



HAL
open science

Intégration Stochastique Hilbertienne

Jerome Lebrun

► **To cite this version:**

| Jerome Lebrun. Intégration Stochastique Hilbertienne. 1996. hal-00703386

HAL Id: hal-00703386

<https://hal.science/hal-00703386>

Submitted on 6 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intégration Stochastique Hilbertienne

Jérôme Lebrun

27 février 1996

Table des matières

1	Intégration Hilbertienne	4
1.1	Eléments de mesurabilité	4
1.2	Espaces $L^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$	6
1.3	Intégrale Hilbertienne	13
1.4	Opérateurs Hilbertiens	14
2	Probabilités dans les espaces de Hilbert	17
2.1	Généralités	17
2.2	Espérance conditionnelle	18
2.3	Indépendance	24
2.4	Martingales Hilbertiennes	29
2.4.1	Martingales à temps discret	29
2.4.2	Processus progressivement mesurables	32
2.4.3	Martingales à temps continu	33
3	Intégration stochastique Hilbertienne	40
3.1	Mouvement Brownien Hilbertien	40
3.1.1	Triplet de Gelfand	40
3.1.2	Mouvement Brownien Hilbertien	40
3.2	Tribu prévisible	45
3.3	Intégration Stochastique	45
3.3.1	Intégrale de Itô	45
3.3.2	Transformée de Itô	49
3.3.3	Formule de Itô	52

Résumé

Le but de ce projet de diplôme était de construire une intégrale stochastique non triviale: l'intégrale de Itô par rapport à un mouvement Brownien standard à valeurs dans un espace de Hilbert. Après avoir introduits les outils indispensables que sont l'intégrale de Pettis, et la théorie des probabilités dans les espaces de Hilbert, on construira le mouvement Brownien standard, ce qui nous permettra d'introduire l'intégrale stochastique Hilbertienne isométrique. Dans tout ce rapport, on supposera le lecteur familier avec les résultats classiques de théorie de la mesure, et de l'intégration dans \mathbb{R} , ainsi qu'avec la théorie des probabilités pour des variables aléatoires réelles.

Notations

Soient \mathbb{H} et \mathbb{B} deux espaces de Hilbert réels, de produits scalaires et normes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$, respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ et $|\cdot|_{\mathbb{B}}$. Pour \mathbb{H} et \mathbb{B} séparables, on note $\mathcal{L}^1(\mathbb{H}; \mathbb{B})$ l'espace de Banach des opérateurs nucléaires et $\sigma_1(N) := \text{Tr } |N|$ sa norme ($|N| := (N^*N)^{\frac{1}{2}}$). On note également $\mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B})$ l'espace de Hilbert séparable des opérateurs de Hilbert-Schmidt, σ_2 sa norme Hilbertienne et $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ son produit scalaire. D'autre part, on notera λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Chapitre 1

Intégration Hilbertienne

1.1 Eléments de mesurabilité

Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable, où \mathcal{F} est la tribu engendrée par l'anneau \mathcal{A} , lui-même construit à partir du semi-anneau \mathcal{R} . Soit \mathbb{H} un espace de Hilbert réel, de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée $|\cdot|$. On note $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ sa tribu Borélienne.

Définition 1.1.1

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{H}$, on dit que f est fortement mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ssi

1. f est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$
2. $f(X)$ est séparable dans $(\mathbb{H}, |\cdot|)$

Remarque 1.1.1 La condition 2 équivaut à l'existence d'un s.e.v. fermé séparable de \mathbb{H} contenant $f(X)$.

Définition 1.1.2

On note $\mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{H}$ qui sont fortement mesurables $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Proposition 1.1.1

On a alors

1. $\mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ est un espace vectoriel
2. $\forall f, g \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \langle f, g \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$
3. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ telle que $\forall x \in X$ on a $f_n(x) \perp \rightarrow f(x)$. Alors $f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Preuve.

1. $\mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ espace vectoriel
 - $\forall f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a immédiatement que $\alpha f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
 - Soit $f, g \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$,

- Il existe $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}$ s.e.v. fermé séparable tel que $f(X) \cup g(X) \subset \mathbb{H}_0$
donc

$$(f + g)(X) \subset f(X) + g(X) \subset \mathbb{H}_0$$

et donc $(f + g)(X)$ est séparable.

- Il reste à montrer que $f + g$ est mesurable, i.e. pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ on a
 $(f + g)^{\perp 1}(B) \in \mathcal{F}$

Soit $s : \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{H}$ définie par $s(u, v) := u + v$. s est continue.

De plus

$$(f + g)^{\perp 1}(B) = \{x \mid (f(x), g(x)) \in s^{\perp 1}(B)\}$$

or

$$s^{\perp 1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0)$$

Comme \mathbb{H}_0 est un espace métrique séparable, il admet une base topologique dénombrable et donc $\mathcal{B}(\mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{H}_0) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{H}_0)$

Soit alors

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0) \mid \{x \mid (f(x), g(x)) \in A\} \in \mathcal{F}\}$$

\mathcal{G} est une tribu contenant les rectangles $A_1 \times A_2$ où $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_0)$
puisque

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in A_1 \times A_2\} = f^{\perp 1}(A_1) \cap g^{\perp 1}(A_2) \in \mathcal{F}$$

donc $\mathcal{B}(\mathbb{H}_0) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{H}_0) \subset \mathcal{G}$ i.e. $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0)$. On a alors $(f + g)^{\perp 1}(B) \in \mathcal{F}$

2. On a immédiatement le résultat en remarquant que

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}(|f + g|^2 \perp |f \perp g|^2)$$

et que $|\cdot|^2$ est mesurable $\mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$

3. • $\forall n, f_n(X)$ est séparable, donc $f_n(X) \subset \mathbb{H}_n \subset \mathbb{H}$, où \mathbb{H}_n s.e.v. fermé séparable. On a dès lors l'existence de $\{v_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ dense dans \mathbb{H}_n .

Soit $V := \{v_i^n \mid i, n \in \mathbb{N}\}$. V est clairement dénombrable et dense dans $\bigcup_n \mathbb{H}_n$.

Or $\bigcup_n f_n(X) \subset \bigcup_n \mathbb{H}_n$, donc $\bigcup_n f_n(X)$ est séparable, i.e. $\exists \mathbb{H}_0$ s.e.v. fermé séparable de \mathbb{H} tel que $\bigcup_n f_n(X) \subset \mathbb{H}_0$.

Dès lors, $\forall x \in X, f_n(x) \in \mathbb{H}_0$ fermé, donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{H}_0$ et donc $f(X) \subset \mathbb{H}_0$ et $f(X)$ est séparable.

• On définit pour $u, v \in \mathbb{H}$, $d(u, v) := |u \perp v|$ et soit O un ouvert de \mathbb{H} .

Soit pour $k \in \mathbb{N}$,

$$O_k := \{x \in O \mid d(x, O^c) > \frac{1}{k}\}$$

On a alors par le lemme 2.5.2 [5]

$$f^{\perp 1}(O) = \bigcup_{k, m} \left(\bigcap_{n \geq m} f_n^{\perp 1}(O_k) \right)$$

Or $\forall n, k \quad f_n^{\perp 1}(O_k) \in \mathcal{F}$, donc $f^{\perp 1}(O) \in \mathcal{F}$, et donc f est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

#

1.2 Espaces $L^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Soit μ une mesure positive quelconque non nécessairement σ -finie. Comme d'habitude on identifie deux fonctions $\mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ qui coïncident presque partout μ (noté *a.e.* μ).

Définition 1.2.1

Pour $1 \leq p < \infty$, on pose

$$\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}) := \{f \mid f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

et

$$\mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}; \mathbb{H}) := \{f \mid f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \|f\|_\infty := \text{ess sup } |f| < \infty\}$$

Remarque 1.2.1 Cette définition a un sens puisque $|f|^p : X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, par mesurabilité de $|\cdot|^p : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.2.2

Pour $1 \leq p, q \leq \infty$, on dit que p et q sont conjugués ssi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.2.2 On a $\frac{p}{q} = p \perp 1$.

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Hölder)

Pour $f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}), g \in \mathbf{L}^q(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ avec p et q conjugués

1. $\langle f, g \rangle \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$
2. $|\int \langle f, g \rangle d\mu| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Preuve.

1. $\langle f, g \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et

$$|\langle f, g \rangle| \leq |f||g|$$

avec $|f| \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ et $|g| \in \mathbf{L}^q(\mathcal{F}; \mathbb{R})$

Par l'inégalité de Hölder réelle, on a $|f||g| \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ et donc $\langle f, g \rangle \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

2. Par l'inégalité de Hölder réelle appliquée à $|f|$ et $|g|$

$$\left| \int \langle f, g \rangle d\mu \right| \leq \int |\langle f, g \rangle| d\mu \leq \int |f||g| d\mu \leq \| |f| \|_p \| |g| \|_q = \|f\|_p \|g\|_q$$

#

Lemme 1.2.2 (Inégalité de Minkowski)

Pour $f, g \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ où $1 \leq p \leq \infty$

1. $f + g \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
2. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Preuve.

- $p = 1$

1. $f + g \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $|f + g| \leq |f| + |g|$ avec $|f|, |g| \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$, donc $|f + g| \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ i.e. $f + g \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

2.

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

- $p = \infty$

$f + g \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $|f + g| \leq |f| + |g|$

donc

$$\text{ess sup } |f + g| \leq \text{ess sup } |f| + |g| \leq \text{ess sup } |f| + \text{ess sup } |g| < \infty$$

donc $f + g \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

- $1 < p < \infty$

1. $f + g \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $|f + g| \leq |f| + |g|$

donc

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$$

donc $f + g \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

2.

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|$$

or $p-1 = \frac{p}{q}$, donc $|f + g|^{p-1} \in \mathbf{L}^q(\mathcal{F}; \mathbb{R})$, et comme $|f| \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{R})$, par Hölder réel

$|f + g|^{p-1} |f| \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$

et

$$\int |f + g|^{p-1} |f| d\mu \leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \| |f| \|_p = \| |f + g|^{p-1} \|_q \|f\|_p$$

de même

$$\int |f + g|^{p-1} |g| d\mu \leq \| |f + g|^{p-1} \|_q \|g\|_p$$

donc

$$\|f + g\|_p^p \leq \| |f + g|^{p-1} \|_q (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

ou bien $\|f + g\|_p = 0$ et on a trivialement $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

ou bien $\|f + g\|_p \neq 0$ et on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

#

Proposition 1.2.1

$(\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \|\cdot\|_p)$ est un e.v.n. (espace vectoriel normé) pour $1 \leq p \leq \infty$

Preuve.

- $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ s.e.v. de $\mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

- Pour $f, g \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, par Minkowski $f + g \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
- Pour $f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p$ et donc $\alpha f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
- $\|\cdot\|_p$ semi-norme sur $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
 - $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
 - $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ Minkowski
 - $\|f\|_p = 0 \Rightarrow |f| = 0$ a.e. μ

#

Remarque 1.2.3 On fera par la suite l'identification entre $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})/\mu$

Théorème 1.2.1 (Riesz-Fischer)

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $(\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Preuve.

1. $p = \infty$

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ i.e. $\forall k \geq 1, \exists n_k$ tel que, pour $m, n \geq n_k$ on a $\|f_m \perp f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$

Donc $\exists E_k$ μ -négligeable tel que, pour $m, n \geq n_k$ on a $\forall x \in E_k^c, |f_m(x) \perp f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$

Soit $E := \bigcup_k E_k$. E est μ -négligeable et on a que $\forall x \in E^c, f_n(x)$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{H} .

Par conséquent, $\forall x \in E^c, f_n(x) \rightarrow f(x)$ et donc $f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Ainsi, pour $n \geq n_k$ on a $|f(x) \perp f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in E^c$. Il en résulte que $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et que pour $n \geq n_k$ on a $\|f \perp f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$. Ainsi $\|f \perp f_n\|_\infty \rightarrow 0$

2. $1 \leq p < \infty$

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$. Sans perte de généralité, on note

$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite telle que $\forall k, \|f_{k+1} \perp f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$

Soit

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) \perp f_k(x)|$$

On a $\|g_n\|_p \leq 1$ et g_n croissante, par conséquent $\exists g \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ telle que $g_n \uparrow g$

Or

$$|f_m(x) \perp f_n(x)| \leq |f_m(x) \perp f_{m+1}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) \perp f_n(x)| \leq g(x) \perp g_{n+1}(x)$$

donc a.e. μ , on a $\{f_n(x)\}$ suite de Cauchy de \mathbb{H} i.e. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. μ . Donc pour

$n \geq 2$, on a $|f(x) \perp f_n(x)| \leq g(x)$, donc $f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$.

De plus, comme $|f(x) \perp f_n(x)|^p \rightarrow 0$ a.e. μ et $|f(x) \perp f_n(x)|^p \leq g^p(x) \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans le cas réel, on a $\|f \perp f_n\|_p \rightarrow 0$.

#

Théorème 1.2.2

$(\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}), (\cdot | \cdot))$ est un espace de Hilbert

Preuve. $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_2$

On définit alors pour $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ le produit scalaire compatible $(f|g) := \int \langle f, g \rangle d\mu$. Cette définition a un sens par Hölder. Ainsi on a $|(f|g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ et $\|f\|_2 = (f|f)$ #

Définition 1.2.3

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ quelconque

1. On dit que $f : X \rightarrow \mathbb{H}$ est \mathcal{C} -simple si et seulement si $f = \sum_{k=1}^n u_k \cdot 1_{C_k}$ où $u_k \in \mathbb{H}, C_k \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$

2. On note $\mathcal{E}(\mathcal{C}; \mathbb{H})$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C} -simples telles que $\forall k = 1 \dots n, \mu(C_k) < \infty$

Remarque 1.2.4 On a trivialement que $\mathcal{E}(\mathcal{C}; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ pour $1 \leq p \leq \infty$

Lemme 1.2.3

$\forall f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ où $1 \leq p < \infty$

$\exists \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ telle que $\forall x \in X$, on a

$$|f^n(x)| \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} f(x)$$

mais également

$$\|f^n \perp f\|_{p, n \rightarrow \infty} \xrightarrow{\perp} 0$$

Preuve. $f(X) \subset \mathbb{H}_0$ s.e.v. fermé séparable de \mathbb{H} , donc \mathbb{H}_0 admet une base Hilbertienne $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$

- $\forall x \in X, f(x) \in \mathbb{H}_0$
donc

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f(x), e_i \rangle e_i$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) \perp \sum_{i=1}^n \langle f(x), e_i \rangle e_i| = 0$$

Soit

$$f_i(x) := \langle f(x), e_i \rangle$$

f_i est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $|f_i(x)|^p \leq |f(x)|^p \cdot |e_i|^p = |f(x)|^p$. Dès lors, $f_i \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{R})$

Par un théorème classique de théorie de l'intégration (thm 13.5 [1]), on a l'existence de $\{f_i^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in X$ on a

$$|f_i^n(x)| \leq |f_i(x)| \quad \text{et} \quad f_i^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} f_i(x)$$

Alors, soit

$$f^n(x) := \sum_{i=1}^n f_i^n(x) e_i \in \mathbb{H}_0$$

f^n est \mathcal{F} -simple.

