
&\qquad + (-1)^{x_0'} X_0 \otimes (id \otimes \Delta') \circ \kappa'(X_1 \dots X_n) \\
&= (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) + (1.5).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&(\kappa \otimes id) \circ \Delta(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \\
&= (\kappa \otimes id)\Big(X_0 \bigotimes X_1 \dots X_n + (-1)^{x_0'} X_0 \otimes \Delta'(X_1 \dots X_n) \Big) \\
&= \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{u_0'} \Big(\Big(U_0 \bigotimes \mu V_0 \bigotimes X_1 \dots X_n + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 \\ v_0 & u_0 \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \bigotimes U_0 \bigotimes X_1 \dots X_n \Big) \\
&\qquad + \sum_{\substack{I \cup J \cup K = \{1,\dots,n\} \\ I \cup K \neq \emptyset, J \neq \emptyset}} \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_{I \cup J} & x_K \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 . X_J \bigotimes X_K + \\
&\qquad + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_{I \cup J} & x_K \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 . X_I \bigotimes X_K \Big) + \\
&\qquad + X_0 \otimes (\kappa' \otimes id) \circ \Delta'(X_1 \dots X_n) \\
&= \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} (-1)^{u_0'} \sum_{\substack{I \cup J \cup K = \{1,\dots,n\} \\ K \neq \emptyset}} \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots x_n \\ u_0 & x_I & v_0 & x_J & x_K \end{smallmatrix} \right) U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0 . X_J \bigotimes X_K + \\
&\qquad + \varepsilon_{x'} \left(\begin{smallmatrix} u_0 & v_0 & x_1 \dots & x_n \\ v_0 & x_J & u_0 & x_I & x_K \end{smallmatrix} \right) \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0 . X_I \bigotimes X_K + \\
&\qquad + X_0 \otimes (\kappa' \otimes id) \circ \Delta'(X_1 \dots X_n),
\end{aligned}$$

Ce qu'on note

$$(\kappa\otimes id)\circ\Delta(X_0\otimes X_1\dots X_n)=(2.1)+(2.2)+(2.3).$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\tau_{23}\circ(\kappa\otimes id)\circ\Delta(X_0\otimes X_1\dots X_n)=\\
&=\sum_{U_0\otimes V_0=X_0}(-1)^{u_0'}\sum_{\substack{I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\}\\ K\neq\emptyset}}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ u_0&x_I&v_0&x_J&x_K\end{smallmatrix}\right)\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}v_0&x_J&x_K\\ x_K&v_0&x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_I\bigotimes X_K\bigotimes\mu V_0.X_J+\\
&\qquad\qquad+\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ v_0&x_J&u_0&x_I&x_K\end{smallmatrix}\right)\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&x_I&x_K\\ x_K&u_0&x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes X_K\bigotimes U_0.X_I+\\
&\qquad\qquad+X_0\otimes\tau_{23}\circ(\kappa'\otimes id)\circ\Delta'(X_1\dots X_n)\\
&=(3.1)+(3.2)+(3.3).
\end{aligned}$$

On vérifie que $(1.5)=(2.3)+(3.3)$, grâce à l'identité de coLeibniz entre Δ' et κ', établie comme dans [AAC]. De même, $(1.1)=(2.1)$, $(1.3)=(3.1)$, $(1.2)=(2.2)$ et $(1.4)=(3.2)$.

