HAL
open science

ETUDE DE SENSIBILITE PAR ANALYSE DE PERTURBATION POUR UN SYSTEME MARKOVIEN : APPLICATION A LA FIABILITE

Phuc Do Van, Anne Barros, Christophe Bérenguer

To cite this version:

Phuc Do Van, Anne Barros, Christophe Bérenguer. ETUDE DE SENSIBILITE PAR ANALYSE DE PERTURBATION POUR UN SYSTEME MARKOVIEN : APPLICATION A LA FIABILITE. 2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS, Jul 2007, Reims, France. pp.CDROM. hal-00705269

HAL Id: hal-00705269

https://hal.science/hal-00705269v1

Submitted on 7 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ETUDE DE SENSIBILITE PAR ANALYSE DE PERTURBATION POUR UN SYSTEME MARKOVIEN : APPLICATION A LA FIABILITE

Phuc Do Van, Anne Barros, Christophe Bérenguer

Institut Charles Delaunay (ICD) FRE CNRS 2848
Université de technologie de Troyes, BP 2060 - 12, Rue Marie Curie - F-10010 Troyes cedex - France

Résumé— **Les études de sensibilité ont pour objectif d'analyser l'impact d'un ou plusieurs paramètres sur les performances d'un système. En sûreté de fonctionnement, il s'agit par exemple d'identifier les éléments qui sont critiques pour la fiabilité, la disponibilité ou la maintenabilité du système en vue d'optimiser des actions préventives ou correctives de maintenance et/ou de surveillance. Dans cet article, nous présentons une méthode d'évaluation de la sensibilité basée sur le principe de l'analyse de perturbation. L'objectif est de pouvoir estimer des indicateurs de sensibilité à partir des données de retour d'expérience pour des systèmes dont les composants peuvent être dépendants entre eux. Nous illustrons l'approche en prenant pour exemple un système dynamique markovien simple. La méthode proposée fournit ainsi un outil efficace pour étudier l'effet d'un changement simultané d'un ou plusieurs paramètres de conception sur les performances d'un système.**

Mots-clés— **Sûreté de fonctionnement, facteurs d'importance fiabilistes, sensibilité directionnelle, processus de Markov, analyse de perturbation**

I. INTRODUCTION

En sûreté de fonctionnement, l'analyse de sensibilité consiste à identifier, parmi tous les composants constituant un système, ceux qui influent le plus sur ses performances. Les performances peuvent être mesurées en termes de fiabilité, disponibilité, maintenabilité, etc. L'analyse de sensibilité fournit des éléments d'aide à la décision dans le but d'améliorer la conception et l'exploitation d'un système par identification de ses principaux points faibles.

L'analyse de sensibilité a été classiquement définie dans le cadre des modèles booléens de fiabilité tels que les arbres de défaillances et les arbres d'événements. Plusieurs indicateurs de sensibilité ont été proposés pour évaluer l'importance relative d'un composant en prenant en compte de façon conjointe ses contributions structurelle et probabiliste à la fiabilité du système (facteur de Vesely-Fussel, de Lambert, etc.). Il a été montré que la plupart d'entre eux ont un lien direct avec le facteur d'importance de Birnbaum [8]. Des algorithmes d'évaluation performants, basés notamment sur les diagrammes de décision binaire ont déjà été développés [6]. Toutefois, ces indicateurs ne sont valables que pour des systèmes à composants binaires et indépendants les uns des autres. Or, la fiabilité des systèmes réels impose souvent la prise en compte d'hypothèses plus réalistes.

L'objectif de ce papier est de présenter une méthode permettant d'évaluer la sensibilité des systèmes dynamiques à événements discrets. Par système dynamique, on entend ici les systèmes dont les éléments constitutifs ont des comportements dépendants les uns des autres : reconfigurations, redondances passives, partage de charge, notamment. On parle plus généralement de dépendances stochastiques entre les composants. Les travaux présentés ici consistent à appliquer au domaine de la fiabilité, une méthode d'estimation basée sur l'analyse de perturbation (*Perturbation Analysis* - PA) [1]. Lorsque le critère de performance est une fonction continue de ses paramètres, l'approche PA et sa première variante, l'analyse de perturbation infinitésimale (*Infinitesimal Perturbation Analysis* - IPA) [2], offrent une solution efficace pour l'évaluation des dérivées directionnelles. Ces dérivées permettent de définir les indicateurs de sensibilité que nous allons présenter dans la suite. Une généralisation aux fonctions discontinues a été développée dans le cadre des systèmes markoviens grâce au concept de réalisation de perturbation [3]. Cette méthode semble particulièrement adaptée aux modèles de Markov en régime stationnaire[5], [4]. La dérivée directionnelle y est estimée grâce à l'observation d'une seule trajectoire. Cela nous permet non seulement d'optimiser en ligne la performance du système, mais aussi d'étudier la sensibilité selon toutes les directions des paramètres même lorsque le générateur infinitésimal du processus de Markov est inconnu. La méthode proposée fournit ainsi un outil efficace pour l'étude de l'importance d'un composant donné, d'un groupe des composants, ou, plus généralement, de l'effet sur le critère de performance d'un changement simultané d'un ou plusieurs paramètres de conception.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons les idées principales de l'analyse de perturbation et le concept de réalisation de perturbation. Dans la section 3, nous appliquons l'analyse de perturbation pour évaluer la mesure de sensibilité directionnelle en fiabilité. Quelques exemples numériques sont ensuite introduits afin d'illustrer les avantages de l'approche proposée.