De plus

$$\begin{aligned} |f^n(x)|^2 &= \sum_{i=1}^n |f_i^n(x)|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2 \stackrel{\text{Bessel}}{=} |f(x)|^2 \end{aligned}$$

i.e.

$$|f^n(x)| \leq |f(x)|$$

Or $f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, par conséquent $f^n \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

- D'autre part,

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i e_i \perp \sum_{i=1}^n f_i^n e_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |f_i \perp f_i^n|^2$$

En posant

$$\alpha_i^n(x) := |f_i(x) \perp f_i^n(x)|^2$$

on a $\forall x \in X$, $\alpha_i^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} 0$ et $|\alpha_i^n(x)| \leq 4|f_i(x)|^2$

donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^n(x)| \leq 4|f(x)|^2 < \infty$$

Par le théorème du M-test de Weierstrass (Appendice [1])

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} 0$$

donc

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i e_i \perp \sum_{i=1}^n f_i^n e_i \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} 0$$

Or

$$|f(x) \perp f^n(x)| \leq |f(x) \perp \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i| + \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i \perp \sum_{i=1}^n f_i^n(x) e_i \right|$$

donc $\forall x \in X$, on a $f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} f(x)$

- Soit

$$h_n(x) := \sup_{k \geq n} |f^k(x) \perp f(x)|^p$$

$h_n \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$, $0 \leq h_n(x) \downarrow 0$ et $0 \leq h_n(x) \leq 2^p |f(x)|^p$ avec $|f|^p \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans le cas réel, on a que

$$0 \leq \int h_n d\mu \downarrow 0$$

et comme

$$\int |f^n \perp f|^p d\mu \leq \int h_n d\mu$$

alors $\|f^n \perp f\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} 0$

#

Théorème 1.2.3 (DCT)

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ où $1 \leq p < \infty$, on suppose que

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. μ
2. $\exists h \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R}), \forall n, |f_n(x)|^p \leq h(x)$ a.e. μ

Alors

$$f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

Preuve. En utilisant le fait que

$$|f_n(x)| \rightarrow |f(x)| \quad \text{a.e.}\mu$$

et le dernier point de la preuve précédente, on a immédiatement le résultat. #

Lemme 1.2.4

Pour μ σ -finie, $f \in \mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathbb{H})$ et $1 \leq p < \infty$

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H}) \text{ telle que } \|f - g\|_p < \epsilon$$

Preuve.

- Pour $f := c.1_F$ avec $c \in \mathbb{H}, c \neq 0$ et $F \in \mathcal{F}$
Comme $f \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, on a $\mu(F) < \infty$ et donc par le théorème 11.4 [1]

$$\forall \epsilon > 0, \exists E \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(E \Delta F) < \frac{\epsilon^p}{|c|^p}$$

Soit $g := c.1_E$.

Comme $E \in \mathcal{A}$, on a

$$E = \bigsqcup_{i=1}^n E_i \text{ où } E_i \in \mathcal{R} \text{ 2-2 disjoints}$$

Ainsi $g = \sum_{i=1}^n c_i.1_{E_i}$ i.e. g est \mathcal{R} -simple et comme $\mu(E) < \infty, g \in \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H})$

Dès lors

$$\begin{aligned} \|f - g\|_p^p &= \|c(1_F - 1_E)\|_p^p \\ &= |c|^p \|1_F - 1_E\|_p^p \\ &\leq |c|^p \|1_{E \Delta F}\|_p^p = |c|^p \mu(E \Delta F) < |c|^p \frac{\epsilon^p}{|c|^p} = \epsilon^p \end{aligned}$$

donc $\|f - g\|_p < \epsilon$

- Tout $f \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ peut s'écrire $f = f_1 + \dots + f_n$ avec $f_i = c_i.1_{F_i}$ où $c_i \in \mathbb{H}$ et $F_i \in \mathcal{F}$ 2-2 disjoints tels que $\mu(F_i) < \infty$
Par conséquent $\exists g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H})$ tels que $\|f_i - g_i\|_p < \frac{\epsilon}{n}$
En posant $g := \sum_{i=1}^n g_i$, on a alors $g \in \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H})$ et

$$\|f - g\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|f_i - g_i\|_p < \epsilon$$

#

Théorème 1.2.4

Pour μ σ -finie et $1 \leq p < \infty$

$\mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H})$ est dense dans $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ pour la norme $\|\cdot\|_p$

Preuve. Soit $f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, et $\epsilon > 0$. Par le lemme 1.2.3

$$\exists g \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \|f \perp g\|_p < \frac{\epsilon}{2}$$

et par le lemme 1.2.4, comme $g \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

$$\exists h \in \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H}), \|g \perp h\|_p < \frac{\epsilon}{2}$$

donc $\exists h \in \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathbb{H})$ tel que

$$\|f \perp h\|_p \leq \|f \perp g\|_p + \|g \perp h\|_p < \epsilon$$

#

Remarque 1.2.5 Ce résultat reste vrai pour $p = \infty$.

Théorème 1.2.5

Si \mathcal{F} est séparable, μ σ -finie et \mathbb{H} séparable alors $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$

Preuve. \mathcal{F} est séparable, donc $\exists \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ dénombrable telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$

De plus

$$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \quad \text{où } X_n \in \mathcal{F} \text{ et } \mu(X_n) < \infty$$

Soit

$$\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} := \mathcal{C} \cup \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

et

$$\mathcal{S}_n = \{F_1 \cap \dots \cap F_n \mid (F_i = E_i) \vee (F_i = E_i^c)\}$$

En posant $\mathcal{A}_n = \alpha(\mathcal{S}_n)$ l'algèbre engendrée par \mathcal{S}_n ,

on a $\mathcal{A}_0 := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ séparable et $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{F}$. De plus μ est σ -finie sur \mathcal{A}_0 i.e.

$$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{où } A_n \in \mathcal{A}_0 \text{ et } \mu(A_n) < \infty$$

Soit $\mathcal{A} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dense dans \mathbb{H} ,

on définit

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^m v_i \cdot 1_{A_i} \mid v_i \in V, A_i \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Par le lemme 1.2.3,

$$\forall f \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \forall \epsilon > 0, \exists g \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \quad \text{tel que } \|f \perp g\|_p < \epsilon$$

On a $g = \sum_{i=1}^m c_i \cdot 1_{B_i}$ où $c_i \in \mathbb{H}$ et $B_i \in \mathcal{F}$

Par densité, $\exists v_i \in V$ tel que

$$|v_i \perp c_i|^p < \frac{\epsilon^p}{m \cdot \mu(B_i)}$$

On pose $h := \sum_{i=1}^m v_i \cdot 1_{B_i}$, on a ainsi

$$\|g \perp h\|_p^p = \sum_{i=1}^m |c_i \perp v_i|^p \mu(B_i) < \epsilon^p$$

On suppose sans perte de généralité que $\forall i = 1 \dots m$, $v_i \neq 0$. Par le théorème 11.4 [1], on a alors

$$\forall i = 1 \dots m, \exists A_i \in \mathcal{A}_0 \quad \text{tel que } \mu(A_i \Delta B_i) < \frac{\epsilon^p}{m^p \cdot |v_i|^p}$$

Donc pour $\tilde{f} := \sum_{i=1}^m v_i \cdot 1_{A_i}$, on a $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ et $\|\tilde{f} \perp h\|_p < \epsilon$. Par conséquent $\|f \perp \tilde{f}\|_p < 3\epsilon$, d'où le résultat, puisque V est dénombrable. #

1.3 Intégrale Hilbertienne

Proposition 1.3.1

Pour $f \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

1. $\forall v \in \mathbb{H}, \langle f, v \rangle \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$
2. $\exists! u \in \mathbb{H}$ tel que $\forall v \in \mathbb{H}, \int \langle f, v \rangle d\mu = \langle u, v \rangle$. On définit alors $\int f d\mu := u$
3. $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Preuve.

1. $\forall v \in \mathbb{H}, u \mapsto \langle u, v \rangle$ est continue, donc $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

De plus,

$$\int |\langle f, v \rangle| d\mu \stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \int |f| |v| d\mu = |v| \int |f| d\mu < \infty$$

donc $\langle f, v \rangle \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

2. Soit $\varphi : v \mapsto \int \langle f, v \rangle d\mu$
on a $\forall v \in \mathbb{H}$

$$|\varphi(v)| \leq \int |\langle f, v \rangle| d\mu \leq |v| \int |f| d\mu$$

donc $\varphi \in \mathbb{H}'$. Or par le théorème de Riesz $\exists! u \in \mathbb{H}, \forall v \in \mathbb{H}, \varphi(v) = \langle u, v \rangle$

3. u vérifie $|u| \leq \int |f| d\mu$, on a donc le résultat en posant $\int f d\mu := u$

#

Remarque 1.3.1 L'opérateur $f \mapsto \int f d\mu$ est un opérateur linéaire continu de $\mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ dans \mathbb{H} .

Corollaire 1.3.1 (DCT)

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, on suppose que

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. μ
2. $\exists h \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R}), \forall n, |f_n(x)| \leq h(x)$ a.e. μ

Alors

$$f \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \quad \text{et} \quad \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

Preuve. Par la proposition précédente, et le le théorème 1.2.3,

$$\left| \int f_n d\mu \perp \int f d\mu \right| \leq \int |f_n \perp f| d\mu = \|f_n \perp f\|_1 \rightarrow 0$$

#

1.4 Opérateurs Hilbertiens

Soit \mathbb{H} et \mathbb{B} deux espaces de Hilbert réels séparables, de produits scalaires et normes respectives $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$, respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ et $|\cdot|_{\mathbb{B}}$, et de bases Hilbertiennes respectives $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

Proposition 1.4.1 (Pettis)

f est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ssi $\forall i, x \mapsto \langle f(x), e_i \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Preuve.

(\Rightarrow) Pour $u, v \in \mathbb{H}$, $u \mapsto \langle u, v \rangle$ est continue, donc mesurable $\mathcal{B}(\mathbb{H})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$

(\Leftarrow) – Montrons tout d’abord que $\forall v \in \mathbb{H}, x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En effet, comme $f(x) \in \mathbb{H}$, par l’identité de Parseval, on a

$$\begin{aligned} \langle f(x), v \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f(x), e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle f(x), e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \end{aligned}$$

Or $x \mapsto \sum_{i=1}^n \langle f(x), e_i \rangle \langle v, e_i \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

– Soit $V := \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans \mathbb{H} .

Comme

$$|f(x)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\langle f(x), e_i \rangle|^2$$

on a que $x \mapsto |f(x)|^2$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Donc

$$g_n(x) := |f(x) \perp v_n|^2 = |f(x)|^2 \perp 2\langle f(x), v_n \rangle + |v_n|^2$$

est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Soit $E_n := \{x \mid g_n(x) < \epsilon^2\}$. On a $\forall n, E_n \in \mathcal{F}$. Soient $F_1 := E_1$ et $F_n := E_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)^c$. On a donc $F_i \in \mathcal{F}$ 2-2 disjoints.

Comme V est dense dans \mathbb{H}

$$\forall x \in X, \exists v_n \in \mathbb{H} \text{ tel que } |f(x) \perp v_n| < \epsilon$$

donc $x \in E_n$ et

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

On définit alors

$$g(x) := \sum_{i=1}^{\infty} v_i \cdot 1_{F_i}(x)$$

i.e.

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v_i \cdot 1_{F_i}$$

donc g est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

De plus, $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in F_n$ i.e. $|f(x) \perp v_n| < \epsilon$

donc $\forall x \in X$, on a $|f(x) \perp g(x)| < \epsilon$

Pour $\epsilon := \frac{1}{n}$, $\exists h_n \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ tel que $\forall x \in X$, on a $|h_n(x) \perp f(x)| < \frac{1}{n}$.

Par conséquent $\forall x \in X, h_n(x) \rightarrow f(x)$. Par le théorème 1.1.1 f est donc mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

#

Lemme 1.4.1

Pour $H : X \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})$

$$H \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})) \text{ ssi } \forall i, j \text{ on a } x \mapsto \langle \phi_j, H(x)e_i \rangle_{\mathbb{B}} \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$$

Preuve.

$\{e_i \otimes \phi_j\}_{i,j}$ est une base Hilbertienne de $\mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})$ et $\langle\langle H(x), e_i \otimes \phi_j \rangle\rangle = \langle \phi_j, H(x)e_i \rangle_{\mathbb{B}}$ #

Lemme 1.4.2

Si $H \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ alors $H^* \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathcal{L}^2(\mathbb{B}, \mathbb{H}))$

Preuve. $\langle H^*(x)\phi_j, e_i \rangle = \langle \phi_j, H(x)e_i \rangle_{\mathbb{B}} \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ #

Proposition 1.4.2

Soient $f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $H \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ alors $Hf \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{B})$

Preuve.

- $\forall x \in X$ on a $f(x) \in \mathbb{H}$ et $H(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})$.

On peut donc définir $Hf : x \mapsto (Hf)(x) := H(x)f(x)$

- On a $\forall x \in X, \forall j$

$$\begin{aligned} \langle \phi_j, H(x)f(x) \rangle_{\mathbb{B}} &= \langle H^*(x)\phi_j, f(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle H^*(x)\phi_j, e_i \rangle \langle f(x), e_i \rangle \quad \text{par Parseval} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f(x), e_i \rangle \langle \phi_j, H(x)e_i \rangle_{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

Or $x \mapsto \langle f(x), e_i \rangle$ et $x \mapsto \langle \phi_j, H(x)e_i \rangle_{\mathbb{B}}$ sont mesurables $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$
donc $\forall j, \langle \phi_j, (Hf)(x) \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$

#

Proposition 1.4.3

Soient $f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $H \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ alors $Hf \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{B})$

Preuve. $\forall x \in X,$

$$|H(x)f(x)|_{\mathbb{B}} \leq \sigma_2(H(x))|f(x)|$$

donc

$$\int |Hf|_{\mathbb{B}} d\mu \leq \int \sigma_2(H)|f| d\mu \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int \sigma_2^2(H) d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

car $x \mapsto \sigma_2(H(x))$ et $x \mapsto |f(x)|$ sont dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{R})$

#

Proposition 1.4.4

Soient $f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\alpha \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ alors $\alpha f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Preuve.

- $\forall x \in X,$ on a $f(x) \in \mathbb{H}$ et $\alpha(x) \in \mathbb{R},$ on définit $\alpha f : x \mapsto (\alpha f)(x) := \alpha(x)f(x)$
- $\forall x \in X, \forall i$ on a $\langle \alpha(x)f(x), e_i \rangle = \alpha(x)\langle f(x), e_i \rangle.$ Or α et $\langle f, e_i \rangle$ sont mesurables $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}).$ Par conséquent, $\langle \alpha f, e_i \rangle$ est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}),$ et donc $\alpha f \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H}).$

#

Chapitre 2

Probabilités dans les espaces de Hilbert

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé complet et \mathbb{H} et \mathbb{B} deux espaces de Hilbert réels séparables, de produits scalaires et normes respectives $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$, respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ et $|\cdot|_{\mathbb{B}}$, et de bases Hilbertiennes respectives $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

2.1 Généralités

Définition 2.1.1

1. Pour $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ on définit l'espérance de X par $\mathbf{E}X := \int X d\mathbf{P}$
2. Si $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ on définit la variance de X par $\mathbf{V}X := \int |X \perp \mathbf{E}X|^2 d\mathbf{P}$

Proposition 2.1.1

Pour $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ on a les propriétés suivantes

1. $\forall v \in H, \mathbf{E}\langle X, v \rangle = \langle \mathbf{E}X, v \rangle$
2. $|\mathbf{E}X| \leq \mathbf{E}|X|$
3. Si $X = u$ a.s. \mathbf{P} avec $u \in \mathbb{H}$ alors $\mathbf{E}X = u$

Preuve.

