



Minorants de la fiabilité pour des systèmes à recouvrements.

Zineb Azouz

► To cite this version:

| Zineb Azouz. Minorants de la fiabilité pour des systèmes à recouvrements.. 2012. hal-00701690

HAL Id: hal-00701690

<https://hal.science/hal-00701690>

Preprint submitted on 25 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Minorants de la fiabilité pour des systèmes à recouvrement

Zineb AZOUZ

Université de Constantine,
Route d'Aïn El Bey, Constantine Algérie.
zineb.azouz@gmail.com

20 mai 2012

Résumé

Dans [14], Yi-Chih Hsieh et Ta-Cheng Chen ont fourni un minorant de la fiabilité de systèmes généralisant les systèmes linéaires (ou “unidimensionnels”) k -consécutifs-sur- n (voir [6]); ces derniers sont constitués de n composants indépendants notés de 1 à n ; ils sont en panne si et seulement si k composants consécutifs sont tous en panne. Les auteurs ont généralisé cette notion à des systèmes bidimensionnels, plaques carrées de composants telles que le système soit en panne dès que sont en panne tous les composants d’une sous plaque carrée de k^2 composants. Certains auteurs ([8] ou [12]) se sont intéressés à la généralisation de cette notion au cas tridimensionnel. La difficulté combinatoire du calcul de la fiabilité de ces systèmes a conduit à en chercher des encadrements. Nous allons ici justifier la méthode de calcul d’un minorant, particulièrement facile à mettre en œuvre, proposée dans [14] et la généraliser au cas de systèmes dits “à recouvrement”. Nous proposons aussi pour ces systèmes des minorants meilleurs que celui issu des idées de [14] et pour lesquels la difficulté de calcul est intermédiaire entre celle de la fiabilité explicite et celle du minorant de [14].

Nous fournissons ici des démonstrations et des compléments sur les calculs dans le cas des systèmes unidimensionnels k -consécutifs-sur- n ; le cas des systèmes bidimensionnels fait l’objet d’un document en cours de rédaction.

Des méthodes de calcul de tels minorants sont élaborées pour les systèmes linéaires (dimension 1) k -consécutifs-sur- n et leur généralisation, quelle que

soit leur dimension. En annexe, leur pertinence est étudiée numériquement dans le cas de systèmes de dimension 1, pour lesquels le calcul exact est assez simple pour qu'on puisse comparer son résultat à ceux obtenus pour les minorants. Un autre article étendra ces calculs de minorants au cas des systèmes de dimension 2.

Mots clés : Fiabilité, Recouvrement, Borne inférieure, k -consécutifs-sur- n , systèmes cohérents.

Abstract

In [14], Yi-Chih Hsieh and Ta-Cheng Chen provided a lower bound for the reliability of systems which are generalizations of the well-known linear k -consecutive-out-of- n systems (see [6]), which consist in n independent components, denoted from 1 to n , and are such that the system fails if and only if k consecutive components are failing. These authors extended this concept to two-dimensional systems, squared plates of components such as the system fails as soon as all components of a sub squared plate of k^2 components are failing. Some authors ([8] or [12]) were interested in the generalization of this concept to the three-dimensional case. The combinatorial difficulty in computing the reliability of these systems has led to look for lower bounds. We justify the method for computing such a lower bound, easy to build, proposed in [14] and we generalize it for systems which we call "with recovering". We also compute for these systems lower bounds which are better than those which would be obtained by following the ideas of [14] and for which the combinatorial difficulty lies between the one due to explicit computation and the one deduced from the method in [14].

Proofs and complements on compilations for linear (dimension 1) k -consecutive-out-of- n systems are provided here; the case of dimension 2 systems will be studied in an incoming paper.

Computational methods for such lower bounds are presented for linear (dimension 1) k -consecutive-out-of- n systems and their generalization, of any dimension. in the "Annexe". Their adequacy is studied through numerical studies for such systems in dimension 1, for which exact computation is easy, so that we may compare its result the values of lower-bounds. In another paper, we shall extend these computations of lower-bounds to the case of systems of dimension 2.

Keywords. Reliability, lowers bounds, k -consecutive-out-of- n , coherent systems.

Remerciements Ce travail a été réalisé en partenariat avec le Professeur Jean-Pierre Raoult, durant des séjours au Laboratoire d'analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris Est Marne-la-Vallée. (CNRS, UMR 8050).