Notations

D	matrice de réalisation
$\hat{D}$	estimateur de D
d_{ij}	facteur de réalisation
θ	ensemble des paramètres du système
ξ	vecteur aléatoire
$\eta_t(\theta,\xi)$	fonction de performance aléatoire à l'instant t
$\overline{\eta}_t(\theta)$	critère de performance du système à l'instant t
$\eta(\theta)$	critère de performance du système en régime stationnaire
$\phi_t(\theta,\xi)$	estimateur de la dérivée du critère de performance
λ, μ	taux de défaillance et de réparation
A	matrice de taux de transition
π	vecteur de probabilité d'états du système en régime stationnaire

R	disponibilité asymptotique du système
Q	matrice directionnelle de perturbation

II. Analyse de perturbation

A. Principe de l'analyse de perturbation (PA)

Considérons un système à événements discrets défini par :

- un espace d'états discrets $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, ..., \mathcal{S}_m\}$,
- un ensemble de paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$,
- un espace de probabilité (Ω, F, P) ,
- un vecteur aléatoire $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$, qui représente la partie aléatoire du modèle d'évolution du système

La fonction de performance du système à l'instant t est noté $\eta_t(\theta, \xi)$. Deux grandeurs sont considérées par la suite. La première, associée au régime transitoire, est :

$$\overline{\eta}_t(\theta) = E\Big\{\eta_t(\theta, \xi)\Big\},$$

où E désigne l'espérance mathématique de la probabilité d'états P. La deuxième, associée au régime stationnaire (s'il existe), est :

$$\eta(\theta) = \lim_{t \to +\infty} \eta_t(\theta, \xi).$$

Les fonctions déterministes $\overline{\eta}_t(\theta)$ et $\eta(\theta)$ représentent des critères de performance dont on se propose d'analyser la sensibilité par rapport à θ. On étudie pour cela la dérivée directionnelle que l'on peut définir par rapport à θ et qui s'écrit :

$$\frac{d\overline{\eta}_t(\theta)}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\overline{\eta}_t(\theta + \Delta\theta) - \overline{\eta}_t(\theta)}{\Delta\theta}, \tag{1}$$

$$\frac{d\eta(\theta)}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\eta(\theta + \Delta\theta) - \eta(\theta)}{\Delta\theta}, \tag{2}$$

en régime transitoire et stationnaire respectivement. Supposons que l'on perturbe légèrement les paramètres du système selon $\theta' = \theta + \Delta\theta$, et que l'on note :

- (θ, ξ) le couple représentant les paramètres et l'évolution du système sans perturbation,
- (θ', ξ'), où ξ' est indépendant de ξ, le couple représentant les paramètres et l'évolution du système avec perturbation.

L'estimation de (1) et (2) peut alors se faire par la méthode des différences finies. Toutefois, en pratique, les données de la trajectoire perturbée ne sont pas toujours disponibles. Changer les paramètres du système réel afin d'observer les réalisations de la trajectoire perturbée peut, par exemple, s'avérer impossible ou trop coûteux [2]. Dans ce cas, la simulation est indispensable, mais devient rapidement difficile pour des systèmes de grande taille.