1. Immédiat
2. Immédiat
3. On a $\mathbf{P}(X = u) = 1$
donc $\forall v \in \mathbb{H}$

$$\int \langle X, v \rangle d\mathbf{P} = \int \langle X, v \rangle \cdot 1_{\{X=u\}} d\mathbf{P} = \int \langle u, v \rangle d\mathbf{P} = \langle u, v \rangle$$

donc $\mathbf{E}X = u$

#

Proposition 2.1.2

Pour $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$

$$\mathbf{L}^{p_2}(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^{p_1}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$$

et $\forall X \in \mathbf{L}^{p_2}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

$$\|X\|_{p_2} \leq \|X\|_{p_1}$$

Preuve.

- Soit $X \in \mathbf{L}^{p_2}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, donc $|X| \in \mathbf{L}^{p_2}(\mathcal{F}; \mathbb{R})$
Or comme $\mathbf{P}(\Omega) = 1 < \infty$, on a $\mathbf{L}^{p_2}(\mathcal{F}; \mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^{p_1}(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ et donc $X \in \mathbf{L}^{p_1}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

•

$$\|X\|_{p_2} = \||X|\|_{p_2} \leq \||X|\|_{p_1} = \|X\|_{p_1}$$

#

2.2 Espérance conditionnelle

Soit \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} , on fait l'abus de notation de noter \mathbf{P} la restriction de \mathbf{P} à (Ω, \mathcal{G})

Lemme 2.2.1

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ s'identifie à un s.e.v fermé de $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Preuve.

- Soit $X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ i.e. X est mesurable $\mathcal{G}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$
donc X est mesurable $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$ i.e. $X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
- Pour $1 \leq p < \infty$
 $(\mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H}), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})})$ et $(\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})})$ sont des espaces de Banach.
Or, pour $X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})$

$$\|X\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})} = \left(\int |X|^p d\mathbf{P} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |X|^p d\mathbf{P}|_{\mathcal{G}} \right)^{\frac{1}{p}} = \|X\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})}$$

puisque $|\cdot|^p$ est mesurable $\mathcal{G}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc une isométrie de $\mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ dans $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
et donc $\mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ s'identifie à un s.e.v. fermé de $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

- Pour $p = \infty$

$$\|X\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}; \mathbb{H})} = \||X|\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{F}; \mathbb{R})} = \||X|\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{G}; \mathbb{R})} = \|X\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{G}; \mathbb{H})}$$

#

Définition 2.2.1

On note $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}$ le projecteur $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ et on appelle $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X$ l'espérance conditionnelle de X par rapport à \mathcal{G} .

Proposition 2.2.1

Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

1. $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$
2. $\|\mathbf{E}_{\mathcal{G}}\|_2 \leq \|X\|_2$

Preuve. Ces propriétés sont celles de tout projecteur $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$

#

Proposition 2.2.2

Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ tribus

1. $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X$
2. $\mathbf{E} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = \mathbf{E} X$
3. Pour $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})$

$$\alpha X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}(\alpha X) = \alpha \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}(X)$$

Preuve.

1. $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})$ sev fermé de $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$

Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

$$X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X + X_2 \quad \text{où} \quad X_2 \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}))^\perp$$

$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ donc

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X + X_1 \quad \text{où} \quad X_1 \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$$

donc

$$X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X + X_1 + X_2$$

Or $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$, par conséquent $(\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}))^\perp \subset (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$

Ainsi $X_2 \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$ et donc $X_1 + X_2 \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$

On en déduit que

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X$$

De plus

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$$

donc

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X$$

2. Soit $\mathcal{O} := \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathbf{L}^2(\mathcal{O}; \mathbb{H})$ s'identifie alors à \mathbb{H} ; en fait, $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}; \mathbb{H}) = \{1_\Omega \cdot v \mid v \in \mathbb{H}\}$.

Or

$$X = \mathbf{E} X \cdot 1_\Omega + (X \perp \mathbf{E} X)$$

et

$$(\mathbf{E}X|X \perp \mathbf{E}X) = \mathbf{E}\langle \mathbf{E}X, X \perp \mathbf{E}X \rangle = \langle \mathbf{E}X, \mathbf{E}(X \perp \mathbf{E}X) \rangle = 0$$

donc

$$X \perp \mathbf{E}X \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{O}; \mathbb{H}))^\perp$$

donc

$$\mathbf{E}_\mathcal{O}X = \mathbf{E}X.1_\Omega$$

et

$$(\mathbf{L}^2(\mathcal{O}; \mathbb{H}))^\perp = \{X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \mid \mathbf{E}X = 0\}$$

On a donc le résultat grace au 1. en identifiant $\mathbf{E}_\mathcal{O}$ et \mathbf{E} .

3. • $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{G}_1; \mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ donc $\alpha X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}; \mathbb{H})$.

De plus,

$$|\alpha X| = |\alpha| |X| \leq \|\alpha\|_\infty |X| \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

donc

$$\mathbf{E}|\alpha X|^2 \leq \|\alpha\|_\infty^2 \mathbf{E}|X|^2$$

donc $\alpha X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$.

• Soit

$$\begin{aligned} H_\alpha : \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) &\rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \\ x &\mapsto H_\alpha(X) := \alpha X \end{aligned}$$

H_α est un opérateur linéaire borné. Comme $\alpha \in \mathbf{L}^0(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})$ on a $H_\alpha(\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})) \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})$.

De plus, H_α est Hermitien

$$\begin{aligned} (H_\alpha X|Y) &= \mathbf{E}\langle H_\alpha X, Y \rangle = \mathbf{E}\langle \alpha X, Y \rangle \\ &= \mathbf{E}\langle X, \alpha Y \rangle = (X|H_\alpha Y) \end{aligned}$$

donc

$$H_\alpha(\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp \subset (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$$

Comme

$$X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}X + Y \quad \text{où } Y \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$$

on a donc

$$H_\alpha X = H_\alpha \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}X + H_\alpha Y$$

avec

$$H_\alpha \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \quad \text{et} \quad H_\alpha Y \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}))^\perp$$

donc

$$\alpha X = \alpha \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}X + H_\alpha Y$$

d'où

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}(\alpha X) = \alpha \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X$$

#

Proposition 2.2.3

$\forall X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ où $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tribu

1. $\forall v \in \mathbb{H}$, $\langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, v \rangle = \mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})$ a.s. \mathbf{P}
2. $|\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X| \leq \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G})$ a.s. \mathbf{P}

Remarque 2.2.1 On a noté $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{G})$ l'espérance conditionnelle de variables aléatoires réelles. Voir par exemple le chapitre 34 de [1], pour un rappel des propriétés classiques.

Preuve.

1. Pour $v \in \mathbb{H}$, on a $\langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, v \rangle \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{R})$
De plus, $\forall \alpha \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{G}; \mathbb{R})$, $\alpha \langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, v \rangle \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$
et

$$\begin{aligned} \int \alpha \langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, v \rangle d\mathbf{P} &= \int \langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}}(\alpha X), v \rangle d\mathbf{P} \\ &= \langle \mathbf{E} \mathbf{E}_{\mathcal{G}}(\alpha X), v \rangle = \langle \mathbf{E}(\alpha X), v \rangle \\ &= \int \langle \alpha X, v \rangle d\mathbf{P} = \int \alpha \langle X, v \rangle d\mathbf{P} \\ &= \int \alpha \mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G}) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

donc

$$\langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, v \rangle = \mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G}) \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

2. Par 1. $\exists E \in \mathcal{F}$ \mathbf{P} -négligeable tel que
 $\forall \omega \in E^c$

$$\langle (\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega), v \rangle = \mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})(\omega)$$

Donc $\forall \omega \in E^c$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega)| &= \sup_{|v| \leq 1} |\langle (\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega), v \rangle| \\ &= \sup_{|v| \leq 1} |\mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})(\omega)| \end{aligned}$$

Or pour $v \in \mathbb{H}$ tel que $|v| \leq 1$

$$|\mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})| \leq \mathbf{E}(|\langle X, v \rangle| | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(|X| \cdot |v| | \mathcal{G}) = |v| \cdot \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G}) \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

i.e. $\exists F \in \mathcal{F}$ \mathbf{P} -négligeable tel que
 $\forall \omega \in F^c$

$$|\mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})(\omega)| \leq \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G})(\omega)$$

ainsi $\forall \omega \in (E \cup F)^c$

$$|(\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X)(\omega)| \leq \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G})(\omega)$$

Or $P(E \cup F) = 0$,

par conséquent $|(\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X)| \leq \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G})$ a.s. \mathbf{P}

#

Théorème 2.2.1

L'opérateur linéaire continu $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} : \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ admet un prolongement continu

$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}} : \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ vérifiant les propriétés suivantes

1. $\forall X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H}), \quad \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}(X) = X$
2. $\|\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}(X)\|_1 \leq \|X\|_1$
3. Pour $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}_1} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}_2}(X) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}_1}(X)$ et $\mathbf{E} \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}_1}(X) = \mathbf{E}X$
4. $\forall \alpha \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ on a $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}(\alpha X) = \alpha \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}(X)$

Preuve. Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ on a $|\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X| \leq \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G})$ a.s. \mathbf{P}

donc

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X| \leq \mathbf{E}\mathbf{E}(|X| | \mathcal{G}) = \|X\|_1$$

i.e.

$$\|\mathbf{E}_{\mathcal{G}}\|_1 \leq \|X\|_1 \tag{2.1}$$

Donc $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} : \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ est un opérateur linéaire borné. De plus, comme $\mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ est complet et $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ dense dans $\mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ (puisque $\mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ dense dans $\mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$), on peut prolonger continuellement $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}$ en

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}} : \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$$

On a alors les propriétés

1. $\forall X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \quad \mathbf{E}_{\mathcal{G}}(X) = X$, or $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ est dense dans $\mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$, donc par continuité de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}$, on a $\forall X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{G}; \mathbb{H})$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}(X) = X$$

2. Par l'inégalité 2.1
3. Par continuité du prolongement et la proposition 2.2.2 points 1. et 2.
4. Par continuité du prolongement et la proposition 2.2.2 point 3.

#

Remarque 2.2.2 Par abus de langage, on notera toujours $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}$ pour $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{G}}$

Remarque 2.2.3 Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'inclusion $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \subset \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ permet de définir $\mathbf{E}_{\mathcal{G}}$ sur $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$.

Lemme 2.2.2

Pour $X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ avec $1 \leq p < \infty$

on a

$$|\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X|^p \leq \mathbf{E}(|X|^p | \mathcal{G}) \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

Preuve. $\exists E \in \mathcal{F}$ \mathbf{P} -négligeable tel que

$\forall \omega \in E^c$

$$\langle (\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega), v \rangle = \mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})(\omega)$$

donc $\forall \omega \in E^c$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega)| &= \sup_{|v| \leq 1} |\langle (\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega), v \rangle| \\ &= \sup_{|v| \leq 1} |\mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})(\omega)| \end{aligned}$$

Or pour $v \in \mathbb{H}$ tel que $|v| \leq 1$, grace à l'inégalité de Jensen dans le cas réel, on a

$$|\mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})|^p \leq \mathbf{E}(|\langle X, v \rangle|^p | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(|X|^p \cdot |v|^p | \mathcal{G}) = |v|^p \cdot \mathbf{E}(|X|^p | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(|X|^p | \mathcal{G}) \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

i.e. $\exists F \in \mathcal{F}$ \mathbf{P} -négligeable, tel que

$\forall \omega \in F^c$

$$|\mathbf{E}(\langle X, v \rangle | \mathcal{G})|^p(\omega) \leq \mathbf{E}(|X|^p | \mathcal{G})(\omega)$$

Ainsi $\forall \omega \in (E \cup F)^c$

$$|(\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)(\omega)|^p \leq \mathbf{E}(|X|^p | \mathcal{G})(\omega)$$

or $P(E \cup F) = 0$ et donc $|(\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X)|^p \leq \mathbf{E}(|X|^p | \mathcal{G}) \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$

#

Proposition 2.2.4

Pour $X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ où $1 \leq p \leq \infty$

1. $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})$
2. $\|\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X\|_p \leq \|X\|_p$

Preuve. Pour $1 \leq p < \infty$, par le lemme précédent, on a

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X|^p \leq \mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathcal{G}}|X|^p = \mathbf{E}|X|^p$$

donc $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ et $\|\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X\|_p \leq \|X\|_p$

Pour $p = \infty$, en utilisant le lemme précédent avec $p = 1$

$$\text{ess sup } |\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X| \leq \text{ess sup } \mathbf{E}(|X| | \mathcal{G}) \leq \| |X| \|_{\infty} = \|X\|_{\infty}$$

et donc $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} X \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathcal{G}; \mathbb{H})$

#

Proposition 2.2.5

Pour $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tribu

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X \quad \text{alors } \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X$$

Preuve. Car

$$\|\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X_n \perp \mathbf{E}_{\mathcal{G}}X\|_p \leq \|X_n \perp X\|_p \rightarrow 0$$

#

Théorème 2.2.2

Pour $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tribu, on suppose que

1. $X_n \rightarrow X$ a.s. \mathbf{P}
2. $\exists Y \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R}), |X_n|^p \leq Y$ a.s. \mathbf{P}

Alors

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X_n \rightarrow \mathbf{E}_{\mathcal{G}}X \quad \text{a.s.}\mathbf{P} \quad \text{et } \mathbf{L}^p$$

Preuve. Par DCT, on a $X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$.

En appliquant le lemme 2.2.2 à $(X_n \perp X)$, on a

$$|\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X_n \perp \mathbf{E}_{\mathcal{G}}X|^p \leq \mathbf{E}(|X_n \perp X|^p | \mathcal{G}) \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

Or

$$|X_n \perp X|^p \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

et

$$|X_n \perp X|^p \leq 2^p(Y + |X|^p) \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$$

donc par le théorème de la convergence dominée de l'espérance conditionnelle dans le cas réel (voir par exemple chap.34 [1]), on a que

$$\mathbf{E}(|X_n \perp X|^p | \mathcal{G}) \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

donc

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}}X_n \rightarrow \mathbf{E}_{\mathcal{G}}X \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

La convergence en \mathbf{L}^p découle de la proposition précédente et de DCT.

#

2.3 Indépendance

Soient $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ deux tribus.

Proposition 2.3.1

\mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont indépendantes ssi $\forall X_i \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_i; \mathbb{H})$ ($i = 1, 2$), on a $\mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle$

Preuve.

