



**HAL**  
open science

# Un théorème concernant les opérateurs à trace dans le formalisme de la convolution gauche

Salvador Miracle-Sole

► **To cite this version:**

Salvador Miracle-Sole. Un théorème concernant les opérateurs à trace dans le formalisme de la convolution gauche. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1966, 262, pp.1478-1480. hal-00708356

**HAL Id: hal-00708356**

**<https://hal.science/hal-00708356>**

Submitted on 14 Jun 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

*Un théorème concernant les opérateurs à trace dans le formalisme de la convolution gauche*

Note (\*) de M. SALVADOR MIRACLE-SOLÉ,  
présenté par M. Alfred Kastler.

**Abstract**

On donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction sur l'espace des phases corresponde à un opérateur à trace dans le formalisme de la convolution gauche. En particulier, ces conditions sont satisfaites par les fonctions de l'espace  $\mathcal{S}$ .

Dans le cadre du formalisme de la convolution gauche introduit par D. Kastler dans [(<sup>1</sup>), (<sup>2</sup>)], désignons comme dans (<sup>3</sup>) par  $\mathcal{T}(E, \sigma)$  l'espace des fonctions sur l'espace symplectique  $(E, \sigma)$  de la forme  $u \times v$ , avec  $u, v \in \mathcal{L}_2(E)$ , dont l'image par la représentation de Schrödinger  $\pi_\omega$  est une \*-algèbre de Banach pour le produit de convolution gauche (noté  $\times$ ) et la norme

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \text{Tr}\{\pi_\omega(f)^* \pi_\omega(f)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nous nous proposons de prouver directement l'inclusion topologique de l'espace  $\mathcal{S}(E)$  des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide dans  $\mathcal{T}(E, \sigma)$ .

Pour simplifier les notations nous nous plaçons dans un espace symplectique de dimension 2. Nous utiliserons les propriétés ci-dessous des polynômes  $H_n$  et des fonctions  $h_n$  d'Hermite

$$(1) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2};$$

$$(2) \quad h_n(x) = \{2^n n! \sqrt{\pi}\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x);$$

$$(3) \quad \int h_m(x) h_n(x) dx = \delta_{mn};$$

$$(4) \quad H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0;$$

$$(5) \quad xh_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}h_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}h_{n-1}(x);$$

$$(6) \quad \int e^{i\alpha x} h_n(\alpha) d\alpha = i^n \sqrt{2\pi} h_n(x),$$

ainsi que les formules

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{F}\{\delta(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\} = \frac{1}{1-2ix} = g(x), \\ \mathcal{F}\{e^{-\alpha}Y(\alpha)\delta(\beta)\} = g(-y), \\ \mathcal{F}\{e^{-\alpha}Y(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\} = g(x)g(-y), \end{cases}$$

où  $\mathcal{F}$  est la transformation de Fourier symplectique d'échelle 2 sur  $E$  utilisée dans (4) et  $Y$  la fonction de Heaviside.

On sait que tout  $f \in \mathcal{S}(E)$  possède un développement convergent dans  $\mathcal{S}(E)$  :

$$f(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn} h_m(x) h_n(y)$$

où  $\{c_{mn}\}$  est une suite à décroissance rapide (5). De plus,  $\mathcal{S}(E)$  est topologiquement isomorphe à l'espace vectoriel de toutes ces suites lorsqu'on le munit de la topologie définie par la famille des normes

$$N_{p,q}(\{c_{mn}\}) = \left\{ \sum_{m,n} |c_{mn}|^2 m^{2p} n^{2q} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad p, q \text{ entiers}$$

Puisque

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \sum_{m,n} |c_{mn}| \|h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}},$$

nous aurons terminé si nous prouvons que  $\|h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}}$  se comporte comme  $mn$  lorsque  $m, n \rightarrow \infty$ . En effet, d'après l'inégalité de Schwartz,

$$\sum_{m,n} |c_{mn}| mn \leq \left\{ \sum_{m,n} |c_{mn}|^2 m^4 n^4 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{m,n} \frac{1}{m^2 n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = N_{22} \sum_n \frac{1}{n^2}.$$

Notons que, alors nous aurons prouvé aussi qu'il suffit d'exiger que les fonctions  $x^p y^q$ ,  $\partial^{p+q} f / \partial x^p \partial y^q$ , pour tous les entiers  $p, q$  tels que  $0 \leq p \leq 4$ ,  $0 \leq q \leq 4$  soient dans  $\mathcal{L}_2(E)$  pour conclure que  $f \in \mathcal{T}(E, \sigma)$ .

LEMME. — Soit  $\mu$  une mesure bornée sur  $E$ ,  $f$  une fonction de  $\mathcal{T}(E, \sigma)$  et posons  $g(\xi) = \{\mathcal{F}\mu\}(\xi)f(\xi)$ . Alors  $g \in \mathcal{T}(E, \sigma)$  et  $\|g\|_{\mathcal{T}} \leq \|\mu\|_1 \|f\|_{\mathcal{T}}$ .