(3) D'une part, on a

$$\begin{aligned}
&(\Delta\otimes id)\circ\kappa(X_0\otimes X_1\dots X_n)=\\
&=(\Delta\otimes id)\Big(\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\}}}(-1)^{u_0'}\Big(\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ u_0&x_{I\cup K}&v_0&x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_{I\cup K}\bigotimes\mu V_0.X_J+\\
&\qquad+\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ v_0&x_{J\cup K}&u_0&x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_{J\cup K}\bigotimes U_0.X_I\Big)+(-1)^{x_0'}X_0\otimes\kappa'(X_1\dots X_n)\Big)\\
&=\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\};K\neq\emptyset}}(-1)^{u_0'}\Big\{\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ u_0&x_I&x_K&v_0&x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_I\bigotimes X_K\bigotimes\mu V_0.X_J+\\
&\qquad+\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ v_0&x_J&x_K&u_0&x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes X_K\bigotimes U_0.X_I\Big\}+(-1)^{x_0'}X_0\bigotimes\kappa'(X_1\dots X_n)+\\
&\qquad+(-1)^{x_0'}X_0\otimes(\Delta'\otimes id)\circ\kappa'(X_1\dots X_n)\\
&=(1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&(id\otimes\kappa)\circ\Delta(X_0\otimes X_1\dots X_n)=\\
&\qquad=(-1)^{x_0'}X_0\bigotimes\kappa'(X_1\dots X_n)+(-1)^{x_0'}X_0\otimes(id\otimes\kappa')\circ\Delta'(X_1\dots X_n)\\
&\qquad=(2.1)+(2.2).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\tau_{23}\circ(\kappa\otimes id)\circ\Delta(X_0\otimes X_1\dots X_n) =&\\
=&\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J\cup K=\{1,\dots,n\};K\neq\emptyset}}(-1)^{u_0'}\Big\{\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ u_0&x_I&x_K&v_0&x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_I\bigotimes X_K\bigotimes\mu V_0.X_J+\\
&\qquad+\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0&v_0&x_1\dots x_n\\ v_0&x_J&x_K&u_0&x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes X_K\bigotimes U_0.X_I\Big\}+\\
&\qquad+(-1)^{x_0'}X_0\otimes\Big(\tau_{23}\circ(\kappa'\otimes id)\circ\Delta'\Big)(X_1\dots X_n)\\
=&\,(3.1)+(3.2)+(3.3).
\end{aligned}$$

L'identité de coLeibniz donne $(1.4)=(2.2)+(3.3)$. On vérifie que

$$(1.1)=(3.1),\quad (1.2)=(3.2),\quad (1.3)=(2.1).$$

□

On a ainsi muni l'espace $\mathcal{H}[1]\otimes S(\mathcal{H}[1])$ d'une structure de bicogèbre permutative et de Leibniz. On note cette bicogèbre $(\mathcal{H}[1]\otimes S(\mathcal{H}[1]),\Delta,\kappa)$.

8. Algèbre pré-Gerstenhaber à homotopie près

On va montrer que les codérivations m et R de Δ, obtenues à partir des lois de $\mathcal{G}$, sont aussi des codérivations du coproduit κ. Par conséquent $m+R$ est une codifférentielle à la fois pour Δ et pour κ. On posera donc :

Définition 8.1.
Une algèbre pré-Gerstenhaber à homotopie près est, pour le même opérateur Q, une cogèbre permutative codifférentielle $(\mathcal{C},\Delta,Q)$ et une cogèbre de Leibniz codifférentielle $(\mathcal{C},\kappa,Q)$ telle que les deux coproduits Δ et κ satisfassent les relations de compatibilités suivantes :

$$\begin{aligned}
(id\otimes\kappa)\circ\Delta &= \tau_{23}\circ(id\otimes\kappa)\circ\Delta,\\
(id\otimes\Delta)\circ\kappa &= (\kappa\otimes id)\circ\Delta+\tau_{23}\circ(\kappa\otimes id)\circ\Delta,\\
(\Delta\otimes id)\circ\kappa &= (id\otimes\kappa)\circ\Delta+\tau_{23}\circ(\kappa\otimes id)\circ\Delta.
\end{aligned}$$

Proposition 8.2.
Soit $\mathcal{G}$ une algèbre pré-Gerstenhaber. Sur la bicogèbre $(\mathcal{H}[1]\otimes S(\mathcal{H}[1]),\Delta,\kappa)$, l'opérateur de degré 1 et de carré nul $Q=m+R$ est une codérivation du coproduit κ.

Démonstration.
1. Montrons d'abord que m est une codérivation de κ : $(m\otimes id+id\otimes m)\circ\kappa=-\kappa\circ m$.

On rappelle que :

$$\kappa(X_0\otimes X_1\dots X_n)=\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}}}(-1)^{u'_0}\times\Big(\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_I\bigotimes\mu V_0.X_J+$$
$$+\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes U_0.X_I\Big)+(-1)^{x'_0}X_0\otimes\kappa'(X_1\dots X_n)$$

et

$$m(X_0\otimes X_1\dots X_n)=D(X_0)\otimes X_1\dots X_n+(-1)^{x'_0}X_0\otimes m'(X_1\dots X_n),$$

où on a noté m' la codifférentielle m de Δ' et κ' dans $S^+(\mathcal{H}[1])$.