(\Rightarrow) Soit $X_1 := c_1 \cdot 1_{G_1}$ où $c_1 \in \mathbb{H}$ et $G_1 \in \mathcal{G}_1$

On a

$$\mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{E}\langle c_1 \cdot 1_{G_1}, X_2 \rangle = \mathbf{E}(1_{G_1} \cdot \langle c_1, X_2 \rangle)$$

or $1_{G_1} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{R})$ et $\langle c_1, X_2 \rangle \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{R})$

Puisque les variables aléatoires sont réelles, on a par indépendance

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle &= \mathbf{E}1_{G_1} \cdot \mathbf{E}\langle c_1, X_2 \rangle \\ &= \mathbf{P}(G_1) \cdot \langle c_1, \mathbf{E}X_2 \rangle = \langle c_1 \cdot \mathbf{P}(G_1), \mathbf{E}X_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle \end{aligned}$$

Par linéarité, on a donc

$$\forall X_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}), \forall X_2 \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}) \quad \mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle$$

Or $\mathcal{E}(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H})$

donc

$$\forall X_1 \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}), \exists \{X_1^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \text{ telle que } \|X_1^n \perp X_1\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus,

$$|\mathbf{E}\langle X_1^n, X_2 \rangle \perp \mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle| = |\mathbf{E}\langle X_1^n \perp X_1, X_2 \rangle| \leq \mathbf{E}|\langle X_1^n \perp X_1, X_2 \rangle|$$

et

$$\mathbf{E}|\langle X_1^n \perp X_1, X_2 \rangle| \leq \mathbf{E}(|X_1^n \perp X_1| \cdot |X_2|) \leq \|X_1^n \perp X_1\|_2 \|X_2\|_2$$

donc

$$|\mathbf{E}\langle X_1^n, X_2 \rangle \perp \mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle| \leq \|X_1^n \perp X_1\|_2 \|X_2\|_2$$

De même

$$|\langle \mathbf{E}X_1^n, \mathbf{E}X_2 \rangle \perp \langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle| = |\langle \mathbf{E}(X_1^n \perp X_1), \mathbf{E}X_2 \rangle| \leq \mathbf{E}|X_1^n \perp X_1| |\mathbf{E}X_2|$$

et

$$\mathbf{E}|X_1^n \perp X_1| \cdot |\mathbf{E}X_2| = \|X_1^n \perp X_1\|_1 \|X_2\|_1 \leq \|X_1^n \perp X_1\|_2 \|X_2\|_2$$

donc

$$|\langle \mathbf{E}X_1^n, \mathbf{E}X_2 \rangle \perp \langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle| \leq \|X_1^n \perp X_1\|_2 \|X_2\|_2$$

Comme $\|X_1^n \perp X_1\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\mathbf{E}\langle X_1^n, X_2 \rangle = \langle \mathbf{E}X_1^n, \mathbf{E}X_2 \rangle$

on obtient

$$\mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle$$

(\Leftarrow) Soient $X_i := u \cdot 1_{G_i}$ où $G_i \in \mathcal{G}_i$ ($i = 1, 2$) et $u \in \mathbb{H}$ avec $|u| = 1$

alors

$$\mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{E}(1_{G_1} \cdot 1_{G_2}) = \mathbf{E}1_{G_1 \cap G_2} = \mathbf{P}(G_1 \cap G_2)$$

et

$$\langle \mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2 \rangle = \langle \mathbf{P}(G_1) \cdot u, \mathbf{P}(G_2) \cdot u \rangle = \mathbf{P}(G_1) \cdot \mathbf{P}(G_2) \cdot |u|^2 = \mathbf{P}(G_1) \cdot \mathbf{P}(G_2)$$

donc \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont indépendantes. #

Remarque 2.3.1 En posant formellement $\mathbb{H}^\perp := \{X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}) \mid \mathbf{E}X = 0\}$, on a que \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont indépendantes si et seulement si

$$[\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp] \perp [\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp]$$

i.e. ssi $\forall X_i \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_i; \mathbb{H})$ ($i = 1, 2$)

$$\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{E}\langle X_1, X_2 \rangle = 0$$

Proposition 2.3.2

Pour $X_1, \dots, X_n \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ 2-2 indépendantes, alors

$$\mathbf{v}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(X_i)$$

Preuve. Soit $m_i := \mathbf{E}X_i$, on a $\mathbf{E}\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n m_i$

donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n X_i \perp \sum_{i=1}^n m_i\right|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n (X_i \perp m_i), \sum_{j=1}^n (X_j \perp m_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle X_i \perp m_i, X_j \perp m_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |X_i \perp m_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle X_i \perp m_i, X_j \perp m_j \rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

Or, pour $i \neq j$, $X_i \perp m_i$ et $X_j \perp m_j$ sont indépendantes,

donc

$$\mathbf{E}\langle X_i \perp m_i, X_j \perp m_j \rangle = \langle \mathbf{E}X_i \perp m_i, \mathbf{E}X_j \perp m_j \rangle = 0$$

donc

$$\mathbf{v}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(X_i)$$

#

Proposition 2.3.3

\mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont indépendantes ssi $\forall X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$ on a $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = \mathbf{E}X.1_\Omega$

Preuve.

(\Rightarrow) Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$, posons $Y := X \perp \mathbf{E}X \in \mathbb{H}^\perp$

on a

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} Y = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X \perp \mathbf{E}X = X \perp \mathbf{E}X = Y$$

i.e. $Y \in (\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp)$

Par conséquent

$$Y \perp [\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp]$$

i.e. $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} Y = 0$, donc $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = \mathbf{E}X$

Pour $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$ le résultat est obtenu par densité de $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$ dans $\mathbf{L}^1(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$

(\Leftarrow) Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp$, on a $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = 0$
donc

$$[\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp] \perp [\mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H}) \cap \mathbb{H}^\perp]$$

donc \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont indépendantes.

#

Corollaire 2.3.1

\mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont indépendantes ssi $\forall X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ on a $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E} X.1_\Omega$

Preuve.

(\Rightarrow) Pour $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, on a $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$
Par la proposition précédente, on a donc

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E} X.1_\Omega$$

(\Leftarrow) Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$, on a $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{G}_2} X = \mathbf{E} X$, et donc l'indépendance découle de la proposition précédente.

#

Proposition 2.3.4

Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ et $Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
on a

$$\mathbf{E}(\langle X, Y \rangle | \mathcal{G}) = \langle X, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle \quad \text{a.s.} \mathbf{P}$$

Preuve.

- Soit $X := c.1_G$ avec $c \in \mathbb{H}$ et $G \in \mathcal{G}$
on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle X, Y \rangle | \mathcal{G}) &= \mathbf{E}(1_G \cdot \langle c, Y \rangle | \mathcal{G}) \\ &= 1_G \cdot \mathbf{E}(\langle c, Y \rangle | \mathcal{G}) = 1_G \cdot \langle c, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle \\ &= \langle X, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle \quad \text{a.s.} \mathbf{P} \end{aligned}$$

- Par linéarité, on a la propriété $\forall X \in \mathcal{E}(\mathcal{G}; \mathbb{H})$. Or $\mathcal{E}(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathbb{H})$, donc $\exists \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\mathcal{G}; \mathbb{H})$ telle que

$$|X_n| \leq |X| \quad \text{et} \quad X_n \rightarrow X \quad \text{a.s.} \mathbf{P}$$

avec de plus

$$\|X_n \perp X\|_2 \rightarrow 0$$

on en déduit

$$\langle X_n, Y \rangle \rightarrow \langle X, Y \rangle \quad \text{a.s.} \mathbf{P}$$

De plus,

$$|\langle X_n, Y \rangle| \leq |X_n| |Y| \leq |X| |Y| \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$$

donc par le théorème de la convergence dominée dans le cas réel (voir par exemple théorème 34.2 [1])

on a

$$\mathbf{E}(\langle X_n, Y \rangle | \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{E}(\langle X, Y \rangle | \mathcal{G}) \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

et comme

$$|\langle X_n, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle \perp \langle X, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle| \leq |X_n \perp X| |\mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y| \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

on a

$$|\langle X_n, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle \perp \langle X, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

Ainsi

$$\mathbf{E}(\langle X, Y \rangle | \mathcal{G}) = \langle X, \mathbf{E}_{\mathcal{G}} Y \rangle \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

#

Lemme 2.3.1

Soient $H \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ et $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ alors $\mathbf{E}_{\mathcal{G}} H X = H \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$

Preuve. On a

$$\langle \phi_i, H(\omega) X(\omega) \rangle_{\mathbb{B}} = \langle H^*(\omega) \phi_i, X(\omega) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_i, H(\omega) e_j \rangle_{\mathbb{B}} \langle X(\omega), e_j \rangle$$

donc

$$\sum_{j=1}^n \langle \phi_i, H(\omega) e_j \rangle_{\mathbb{B}} \langle X(\omega), e_j \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} \langle \phi_i, H(\omega) X(\omega) \rangle_{\mathbb{B}}$$

De plus, on a

$$\mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^n \langle \phi_i, H e_j \rangle_{\mathbb{B}} \langle X, e_j \rangle \mid \mathcal{G} \right) = \sum_{j=1}^n \langle \phi_i, H e_j \rangle_{\mathbb{B}} \langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, e_j \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_i, H e_j \rangle_{\mathbb{B}} \langle \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X, e_j \rangle$$

donc

$$\mathbf{E}(\langle \phi_i, H X \rangle_{\mathbb{B}} | \mathcal{G}) = \langle \phi_i, H \mathbf{E}_{\mathcal{G}} X \rangle_{\mathbb{B}}$$

et par la proposition précédente

$$\mathbf{E}(\langle \phi_i, H X \rangle_{\mathbb{B}} | \mathcal{G}) = \langle \phi_i, \mathbf{E}_{\mathcal{G}}(H X) \rangle_{\mathbb{B}}$$

#

Théorème 2.3.1

Pour $H \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_1; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ et $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{G}_2; \mathbb{H})$ où \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont des sous-tribus indépendantes de \mathcal{F} , on a

1. $H X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{B})$
2. $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}(H X) = H(\mathbf{E} X)$

Preuve.

1. On a déjà $HX \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{B})$ et $\mathbf{E}|HX|_{\mathbb{B}}^2 \leq \mathbf{E}(\sigma_2^2(H) \cdot |X|^2)$
Comme $\sigma_2^2(H)$ et $|X|^2$ sont indépendantes, puisque $\sigma_2^2(H)$ est mesurable $\mathcal{G}_1/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $|X|^2$ est mesurable $\mathcal{G}_2/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a aussi

$$\mathbf{E}|HX|_{\mathbb{B}}^2 \leq \mathbf{E}\sigma_2^2(H) \cdot \mathbf{E}|X|^2$$

2. On a $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}HX = H\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}X$ et $\mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}X = \mathbf{E}_{\mathcal{G}_1}\mathbf{E}_{\mathcal{G}_2}X = \mathbf{E}X$

#

2.4 Martingales Hilbertiennes

2.4.1 Martingales à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ un base stochastique complète, i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé complet et $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration telle que \mathcal{F}_0 contient toutes les parties \mathbf{P} -négligeables. On note de plus $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$ et on écrira dans la suite \mathbf{E}_t pour $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}$ ou $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ suivant les cas. Enfin soit \mathbb{H} un espace de Hilbert réel séparable et $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne.

Définition 2.4.1

On dit que $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale ssi

1. X est adaptée à \mathbb{F} i.e. $\forall n, X_n \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}_n; \mathbb{H})$
2. $\forall n, \mathbf{E}|X_n| < \infty$
3. $\forall n, \mathbf{E}_n X_{n+1} = X_n$

Pour $1 < p < \infty$, on dit que X est une \mathbf{L}^p -martingale si de plus $\forall n, X_n \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Remarque 2.4.1 La condition 3. est clairement équivalente à $\forall n, p \geq 1, \mathbf{E}_n X_{n+p} = X_n$

Proposition 2.4.1

Pour X une \mathbf{L}^2 -martingale et $p \geq 1$, on a

$$\mathbf{E}|X_{n+p}|^2 \perp \mathbf{E}|X_n|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{E}|X_{n+i+1} \perp X_{n+i}|^2$$

Preuve. Posons $\Delta_i := X_{i+1} \perp X_i$

Pour $i \geq m$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m \Delta_i &= \mathbf{E}_m(X_{i+1} \perp X_i) \\ &= \mathbf{E}_m \mathbf{E}_i(X_{i+1} \perp X_i) = \mathbf{E}_m(X_i \perp X_i) = 0 \end{aligned}$$

or

$$X_{n+p} = X_n + \sum_{i=n}^{n+p-1} \Delta_i$$

donc

$$|X_{n+p}|^2 = |X_n|^2 + \sum_{i=n}^{n+p-1} |\Delta_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+p-1} \langle \Delta_i, \Delta_j \rangle + 2 \sum_{i=n}^{n+p-1} \langle X_n, \Delta_i \rangle$$

On a pour $i < j$

$$\mathbf{E}\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle = \mathbf{E}\mathbf{E}_{i+1}\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle = \mathbf{E}\langle \Delta_i, \mathbf{E}_{i+1}\Delta_j \rangle = 0$$

puisque $i + 1 \leq j$ et donc $\mathbf{E}_{i+1}\Delta_j = 0$

D'autre part, pour $i \geq n$

$$\mathbf{E}\langle X_n, \Delta_i \rangle = \mathbf{E}\mathbf{E}_i\langle X_n, \Delta_i \rangle = \mathbf{E}\langle X_n, \mathbf{E}_i\Delta_i \rangle = 0$$

donc

$$\mathbf{E}|X_{n+p}|^2 = \mathbf{E}|X_n|^2 + \sum_{i=n}^{n+p-1} \mathbf{E}|\Delta_i|^2$$

#

Corollaire 2.4.1

- $\mathbf{E}|X_n|^2$ est croissante
- Si $\|X\|_{M^2}^2 := \sup_n \mathbf{E}|X_n|^2 < \infty$ alors $\mathbf{E}|X_n|^2 \uparrow \|X\|_{M^2}^2$

Preuve. Immédiate par la proposition précédente.