B. Analyse de perturbation infinitésimal (IPA) :

Le but de l'analyse de perturbation infinitésimale est d'estimer les dérivées (1) et (2) à l'aide de la seule trajectoire définie par (θ, ξ). Pour atteindre cet objectif, il est alors nécessaire de pouvoir déterminer une quantité basée sur la seule trajectoire (θ, ξ). Dans [1], Cao propose de considérer comme estimateur de l'IPA :

$$\phi_t(\theta, \xi) = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\eta_t(\theta + \Delta\theta, \xi) - \eta_t(\theta, \xi)}{\Delta\theta}, \tag{3}$$

où :

- $\eta_t(\theta, \xi)$ est la fonction de performance déterminée à partir de (θ, ξ), donc à partir des données de retour d'expérience ξ qui correspondent à la trajectoire nominale, et en faisant l'hypothèse (juste) que ces données ont été générées par un système dont les paramètres sont dans θ.
- $\eta_t(\theta + \Delta\theta, \xi)$ est la fonction de performance déterminée à partir de (θ', ξ), avec $\theta' = \theta + \Delta\theta$, donc à partir des données de retour d'expérience ξ qui correspondent à la trajectoire nominale, et en faisant l'hypothèse (erronée) que ces données ont été générées par un système dont les paramètres sont dans θ'.

En considérant l'espérance mathématique et la limite de $\phi_t(\theta, \xi)$, on obtient :

$$E\Big\{\phi_t(\theta, \xi)\Big\} = E\Big\{\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\eta_t(\theta + \Delta\theta, \xi) - \eta_t(\theta, \xi)}{\Delta\theta}\Big\}$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(\theta, \xi) = \lim_{t \to +\infty} (\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\eta_t(\theta + \Delta\theta, \xi) - \eta_t(\theta, \xi)}{\Delta\theta}).$$

$\phi_t(\theta, \xi)$ peut être utilisé pour l'estimation de 1 et 2 si et seulement s'il est non biaisé ou/et convergent, i.e. :

- $E\Big\{\phi_t(\theta, \xi)\Big\} = \frac{d}{d\theta} E\Big\{\eta_t(\theta, \xi)\Big\} = \frac{d\overline{\eta}_t(\theta)}{d\theta}.$
- $\lim_{t \to +\infty} \phi_t(\theta, \xi) = \frac{d\eta(\theta)}{d\theta}.$

Les difficultés de l'IPA consistent tout d'abord à trouver un algorithme d'estimation de la fonction $\phi_t(\theta, \xi)$. Il faut ensuite montrer que l'estimateur $\phi_t(\theta, \xi)$ vérifie les propriétés précédentes de convergence et de biais nul. Ce dernier point peut être particulièrement difficile, notamment lorsque la mesure de performance n'est pas une fonction continue de la variable θ. C'est pourquoi, "l'analyse de perturbation moyenne", "l'analyse de perturbation finie" et le concept de "réalisation de perturbation" ont été développées [1], [2], [3]. Les deux premières méthodes s'appliquent pour une classe restreinte de problèmes. En outre, leur application est limitée de part leur complexité. La dernière, concept de réalisation de perturbation, semble la plus pratique et particulièrement bien adaptée aux modèles de Markov en régime stationnaire.

C. Réalisation de perturbation et processus de Markov

Nous considérons un processus irréductible de Markov ayant un espace d'états fini, noté X. Par conséquent, ce processus est ergodique et l'existence d'une distribution stationnaire peut être prouvée, voir [9]. Ce processus est caractérisé par :

- un espace d'états fini $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, ..., \mathcal{S}_m\}$,
- un ensemble de paramètres θ représentant les taux de transition, et déterminant la matrice de taux de transition A.

– un vecteur de probabilité $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ indiquant la distribution de probabilité d'occupation d'états du processus en régime stationnaire.

Le critère de performance du processus de Markov en régime stationnaire est défini par :

$$\overline{\eta}(A) = \lim_{t \to +\infty} E_\pi \Big\{ \eta_t(A, X) \Big\},$$

où $\eta_t(A, X)$ est la fonction de performance du processus de Markov.

Supposons maintenant que la matrice A soit perturbée de façon à ce que :

$$A_\delta = A + \delta Q, \tag{4}$$

avec δ un nombre réel de valeur faible et Q une matrice indiquant la direction de perturbation. La condition sur Q pour que A_δ soit une matrice de taux de transition est que la somme de chaque ligne de Q doit être égale à 0.

Appelons $\overline{\eta}(A_\delta)$ le critère de performance en régime stationnaire du processus perturbé (matrice de taux de transition A_δ). La dérivée directionnelle de $\overline{\eta}(A)$ suivant la direction Q est définie par :

$$\frac{d\overline{\eta}(A)}{dQ} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\overline{\eta}(A_\delta) - \overline{\eta}(A)}{\delta}. \tag{5}$$

Dans [3], l'auteur montre que cette dérivée peut être estimée directement à partir d'une seule trajectoire sans utiliser l'estimateur IPA. On note $X^i = (X_t^i, t \geq 0)$ et $X^j = (X_t^j, t \geq 0)$ les processus de Markov qui ont même matrice de transition A, et des états initiaux différents : $X_0^i = i$ et $X_0^j = j$.