La mise en œuvre informatique des calculs figurant en Annexe a été réalisée par Tanguy Briançon, professeur au Lycée Agora (Puteaux, France).

1 Définition d'un système à recouvrement

Dans tout cet article, on considère un système $\mathcal{S}$ formé de n composants dont l'ensemble est noté S ; la variable d'état du composant i est notée X_i (X_i vaut 0 ou 1 selon que le composant i est en panne ou en marche). Pour toute partie T de S , on note $X_T = (X_t)_{t \in T}$ (variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}^{card\ T}$) et $0_T = (0)_{t \in T}$; autrement dit $X_T = 0_T$ équivaut à $\forall t \in T$ $X_t = 0$.

Définition 1. Le système $\mathcal{S}$ est dit **à recouvrement** s'il existe un recouvrement de S , soit $S_1, \dots, S_m$, tel que $\mathcal{S}$ soit en panne si et seulement s'il existe au moins une des parties S_j ($1 \leq j \leq m$) dont les composants soient tous en panne.

Il est dit **à recouvrement indépendant** si $\mathcal{C}$ étant la partition engendrée par le recouvrement $S_1, \dots, S_m$, les variables aléatoires X_C , où C parcourt $\mathcal{C}$, sont indépendantes.

La notion de système à recouvrement porte sur la structure du système et non sur sa loi. Celle de recouvrement indépendant introduit une condition sur la loi; elle est évidemment satisfaite si les composants de $\mathcal{S}$ sont tous indépendants, ce qui est le cas dans [14]; elle implique dans la pratique que, si i' et i'' sont deux composants tels que différent les ensembles de parties du recouvrement auxquelles ils appartiennent, alors $X_{i'}$ et $X_{i''}$ sont indépendantes; en revanche, si i' et i'' ont tous deux le même statut eu égard à ce recouvrement, $X_{i'}$ et $X_{i''}$ ne sont pas nécessairement indépendantes.

Notons M_S (resp. F_S) l'événement "le système $\mathcal{S}$ est en marche" (resp. en panne).

Alors $F_S = [\exists j \in \{1, \dots, m\} \forall i \in S_j \ X_i = 0] = [\exists j \in \{1, \dots, m\} \ X_{S_j} = 0_{S_j}]$

et $M_S = [\forall j \in \{1, \dots, m\} \exists i \in S_j \ X_i = 1] = [\forall j \in \{1, \dots, m\} \ X_{S_j} \neq 0_{S_j}]$

En d'autres termes, $\mathcal{S}$ peut être vu comme le montage en série de m sous systèmes $\mathcal{S}_j$; l'ensemble des composants de $\mathcal{S}_j$ est S_j et ils sont montés en parallèle ; si $\mathcal{C}_j$ est la trace sur S_j de la partition engendrée par $\mathcal{S}$, les variables aléatoires X_{C_j} , où C_j parcourt $\mathcal{C}_j$, sont indépendantes. Mais les sous systèmes $\mathcal{S}_j$ ($1 \leq j \leq m$) ne sont pas indépendants, car ils ont des composants en commun ; de là vient la difficulté du calcul de la fiabilité de $\mathcal{S}$.

2 Exemples de systèmes à recouvrement

2.1 Les systèmes k -consécutifs-sur- n : cas linéaire et cas circulaire

Il s'agit de systèmes formés de n composants notés de 1 à n pouvant être disposés de manière linéaire ou circulaire¹. Un tel système tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs tombent en panne. En d'autres termes, il est en panne si et seulement s'il existe i avec, dans le cas linéaire, la contrainte ($1 \leq i \leq n - k + 1$) tel que les composants $(i, i + 1, \dots, i + k - 1)$ soient tous en panne (le signe + désignant, dans le cas circulaire, l'addition modulo $n + 1$).

C'est un système à recouvrement, le recouvrement $(S_j)_{1 \leq j \leq n-k+1}$ de S ($= \{1, 2, \dots, n\}$) étant défini par : pour tout j tel que $1 \leq j \leq n - k + 1$, $S_j = \{j, j + 1, \dots, j + k - 1\}$.