#

Lemme 2.4.1

Pour X une \mathbf{L}^2 -martingale et $p \geq 1$, on a

$$\mathbf{E}|X_{n+p} \perp X_n|^2 = \mathbf{E}|X_{n+p}|^2 \perp \mathbf{E}|X_n|^2$$

Preuve.

$$\mathbf{E}|X_{n+p} \perp X_n|^2 = \mathbf{E}|X_{n+p}|^2 + \mathbf{E}|X_n|^2 \perp 2\mathbf{E}\langle X_{n+p}, X_n \rangle$$

or

$$\mathbf{E}\langle X_{n+p}, X_n \rangle = \mathbf{E}\mathbf{E}_n\langle X_{n+p}, X_n \rangle = \mathbf{E}\langle \mathbf{E}_n X_{n+p}, X_n \rangle = \mathbf{E}|X_n|^2$$

#

Théorème 2.4.1

Pour X une \mathbf{L}^2 -martingale telle que $\|X\|_{M^2}^2 < \infty$

alors $\exists X_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ tel que $\|X_n \perp X_\infty\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et X_∞ ferme X i.e. $\forall n, X_n = \mathbf{E}_n X_\infty$

Preuve. On a

$$\alpha_n := \mathbf{E}|X_n|^2 \uparrow \|X\|_{M^2}^2 < \infty$$

i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tels que pour $n \geq n_0$ et $p \geq 1$ on a $|\alpha_{n+p} \perp \alpha_n| \leq \epsilon^2$ i.e. par le lemme précédent $\|X_{n+p} \perp X_n\|_2^2 \leq \epsilon^2$

Par conséquent, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ qui est complet, donc

$$\exists X_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H}), \|X_n \perp X_\infty\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Or, $X_n = \mathbf{E}_n X_{n+p}$ et $\|X_{n+p} \perp X_n\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

et par propriété de projecteur

$$\|\mathbf{E}_n X_{n+p} \perp \mathbf{E}_n X_\infty\|_2 \leq \|X_n \perp X_\infty\|_2$$

on a donc

$$\mathbf{E}_n X_{n+p} = X_n = \mathbf{E}_n X_\infty \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

et comme \mathcal{F}_∞ contient toutes les parties \mathbf{P} -négligeables, on peut supprimer a.s. \mathbf{P} et donc $\mathbf{E}_n X_\infty = X_n$ #

Lemme 2.4.2

Pour $Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, on a

$$\|\mathbf{E}_n Y \perp \mathbf{E}_\infty Y\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Preuve. Notons $V_n := \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_n; \mathbb{H})$ s.e.v. fermé de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ et $V_\infty := \overline{\bigcup_n V_n}$. On pose alors $\pi_n := \mathbf{E}_n$ et π_∞ projection orthogonale sur le s.e.v. fermé V_∞ . Alors par un résultat classique d'analyse fonctionnelle,

on a

$$\forall Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H}), \quad \|\pi_n Y \perp \pi_\infty Y\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

De plus, $\forall n, V_n \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ s.e.v. fermé, donc $V_\infty := \overline{\bigcup_n V_n} \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$

Soit

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid 1_A \in V_\infty\}$$

\mathcal{A} est clairement une tribu et $\forall A \in \mathcal{F}_n, 1_A \in V_n \subset V_\infty$

donc

$$\bigcup_n \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$$

et comme \mathcal{A} est une tribu

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{A}$$

Par conséquent, $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty$, et donc $\mathcal{E}(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H}) \subset V_\infty$ est fermé. Or $\mathcal{E}(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$, donc $V_\infty = \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ et donc $\pi_\infty = \mathbf{E}_\infty$

On en déduit que

$$\|\mathbf{E}_n Y \perp \mathbf{E}_\infty Y\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

#

Théorème 2.4.2

Pour $Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_n := \mathbf{E}_n Y$ est une \mathbf{L}^2 -martingale bornée et $\|X_n \perp Y\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Preuve. $X_n \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_n; \mathbb{H})$ i.e. $X_n \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}_n; \mathbb{H})$ et $\mathbf{E}|X_n|^2 < \infty$

De plus,

$$\mathbf{E}_n X_{n+1} = \mathbf{E}_n \mathbf{E}_{n+1} Y = \mathbf{E}_n Y = X_n$$

et

$$\|X_n\|_2 = \|\mathbf{E}_n Y\|_2 \leq \|Y\|_2 < \infty$$

donc $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une \mathbf{L}^2 -martingale bornée, et par le théorème précédent $\exists X_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$ tel que

$$\|X_n \perp X_\infty\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

De plus, par le lemme précédent

$$\|\mathbf{E}_n Y \perp \mathbf{E}_\infty Y\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donc

$$X_\infty = \mathbf{E}_\infty Y = Y$$

#

2.4.2 Processus progressivement mesurables

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ un base stochastique complète, i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé complet et $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ une filtration vérifiant les hypothèses usuelles (continuité à droite de la filtration et \mathcal{F}_0 contient toutes les parties négligeables pour \mathbf{P}). On notera $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$ et on écrira dans la suite \mathbf{E}_t pour $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_t}$ ou $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ suivant les cas. Enfin soit \mathbb{H} un espace de Hilbert réel séparable et $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne.

Définition 2.4.2

Soit $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ un processus stochastique

- On dit que X est adapté à \mathbb{F} ssi X est mesurable $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F} / \mathcal{B}(\mathbb{H})$ et $\forall t$, X_t est mesurable $\mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{H})$
- On dit que X est progressivement mesurable $\mathbb{F} / \mathcal{B}(\mathbb{H})$ (abrégé X p.m. $\mathbb{F} / \mathcal{B}(\mathbb{H})$) ssi $\forall t$ on a $1_{[0, t]} X$ mesurable $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{H})$
- On dit que X est continu à droite ssi

$$\forall (a, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \quad \text{on a} \quad \lim_{t \downarrow a} X(t, \omega) = X(a, \omega) \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

- On dit que X est continu à gauche ssi

$$\forall (a, \omega) \in]0, \infty] \times \Omega \quad \text{on a} \quad \lim_{t \uparrow a} X(t, \omega) = X(a, \omega) \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

- On dit que X est continu ssi X est continu à gauche et à droite

Proposition 2.4.2

On définit $\mathcal{P}_m := \{A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega \mid 1_A \text{ p.m. } \mathbb{F} / \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$

on a alors

- \mathcal{P}_m sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$

- X est p.m. $\mathbb{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ssi $X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}_m; \mathbb{H})$

Preuve.

- $A \in \mathcal{P}_m$ ssi $\forall t, 1_{[0,t]} \cdot 1_A \in \mathbf{L}^0(\mathcal{B}([0,t] \otimes \mathcal{F}_t; \mathbb{H}))$
i.e. $A \in \mathcal{P}_m$ ssi $\forall t, A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$
donc \mathcal{P}_m est une tribu et $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$

- Soit $V \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ et $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{H}$
alors

$$\begin{aligned} (1_{[0,t]}X)^{\perp 1}(V) &= \{(s, \omega) \in [0,t] \times \Omega \mid X(s, \omega) \in V\} \\ &= ([0,t] \times \Omega) \cap X^{\perp 1}(V) \end{aligned}$$

donc X p.m. $\mathbb{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ssi $X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}_m; \mathcal{B}(\mathbb{H}))$

#

Proposition 2.4.3

Si X est adapté à \mathbb{F} et continu à droite alors X est p.m. $\mathbb{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$

Preuve. Soit

$$X^n(t, \omega) := X\left(\frac{\lfloor 2^n t \rfloor + 1}{2^n}, \omega\right)$$

$\forall \epsilon > \frac{1}{2^n}$, on a X^n p.m. $\mathbb{F}_\epsilon/\mathcal{B}(\mathbb{H})$ où $\mathbb{F}_\epsilon := \{\mathcal{F}_{t+\epsilon}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et \mathcal{P}_m^ϵ la tribu associée.

De plus, par continuité à droite de X ,

on a $\forall(t, \omega)$

$$X_t^n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\perp} X_t(\omega)$$

Par conséquent, par la proposition 1.1.1, on a $X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}_m^\epsilon; \mathbb{H})$

Ainsi $\forall \epsilon > 0$, on a X p.m. $\mathbb{F}_\epsilon/\mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Or \mathbb{F} est continue à droite, donc X p.m. $\mathbb{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$

#

2.4.3 Martingales à temps continu

Définition 2.4.3

On dit alors que $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ est une martingale ssi

1. X est adapté à \mathbb{F} et continu à droite
2. $\forall t, X_t \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{H})$
3. Pour $0 \leq s < t < \infty$, on a $\mathbf{E}_s(X_t) = X_s$

On dit aussi que X est une \mathbf{L}^p -martingale où $1 < p < \infty$ si de plus, $\forall t, X_t \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$

Remarque 2.4.2 On remarque qu'une martingale est un processus progressivement mesurable $\mathbb{F}/\mathcal{B}(\mathbb{H})$

Définition 2.4.4

On définit pour $1 < p < \infty$

$$\mathbf{M}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H}) := \{X \mid X \text{ } \mathbf{L}^p\text{-martingale telle que } \|X\|_{M^p} := \sup_{0 \leq t < \infty} \|X_t\|_p < \infty\}$$

Lemme 2.4.3

$\mathbf{M}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ est un espace vectoriel normé

Preuve. Immédiate en utilisant les définitions et l'inégalité de Minkowski

#

Proposition 2.4.4

Soit $X \in \mathbf{M}^p(\mathcal{F}; \mathbb{H})$ où $1 < p < \infty$

alors

1. $\forall v \in \mathbb{H}, \langle X, v \rangle \in \mathbf{M}^p(\mathcal{F}; \mathbb{R})$
2. $|X|^p$ est une sous-martingale réelle continue à droite et bornée

Preuve.

1. $\langle X \perp t, v \rangle$ mesurable $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et comme $u \mapsto \langle u, v \rangle$ est continu de H dans \mathbb{R} , on a $\langle X, v \rangle$ continue à droite

- $\mathbf{E}|\langle X_t, v \rangle|^p \leq |v|^p \mathbf{E}|X_t|^p < \infty$
- Pour $s \leq t$, on a $\mathbf{E}_s \langle X_t, v \rangle = \langle \mathbf{E}_s X_t, v \rangle = \langle X_s, v \rangle$
- $\sup_t \mathbf{E}_s |\langle X_t, v \rangle|^p \leq |v|^p \cdot \sup_t \mathbf{E}|X_t|^p < \infty$

2. $|X_t|^p$ mesurable $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $|X|^p$ continue à droite

- $\mathbf{E}|X_t|^p < \infty$
- Pour $s \leq t$, on a $|X_s|^p = |\mathbf{E}_s X_t|^p \leq \mathbf{E}_s |X_t|^p$
- $\sup_t \mathbf{E}_s |X_t|^p = \|X\|_{M^p}^p < \infty$

donc $|X|^p$ est une sous-martingale réelle continue à droite et bornée.

#

Proposition 2.4.5 (Doob)

Pour $1 < p < \infty$, p et q conjugués, X une \mathbf{L}^p -martingale, $t \in \mathbb{R}_+$ et $\epsilon > 0$

on a

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \mathbf{E}|X_t|^p$$

et

$$\mathbf{E}\left|\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|\right|^p \leq q^p \mathbf{E}|X_t|^p$$

Preuve. Comme $|X|^p$ qui est une sous-martingale réelle continue à droite et bornée, on peut donc appliquer les inégalités classiques de Doob dans le cas réel, ce qui donne le résultat. Pour une démonstration des résultats dans le cas réel, voir par exemple [15]. #

Théorème 2.4.3

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbf{L}^p -martingales telle que $\forall t$, $\{X_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}_t; \mathbb{H})$, alors il existe X une \mathbf{L}^p -martingale telle que $\forall t$, $\|X_t^n \perp X_t\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Preuve.

- $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ est complet donc $\forall t$, $\exists X_t \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ telle que $\|X_t^n \perp X_t\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- Pour $0 \leq s < t < \infty$, on a $\mathbf{E}_s(X_t^n) = X_s^n$

Or

$$\|X_s^n \perp X_s\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus, par continuité de $\mathbf{E}_s : \mathbf{L}^p(\mathcal{F}_t; \mathbb{H}) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mathcal{F}_s; \mathbb{H})$

$$\|\mathbf{E}_s X_t^n \perp \mathbf{E}_s X_t\|_p \leq \|X_t^n \perp X_t\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$\|X_s \perp \mathbf{E}_s X_t\|_p \leq \|X_s^n \perp X_s\|_p + \|\mathbf{E}_s X_t^n \perp \mathbf{E}_s X_t\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi pour $0 \leq s < t < \infty$ on a

$$\mathbf{E}_s X_t = X_s \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

Or $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est complet et \mathcal{F}_0 contient toutes les parties \mathbf{P} -négligeables, donc

$$X_s \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}_s; \mathbb{H}) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_s X_t = X_s$$

- Il reste à montrer que X est continue à droite

– Soit $N \in \mathbb{N}$

Pour $k < l$, $X^k \perp X^l$ est une \mathbf{L}^p -martingale continue à droite, on a donc par l'inégalité de Doob, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq N} |X_t^k \perp X_t^l| \geq \frac{1}{2^m}\right) \leq 2^{pm} \mathbf{E}|X_N^k \perp X_N^l|^p \quad (2.3)$$

or

$$\|X_N^k \perp X_N^l\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

donc $\{X_N^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite notée $\{X_N^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\mathbf{E}|X_N^{m+1} \perp X_N^m|^p \leq \frac{1}{2^{(p+1)m}} \quad (2.4)$$

Par (2.3) et (2.4), on a

$$\sum_m \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq N} |X_t^{m+1} \perp X_t^m| \geq \frac{1}{2^m} \right) \leq \sum_m \frac{1}{2^m} < \infty$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq N} |X_t^{m+1} \perp X_t^m| \geq \frac{1}{2^m} \text{ i.o.} \right) = 0$$

donc $\exists E_N \in \mathcal{F}$ \mathbf{P} -négligeable tel que $\forall \omega \in E_N^c$, $t \mapsto X_t^m(\omega)$ converge uniformément sur $[0, N]$ pour $m \rightarrow \infty$ vers $t \mapsto Z_t^N(\omega)$

Comme $t \mapsto X_t^m(\omega)$ continue à droite sur $[0, N]$, par convergence uniforme $t \mapsto Z_t^N(\omega)$ est également continue à droite sur $[0, N]$

Ainsi $\forall t \in [0, N]$

$$X_t^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Z_t^N \quad \text{a.s.} \mathbf{P}$$

or

$$\|X_t^m \perp X_t\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$Z_t^N = X_t \quad \text{a.s.} \mathbf{P}$$

Il en résulte que $Z^N = \{Z_t^N\}_{t \in [0, N]}$ est une version continue à droite de $\{X_t\}_{t \in [0, N]}$ sur E_N^c

- Pour $N_1 < N_2$, $\{Z_t^{N_1}\}_{t \in [0, N_1]}$ et $\{Z_t^{N_2}\}_{t \in [0, N_1]}$ sont deux versions continues à droite de $\{X_t\}_{t \in [0, N_1]}$ sur $E_{N_1}^c \cap E_{N_2}^c$, par conséquent $\{Z_t^{N_1}\}_{t \in [0, N_1]}$ et $\{Z_t^{N_2}\}_{t \in [0, N_1]}$ sont indistinguables.

Posons

$$E := \bigcup_N E_N$$

E est \mathbf{P} -négligeable.

Définissons alors $\forall t, \forall \omega \in E^c$

$$Z_t(\omega) := \lim_N Z_t^N(\omega)$$

cette limite existe et est finie puisque

$$\forall t \in [0, N], \forall \omega \in E^c, Z_t(\omega) = Z_t^N(\omega)$$

Ainsi Z est une version continue à droite de X sur E^c , et en posant

$\forall t, \forall \omega \in E, Z_t(\omega) := 0$, on a une version continue à droite de X sur Ω . #

Remarque 2.4.3 Par la suite, on prendra systématiquement cette version.

Corollaire 2.4.2

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbf{L}^p -martingales continues telle que $\forall t, \{X_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}_t; \mathbb{H})$, alors il existe X une \mathbf{L}^p -martingale continue telle que $\forall t, \|X_t^n \perp X_t\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Preuve. La preuve est semblable à celle du théorème précédent, en remplaçant “continue à droite” par “continue”. #

Théorème 2.4.4

Soit $X_{\infty} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{\infty}; \mathbb{H})$,

si $X = \{X_t\}_{0 \leq t < \infty}$ est définie par $X_t := \mathbf{E}_t X_{\infty}$, alors on a $X \in \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{H})$ et $\|X_t \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

Preuve.