En développant, on trouve alors 10 termes dans $(m\otimes id+id\otimes m)\circ\kappa$ et dans $-\kappa\circ m$.

- D'une part $(m\otimes id+id\otimes m)\circ\kappa(X_0\otimes X_1\dots X_n)$ s'écrit

$$\sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}}}(-1)^{u'_0}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\right)\Big(D(U_0)\otimes X_I\bigotimes\mu V_0.X_J+(-1)^{u'_0}U_0\otimes m'(X_I)\bigotimes\mu V_0.X_J\Big)$$
$$+(-1)^{u'_0}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\right)\Big(D(V_0)\otimes X_J\bigotimes U_0.X_I+(-1)^{v'_0}\mu V_0\otimes m'(X_J)\bigotimes U_0.X_I\Big)$$
$$+(-1)^{u'_0+x'_I+u'_0}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_I\bigotimes D(\mu V_0).X_J+$$
$$+(-1)^{u'_0+x'_I+u'_0+v'_0}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J\end{smallmatrix}\right)U_0\otimes X_I\bigotimes\mu V_0.m'(X_J)+$$
$$+(-1)^{u'_0+x'_J+v'_0}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes D(U_0).X_I+$$
$$+(-1)^{u'_0+x'_J+v'_0+u'_0}\varepsilon_{x'}\left(\begin{smallmatrix}u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I\end{smallmatrix}\right)\mu V_0\otimes X_J\bigotimes U_0.m'(X_I)+$$
$$+(-1)^{x'_0}D(X_0)\otimes\kappa'(X_1\dots X_n)+$$
$$+(-1)^{x'_0}X_0\bigotimes(m'\otimes id+id\otimes m')\circ\kappa'(X_1\dots X_n)$$
$$=(1.1)+\dots+(1.10).$$

- De même, puisque $\mu D(V_0)=D(\mu V_0)$, et si $X_0=U_0\otimes V_0$,

$$D(X_0)=D(U_0)\otimes V_0+(-1)^{u'_0}U_0\otimes D(V_0)=U'_0\otimes V_0+(-1)^{u'_0}U_0\otimes V'_0,$$

et comme $m'(X_I.X_J)=m'(X_I).X_J+(-1)^{x'_I}X_I.m'(X_J)=X'_I.X_J\pm X_I.X'_J$, alors on développe $-\kappa\circ m(X_0\otimes X_1\dots X_n)$ en :

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}}} \Big((-1)^{u_0''}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0'v_0x_1\dots x_n\\ u_0'\ x_I\ v_0\ x_J\end{pmatrix} U_0'\otimes X_I \bigotimes \mu V_0.X_J +\\
&\quad + (-1)^{u_0''}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0'v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0'\ x_I\end{pmatrix} \mu V_0\otimes X_J \bigotimes U_0'.X_I +\\
&\quad + (-1)^{u_0'+u_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0v_0'x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0'\ x_J\end{pmatrix} U_0\otimes X_I \bigotimes \mu V_0'.X_J +\\
&\quad + (-1)^{u_0'+u_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0v_0'x_1\dots x_n\\ v_0'\ x_J\ u_0\ x_I\end{pmatrix} \mu V_0'\otimes X_J \bigotimes U_0.X_I +\\
&\quad + (-1)^{u_0'+x_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I'\ v_0\ x_J\end{pmatrix} U_0\otimes m'(X_I) \bigotimes \mu V_0.X_J +\\
&\quad + (-1)^{u_0'+x_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J\ u_0\ x_I'\end{pmatrix} \mu V_0\otimes X_J \bigotimes U_0.m'(X_I) +\\
&\quad + (-1)^{u_0'+x_I'+x_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0v_0x_1\dots x_n\\ u_0\ x_I\ v_0\ x_J'\end{pmatrix} U_0\otimes X_I \bigotimes \mu V_0.m'(X_J) +\\
&\quad + (-1)^{u_0'+x_I'+x_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} u_0v_0x_1\dots x_n\\ v_0\ x_J'\ u_0\ x_I\end{pmatrix} \mu V_0\otimes m'(X_J) \bigotimes U_0.X_I \Big) -\\
&\quad - (-1)^{x_0'+1} D(X_0)\otimes \kappa'(X_1\dots X_n) -\\
&\quad - (-1)^{x_0'+x_0'} X_0 \bigotimes \kappa'\circ m'(X_1\dots X_n)\\
&= (2.1)+\dots+(2.10).
\end{aligned}
$$