Le facteur de réalisation d_{ij} $(i, j = 1, ..., m)$ est alors défini comme suit [3] :

$$d_{ij} = E\Big\{ \int_0^{+\infty} \big[\eta(A, X_t^j) - \eta(A, X_t^i)\big] dt \Big\}.$$

d_{ij} mesure l'effet moyen d'un changement de l'état initial sur le critère de performance. On montre que si les deux processus sont irréductibles, alors il existe un temps aléatoire L tels que $X_L^i = X_L^j$. Par conséquent :

$$d_{ij} = E\Big\{ \int_0^{L} \big[\eta(A, X_t^j) - \eta(A, X_t^i\big] dt \Big\}.$$

L'effet sur un horizon infini peut donc être évalué sur un horizon fini. Pour estimer d_{ij} à partir d'une seule trajectoire sans utiliser l'estimateur d'IPA, on définit la mesure du temps de premier passage de l'état j à l'état i, $\mathcal{T}^j(i)$, comme suit :

$$\mathcal{T}^j(i) = \inf \Big\{ t : t \geq 0, X_t^j = i \Big\}.$$

$\mathcal{T}^j(i)$ correspond un temps d'arrêt de X^j et est indépendant de X^i. Le facteur de réalisation peut alors être estimé par :

$$d_{ij} = E\Big\{ \int_0^{\mathcal{T}^j(i)} \big[(\eta(A, X_t^j) - \overline{\eta}(A)\big] dt \Big\}, \tag{6}$$

et la dérivée directionnelle de $\overline{\eta}(A)$ suivant la direction Q peut s'écrire :

$$\frac{d\overline{\eta}(A)}{dQ} = \pi Q D^T \pi^T, \tag{7}$$

où $D = [d_{ij}], i, j = 1, ..., m$ est appelé matrice de réalisation, et T indique la transposée. La mesure du temps de premier passage $\mathcal{T}^j(i)$ et le vecteur de probabilité d'états π peuvent être estimé à partir de la trajectoire X^j, les équations (6) et (7) nous permettent donc d'estimer d_{ij} et $d\overline{\eta}(A)/dQ$ à partir d'une seule trajectoire X^j. La convergence des estimateurs a été justifié dans [3]. Notons toutefois que l'estimation de la matrice de réalisation D peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul. En effet, celle-ci doit être menée pour chaque couple (i, j), ce qui donne une complexité d'ordre $O(m^2)$. C'est pourquoi des algorithmes d'approximation de complexité $O(m)$ ont été proposés par Cao dans [4].

Plus généralement, le concept de réalisation de perturbation offre les avantages suivants :

– la sensibilité directionnelle du critère de performance est estimée directement à partir d'une seule trajectoire observée. D'un point de vue pratique, cela nous permet d'optimiser la performance d'un système en temps réel et sans perturbation des paramètres.
– cette mesure de sensibilité est évaluable même si le critère de performance du système n'est pas une fonction continue des paramètres.
– son estimation ne nécessite pas de connaître le générateur infinitésimale A du processus de Markov.

III. Application à la fiabilité

Les processus markoviens sont largement utilisés en sûreté de fonctionnement pour les systèmes complexes comprenant des dépendances entre les composants (architecture reconfigurable selon la phase de mission en cours, redondances passives, effets des actions de maintenance, partage de charge, etc.). Afin d'analyser la sensibilité du critère de performance, les méthodes analytiques donnent des résultats exacts basés sur la résolution des équations de Chapman-Kolmogorov [7]. Cependant, ces méthodes conduisent dans de nombreux cas à des calculs complexes à cause de l'explosion combinatoire liée aux nombres des états traversés par le processus de Markov. Pour pallier à ce défaut, on propose d'utiliser l'analyse de perturbation, ou plus exactement, la matrice de réalisation de perturbation présentée dans la section précédente.