La partition S engendrée par les S_j est la partition en singletons, et donc le système est à recouvrement indépendant si et seulement si tous les X_i sont indépendants. Il n'en serait pas de même dans un système "partiellement"

1. Par défaut, lorsqu'on parle de système k -consécutif-sur- n sans précision, on suppose que les composants sont disposés linéairement.

k -consécutif-sur- n où on disposerait d'un sous ensemble d'intervalles de longueur k (dits critiques) et où la panne interviendrait si étaient en panne tous les éléments d'un intervalle critique (par exemple un intervalle sur deux).

Pour $(n = 5, k = 3)$, on aura :

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{2, 3, 4\}, S_3 = \{3, 4, 5\}$$

et dans le cas circulaire :

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{2, 3, 4\}, S_3 = \{3, 4, 5\}, S_4 = \{4, 5, 1\}, S_5 = \{5, 2, 1\}$$

2.2 Les systèmes k -consécutifs-sur- n bidimensionnels

Il s'agit de la version bidimensionnelle des systèmes précédents. Un tel système est formé de n^2 composants disposés selon une grille carrée et notés (i, j) , pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. Il tombe en panne quand un sous-carré à k^2 éléments a ses composants tous en panne, autrement dit si et seulement s'il existe i ($1 \leq i \leq n - k + 1$) et j ($1 \leq j \leq n - k + 1$) tels que tous les composants (i', j') tels que $i \leq i' \leq i + k - 1$ et $j \leq j' \leq j + k - 1$ sont en panne.

De même que pour la situation unidimensionnelle, la disposition circulaire dans le cas bidimensionnel est envisagée et représentée par un tore.

Pour $(n = 3, k = 2)$, on aura dans le cas linéaire (les composants appartenant à plusieurs éléments de la partition étant figurés en gras) :

$$S_1 = \{(1, 1), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{2})\}, S_2 = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (1, 3), (2, 3)\}$$

$$S_3 = \{(\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (3, 1), (\mathbf{3}, \mathbf{2})\}, S_4 = \{(\mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{2}), (2, 3), (3, 3)\}$$

De même pour $(n = 3, k = 2)$, dans le cas circulaire, on aura :

$$S_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}, S_2 = \{(1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\},$$

$$S_3 = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}, S_4 = \{(2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\},$$

$$S_5 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}, S_6 = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3), (3, 3)\}$$

3 Un minorant de la fiabilité

Le théorème ci dessous généralise une inégalité utilisée dans [14] pour le cas particulier de systèmes k -consécutifs-sur- n bidimensionnels (cas où les auteurs considèrent cette propriété comme évidente). On note M_{S_j} l'événement "le sous système $\mathcal{S}_j$ est en marche".

Théorème 1

Soit $\mathcal{S}$ un système à recouvrement indépendant, alors :

$$P(M_S) \geq \prod_{j=1}^m P(M_{S_j})$$

Commentaires

1. Dans le cas où tous les composants sont indépendants, chaque $\mathcal{S}_j$ étant monté en parallèle, on a :

$$P(M_{S_j}) = 1 - \prod_{i \in S_j} P(X_i = 0);$$

sinon on a seulement, $\mathcal{C}_j$ désignant la trace sur S_j de la partition engendrée par le recouvrement :

$$P(M_{S_j}) = 1 - \prod_{C_j \in \mathcal{C}_j} P(X_{C_j} = 0_{C_j})$$

2. $\prod_{j=1}^m P(M_{S_j})$ est la fiabilité du système $\mathcal{S}'$ construit de la manière suivante : $\mathcal{S}'$ est constitué de m sous systèmes montés en série, indépendants, $\mathcal{S}'_j$, où $\mathcal{S}'_j$ est isomorphe à $\mathcal{S}_j$ au sens suivant : les composants de $\mathcal{S}'_j$ sont notés i_j , où $i \in S_j$, et la loi de leur famille $X_{S'_j}$ est identique à celle de X_{S_j} .

Autrement dit, revenir du système $\mathcal{S}'$ au système $\mathcal{S}$ signifie "identifier" (c'est à dire forcer à être dans le même état), pour chaque $i \in S$, tous les composants (i_j) tels que $i \in S_j$. Le théorème 1 exprime que cette identification ne peut qu'améliorer la fiabilité.

La démonstration du théorème 1 repose sur trois lemmes faisant intervenir la notion de système cohérent. On rappelle qu'un système $\mathcal{T}$, dont l'ensemble des composants est noté T , est dit cohérent si la fonction de structure Φ_T , application de $\{0, 1\}^T$ dans $\{0, 1\}$, est croissante relativement à l'ordre usuel sur $\{0, 1\}^T$; autrement dit, si $x_T = (x_t)_{t \in T}$ est un état de marche du système autre que $(1)_{t \in T}$, sa modification par passage d'un composant de l'état de panne à l'état de marche maintient le système en état de marche.