On a immédiatement $(1.10) = (2.10)$ car on sait que m' est une codérivation de κ' (comme dans [AAC]). On a aussi immédiatement $(1.9) = (2.9)$. Les autres termes se simplifient deux à deux suivant le tableau :

$$
\begin{array}{llll}
(1.1) = (2.1), & (1.2) = (2.5), & (1.3) = (2.4), & (1.4) = (2.8),\\
(1.5) = (2.3), & (1.6) = (2.7), & (1.7) = (2.2), & (1.8) = (2.6).
\end{array}
$$

Vérifions par exemple l'égalité des signes dans (1.2) et (2.5). Shématiquement :

$$
\begin{array}{ccccc}
X_0\otimes X_I.X_J & \mapsto & (U_0\otimes X_I)\bigotimes \mu V_0.X_J & \mapsto & (U_0\otimes m'(X_I))\bigotimes \mu V_0.X_J\\
\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} x_0\dots x_n\\ x_0x_Ix_J\end{pmatrix} & & (-1)^{u_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} v_0x_I\\ x_Iv_0\end{pmatrix} & & (-1)^{u_0'}
\end{array}
$$

Donc $\varepsilon_{(1.2)}$, le produit de ces trois signes, est $(-1)^{x_I'v_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} x_0\dots x_n\\ x_0x_Ix_J\end{pmatrix}$.

Et

$$
\begin{array}{ccccc}
X_0\otimes X_I.X_J & \mapsto & X_0\otimes m'(X_I).X_J & \mapsto & (U_0\otimes m'(X_I))\bigotimes \mu V_0.X_J\\
-\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} x_0\dots x_n\\ x_0x_Ix_J\end{pmatrix} & & (-1)^{x_0'} & & (-1)^{u_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} v_0x_I'\\ x_I'v_0\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Donc

$$
\varepsilon_{(2.5)} = -(-1)^{v_0'+1}(-1)^{(x_I'+1)v_0'}\varepsilon_{x'}\begin{pmatrix} x_0\dots x_n\\ x_0x_Ix_J\end{pmatrix} = \varepsilon_{(1.2)}.
$$

2. Montrons maintenant que R est une codérivation de κ : $(R\otimes id + id\otimes R)\circ\kappa = -\kappa\circ R$.

On rappelle que :

$$R(X_0 \otimes X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x'} \left({x_1 \dots x_n \atop x_i \; x_1 \dots \hat{i} \dots x_n} \right) R_2'(X_0, X_i) \otimes X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n +$$
$$(-1)^{x_0'} X_0 \otimes \ell'(X_1 \dots X_n),$$

où ℓ' est la codérivation de la cogèbre $(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa')$ construite ci-dessus.

On identifie les termes apparaissant dans $(R \otimes id + id \otimes R) \circ \kappa(X_0 \otimes X_1 \dots X_n)$ ainsi : si $\{1, \dots, n\} = I \cup J \cup \{s\}$, et X_s est un des arguments de R :

$$\begin{aligned}
(1.1) :\ & \varepsilon_{(1.1)} R_2'(U_0, X_s) \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.X_J,\\
(1.2) :\ & \varepsilon_{(1.2)} R_2'(\mu V_0, X_s) \otimes X_J \bigotimes U_0.X_I,\\
(1.3) :\ & \varepsilon_{(1.3)} R_2'(X_0, U_s) \otimes X_I \bigotimes \mu V_s.X_J,\\
(1.4) :\ & \varepsilon_{(1.4)} R_2'(X_0, \mu V_s) \otimes X_J \bigotimes U_s.X_I,\\
(1.5) :\ & \varepsilon_{(1.5)} U_0 \otimes X_I \bigotimes \ell_s'(\mu V_0.X_s.X_J),\\
(1.6) :\ & \varepsilon_{(1.6)} \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes \ell_s'(U_0.X_s.X_I),\\
(1.7) :\ & \varepsilon_{(1.7)} U_0 \otimes \ell_s'(X_s.X_I) \bigotimes \mu V_0.X_J,\\
(1.8) :\ & \varepsilon_{(1.8)} \mu V_0 \otimes \ell_s'(X_s.X_J) \bigotimes U_0.X_I,\\
(1.9) :\ & \varepsilon_{(1.9)} R_2'(X_0, X_s) \otimes \kappa'(X_1 \dots \hat{s} \dots X_n),\\
(1.10) :\ & \varepsilon_{(1.10)} X_0 \otimes (\ell' \otimes id + id \otimes \ell') \circ \kappa'(X_1 \dots X_n).
\end{aligned}$$