- Pour $X_{\infty} := c.1_A$ où $c \in \mathbb{H}$ et $A \in \mathcal{F}_{\infty}$, on a $X_t = \mathbf{E}_t X_{\infty} = c.\mathbf{E}_t(1_A)$.
 X est clairement adapté à \mathbb{F} , $\forall t$, X_t mesurable \mathcal{F}_t/\mathbb{H} et pour $0 \leq s < t < \infty$, on a $\mathbf{E}_s X_t = X_s$.

De plus,

$$\sup_t \mathbf{E}|X_t|^2 = \sup_t \mathbf{E}|\mathbf{E}_t X_{\infty}|^2 \leq \mathbf{E}|X_{\infty}|^2$$

Il reste à montrer que X est continue à droite.

Pour $t_n \downarrow t$, on a $\cap_n \mathcal{F}_{t_n} = \mathcal{F}_t$

Ainsi $Y_n := \mathbf{E}_{t_n} 1_A$ est une martingale réelle inverse adaptée à $\{\mathcal{F}_{t_n}\}$, donc par le théorème de convergence des martingales inverses (théorème 35.7 [1]),

on a

$$\mathbf{E}_{t_n} 1_A \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{E}_t 1_A \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

donc

$$\mathbf{E}_{t_n} X_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{E}_t X_{\infty} \quad \text{a.s.}\mathbf{P}$$

et on a ainsi la continuité à droite de X .

Enfin

$$\|X_t \perp X_{\infty}\|_2^2 = c.\mathbf{E}|\mathbf{E}_t 1_A \perp 1_A|^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

- Pour $X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}; \mathbb{H})$, on a le résultat par linéarité.
- Enfin, pour $X_{\infty} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{\infty}; \mathbb{H})$, par le lemme 1.2.3, on a $\exists \{X_{\infty}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_{\infty}; \mathbb{H})$ telle que $\|X_{\infty}^n \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
 Définissons X^n par

$$X_t^n := \mathbf{E}_t X_{\infty}^n$$

Par ce qui précède, $X^n \in \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{H})$ et $\|X_t^n \perp X_{\infty}^n\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

D'autre part $\forall t$

$$\|X_t^n \perp X_t\|_2 = \|\mathbf{E}_t X_{\infty}^n \perp \mathbf{E}_t X_{\infty}\|_2 \leq \|X_{\infty}^n \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donc X est une \mathbf{L}^2 -martingale

De plus, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|X_{\infty}^n \perp X_{\infty}\|_2 < \epsilon$$

donc $\forall t$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|X_t^n \perp X_t\|_2 \leq \|X_{\infty}^n \perp X_{\infty}\|_2 < \epsilon$$

D'autre part

$$\|X_t^n \perp X_{\infty}^n\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

donc $\exists t_0 > 0$ tel que

$$t \geq t_0 \Rightarrow \|X_t^n \perp X_{\infty}^n\|_2 < \epsilon$$

Ainsi pour $n \geq n_0$ et $t \geq t_0$

$$\|X_t \perp X_{\infty}\|_2 \leq \|X_t \perp X_t^n\|_2 + \|X_t^n \perp X_{\infty}^n\|_2 + \|X_{\infty}^n \perp X_{\infty}\|_2 < 3\epsilon$$

d'où le résultat.

#

Théorème 2.4.5

Pour $X \in \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{H})$, $\exists X_{\infty} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{\infty}; \mathbb{H})$ telle que $\|X_t \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ et X_{∞} ferme X i.e. $\forall t, X_t = \mathbf{E}_t X_{\infty}$

Preuve.

- Pour $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, on a une \mathbf{L}^2 -martingale telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|X_n|^2 < \infty$, donc $\exists X_{\infty} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_{\infty}; \mathbb{H})$ telle que $\|X_n \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $\forall n, \mathbf{E}_n X_{\infty} = X_n$
Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $t \leq n$

$$\mathbf{E}_t X_{\infty} = \mathbf{E}_t \mathbf{E}_n X_{\infty} = \mathbf{E}_t X_n = X_t$$

(les égalités sont normalement a.s. \mathbf{P} , cependant \mathcal{F}_0 contient toutes les parties \mathbf{P} -négligeables)

- $\forall t$

$$\|X_t \perp X_{\infty}\|_2 = \|\mathbf{E}_t X_{(\lfloor t \rfloor + 1)} \perp X_{\infty}\|_2 \leq \|\mathbf{E}_t X_{(\lfloor t \rfloor + 1)} \perp \mathbf{E}_t X_{\infty}\|_2 + \|\mathbf{E}_t X_{\infty} \perp X_{\infty}\|_2$$

or

$$\|\mathbf{E}_t X_{(\lfloor t \rfloor + 1)} \perp \mathbf{E}_t X_{\infty}\|_2 \leq \|X_{(\lfloor t \rfloor + 1)} \perp X_{\infty}\|_2$$

donc

$$\|X_t \perp X_{\infty}\|_2 \leq \|X_{(\lfloor t \rfloor + 1)} \perp X_{\infty}\|_2 + \|\mathbf{E}_t X_{\infty} \perp X_{\infty}\|_2$$

De plus,

$$\|X_{(\lfloor t \rfloor + 1)} \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

et par le théorème précédent

$$\|\mathbf{E}_t X_{\infty} \perp X_{\infty}\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Enfin, on a

$$\mathbf{E}|X_t|^2 = \mathbf{E}|\mathbf{E}_t X_{\infty}|^2 \leq \mathbf{E}|X_{\infty}|^2 < \infty$$

donc

$$\|X\|_{M^2} < \infty$$

#

Théorème 2.4.6

$(\mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{H}), \|\cdot\|_{M^2})$ est un espace de Hilbert isomorphe, isométrique à $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \varphi : \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{H}) &\rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H}) \\ X &\mapsto \varphi(X) := X_\infty \end{aligned}$$

On a φ linéaire et bijective par les deux théorèmes précédents.

De plus,

$$\sup_t \mathbf{E}|X_t|^2 = \sup_t \mathbf{E}|\mathbf{E}_t X_\infty|^2 \leq \mathbf{E}|X_\infty|^2$$

donc

$$\|X\|_{M^2} \leq \|X_\infty\|_2$$

Et d'autre part,

$$\|X_t \perp X_\infty\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

or

$$\|X_\infty\|_2 \leq \|X_t\|_2 + \|X_t \perp X_\infty\|_2$$

donc $\forall \epsilon > 0$

$$\|X_\infty\|_2 \leq \sup_t \|X_t\|_2 + \epsilon$$

et donc

$$\|X\|_{M^2} = \|X_\infty\|_2$$

Ainsi $\mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{H})$ est un espace de Hilbert isomorphe, isométrique à $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{H})$

#

Chapitre 3

Intégration stochastique Hilbertienne

3.1 Mouvement Brownien Hilbertien

3.1.1 Triplet de Gelfand

Soient $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, |\cdot|)$ et $(\mathbb{V}, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ deux espaces de Hilbert réels avec injection canonique, continue $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H}$ et densité de \mathbb{V} dans \mathbb{H} .

Donc

$$\exists C, \forall v \in \mathbb{V}, |v| \leq C \cdot \|v\|$$

On peut donc en identifiant \mathbb{H} et \mathbb{H}' par le théorème de représentation de Riesz, plonger \mathbb{H} dans \mathbb{V}' . En effet, pour $h \in \mathbb{H}$, on définit: $T_h : v \in \mathbb{V} \mapsto \langle h, v \rangle$ forme linéaire continue sur \mathbb{H} et donc sur \mathbb{V} , puisque $|\langle h, v \rangle| \leq |h| \cdot |v| \leq C|h| \cdot \|v\|$

Donc $T_h \in \mathbb{V}'$ et

$$\langle T_h, v \rangle_{\mathbb{V}', \mathbb{V}} = \langle h, v \rangle \quad \forall h \in \mathbb{H}, v \in \mathbb{V}$$

On a alors les propriétés pour $T : \mathbb{H} \ni h \mapsto T_h \in \mathbb{V}'$

- $\|T_h\| \leq C|h| \quad \forall h \in \mathbb{H}$
- T est injective
- $T(\mathbb{H})$ est dense dans \mathbb{V}'

On peut donc plonger $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{V}'$, et on a donc $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} = \mathbb{H}' \hookrightarrow \mathbb{V}'$ avec injections canoniques denses et continues et de plus pour $h \in \mathbb{H}$, $v \in \mathbb{V}$ on a $\langle T_h, v \rangle_{\mathbb{V}', \mathbb{V}} = \langle h, v \rangle$

3.1.2 Mouvement Brownien Hilbertien

Soit \mathbb{H}_\perp un espace de Hilbert réel séparable, de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_\perp}$ et de norme $|\cdot|_{\mathbb{H}_\perp}$. Soit $N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{H}_\perp)$ un opérateur nucléaire sur \mathbb{H}_\perp , on peut alors construire une mesure Gaussienne μ_{Nt} sur $\mathcal{B}(\mathbb{H}_\perp)$ (puisque comme prouvé dans le théorème de Pettis, dans le cas séparable les tribus cylindrique et Borélienne coïncident). Cette mesure est centrée en 0 et d'opérateur de corrélation tN sur \mathbb{H}_\perp (pour une construction détaillée, voir par exemple [3]). Alors, par le

théorème d'existence de Kolmogorov (chap.37 [1]), il existe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ espace probabilisé complet et $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{H}_\perp$ tels que

- $W_0 = 0$ a.s. \mathbf{P}
- W est à accroissements indépendants i.e. pour $0 \leq t_0 < \dots < t_n$ on a $W_{t_0}, W_{t_1} \perp W_{t_0}, \dots, W_{t_n} \perp W_{t_{n-1}}$ indépendantes
- Pour $t \geq 0, \tau > 0, W_{t+\tau} \perp W_t$ a pour distribution μ_{N_τ}

On montre alors par la théorie de l'intégration par rapport aux mesures Gaussiennes que $\mathbf{E}|W_t \perp W_s|_{\mathbb{H}_\perp}^2 = (t \perp s) \cdot \text{Tr}(N)$ et que $\mathbf{E}|W_t \perp W_s|_{\mathbb{H}_\perp}^4 = (t \perp s)^2 (\sigma_1^2(N) + 2\sigma_2^2(N))$.

Donc $\mathbf{E}|W_t \perp W_s|_{\mathbb{H}_\perp}^\alpha \leq C|t \perp s|^{1+\epsilon}$ avec $\alpha, \epsilon > 0$, et on a par le théorème de continuité des processus stochastiques de Kolmogorov ([3]), l'existence d'une version continue de W . De plus, si \mathbb{F} est la filtration standard (i.e. vérifiant les hypothèses usuelles) associée à W , c'est à dire, en posant $\mathcal{F}_t := \tilde{\sigma}(W_s | 0 \leq s \leq t)$, alors W est une \mathbf{L}^2 -martingale par rapport à \mathbb{F} .

Soit maintenant $\mathbb{H}_+ = \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} = \mathbb{H}' \hookrightarrow \mathbb{V}' = \mathbb{H}_\perp$ un triplet de Gelfand où l'on suppose de plus que l'injection canonique $J : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{H}_\perp$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, $J \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{H}_\perp)$. En prenant $N := J Id_{\mathbb{H}} J^*$, on a $N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{H}_\perp)$, et on peut alors construire le mouvement Brownien standard W , dont l'opérateur de corrélation sur \mathbb{H} est alors $Id_{\mathbb{H}}$ i.e. $\forall f, g \in \mathbb{H}$

$$\mathbf{E}_s(\langle f, W_t \perp W_s \rangle \langle g, W_t \perp W_s \rangle) = \langle f, g \rangle (t \perp s)$$

(on utilise ici le fait que si $f \in \mathbb{H}$ et $\varphi \in \mathbb{H}_\perp$ alors $\langle \varphi, f \rangle_{\mathbb{H}_\perp} = \langle f, \varphi \rangle$).

Donc pour $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ base Hilbertienne de $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on a

$$\mathbf{E}_s |\langle e_i, W_t \perp W_s \rangle|^2 = (t \perp s)$$

Donc, en notant

$$W^k : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) \mapsto \langle e_k, W_t(\omega) \rangle$$

on a

- $W_0^k = 0$ a.s. \mathbf{P}
- W^k est à accroissements indépendants
- W^k est une martingale continue par rapport à \mathbb{F}
- $\mathbf{E}_s |W_t^k \perp W_s^k|^2 = |t \perp s|$

donc, par le théorème de Levy ([7]), W^k est un mouvement Brownien réel standard. De plus, comme $\mathbf{E}(W_t^k \perp W_t^l) = 0$ si $k \neq l$ et que W_t^k et W_t^l sont des variables Gaussiennes, la non-corrélation implique l'indépendance. On peut dès lors vérifier que

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} W_t^k e_k$$

est définie dans \mathbb{H} et converge dans \mathbb{H}_\perp
 puisque

$$\mathbf{E}|W_t \perp \sum_{k=1}^n W_t^k e_k|_{\mathbb{H}_\perp}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

en effet

$$\mathbf{E} \left| \sum_{k=n}^{n+p} W_t^k e_k \right|_{\mathbb{H}_\perp}^2 = \sum_{k=n}^{n+p} t |J e_k|_{\mathbb{H}_\perp}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

puisque $J \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{H}_\perp)$

Théorème 3.1.1

Soient $s \in \mathbb{R}_+$ et $X, Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_s; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ on a alors pour $s \leq t < \infty$

1. $X(W_t \perp W_s), Y(W_t \perp W_s) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{H}^\perp)$
2. $\mathbf{E}_s(X(W_t \perp W_s)) = 0$
3. $\mathbf{E}_s |X(W_t \perp W_s)|_{\mathbb{B}}^2 = \sigma_2^2(X) \cdot (t \perp s)$
4. $\mathbf{E}_s \langle X(W_t \perp W_s), Y(W_t \perp W_s) \rangle_{\mathbb{B}} = \langle\langle X, Y \rangle\rangle \cdot (t \perp s)$

Preuve.