En effet, si  $\delta_{\xi}$  désigne la mesure de Dirac concentrée au point  $\xi$ ,  $\{\delta_{\xi} \times f \times \delta_{-\xi}\}(\eta) = e^{2i\sigma(\eta, \xi)} f(\eta) \in \mathcal{T}(E, \sigma)$ , donc

$$\{\mathcal{F}\mu\}.f = \int \{\delta_{\xi} \times f \times \delta_{-\xi}\} d\mu(\xi),$$

où le second membre est l'intégrale de Bochner d'une fonction à valeurs dans l'espace de Banach  $\mathcal{T}(E, \sigma)$ , et alors

$$\|\{\mathcal{F}\mu\}.f\|_{\mathcal{T}} = \int \|\delta_{\xi} \times f \times \delta_{-\xi}\|_{\mathcal{T}} d|\mu|(\xi) \leq \|f\|_{\mathcal{T}} \|\mu\|_1,$$

Grâce à la formule (6), il vient d'abord :

$$2\pi i^{m+n} h_m(x) h_n(y) = \int e^{i(\alpha x + \beta y)} h_m(\alpha) h_n(\beta) d\alpha d\beta$$

que nous pouvons écrire en multipliant par un facteur égal à 1

$$(-1)^n \int e^{i(\beta x - \alpha y)} h_m(\beta) h_n(\alpha) \frac{(1-2ix)(1+2iy)+2i\alpha(1+2iy)-2i\beta(1-2ix)+4\alpha\beta}{(1-2ix+2i\alpha)(1+2iy-2i\beta)}.$$

Par conséquent, d'après (7),

$$\begin{aligned} & 2\pi i^{m+n} (-1)^n g(-y) h_m(x) h_n(y) \\ &= \int e^{i(\beta x - \alpha y)} h_m(\beta) h_n(\alpha) g(x - \alpha) g(-y + \beta) \\ & \quad \times [1 + 2i\alpha g(x) - 2i\beta g(-y) + 4\alpha\beta g(x)g(-y)] d\alpha d\beta = h_n(x) h_m(y) \times g(x)g(-y) \\ & \quad + 2i\mathcal{F}\{\delta(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\}\{xh_n(x)h_m(y) \times g(x)g(-y)\} \\ & \quad - 2i\mathcal{F}\{\delta(\beta)e^{-\alpha}Y(\alpha)\}\{yh_n(x)h_m(y) \times g(x)g(-y)\} \\ & \quad + 4\mathcal{F}\{e^{-\alpha}Y(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\}\{xyh_n(x)h_m(y) \times g(x)g(-y)\}. \end{aligned}$$

Utilisant la formule suivante, prouvée dans (3) :

$$\|u \times v\|_{\mathcal{T}} \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \quad [u, v \in \mathcal{L}_2(E)]$$

et le lemme, il vient

$$\begin{aligned} & 2\pi \|g(x)g(-y)h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}} \\ & \leq \|g(x)g(-y)\|_2 \|h_n(x)h_m(y)\|_2 + 2\|xh_n(x)h_m(y)\|_2 \\ & \quad + 2\|yh_n(x)h_m(y)\|_2 + 4\|xyh_n(x)h_m(y)\|_2 \end{aligned}$$

en sachant que

$$\|\delta(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\|_1 = \|\delta(\beta)e^{-\alpha}Y(\alpha)\|_1 = \|e^{-\alpha}Y(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\|_1 = 1.$$

Mais, d'après (3) et (5) :

$$\int [xh_n(x)]^2 dx = \int \left[ \sqrt{\frac{n+1}{2}}h_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{n}{2}}h_{n-1}(x) \right]^2 dx = n + \frac{1}{2},$$

donc

$$\|g(x)g(-y)h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}} \leq K \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)},$$

où

$$K = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right).$$

Nous obtenons alors le résultat voulu car, toujours d'après (5),

$$h_n(x) = g(\pm x) \{ h_n(x) \pm i\sqrt{2(n+1)}h_{n+1}(x) \pm i\sqrt{n}h_{n-1}(x) \}$$

et, par conséquent,

$$\|h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}} \leq K' \left(m + \frac{3}{2}\right) \left(n + \frac{3}{2}\right),$$

avec

$$K' = 2\pi^2 \left( \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)^2.$$

Notre résultat permet alors une démonstration rapide du fait, prouvé dans (3), que les opérateurs bornés sur la représentation  $\pi_\omega$  peuvent être interprétés comme des distributions tempérées, le produit des opérateurs correspondant au produit de convolution gauche des distributions défini dans (6).

(\*) Séance du 20 juin 1966. Publiée aux *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 262, p. 1478–1480 (27 juin 1966). *Série A*.

(1) D. KASTLER, *Commun. Math. Phys.*, 1, 1965, p. 14.

(2) D. KASTLER, *Phase Space Quantum Mechanics*, Lecture Notes, Argonne, Illinois, août 1965.

(3) G. LOUPIAS, *Comptes rendus*, 262, série A, 1966, p. 799.

(4) G. LOUPIAS, S. MIRACLE-SOLÉ, *Commun. Math. Phys.*, 2, 1966, p. 31.

(5) L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Paris, 1959, II, chap. VII, 7.

(6) G. LOUPIAS, *Comptes rendus*, 262, *Série A*, 1966, p. 469.

(*Faculté des Sciences de Marseille,  
Place Victor-Hugo, Marseille, France.*)