De même, dans $-\kappa \circ R(X_0 \otimes X_1 \dots X_n)$, les termes qui apparaissent sont les suivants : où on a posé $R_2'(X_0, X_s) = U_{0s} \otimes V_{0s}$.

$$\begin{aligned}
(2.1) :\ & \varepsilon_{(2.1)} U_{0s} \otimes X_I \bigotimes \mu V_{0s}.X_J,\\
(2.2) :\ & \varepsilon_{(2.2)} \mu V_{0s} \otimes X_J \bigotimes U_{0s}.X_I,\\
(2.3) :\ & \varepsilon_{(2.3)} U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.\ell_s'(X_s.X_J),\\
(2.4) :\ & \varepsilon_{(2.4)} \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0.\ell_s'(X_s.X_I),\\
(2.5) :\ & \varepsilon_{(2.5)} U_0 \otimes \ell_s'(X_s.X_I) \bigotimes \mu V_0.X_J,\\
(2.6) :\ & \varepsilon_{(2.6)} \mu V_0 \otimes \ell_s'(X_s.X_J) \bigotimes U_0.X_I,\\
(2.7) :\ & \varepsilon_{(2.7)} R_2'(X_0, X_s) \otimes \kappa'(X_1 \dots \hat{s} \dots X_n),\\
(2.8) :\ & \varepsilon_{(2.8)} X_0 \otimes \kappa' \circ \ell'(X_1 \dots X_n).
\end{aligned}$$

Comme dans la preuve précédente, les 4 derniers termes de ces deux listes se simplifient deux à deux :

$$(1.10) = (2.8), \quad (1.9) = (2.7), \quad (1.8) = (2.6), \quad (1.7) = (2.5).$$

On décompose ensuite (1.5) et (1.6) en :

$$\begin{aligned}
(1.5) &= \varepsilon_{(1.5)} \Big(U_0 \otimes X_I \bigotimes \ell'_s(\mu V_0.X_s).X_J + (-1)^{v'_0} U_0 \otimes X_I \bigotimes \mu V_0.\ell'_s(X_s.X_J) \Big) \\
&= (1.5)_1 + (1.5)_2, \\
(1.6) &= \varepsilon_{(1.6)} \Big(\mu V_0 \otimes X_J \bigotimes \ell'_s(U_0.X_s).X_I + (-1)^{u'_0} \mu V_0 \otimes X_J \bigotimes U_0.\ell'_s(X_s.X_I) \Big) \\
&= (1.6)_1 + (1.6)_2.
\end{aligned}$$

On vérifie que $(1.5)_2 = (2.3)$ et $(1.6)_2 = (2.4)$. Dans tous les termes restants, X_I et X_J sont de simples facteurs, on est en fait ramené à prouver la relation sur $X_0 \otimes X_s$.

Dans la suite de la preuve, on pose $s = 1$.
Posons $X_0 = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p = \alpha_{[1,p]}$ et $X_1 = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q} = \alpha_{[p+1,p+q]}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
R'_2(X_0 \otimes X_1) &= (-1)^{x'_0 + \alpha_{p+1}\alpha_{[2,p]}} (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes sh(\alpha_{[2,p]}, \alpha_{[p+2,p+q]}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{p} (-1)^{x'_0 + \alpha_{p+1}\alpha_{[k+1,p]}} \alpha_{[1,k-1]} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes sh(\alpha_{[k+1,p]}, \alpha_{[p+2,p+q]}).
\end{aligned}$$