1. Définissons

$$U_n = \sum_{k=1}^n (W_t^k \perp W_s^k) e_k$$

$U_n \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ et U_n indépendante de \mathcal{F}_s , donc par le théorème 2.3.1 $XU_n \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{B})$.
 Montrons que $\{XU_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{B})$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|XU_{n+p} \perp XU_n|_{\mathbb{B}}^2 &= \mathbf{E} \left| X \sum_{k=n+1}^{n+p} (W_t^k \perp W_s^k) e_k \right|^2 \\ &= \mathbf{E} \sum_{k,l=n+1}^{n+p} \langle (W_t^k \perp W_s^k) X e_k, (W_t^l \perp W_s^l) X e_l \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \mathbf{E} \mathbf{E}_s \sum_{k,l=n+1}^{n+p} (W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l) \langle X e_k, X e_l \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \sum_{k,l=n+1}^{n+p} \langle X e_k, X e_l \rangle_{\mathbb{B}} \mathbf{E}((W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l)) \end{aligned}$$

puisque $\langle X e_k, X e_l \rangle_{\mathbb{B}}$ est mesurable $\mathcal{F}_s/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $(W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l)$ indépendant de \mathcal{F}_s . De plus, par indépendance des W^k , $\mathbf{E}((W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l)) = (t \perp s) \delta_{kl}$

Ainsi, on a

$$\mathbf{E}|XU_{n+p} \perp XU_n|_{\mathbb{B}}^2 = (t \perp s) \mathbf{E} \sum_{k=1}^{\infty} |X e_k|_{\mathbb{B}}^2$$

or

$$\mathbf{E}\sigma_2^2(X) = \mathbf{E} \sum_{k=n+1}^{n+p} |Xe_k|_{\mathbb{B}}^2 < \infty$$

donc

$$\mathbf{E}|XU_{n+p} \perp XU_n|_{\mathbb{B}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On a donc montré que $\{XU_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{B})$ qui est complet, on définit ainsi $X(W_t \perp W_s)$ comme la limite $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{B})$ de $\{XU_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

On a

$$X(W_t \perp W_s) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_t; \mathbb{B})$$

et

$$\mathbf{E}|X(W_t \perp W_s) \perp \sum_{k=1}^n (W_t^k \perp W_s^k)Xe_k|_{\mathbb{B}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc, en particulier

$$\sum_{k=1}^n (W_t^k \perp W_s^k)Xe_k \xrightarrow{\mathbf{P}} X(W_t \perp W_s)$$

2. On a

$$\mathbf{E}_s XU_n = X\mathbf{E}_s U_n = X \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{E}_s(W_t^k \perp W_s^k) = 0$$

or

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}_s X(W_t \perp W_s) \perp \mathbf{E}_s XU_n|_{\mathbb{B}}^2 \leq \mathbf{E}|X(W_t \perp W_s) \perp XU_n|_{\mathbb{B}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$\mathbf{E}_s X(W_t \perp W_s) = 0$$

3. On a

$$|X(W_t \perp W_s)|_{\mathbb{B}}^2 = \langle X(W_t \perp W_s), X(W_t \perp W_s) \rangle_{\mathbb{B}}$$

Posons

$$\alpha_n := X \sum_{k=1}^n (W_t^k \perp W_s^k)e_k$$

donc

$$|\alpha_n|_{\mathbb{B}}^2 = \left\langle \sum_{k=1}^n (W_t^k \perp W_s^k)Xe_k, \sum_{l=1}^n (W_t^l \perp W_s^l)Xe_l \right\rangle_{\mathbb{B}}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s |\alpha_n|_{\mathbb{B}}^2 &= \sum_{k,l=1}^n \mathbf{E}_s \langle (W_t^k \perp W_s^k)Xe_k, (W_t^l \perp W_s^l)Xe_l \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \mathbf{E}_s (W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l) \langle Xe_k, Xe_l \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle Xe_k, Xe_l \rangle_{\mathbb{B}} \mathbf{E}((W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l)) \end{aligned}$$

puisque $\langle X e_k, X e_l \rangle_{\mathbb{B}}$ est mesurable $\mathcal{F}_s / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $(W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l)$ indépendant de \mathcal{F}_s .
Or $\mathbf{E}((W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l)) = (t \perp s)\delta_{kl}$ par indépendance de W^k et W^l
par conséquent

$$\mathbf{E}_s |\alpha_n|_{\mathbb{B}}^2 = (t \perp s) \sum_{k=1}^n |X e_k|_{\mathbb{B}}^2 \xrightarrow{\mathbf{L}^1} (t \perp s) \cdot \sigma_2^2(X)$$

D'autre part,

$$|\alpha_n|_{\mathbb{B}}^2 \xrightarrow{\mathbf{L}^1} |X(W_t \perp W_s)|_{\mathbb{B}}^2$$

et par continuité de $\mathbf{E}_s : \mathbf{L}^1(\mathcal{F}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_s; \mathbb{R})$

on a

$$\mathbf{E}_s |\alpha_n|_{\mathbb{B}}^2 \xrightarrow{\mathbf{L}^1} \mathbf{E}_s |X(W_t \perp W_s)|_{\mathbb{B}}^2$$

ainsi

$$\mathbf{E}_s |X(W_t \perp W_s)|_{\mathbb{B}}^2 = (t \perp s) \cdot \sigma_2^2(X)$$

4. $\langle X(W_t \perp W_s), Y(W_t \perp W_s) \rangle_{\mathbb{B}} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_t; \mathbb{R})$

De plus, soit

$$\alpha_n := \left\langle \sum_{k=1}^n (W_t^k \perp W_s^k) \cdot X e_k, \sum_{l=1}^n (W_t^l \perp W_s^l) \cdot X e_l \right\rangle_{\mathbb{B}}$$

on a

$$\alpha_n \xrightarrow{\mathbf{L}^1} \langle X(W_t \perp W_s), Y(W_t \perp W_s) \rangle_{\mathbb{B}}$$

donc

$$\mathbf{E}_s \alpha_n \xrightarrow{\mathbf{L}^1} \mathbf{E}_s \langle X(W_t \perp W_s), Y(W_t \perp W_s) \rangle_{\mathbb{B}}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s \alpha_n &= \mathbf{E}_s \sum_{k,l=1}^n (W_t^k \perp W_s^k)(W_t^l \perp W_s^l) \langle X e_k, Y e_l \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle X e_k, Y e_l \rangle_{\mathbb{B}} (t \perp s) \delta_{kl} \\ &= (t \perp s) \sum_{k=1}^n \langle X e_k, Y e_k \rangle_{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

or

$$\sum_{k=1}^n \langle X e_k, Y e_k \rangle_{\mathbb{B}} \xrightarrow{\mathbf{L}^1} \langle\langle X, Y \rangle\rangle$$

donc

$$\mathbf{E}_s \alpha_n \xrightarrow{\mathbf{L}^1} \langle\langle X, Y \rangle\rangle (t \perp s)$$

#

3.2 Tribu prévisible

Définition 3.2.1

On définit

$$\mathcal{R} := \{\{0\} \times F_0 \mid F_0 \in \mathcal{F}_0\} \cup \{]s, t] \times F_s \mid 0 \leq s < t < \infty, F_s \in \mathcal{F}_s\}$$

le semi-anneau des rectangles prévisibles. On note de plus \mathcal{A} l'anneau engendré par \mathcal{R} et $\mathcal{P} := \sigma(\mathcal{R})$ la tribu des évènements prévisibles.

Preuve.

- $\emptyset = \{0\} \times \emptyset \in \mathcal{R}$
- Si $A, B \in \mathcal{R}$, alors $A \cap B \in \mathcal{R}$
- Si $A, B \in \mathcal{R}$, et $A \subset B$,
alors $B \setminus A = \coprod_{i=1}^n R_i$ où $R_i \in \mathcal{R}$

En effet, si $]b, c] \times F_b \subset]a, d] \times F_a$, alors $]b, c] \subset]a, d]$

et donc

$$B \setminus A = (]a, b] \times F_a) \amalg (]b, c] \times (F_b \setminus F_a)) \amalg (]c, d] \times F_a)$$

or $F_a \in \mathcal{F}_a$, $(F_b \setminus F_a) \in \mathcal{F}_b$ car $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_c$ et donc $F_a \in \mathcal{F}_c$

#

Remarque 3.2.1 On a clairement que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_m$ puisque $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}_m$

Définition 3.2.2

On définit la mesure σ -finie μ sur \mathcal{P} comme la restriction de la mesure σ -finie $\lambda \otimes \mathbf{P}$ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$.

Remarque 3.2.2 Cette définition est consistante puisque $\lambda \otimes \mathbf{P}$ est une mesure sur le semi-anneau \mathcal{R} , elle admet donc par le théorème de Carathéodory-Hopf (voir par exemple le théorème 11.3 [1]) une extension μ sur $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{P}$ et par unicité de l'extension, puisque $\lambda \otimes \mathbf{P}$ est également définie sur \mathcal{P} , on a $\mu = (\lambda \otimes \mathbf{P})|_{\mathcal{P}}$ et donc μ est σ -finie.

3.3 Intégration Stochastique

3.3.1 Intégrale de Itô

Définition 3.3.1

$$\mathcal{E}_o := \{H \cdot 1_R \mid H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}), R \in \mathcal{R}\}$$

Définition 3.3.2

Pour $X \in \mathcal{E}_o$, $0 \leq a < b < \infty$, $F_a \in \mathcal{F}_a$, $F_0 \in \mathcal{F}_0$ on définit alors

$$\int X dW := \begin{cases} 1_{F_a} H(W_b \perp W_a) & \text{si } X = H \cdot 1_{]a, b] \times F_a} \\ 0 & \text{si } X = H \cdot 1_{\{0\} \times F_0} \end{cases}$$

Proposition 3.3.1

$\forall X \in \mathcal{E}_o$ où $X = 1_{F_a} \cdot H(W_b \perp W_a)$ on a

1. $\int X dW \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_b; \mathbb{B})$
2. $\mathbf{E} \left| \int X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 = \int \sigma_2^2(X) d\mu = \mathbf{E} \int \sigma_2^2(X_t) dt$

Preuve. On a

- 1_{F_a} est mesurable $\mathcal{F}_b/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_b$, et $H(W_b \perp W_a)$ est mesurable $\mathcal{F}_b/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $\int X dW \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}_b; \mathbb{B})$ et $\int X dW \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_b; \mathbb{B})$ par le théorème 3.1.1
- De plus,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \left| \int X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 &= \mathbf{E} \mathbf{E}_a (1_{F_a} \cdot |H(W_b \perp W_a)|_{\mathbb{B}}^2) \\
 &= \mathbf{E} (1_{F_a} \cdot \mathbf{E}_a |H(W_b \perp W_a)|_{\mathbb{B}}^2) \\
 &= \mathbf{E} (1_{F_a} \cdot \sigma_2^2(H) \cdot (b \perp a)) && \text{par le théorème 3.1.1} \\
 &= \sigma_2^2(H) \cdot \mu(1_{]a, b]} \times F_a) \\
 &= \int \sigma_2^2(X) d\mu \\
 &= \mathbf{E} \int \sigma_2^2(X_t) dt && \text{par Fubini}
 \end{aligned}$$

#

Remarque 3.3.1 Pour $X \in \mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$

on a

$$X = \sum_{i=1}^n H_i \cdot 1_{]a_i, b_i]} \times F_{a_i} + H_0 \cdot 1_{\{0 \times F_0\}}$$

où $H_i \in \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})$, $0 \leq a_i < b_i < \infty$ et $F_{a_i} \in \mathcal{F}_{a_i}$

On peut de plus choisir les $R_i :=]a_i, b_i] \times F_{a_i}$ 2-2 disjoints.

En posant $X_0 := H_0 \cdot 1_{\{0 \times F_0\}}$ et $X_i := H_i \cdot 1_{]a_i, b_i]} \times F_{a_i}$, on a alors $X = \sum_{i=0}^n X_i$

Définition 3.3.3

Pour $X \in \mathcal{E}$, on définit

$$\int X dW := \sum_{i=0}^n \int X_i dW = \sum_{i=1}^n 1_{F_{a_i}} \cdot H_i(W_{b_i} \perp W_{a_i})$$

Remarque 3.3.2 On vérifie sans autre que cette définition par linéarité est indépendante de la représentation choisie pour X.

Proposition 3.3.2

Pour $X \in \mathcal{E}$, en notant $b := \max\{b_i \mid i = 1 \dots n\}$, on a

- $\int X dW \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_b; \mathbb{B})$

- $\mathbf{E} \int X dW = 0$
- $\mathbf{E} \left| \int X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 = \int \sigma_2^2(X) d\mu$

Preuve.

- Immédiat par la proposition précédente
- On a que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int X_i dW &= \mathbf{E} \mathbf{E}_{a_i} (1_{F_{a_i}} \cdot H_i(W_{b_i} \perp W_{a_i})) \\ &= \mathbf{E} (1_{F_{a_i}} \cdot \mathbf{E}_{a_i} (H_i(W_{b_i} \perp W_{a_i}))) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{par le théorème 3.1.1}$$

- On suppose que les rectangles prévisibles $R_i =]a_i, b_i] \times F_{a_i}$ sont 2-2 disjoints. Montrons alors que les $\int X_i dW = 1_{F_{a_i}} \cdot H_i(W_{b_i} \perp W_{a_i})$ sont indépendants en effet

$$\begin{aligned} \left\langle \int X_i dW, \int X_j dW \right\rangle_{\mathbb{B}} &= \langle 1_{F_{a_i}} \cdot H_i(W_{b_i} \perp W_{a_i}), 1_{F_{a_j}} \cdot H_j(W_{b_j} \perp W_{a_j}) \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= 1_{F_{a_i} \cap F_{a_j}} \cdot \langle H_i(W_{b_i} \perp W_{a_i}), H_j(W_{b_j} \perp W_{a_j}) \rangle_{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

Or $R_i \cap R_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
donc

- ou bien $F_{a_i} \cap F_{a_j} = \emptyset$
et donc

$$\left\langle \int X_i dW, \int X_j dW \right\rangle_{\mathbb{B}} = 0$$

donc

$$\mathbf{E} \left\langle \int X_i dW, \int X_j dW \right\rangle_{\mathbb{B}} = 0$$

d'où $\int X_i dW$ et $\int X_j dW$ sont indépendants

- ou bien $]a_i, b_i] \cap]a_j, b_j] = \emptyset$
Supposons que $b_i \leq a_j$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{b_i} \left\langle \int X_i dW, \int X_j dW \right\rangle_{\mathbb{B}} &= \left\langle \int X_i dW, \mathbf{E}_{b_i} \int X_j dW \right\rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \left\langle \int X_i dW, \mathbf{E}_{b_i} \mathbf{E}_{a_j} (1_{F_{a_j}} \cdot H_j(W_{b_j} \perp W_{a_j})) \right\rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \left\langle \int X_i dW, \mathbf{E}_{b_i} (1_{F_{a_j}} \cdot \mathbf{E}_{a_j} (H_j(W_{b_j} \perp W_{a_j}))) \right\rangle_{\mathbb{B}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc les $\int X_i dW$ sont indépendants.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| \int X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 &= \mathbf{V} \int X dW = \sum_{i=1}^n \mathbf{V} \int X_i dW \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \left| \int X_i dW \right|_{\mathbb{B}}^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\sigma_2^2(H_i) \cdot (b_i \perp a_i) \cdot 1_{F_{a_i}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sigma_2^2(H_i) \cdot \mu(R_i) = \int \sigma_2^2(X) d\mu \\
&= \mathbf{E} \int \sigma_2^2(X_t) dt \quad \text{par Fubini}
\end{aligned}$$

#

Théorème 3.3.1

On a que

$$I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$$

$$X \mapsto \int X dW$$

est un opérateur linéaire isométrique admettant un prolongement linéaire isométrique

$$\tilde{I} : \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H})) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{H})$$

Preuve.

- I est clairement linéaire et $\forall X \in \mathcal{E}$

$$\|I(X)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{B})}^2 = \mathbf{E} \left| \int X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 = \int \sigma_2^2(X) d\mu = \|I(X)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))}$$

- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{R}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$ par le théorème 1.2.4. De plus, $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{B})$ est un espace de Hilbert, donc complet, on peut donc prolonger continuellement I en un opérateur linéaire isométrique $\tilde{I} : \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{B})$

#

Proposition 3.3.3

Pour $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$, on définit $\int X dW := \tilde{I}(X)$

On a alors les propriétés suivantes

- $\int X dW \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty; \mathbb{B})$
- $\mathbf{E} \int X dW = 0$
- $\mathbf{E} \left| \int X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 = \int \sigma_2^2(X) d\mu$

Preuve. Ces résultats ne sont qu'une reformulation de la proposition précédente.