Soit $\mathcal{T}$ un système cohérent et soit $U \subset T$; alors, si les variables aléatoires X_U et X_{T-U} sont indépendantes on a les deux lemmes suivants :

Lemme 1

$$P(M_T) \geq P(M_T \mid X_U = 0_U)$$

DEMONSTRATION

Tout $x_T \in \{0, 1\}^T$ peut être décomposé en (x_U, x_{T-U}) où $x_U \in \{0, 1\}^U$ et $x_{T-U} \in \{0, 1\}^{T-U}$

Soit, pour tout x_U , $A_{x_U} = \{x_{T-U}; (x_U, x_{T-U}) \in M_T\}$

Il résulte de la cohérence du système que

$$\forall x_U \in \{0, 1\}^U \quad A_{x_U} \supset A_{0_U}$$

et de l'indépendance de X_U et X_{T-U} que

$$P(M_T \mid X_U = x_U) = P(X_{T-U} \in A_{x_U}).$$

Donc

$$\begin{aligned} P(M_T) &= \sum_{x_U} P(M_T \mid X_U = x_U) P(X_U = x_U) \\ &\geq \sum_{x_U} P(X_{T-U} \in A_{0_U}) P(X_U = x_U) \end{aligned}$$

d'où :

$$P(M_T) \geq P(X_{T-U} \in A_{0_U}) = P(M_T \mid X_U = 0_U). \quad \square$$

Lemme 2

$$P(X_U = 0_U \mid M_T) \leq P(X_U = 0_U)$$

DEMONSTRATION

$$P(X_U = 0_U, M_T) = P(X_U = 0_U \mid M_T) P(M_T)$$

et, d'après le lemme 1,

$$P(X_U = 0_U, M_T) = P(M_T \mid X_U = 0_U) P(X_U = 0_U) \leq P(M_T) P(X_U = 0_U)$$

d'où l'inégalité annoncée. $\square$

Le lemme qui suit, qui fait intervenir un recouvrement de T par deux parties T_1 et T_2 , porte sur des systèmes plus généraux que les systèmes à recouvrement indépendant.

Lemme 3

Soit $\mathcal{T}$ le montage en série de deux sous systèmes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, d'ensembles de composants non disjoints, T_1 et T_2 ; l'ensemble de composants de T est $T_1 \cup T_2$ et les trois variables aléatoires $X_{T_1-T_2}$, $X_{T_1 \cap T_2}$ et $X_{T_2-T_1}$ sont indépendantes. $\mathcal{T}_1$ est monté en parallèle et $\mathcal{T}_2$ est un système cohérent. Alors, si M_1 (resp. M_2) désigne l'événement " $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$)" est en marche, on a :

$$P(M_1 \mid M_2) \geq P(M_1).$$

DEMONSTRATION

Notons F_1 (resp. F_2), l'événement " $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) est en panne". On va démontrer l'inégalité

$$P(F_1 \mid M_2) \leq P(F_1)$$

On a, $\mathcal{T}_1$ étant monté en parallèle

$$P(F_1 \mid M_2) = P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{T_1 \cap T_2} = 0_{T_1 \cap T_2} \mid M_2)$$

d'où, $X_{T_1-T_2}$ étant indépendante de X_{T_2} ,

$$P(F_1 \mid M_2) = P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2})P(X_{T_1 \cap T_2} = 0_{T_1 \cap T_2} \mid M_2)$$

et, d'après le lemme 2, $\mathcal{T}_2$ étant cohérent et $X_{T_1 \cap T_2}$ et $X_{T_2-T_1}$ étant indépendants,

$$P(F_1 \mid M_2) \leq P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2})P(X_{T_1 \cap T_2} = 0_{T_1 \cap T_2})$$

et enfin, $\mathcal{T}_1$ étant monté en parallèle,

$$P(F_1 \mid M_2) \leq P(X_{T_1} = 0_{T_1}) = P(F_1). \quad \square$$

Commentaire.