A. *Facteur d'importance de Birnbaum généralisé*

Le facteur d'importance fiabiliste, introduit par Birnbaum en 1969 [8], est défini comme une mesure de la variation de la fiabilité (ou disponibilité du système) en fonction de la fiabilité d'un composant. Il s'exprime de la façon suivante dans le cas de composants indépendants :

$$I^B(i) = \frac{\partial R}{\partial p_i},$$

où R et p_i sont la fiabilité (ou disponibilité) du système et du composant i respectivement. $I^B(i)$ est largement utilisé dans le cadre de systèmes simples avec des composants

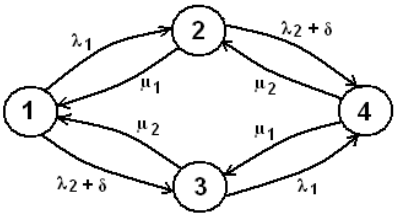

Fig. 1. Perturbation sur λ_2

Etat 1 : C_1C_2 Etat 2 : $C_1\overline{C2}$
Etat 3 : $\overline{C_1}C_2$ Etat 4 : $\overline{C_1C_2}$

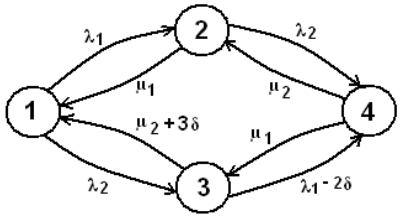

Fig. 2. Perturbation sur l'état 3

indépendants. Pour des systèmes dynamiques comprenant des dépendances stochastiques entre les composants, cette mesure devient difficile à évaluer. Il est donc légitime de s'interroger sur une extension de ce critère. Pour ce faire, nous proposons d'utiliser la notion de dérivée directionnelle présentée précédemment. Appelons *facteur de Birnbaum généralisé* cette dérivée appliquée à un système dynamique modélisé par un processus de Markov. Par définition, le facteur de Birnbaum généralisé s'écrit :

$$I_Q = \frac{dR}{dQ},$$

où Q est la matrice de perturbation qui indique la "direction" d'étude de sensibilité. I_Q représente ainsi la sensibilité de la fiabilité/disponibilité du système par rapport à un ou plusieurs paramètres.

Prenons pour exemple un système de deux composants C_1 et C_2 en parallèle, ayant pour taux de défaillance λ_1 et λ_2 et taux de réparation μ_1 et μ_2 respectivement. Chaque composant possède deux états. On notera C_i l'état de marche du composant C_i, et $\overline{C}_i$ son état de panne. Considérons maintenant deux mesures de sensibilité correspondant à deux types de perturbations différents : une perturbation sur le paramètre λ_2 (voir figure 1), et une perturbation sur la probabilité d'être dans l'état 3 (voir figure 2). Ces perturbations correspondent à deux matrices différentes Q_1, Q_2 :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que les matrices Q_1, Q_2 indiquent les changements sur la matrice de taux de transition A, voir équation (4). Ce facteur d'importance fiabiliste permet de fournir des éléments d'aide pour :

- identifier l'importance d'un composant (paramètre) donné et aussi l'importance d'un groupe des composants.
- évaluer l'effet sur la mesure de la fiabilité/disponibilité d'un changement simultané d'un ou plusieurs paramètres de conception.
- optimiser les décisions de maintenance, les politiques d'amélioration de la fiabilité/disponibilité.

Grâce au concept de réalisation de perturbation, le facteur d'importance de Birnbaum généralisé I_Q de la disponibilité asymptotique (système en régime stationnaire) est évalué par l'équation (7).

La disponibilité asymptotique du système vaut quant à elle :

$$R = \sum_{i \in \mathrm{W}} \pi_i, \tag{8}$$

où W est l'ensemble des états de marche du système. La matrice de réalisation D est estimée à partir de l'équation (6) en remplaçant le critère de performance $\overline{\eta}(A)$ par la disponibilité R et la fonction de performance par $\eta_t(A, X) = 1$ quand le système est en marche et $\eta_t(A, X) = 0$ en cas de panne.

B. *Exemples numériques*

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer l'utilisation des facteurs de réalisation dans des études de sensibilité . Un premier exemple permet de comparer les résultats que l'on peut obtenir avec l'estimation des facteurs de réalisation et avec des calculs analytiques exacts. Puis, un système complexe est présenté pour montrer les avantages qu'il y a à estimer la matrice de réalisation. Dans les deux exemples, on considère que la matrice de taux de transition est inconnue. Elle est estimée pour des données d'observation simulées sur 100000 transitions. Le critère de performance du système est la disponibilité asymptotique, définie par (8).

B.1 Comparaison des résultats analytiques et estimés

On considère le système simple avec deux composants représenté sur la figure 1. Dans ce cas, la disponibilité asymptotique est calculée directement à partir des équations de Kolmogorov en régime stationnaire :

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_1 + \lambda_1\pi_2 + \lambda_2\pi_3 &= 0 \\ \mu_1\pi_1 - (\mu_1 + \lambda_2)\pi_2 + \lambda_2\pi_4 &= 0 \\ \mu_2\pi_1 - (\lambda_1 + \mu_2)\pi_3 + \lambda_1\pi_4 &= 0 \\ \mu_2\pi_2 + \mu_1\pi_3 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_4 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

En résolvant ces équations, on obtient finalement la disponibilité du système :

$$R = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \frac{\mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}$$

Les dérivées partielles de R par rapport à chaque paramètre peuvent être obtenues analytiquement facilement.