#

3.3.2 Transformée de Itô

Définition 3.3.4

On pose

$$\Lambda_2 := \{X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B})) \mid \forall t, 1_{[0,t]}X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))\}$$

Remarque 3.3.3 En définissant $(1_{[0,t]}X)(s, \omega) := 1_{[0,t]}(s) \cdot X_s(\omega)$,

puisque $1_{[0,t]}(s) = 1_{\{0\} \times \Omega}(s, \omega) + 1_{]0,t] \times \Omega}(s, \omega)$,

on a donc $1_{[0,t]} \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}; \mathbb{R})$ et $1_{[0,t]}X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$.

Définition 3.3.5

Pour $X \in \Lambda_2$, on définit $(X \cdot W)_t := \int 1_{[0,t]}X dW$

Remarque 3.3.4

1. Cette définition est consistente puisque $1_{[0,t]}X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$.

\tilde{I} est isométrique, on a donc

$$\mathbf{E} \left| \int 1_{[0,t]}X dW \right|_{\mathbb{B}}^2 = \int \sigma_2^2(1_{[0,t]}X) d\mu = \int_{[0,t] \times \Omega} \sigma_2^2(X) d\mu$$

De plus, par définition $\mu(\{0\} \times \Omega) = 0$,

donc

$$\int_{\{0\} \times \mathcal{F}_0} X dW = 0 \quad \text{a.s.} \mathbf{P} \quad (3.1)$$

2. Pour $X \in \mathcal{E}_0$, on a clairement $1_{[0,t]}X \in \mathcal{E}_0$

et

$$\int 1_{[0,t]}X dW = 1_{F_a} \cdot H(W_{b \wedge t} \perp W_{a \wedge t})$$

Lemme 3.3.1

Pour $X \in \mathcal{E}_0$, on a $X \cdot W \in \mathbf{M}^2(\mathcal{F}; \mathbb{B})$ et $X \cdot W$ continue.

Preuve. On a

$$(X \cdot W)_t = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ 1_{F_a} \cdot H(W_t \perp W_a) & a \leq t \leq b \\ 1_{F_a} \cdot H(W_b \perp W_a) & b \leq t < \infty \end{cases}$$

donc

- $(X \cdot W)_t \in \mathbf{L}^0(\mathcal{F}_t; \mathbb{B})$

et pour $a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |(X \cdot W)_t|_{\mathbb{B}}^2 &= \int \sigma_2^2(H \cdot 1_{]a,t] \times F_a}) d\mu \\ &= \sigma_2^2(H) \cdot \mu(]a,t] \times F_a) = \sigma_2^2(H) \cdot (t \perp a) \cdot \mathbf{P}(F_a) \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbf{E} |(X \cdot W)_t|_{\mathbb{B}}^2 = \sigma_2^2(H) \cdot \mathbf{P}(F_a) \cdot (b \perp a) < \infty$$

- pour $a \leq s \leq t \leq b$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_s((X \cdot W)_t) \perp (X \cdot W)_s &= \mathbf{E}_s((X \cdot W)_t \perp (X \cdot W)_s) \\
&= \mathbf{E}_s(1_{F_a} \cdot H(W_t \perp W_s)) \\
&= 1_{F_a} \cdot H(\mathbf{E}_s(W_t \perp W_s)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- On a clairement pour $\omega \in \Omega$ que $t \mapsto (X \cdot W)_t(\omega)$ est continue, or $X \cdot W$ adapté à \mathbb{F} donc $X \cdot W$ est p.m. $\mathbb{F}/\mathcal{B}(\mathbb{B})$.

#

Proposition 3.3.4

Pour $X \in \Lambda_2$ on a que $X \cdot W \in \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathbb{B})$ et continue. De plus, $\forall t$, $\mathbf{E}(X \cdot W)_t = 0$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$,

on a $1_{[0,n]}X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))$, donc $\exists \{X^k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$
telle que

$$\|X^k \perp 1_{[0,n]}X\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc $\forall t \in [0, n]$

$$\|1_{[0,t]}X^k \perp 1_{[0,t]}X\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}, \mathbb{B}))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc par isométrie

$$\|(X^k \cdot W)_t \perp (X \cdot W)_t\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{F}; \mathbb{B})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Or $X^k \cdot W$ est une \mathbf{L}^2 -martingale continue, donc par le corollaire 2.4.3,

on a que $\{(X \cdot W)_t\}_{0 \leq t \leq n}$ est une \mathbf{L}^2 -martingale continue.

Or n étant arbitraire, on a donc que $X \cdot W$ est une \mathbf{L}^2 -martingale.

Soient pour $n_1 < n_2$, $\{Z_t^{n_1}\}_{t \in [0, n_1]}$ et $\{Z_t^{n_2}\}_{t \in [0, n_1]}$ deux versions continues de $\{(X \cdot W)_t\}_{t \in [0, n_1]}$ sur $E_{n_1}^c \cap E_{n_2}^c$, par conséquent $\{Z_t^{n_1}\}_{t \in [0, n_1]}$ et $\{Z_t^{n_2}\}_{t \in [0, n_1]}$ sont indistingables.

Posons

$$E := \bigcup_n E_n$$

E est \mathbf{P} -négligeable.

Définissons alors $\forall t, \forall \omega \in E^c$

$$Z_t(\omega) := \lim_n Z_t^n(\omega)$$

cette limite existe et est finie puisque $\forall t \in [0, n], \forall \omega \in E^c, Z_t(\omega) = Z_t^n(\omega)$

Ainsi Z est une version continue de $X \cdot W$ sur E^c , et en posant $\forall t, \forall \omega \in E, Z_t(\omega) := 0$, on a une version continue de $X \cdot W$ sur Ω .

Enfin, on a par la remarque précédente,

$$(X \cdot W)_0 = 0 \quad \text{a.s. } \mathbf{P}$$

donc $\forall t$

$$\mathbf{E}(X \cdot W)_t = \mathbf{E}(X \cdot W)_0 = 0$$

#

Proposition 3.3.5

$$\mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B})) \rightarrow \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathcal{B})$$

$$X \mapsto X \cdot W$$

est un homomorphisme isométrique de l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B}))$ muni du produit scalaire $\int \langle \langle X, Y \rangle \rangle d\mu$ dans l'espace de Hilbert $\mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathcal{B})$ muni du produit scalaire $\langle M_\infty^1, M_\infty^2 \rangle_{\mathbb{B}}$.

Preuve. La démonstration est une conséquence des théorèmes (2.4.6), (3.3.4) et (3.3.1). #

Proposition 3.3.6

Pour $X \in \Lambda_2$ et $\epsilon, a, N > 0$

on a

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leq t \leq a} |(X \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon) \leq \frac{N}{\epsilon^2} + \mathbf{P}(\int_{[0,a]} \sigma_2^2(X_s) ds > N)$$

Preuve. Soit

$$T_N := \inf \{t \mid \int_{[0,t]} \sigma_2^2(X_s) ds > N\}$$

On a

$$\int_{[0,t]} \sigma_2^2(X_s) ds = \int \sigma_2^2(1_{[0,t]} X_s) ds$$

Or

$$1_{[0,t]} X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B})) \subset \mathbf{L}^2(\mathcal{P}_m; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B}))$$

Par le théorème de Fubini, $\int \sigma_2^2(1_{[0,t]} X_s) ds$ est donc mesurable $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$, il en résulte que T_N est un temps optionnel (voir 1.7 [2]). Par conséquent, l'intervalle stochastique $1_{[0, T_N]}$ est prévisible (lemma 2.1 [2]) et

$$X^n := 1_{[0, T_N]} X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B}))$$

On a donc $X^N \cdot W \in \mathbf{M}^2(\mathbb{F}; \mathcal{B})$ continue.

D'autre part,

$$\mathbf{P}(|(X \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon) \leq \mathbf{P}(|(X^N \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon) + \mathbf{P}(X_t^N \neq X_t)$$

Or, par Doob

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leq t \leq a} |(X^N \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{E}|(X^N \cdot W)_a|_{\mathbb{B}}^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{[0,a] \times \Omega} \sigma_2^2(X) 1_{[0, T_N]} d\mu \leq \frac{N}{\epsilon^2}$$

D'autre part,

$$\{X_t \neq X_t^N\} = \{t > T_N\} \subset \{\omega \mid \int_{[0,a]} \sigma_2^2(X_s) ds > N\}$$

donc pour $0 \leq t \leq a$

$$\mathbf{P}(|(X \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon) \leq \frac{N}{\epsilon^2} + \mathbf{P}(\int_{[0,a]} \sigma_2^2(X_s) ds > N)$$

#

Définition 3.3.6

On définit

$$\Lambda := \{X \in \mathbf{L}^0(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}; \mathbb{B})) \mid \forall t, \int_{[0,t]} \sigma_2^2(X_s) ds < \infty \text{ a.s. } \mathbf{P} \}$$

Définition 3.3.7

Pour $X \in \Lambda$, en prenant

$$T_N := \inf\{t \mid \int_{[0,t]} \sigma_2^2(X_s) ds > N\}$$

on a alors

$$X^n := 1_{[0, T_n]} X \in \Lambda_2$$

Proposition 3.3.7

$\{(X^n \cdot W)_t\}_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité. On définit alors $(X \cdot W)_t$ comme la limite en probabilité de cette suite.

Preuve. Pour $p > 0$ on a $X^{n+p} \perp X^n = 1_{]T_n, T_{n+p}]}$ et $]T_n, T_{n+p}] \in \mathcal{P}$ par le lemme 2.1 [2]. De plus, par la proposition précédente,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq a} |(X^{n+p} \cdot W)_t \perp (X^n \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon\right) \leq \frac{N}{\epsilon^2} + \mathbf{P}\left(\int_{[0,a]} \sigma_2^2(X_s^{n+p} \perp X_s^n) ds > N\right)$$

Or

$$\mathbf{P}\left(\int_{[0,a]} \sigma_2^2(X_s^{n+p} \perp X_s^n) ds > N\right) \leq \frac{1}{N} \mathbf{E}\left|\left(\int_{[0,a]} \sigma_2^2(X_s) \cdot 1_{]T_n, T_{n+p}]}(ds)\right)\right|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

puisque

$$\mu(]T_n, T_{n+p}]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq a} |(X^{n+p} \cdot W)_t \perp (X^n \cdot W)_t|_{\mathbb{B}} > \epsilon\right) = 0$$

et donc

$$(X^n \cdot W)_t \xrightarrow{\mathbf{P}} (X \cdot W)_t$$

De plus pour $(t, \omega) \in \{t < T_n\}$ on a $(X \cdot W)_t = (X^n \cdot W)_t$. #

Remarque 3.3.5 On montre alors que $X \cdot W$ est une \mathbf{L}^2 -martingale locale continue (il suffit de prendre la suite $\{T_n\}_n$).

3.3.3 Formule de Itô

Soient $a \in \mathbf{L}^1(\mathcal{P}_m; \mathbb{H})$, $b \in \mathbf{L}^2(\mathcal{P}; \mathcal{L}^2(\mathbb{H}))$ et pour $0 \leq a < t < \infty$ on fixe $X_a \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_a; \mathbb{H})$

On a donc l'existence de

$$X_t := X_a + \int_a^t a_s ds + \int_a^t b_s dW_s$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{H}_\perp \rightarrow \mathbb{X}$ où \mathbb{X} espace de Hilbert.

On suppose que f admet des dérivées de Fréchet d'ordre 1 et 2 continues et bornées.

On rappelle que $g : \mathbb{H}_\perp \rightarrow \mathbb{X}$ admet une dérivée de Fréchet en $x \in \mathbb{H}_\perp$ ssi $\exists g'_x \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{X})$ tel que

$$g(x+h) - g(x) = g'_x h + o(|h|) \quad \forall h \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{H}_\perp$$

On suppose de plus que f admet une dérivée continue et bornée par rapport à t .
Pour

$$Y_t := f(t, X_t)$$

on a alors

Théorème 3.3.2 (Itô)

$$Y_t := f(a, X_a) + \int_a^t \left[f'_s(s, X_s) + f'_x(s, X_s)a_s + \frac{1}{2} \text{Tr}(b_s^* f''_{xx}(s, X_s) b_s) \right] ds + \int_a^t f'_x(s, X_s) b_s dW_s$$

Remarque 3.3.6 Une preuve élégante de ce résultat dans le cas réel est donnée dans [8].

Remerciements *Je tiens à remercier tout particulièrement le professeur S.D. Chatterji qui m'a soutenu dans cette entreprise qu'est le projet de diplôme, en éveillant en moi un vif intérêt pour les domaines des mathématiques où l'analyse et les probabilités se rencontrent avec bonheur. Je remercie également le professeur R. Dalang pour l'intérêt porté à mon travail. Et enfin, un grand merci à tous ceux qui m'ont soutenu, mes parents et amis, et tout particulièrement à ceux qui m'ont aidé à améliorer la présentation de ce document.*

Bibliographie

- [1] P. BILLINGSLEY *Probability and Measure*. J. Wiley & Sons, third Edition, (1995).
- [2] K.L. CHUNG and R.J. WILLIAMS *Introduction to Stochastic Integration*, volume **4** of Progress in Probability & Statistics. Birkhäuser, Basel, Stuttgart, (1990).
- [3] Yu.L. DALECKY and S.V. FOMIN *Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Space*, volume **76** of Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, (1991).
- [4] J. DIESTEL and Jr. J.J. UHL *Vector Measures*, volume **15** of Math Surveys. AMS, Providence, RI, (1977).
- [5] P. MALLIAVIN with H. AIRAULT, L. KAY and G. LETAC *Integration and Probability*, Graduate text in Mathematics. Springer Verlag, (1995).
- [6] P. PROTTER *Stochastic Integration and Differential Equations*, volume **21** of Applications of Mathematics. Springer Verlag, (1990).
- [7] K.R. STROMBERG *Probability for Analysts*, Probability Series. Chapman & Hall, (1994).
- [8] R. DURRETT *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, The Wadsworth Mathematics Series. Wadsworth Advanced Books & Software, (1984).
- [9] H. BREZIS *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 4ème tirage revu et corrigé, (1993).
- [10] W. RUDIN *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 2nd Edition, (1991).
- [11] S.D. CHATTERJI *Vector-valued Martingales and their Applications*, Probability in Banach Spaces, Oberwolfach 1975, volume **526** of Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, (1975).
- [12] N.N. VAKHANIA, V.I.TARIELADZE and S.A.CHOBANYAN *Probability Distributions on Banach Spaces*, Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, (1987).
- [13] M. METIVIER and J. PELLAUMAIL *Stochastic Integration*, Probability and Mathematical Statistics, Series of Monographs and Textbooks. Academic Press, (1980).

- [14] A.N. SHIRYAYEV *Probability*, translation by R.P. BOAS. Springer Verlag, (1984).
- [15] K.L. CHUNG *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*, volume **249** of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, (1982).