En appliquant $-\kappa$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&- \kappa \circ R'_2(X_0 \otimes X_1) = \\
&= \varepsilon_1 (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \bigotimes \mu\big(sh(\alpha_{[2,p]}, \alpha_{[p+2,p+q]})\big) \\
&\quad + \varepsilon'_1 \mu\big(sh(\alpha_{[2,p]}, \alpha_{[p+2,p+q]})\big) \bigotimes (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \\
&\quad + \sum_{\substack{2 \le k \le p+q \\ \sigma \in Sh_{p-1,q-1}}} \varepsilon_2 (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \alpha_{\sigma^{-1}([2,k])} \bigotimes \mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}([k+1,p+q] \setminus \{p+1\})}\big) \\
&\quad + \sum_{\substack{2 \le k \le p+q \\ \sigma \in Sh_{p-1,q-1}}} \varepsilon'_2 \mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}([k+1,p+q] \setminus \{p+1\})}\big) \bigotimes (\alpha_1 \diamond \alpha_{p+1}) \otimes \alpha_{\sigma^{-1}([2,k])} \\
&\quad + \sum_{j < k \le p} \varepsilon_3 \alpha_{[1,j-1]} \bigotimes \mu\Big(\alpha_{[j,k-1]} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes sh(\alpha_{[k+1,p]}, \alpha_{[p+2,p+q]})\Big) \\
&\quad + \sum_{j < k \le p} \varepsilon'_3 \mu\Big(\alpha_{[j,k-1]} \otimes [\alpha_k, \alpha_{p+1}] \otimes sh(\alpha_{[k+1,p]}, \alpha_{[p+2,p+q]})\Big) \bigotimes \alpha_{[1,j-1]}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{2\leq k\leq p} \varepsilon_4 \alpha_{[1,k-1]} \bigotimes \mu\Big([\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes sh(\alpha_{[k+1,p]},\alpha_{[p+2,p+q]})\Big)$$
$$+ \sum_{2\leq k\leq p} \varepsilon'_4 \mu\Big([\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes sh(\alpha_{[k+1,p]},\alpha_{[p+2,p+q]})\Big) \bigotimes \alpha_{[1,k-1]}$$
$$+ \sum_{\substack{j>k\\ \sigma\in Sh_{j-k,p+q-j-1}}} \varepsilon_5 \alpha_{[1,k-1]}\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\alpha_{\sigma^{-1}([k+1,j])} \bigotimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}([j+1,p+q])})$$
$$+ \sum_{\substack{j>k\\ \sigma\in Sh_{j-k,p+q-j-1}}} \varepsilon'_5 \mu(\alpha_{\sigma^{-1}([j+1,p+q])}) \bigotimes \alpha_{[1,k-1]}\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\alpha_{\sigma^{-1}([k+1,j])}$$
$$= (1)+(1)'+(2)+(2)'+(3)+(3)'+(4)+(4)'+(5)+(5)'.$$

Puisque $\mu\circ sh = 0$, alors, $(1)=(1)'=0$.

Pour la même raison, dans (2), et $(2)'$, les ensembles $\sigma^{-1}([a,b])$ sont inclus dans $[2,p]$ ou $[p+2,p+q]$, de même dans (5), et $(5)'$, $\sigma^{-1}([j+1,p+q])$ est inclus dans $[k+1,p]$ ou $[p+2,p+q]$.

Donc

$$(2)=(2)_0+(2)_1 = \sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\setminus\{\alpha_1\}\\ \sigma\in Sh}} \pm(\alpha_1\diamond\alpha_{p+1})\otimes\sigma.(U_0\otimes X_1\setminus\{\alpha_{p+1}\}) \bigotimes \mu(V_0)$$
$$+ \sum_{\substack{U_1\otimes V_1=X_1\setminus\{\alpha_{p+1}\}\\ \sigma\in Sh}} \pm(\alpha_1\diamond\alpha_{p+1})\otimes\sigma.(X_0\setminus\{\alpha_1\}\otimes U_1) \bigotimes \mu(V_1).$$

Et de même pour $(2)'$.

Dans (5), il reste :

$$(5)=(5)_0+(5)_1 = \sum_{\substack{k,U_0^k\otimes V_0=X_0\setminus\alpha_{[1,k]}\\ \sigma\in Sh}} \pm\alpha_{[1,k-1]}\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\sigma.(U_0^k\otimes X_1\setminus\{\alpha_{p+1}\}) \bigotimes \mu(V_0)$$
$$+ \sum_{\substack{k,U_1\otimes V_1=X_1\setminus\{\alpha_{p+1}\}\\ \sigma\in Sh}} \pm\alpha_{[1,k-1]}\otimes[\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes\sigma.(X_0\setminus\alpha_{[1,k]}\otimes U_1) \bigotimes \mu(V_1).$$

De même pour $(5)'$.