On considère dans un premier temps les résultats de la simulation en prenant $\lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.01, \mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.05$. Les estimateurs suivants sont obtenus :

$$\hat{\pi} = (0.6898, 0.1406, 0.1413, 0.0283),$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1.3648 & -1.4528 & -11.2053 \\ 1.3648 & 0 & -0.0850 & -9.8446 \\ 1.4528 & 0.0850 & 0 & -9.8063 \\ 11.2053 & 9.8446 & 9.8063 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, on regarde une perturbation sur un paramètre spécifique (par exemple sur λ_2, avec la dérivée de R suivant la direction Q_1). En utilisant les estimateurs $\hat{D}$, $\hat{\pi}$, l'équation (7) nous donne donc : $E(\hat{I}_{Q_1}) = -2.3854$ avec un écart type 0.0357. La valeur exacte, obtenue analytiquement vaut quant à elle $\partial R/\partial\lambda_2 = -2.3148$.

Dans le second cas, on considère une autre direction de perturbation (Q_2). La perturbation correspond alors à une perturbation sur un état spécifique (état 3). En utilisant les même estimateurs $\hat{D}$ et $\hat{\pi}$ que ci-dessus, on obtient : $E(\hat{I}_{Q_2}) = 3.3741$ avec un écart type 0.0288. Cela signifie que si l'on augmente le taux de réparation μ_2 en sortie de l'état 3 d'une quantité 3δ et que l'on diminue en même temps le taux de défaillance λ_1 (en sortie du même état 3) d'une quantité 2δ, la disponibilité du système augmente d'une quantité 3.3741δ. Notons que pour obtenir cette dérivée analytiquement, il faudrait ré-écrire le système d'équations différentielles en distinguant tous les taux de transition entre tous les états, de manière par exemple à distinguer le paramètre λ_1 qui intervient dans la transition de l'état 1 vers l'état 2, du paramètre λ_1 qui intervient dans la transition de l'état 3 vers l'état 4.

B.2 Analyse de sensibilité d'un système dynamique

Prenons maintenant le cas du système dynamique représenté sur la figure 3. Son graphe de Markov est décrit sur la figure 4. Les quatre composants (notés C_1, C_2, C_3 et C_4) sont identiques et dépendants stochastiquement : le composants 4 est en redondance passive (il est mis en service dès la défaillance du composant 3 et il est arrêté dès que le composant 3 est réparé). Le composant 1 est en partage de charge avec le groupe de composants 2, 3 et 4 (quand les trois composants 2, 3 et 4 sont défaillants, et si le composant 1 est en marche, son taux de défaillance passe de λ_1 à $\overline{\lambda}_1$).

Pour cet exemple, la solution analytique est complexe. Nous présentons ici les résultats obtenus par estimation de la matrice de réalisation D. Les données sont simulées avec les paramètres suivants : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.01, \overline{\lambda}_1 = 0.015, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0.05$.

On estime tout d'abord le vecteur de probabilité d'états π et la matrice de réalisation D. Ensuite, nous utilisons l'équation 7. Les différentes mesures de sensibilité sont obtenues en changeant la matrice de la direction de perturbation Q uniquement. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux I et II.

B.2.a Directions correspondant aux dérivées partielles. Dans le premier cas, on choisit les matrices de perturbation Q telles que I_Q soit égal à $I_\lambda = \partial R/\partial\lambda$ ou à $I_\mu = \partial R/\partial\mu$. L'estimation des dérivées partielles est présentée dans le

