HAL
open science

Un théorème concernant les opérateurs à trace dans le formalisme de la convolution gauche

Salvador Miracle-Sole

To cite this version:

Salvador Miracle-Sole. Un théorème concernant les opérateurs à trace dans le formalisme de la convolution gauche. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1966, 262, pp.1478-1480. hal-00708356

HAL Id: hal-00708356

https://hal.science/hal-00708356v1

Submitted on 14 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Un théorème concernant les opérateurs à trace dans le formalisme de la convolution gauche

Note (*) de M. **Salvador Miracle-Solé**,
présenté par M. Alfred Kastler.

Abstract

On donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction sur l'espace des phases corresponde à un opérateur à trace dans le formalisme de la convolution gauche. En particulier, ces conditions sont satisfaites par les fonctions de l'espace $\mathcal{S}$.

Dans le cadre du formalisme de la convolution gauche introduit par D. Kastler dans [(1), (2)], désignons comme dans (3) par $\mathcal{T}(E,\sigma)$ l'espace des fonctions sur l'espace symplectique (E,σ) de la forme $u\times v$, avec $u,v\in\mathcal{L}_2(E)$, dont l'image par la représentation de Schrödinger π_ω est une *-algèbre de Banach pour le produit de convolution gauche (noté $\times$) et la norme

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \mathrm{Tr}\{\pi_\omega(f)^*\pi_\omega(f)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nous nous proposons de prouver directement l'inclusion topologique de l'espace $\mathcal{S}(E)$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide dans $\mathcal{T}(E,\sigma)$.

Pour simplifier les notations nous nous plaçons dans un espace symplectique de dimension 2. Nous utiliserons les propriétés ci-dessous des polynomes H_n et des fonctions h_n d'Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}; \tag{1}$$

$$h_n(x) = \{2^n n!\sqrt{\pi}\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)\,; \tag{2}$$

$$\int h_m(x)h_n(x)dx = \delta_{mn}\,; \tag{3}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,; \tag{4}$$

$$xh_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}h_{n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}h_{n-1}(x)\,; \tag{5}$$

$$\int e^{i\alpha x}h_n(\alpha)da = i^n\sqrt{2\pi}h_n(x)\,, \tag{6}$$

ainsi que les formules

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{\delta(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\} = \frac{1}{1-2ix} = g(x), \\ \mathcal{F}\{e^{-\alpha}Y(\alpha)\delta(\beta)\} = g(-y), \\ \mathcal{F}\{e^{-\alpha}Y(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\} = g(x)g(-y), \end{cases} \tag{7}$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier symplectique d'échelle 2 sur E utilisée dans ([4]) et Y la fonction de Heaviside.

On sait que tout $f \in \mathcal{S}(E)$ possède un dèveloppement convergeant dans $\mathcal{S}(E)$:

$$f(x,y) = \sum_{m,n} c_{mn}h_m(x)h_n(x)$$

où $\{c_{mn}\}$ est une suite à décroissance rapide ([5]). De plus, $\mathcal{S}(E)$ est topologiquement isomorphe à l'espace vectoriel de toutes ces suites lorsqu'on le munit de la topologie définie par la famille des normes

$$N_{p,q}(\{c_{mn}\}) = \Big\{\sum_{m,n}|c_{mn}|^2m^{2p}n^{2q}\Big\}^{\frac{1}{2}}\,, \quad p,\, q \ \text{ entiers}$$

Puisque

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \sum_{m,n}|c_{mn}|\,\|h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}}\,,$$

nous aurons terminé si nous prouvons que $\|h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}}$ se comporte comme mn lorsque $m,n \to \infty$. En effet, d'après l'inégalité de Schwartz,

$$\sum_{m,n}|c_{mn}|mn \le \Big\{\sum_{m,n}|c_{mn}|^2m^4n^4\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{m,n}\frac{1}{m^2n^2}\Big\}^{\frac{1}{2}} = N_{22}\sum_n\frac{1}{n^2}\,.$$

Notons que, alors nous aurons prouvé aussi qu'il suffit d'exiger que les fonctions x^py^q, $\partial^{p+q}f/\partial x^p\partial y^q$, pour tous les entiers p, q tels que $0 \le p \le 4$, $0 \le q \le 4$ soient dans $\mathcal{L}_2(E)$ pour conclure que $f \in \mathcal{T}(E,\sigma)$.

Lemme. — *Soit μ une mesure bornée sur E, f une fonction de $\mathcal{T}(E,\sigma)$ et posons $g(\xi) = \{\mathcal{F}\mu\}(\xi)f(\xi)$. Alors $g \in \mathcal{T}(E,\sigma)$ et $\|g\|_{\mathcal{T}} \leq \|\mu\|_1 \|f\|_{\mathcal{T}}$.*

En effet, si δ_ξ désigne la mesure de Dirac concentrée au point ξ, $\{\delta_\xi \times f \times \delta_{-\xi}\}(\eta) = e^{2i\sigma(\eta,\xi)} f(\eta) \in \mathcal{T}(E,\sigma)$, donc

$$\{\mathcal{F}\mu\}.f = \int \{\delta_\xi \times f \times \delta_{-\xi}\}\, d\mu(\xi),$$

où le second membre est l'intégrale de Bochner d'une fonction à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{T}(E,\sigma)$, et alors

$$\|\{\mathcal{F}\mu\}f\|_{\mathcal{T}} = \int \|\delta_\xi \times f \times \delta_{-\xi}\|_{\mathcal{T}}\, d|\mu|(\xi) \leq \|f\|_{\mathcal{T}} \|\mu\|_1\,,$$