Enfin on remarque que :

$$(4)+(3) = \sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ U_0=\alpha_{[1,k-1]}}} \pm U_0 \bigotimes R'_2(\mu V_0\otimes X_1)$$
$$+ \sum_{\substack{U_0\otimes V_0=X_0\\ U_0=\alpha_{[1,k-1]}}} \pm U_0 \bigotimes \mu\Big([\alpha_k,\alpha_{p+1}]\otimes sh\big(V_0\setminus\{\alpha_k\},X_1\setminus\{\alpha_{p+1}\}\big)\Big).$$

Donc

$$(4) + (3) = \sum_{U_0 \otimes V_0 = X_0} \pm U_0 \bigotimes \ell'_2(\mu V_0.X_1).$$

Et de même pour $(4)' + (3)'$.

On vérifie enfin les égalités suivantes

$$\begin{array}{ccc} (4) + (3) = (1.5)_1, & (4)' + (3)' = (1.2), & (2)_0 + (5)_0 = (1.1), \\ (2)'_0 + (5)'_0 = (1.6)_1, & (2)_1 + (5)_1 = (1.3), & (2)'_1 + (5)'_1 = (1.4). \end{array}$$

Ce qui achève la preuve.

□

On a ainsi montré que $(\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1]), \kappa, Q)$ est une cogèbre de Leibniz codifférentielle, c'est à dire, c'est une Z_∞ algèbre.

Théorème 8.3.

Soit $(\mathcal{G}, \wedge, \diamond)$ une algèbre pré-Gerstenhaber, notons $\mathcal{H} = T^+(\mathcal{G}[1])$, Δ, κ les coproduits et $Q = m + R$, la codérivation définis ci-dessus sur $\mathcal{H}[1] \otimes S^+(\mathcal{H}[1])$, alors

$$(\mathcal{H}[1] \otimes S(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa, Q)$$

est une $preG_\infty$ algèbre, appelée la $preG_\infty$ algèbre enveloppante de $(\mathcal{G}, \wedge, \diamond)$.

RÉFÉRENCES

[A] W. Aloulou, *Les (a, b)-algèbres à homotopie près*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 17, no 1 (2010), 97-151.

[AAC] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologies de Chevalley-Harrison*, Bull. Sci. Math., vol 133, (2009) 1-50.

[AAC1] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels*, Pacific J of Math, vol 229, no 2, (2007) 257-292.

[Ag] M. Aguiar, *Pre-Poisson algebras*, Lett. Math. Phys. Vol 54 (2000), 263-277.

[AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.

[BGHHW] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.C. Herbig, S. Waldmann, *Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous variétés coïsotropes*, math.QA/0504276 v 1 13 Apr 2005.

[ChL] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not., vol 8, (2001), 395-408.

[F] B. Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 13, no 2 (2006), 237-312.

[G] G. Ginot, *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 11, no 1 (2004), 95-126.

[GK] V. Ginzburg, M. Kapranov*Kozul duality for operads*, Duke Math. J. vol 76, (1994), 203-272.

[Liv] M. Livernet, *Rational homotopy of Leibniz algebras*, Manuscripta Math. vol 96, (1998), 295-315.

[L1] J.L. Loday, *La renaissance des opérades*, Astérisque, vol 237,(1996), Séminaire Bourbaki 1994/1995, expo. no. 792.

[L2] J.L. Loday, *Dialgebras*, Prébub. Inst. Rech. Math. Av. 14 (1999).

[Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. vol 90, (1969), 205-295.

Université de Sousse, Laboratoire de Mathématique Physique Fonctions Spéciales et Applications et Département de Mathématiques, Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax, Route Menzel Chaker Km 0.5, Sfax, 3018, Tunisie
E-mail address: `Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn`

Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, U.F.R. Sciences et Techniques B.P. 47870, F-21078 Dijon Cedex, France
E-mail address: `Didier.Arnal@u-bourgogne.fr`

Université de Sousse, Laboratoire de Mathématique Physique Fonctions Spéciales et Applications et Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l'environnement, 5019 Monastir, Tunisie
E-mail address: `Ridha.Chatbouri@ipeim.rnu.tn`