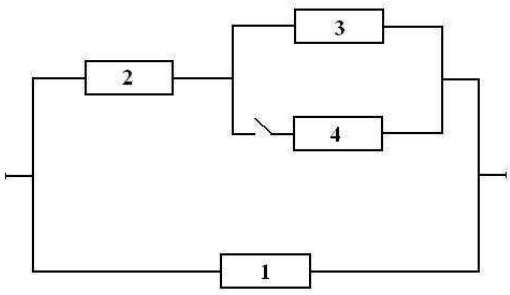

Fig. 3. structure du système

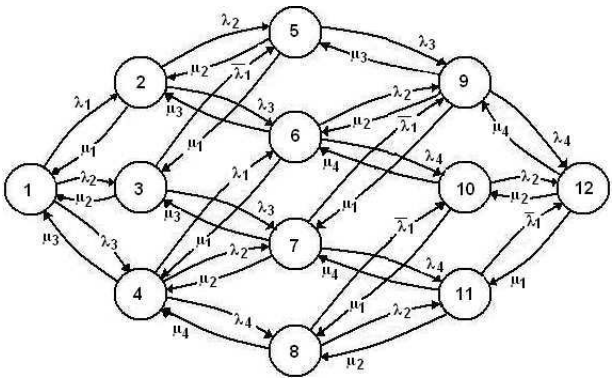

Fig. 4. processus Markov

tableau I. On note qu'une augmentation du taux de défaillance λ amène à une diminution de la disponibilité du système. Au contraire, une augmentation du taux de réparation μ entraîne une variation positive de la disponibilité.

Si on regarde les taux de réparation, on constate que l'on peut classer les composants selon leur facteur d'importance fiabiliste : $C_3 < C_4 < C_1 < C_2$. Le composant 2 est le plus critique pour la disponibilité du système. D'autre part, si on regarde les taux de défaillance, la sensibilité de la disponibilité du système par rapport au composant 1 est partagée entre la sensibilité par rapport à $\overline{\lambda}_1$ et la sensibilité par rapport à λ_1 et les résultats montrent que $|I_{\lambda_3}| < |I_{\lambda_4}| < |I_{\lambda_1} + I_{\overline{\lambda}_1}| < |I_{\lambda_2}|$, donc, on obtient finalement le même ordre : $C_3 < C_4 < C_1 < C_2$.

B.2.b Directions correspondant à un groupe de composants. Considérons maintenant une autre direction de sensibilité. On choisit Q de façon à mesurer la sensibilité par rapport à un groupe de paramètres (ou groupe de composants). Dans le tableau II, on note (λ_i, λ_j) pour indiquer que les deux paramètres sont perturbés en même temps d'une même quantité δ. Ces perturbations correspondent à la dérivée directionnelle suivant la direction de la droite ayant pour équation caractéristique : $y = x$ ($\lambda_i = x, \lambda_j$=y). Par conséquent, on donne un indicateur de sensibilité de la disponibilité du système par rapport au groupe de composants (i, j). Les résultats des tableaux I et II nous montrent que le groupe (C_3, C_4) est moins critique que le composant 2. Cela s'explique par la structure du système, le composant 2 étant mis en série avec le groupe de redondance passive (C_3, C_4). Dès la défaillance de C_3 le composant 4 est mis en service et remplace C_3. Par contre, il n'y pas de remplacement pour le composant 2. Le composant 2 est donc plus critique que le groupe (C_3, C_4). Le groupe des composants (C_2, C_4) est plus critique que (C_2, C_3) parce que, lorsque

Unités		Valeur	Ordre		Valeur	Ordre
C_1	I_{λ_1} $I_{\overline{\lambda}_1}$	-0.9876 -1.4779	2	I_{μ_1}	0.5891	2
C_2	I_{λ_2}	-2.8559	1	I_{μ_2}	0.6237	1
C_3	I_{λ_3}	-0.4075	4	I_{μ_3}	0.0822	4
C_4	I_{λ_4}	-0.5156	3	I_{μ_4}	0.1045	3

TABLE I

SENSIBILITÉ AUX TAUX DE DÉFAILLANCE ET DE RÉPARATION

C_4 est mis en fonctionnement, C_3 est déjà en défaillance. Ces résultats nous permettent également de vérifier l'importance du groupe (C_2, C_i) par rapport au seul composant C_2. Enfin, le groupe de composants (C_2, C_3, C_4) est le plus critique dans l'ensemble des groupes d'un ou deux composants.

B.2.c Directions correspondant à une sensibilité faible.
Le dernier résultat est rapporté dans le tableau III. Dans celui-ci, on considère une perturbation de "compensation". Plus précisément, si un paramètre est perturbé (le taux de défaillance est augmenté par un phénomène de dégradation du composant, par exemple), la disponibilité du système va être diminuée. Pour éviter cette baisse de disponibilité, il est possible de répercuter cette variation sur les autres paramètres (taux de réparation, par exemple). Supposons que le taux de défaillance λ_2 augmente (dégradation du composant 2, par exemple) d'une quantité de δ. Simultanément, on perturbe le taux de réparation μ_2 d'une quantité 4.5δ (réduction du temps de réparation du composant 2 par exemple). L'effet de cette action correspond à la dérivée suivant une direction d'une droite : $y = 4.5x$ $(x = \lambda_2, y = \mu_2)$ et l'impact sur R est proche de 0. Les dérivées suivant les différentes directions sont facilement évaluées en changeant seulement la matrice directionnelle de perturbation Q. D'un point de vue pratique, différentes directions de "compensation" peuvent être proposées. On peut les utiliser pour des problèmes de maintenance afin d'améliorer ou maintenir le niveau nécessaire à la disponibilité du système. La solution optimale dépend évidemment d'autres critères comme le coût de maintenance (modification d'un taux de réparation) ou de reconception (modification d'un taux de défaillance).