Grâce à la formule (6), il vient d'abord :

$$2\pi i^{m+n} h_m(x) h_n(y) = \int e^{i(\alpha x + \beta y)} h_m(\alpha) h_n(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

que nous pouvons écrire en multipliant par un facteur égal à 1

$$(-1)^n \int e^{i(\beta x - \alpha y)} h_m(\beta) h_n(\alpha) \tfrac{(1-2ix)(1+2iy)+2i\alpha(1+2iy)-2i\beta(1-2ix)+4\alpha\beta}{(1-2ix+2i\alpha)(1+2iy-2i\beta)}\,.$$

Par conséquent, d'après (7),

$$\begin{aligned}
&2\pi i^{m+n}(-1)^n g(-y) h_m(x) h_n(y)\\
&\quad = \int e^{i(\beta x - \alpha y)} h_m(\beta) h_n(\alpha) g(x-\alpha) g(-y+\beta)\\
&\qquad \times[1+2i\alpha g(x) - 2i\beta g(-y) + 4\alpha\beta g(x) g(-y)] d\alpha d\beta = h_n(x) h_m(y) \times g(x) g(-y)\\
&\qquad +2i\mathcal{F}\{\delta(\alpha) e^{-\beta} Y(\beta)\}\{x h_n(x) h_m(y) \times g(x) g(-y)\}\\
&\qquad -2i\mathcal{F}\{\delta(\beta) e^{-\alpha} Y(\alpha)\}\{y h_n(x) h_m(y) \times g(x) g(-y)\}\\
&\qquad +4\mathcal{F}\{e^{-\alpha} Y(\alpha) e^{-\beta} Y(\beta)\}\{xy h_n(x) h_m(y) \times g(x) g(-y)\}.
\end{aligned}$$

Utilisant la formule suivante, prouvée dans ([3]) :

$$\|u \times v\|_{\mathcal{T}} \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \quad [u, v \in \mathcal{L}_2(E)]$$

et le lemme, il vient

$$\begin{aligned}
&2\pi \|g(x) g(-y) h_m(x) h_n(y)\|_{\mathcal{T}}\\
&\quad \leq \|g(x) g(-y)\|_2 \|h_n(x) h_m(y)\|_2 + 2\|x h_n(x) h_m(y)\|_2\\
&\qquad\qquad + 2\|y h_n(x) h_m(y)\|_2 + 4\|xy h_n(x) h_m(y)\|_2
\end{aligned}$$

en sachant que

$$\|\delta(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\|_1 = \|\delta(\beta)e^{-\alpha}Y(\alpha)\|_1 = \|e^{-\alpha}Y(\alpha)e^{-\beta}Y(\beta)\|_1 = 1.$$

Mais, d'après (3) et (5) :

$$\int [xh_n(x)]^2 dx = \int \Big[\sqrt{\frac{n+1}{2}}h_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{n}{2}}h_{n-1}(x)\Big]^2 dx = n + \frac{1}{2}\,,$$

donc

$$\|g(x)g(-y)h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}} \leq K\sqrt{\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\Big(n+\frac{1}{2}\Big)},$$

où

$$K = \frac{\pi^2}{2}\Big(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\Big).$$

Nous obtenons alors le résultat voulu car, toujours d'après (5),

$$h_n(x) = g(\pm x)\{h_n(x) \pm i\sqrt{2(n+1)}h_{n+1}(x) \pm i\sqrt{n}h_{n-1}(x)\}$$

et, par conséquent,

$$\|h_m(x)h_n(y)\|_{\mathcal{T}} \leq K'\Big(m+\frac{3}{2}\Big)\Big(n+\frac{3}{2}\Big)\,,$$

avec

$$K' = 2\pi^2\Big(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\Big)^2.$$

Notre résultat permet alors une démonstration rapide du fait, prouvé dans ([3]), que les opérateurs bornés sur la représentation π_ω peuvent être interprétés comme des distributions tempérées, le produit des opérateurs correspondant au produit de convolution gauche des distributions défini dans ([6]).

(*) Séance du 20 juin 1966. Publiée aux *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 262, p. 1478–1480 (27 juin 1966). *Série A.*

([1]) D. Kastler, *Commun. Math. Phys.*, 1, 1965, p. 14.
([2]) D. Kastler, *Phase Space Quantum Mechanis*, Lecture Notes, Argonne, Illinois, août 1965.
([3]) G. Loupias, *Comptes rendus*, 262, série A, 1966, p. 799.
([4]) G. Loupias, S. Miracle-Solé, *Commun. Math. Phys.*, 2, 1966, p. 31.
([5]) L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Paris, 1959, II, chap. VII, 7.
([6]) G. Loupias, *Comptes rendus*, 262, *Série A*, 1966, p. 469.

(*Faculté des Sciences de Marseille,*
Place Victor-Hugo, Marseille, France.)