Direction	(λ_3, λ_4)	(λ_2, λ_3)	(λ_2, λ_4)	$(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$
$\frac{dR}{dQ}$	-0.9231	-3.2634	-3.3715	-3.7790

TABLE II

SENSIBILITÉ À UN GROUPE DE PARAMÈTRES

Direction	$(\lambda_2, 4.5 * \mu_2)$
$\frac{dR}{dQ}$	-0.04925

TABLE III

SENSIBILITÉ À UN COMPOSANT

IV. Conclusion

Les résultats présentés dans cet article sont une extension de l'analyse classique de sensibilité des systèmes dits "statiques" (c'est à dire avec des composants dont les comportements sont indépendants les uns des autres). L'idée principale est d'estimer numériquement les dérivées directionnelles d'un critère de performance d'un système, sans passer par les méthodes analytiques standards.

L'analyse de perturbation et l'analyse de perturbation infinitésimale ont été développées pour évaluer la sensibilité des systèmes dynamiques à événements discrets. Dans le contexte des processus de Markov, la méthode d'estimation utilisée ici est basée sur le comportement nominal du système. Elle a été introduite par Cao dans [3]. D'un point de vue pratique, cette technique offre de nombreux avantages. Elle permet d'estimer les dérivées directionnelles en utilisant les donnée observées à partir du comportement du système (sans perturbation des paramètres), et sans avoir à connaître la matrice de taux de transition du processus de Markov sous-jacent. Nous avons montré dans cet article que différents indicateurs de sensibilité (la sensibilité par rapport à un ou plusieurs paramètres, et par rapport à des taux de transitions) peuvent être calculés par cette méthode. Ces indicateurs peuvent être utilisées en sûreté de fonctionnement et de nombreuses applications peuvent être envisagées : étude de la variation d'un ou plusieurs paramètres, identification d'un composant critique ou d'un groupe des composants critiques, adaptation des paramètres de maintenance pour maintenir ou améliorer la disponibilité en cas de dégradation de composants, etc.

Cet article constitue une première étape vers la formalisation d'outils pratiques et la définition d'indicateurs pour l'analyse de sensibilité des systèmes dynamiques. Nos perspectives sur le sujet concernent l'application de l'analyse de perturbation aux études de sensibilité des systèmes dynamiques avec des critères de performance de production. Nous prévoyons également le développement de techniques similaires dans le cadre de l'analyse de sensibilité des processus de Markov en régime transitoire.

Références

[1] X. Cao, « Perturbation analysis of discrete event systems : Concepts, algorithms and applications, » *European Journal of Operational Research*, vol. 91, pp. 1–13, 1995.

[2] X. Cao, X. Yuan, and L. Qiu, « A single sample path-based performance sensitivity formula for Markov chains, » *IEEE Transactions on Automatic Control*Vol. 41(12), pp. 1814–1817, 1996.

[3] X. Cao and H. Chen, « Perturbation realization, potentials, and sensitivity analysis of Markov processes, »*IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 42(10), pp. 1382–1393, 1997.

[4] X. Cao and Y. Wan, « Algorithms for sensitivity analysis of Markov systems through potentials and perturbation realization, » *IEEE Transactions on control systems technology*, Vol. 6(4), pp. 482–493, 1998.

[5] L. Dai, « Sensitivity analysis of stationary performance measures for Markov chains, » *Mathematic Computer Modelling*, Vol. 23 (11-12), pp. 143–160, 1996.

[6] Y. Dutuit and A. Rauzy, « Efficient algorithms to assess component and gate importance in fault tree analysis; » *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 72, pp. 213–222, 2001.

[7] P. Frank, *Introduction to system sensitivity*, Academic press, 1978.

[8] M. Raussand and A.Hoyland, *System Reliability Theory - Models, Statistical methods and Application*, (2nd edition), Wiley Interscience, 2004.

[9] S. Ross, *Stochastic Processes* (2nd ed.), Wiley Series in probability and Statistics. John Wiley Sons, Inc. 1996.