Sous les hypothèses du lemme 3, on obtient que :

$$P(M) = P(M_1, M_2) \geq P(M_1)P(M_2)$$

Une interprétation de cette propriété est la suivante : au système $\mathcal{T}$ associons le système $\mathcal{T}^*$ dont l'ensemble des composants, T^* , est l'union de quatre ensembles disjoints $T_1 - T_2$, U_1 , U_2 et $T_2 - T_1$, de telle sorte que U_1 et U_2 soient tous deux en bijection avec $T_1 \cap T_2$. On note $T_1^* = (T_1 - T_2) \cup U_1$ et $T_2^* = (T_2 - T_1) \cup U_2$, et la loi de $X_{T_1^*}$ (resp. $X_{T_2^*}$) est identique à celle de

X_{T_1} (resp. X_{T_2}); X_{U_1} et X_{U_2} sont prises indépendantes, de telle sorte que $X_{T_1^*}(= (X_{T_1-T_2}, X_{U_1}))$ et $X_{T_2^*}(= (X_{U_2}, X_{T_2-T_1}))$ le sont, et donc il s'agit d'un montage en série de deux systèmes indépendants, dont le premier est monté en parallèle. La fiabilité de $\mathcal{T}^*$ est alors :

$$P(M^*) = P(M_1^*)P(M_2^*) = P(M_1)P(M_2)$$

Le lemme 3 exprime donc que le système $\mathcal{T}^*$, déduit de $\mathcal{T}$ par dédoublement de chaque variable X_t ($t \in T_1 \cap T_2$) en deux variables indépendantes X_{t_1} et X_{t_2} , affectant la première à $\mathcal{T}_1^*$ et la seconde à $\mathcal{T}_2^*$, est de plus mauvaise fiabilité que $\mathcal{T}$:

$$P(M_1, M_2) \geq P(M_1^*, M_2^*)$$

autrement dit $P(F_1, M_2) \leq P(F_1^*, M_2^*)$. (1)

Démonstration du théorème 1.

On va procéder par récurrence.

Notons, pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $\mathcal{U}_j$ le système déduit de $\mathcal{S}$ en prenant pour ensemble de composants $U_j = \cup_{l=j+1}^m S_l$, qui est en panne si et seulement si au moins un des sous systèmes $\mathcal{S}_l$ ($j+1 \leq l \leq k$) est en panne ; donc pour tout j , $\mathcal{U}_j$ est en panne si et seulement si $\mathcal{S}_j$ ou $\mathcal{U}_{j+1}$ est en panne.

Il résulte alors du lemme 3, appliqué à $T = U_j$, muni du recouvrement $(T_1, T_2) = (S_j, U_{j+1})$, que :

$$P[M_{S_j} \mid M_{U_{j+1}}] \geq P(M_{S_j}),$$

autrement dit,

$$P(M_{U_j}) = P(M_{S_j}, M_{U_{j+1}}) \geq P(M_{S_j})P(M_{U_{j+1}}).$$

On a alors par récurrence :

$$P(M) \geq P(M_1)P(U_1) \geq P(M_1)P(M_2)P(U_2) \geq \dots \geq \prod_{j=1}^k P(M_j). \quad \square$$

4 Nouveaux minorants de la fiabilité

Dans le commentaire 2 qui suit l'énoncé du théorème 1 nous avons introduit un système $\mathcal{S}'$ déduit de $\mathcal{S}$ en "démultipliant" chaque composant i en autant de composants (j, i) qu'il y a d'indices j vérifiant $i \in S_j$. L'ensemble S' des composants de $\mathcal{S}'$ est l'union des parties disjointes S'_j et les variables aléatoires $X'_{S'_j}$ sont indépendantes, la loi de $X'_{S'_j}$ étant identique à celle de X_{S_j} . La fiabilité de $\mathcal{S}'$ est alors inférieure à celle de $\mathcal{S}$. On peut considérer des

systèmes intermédiaires entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, obtenus en démultipliant seulement certains des composants i . Si $\mathcal{S}^*$ est un tel système, on peut conjecturer que sa fiabilité est comprise entre celles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

Cette notion de démultiplication est formalisée dans la définition 2 :

Définition 2.

Etant donné un système $\mathcal{S}$ à recouvrement indépendant, de recouvrement $(S_1, S_2, \dots, S_m)$, un système $\mathcal{S}^*$ est dit déduit de $\mathcal{S}$ par démultiplication d'éléments si son recouvrement $(S_1^*, S_2^*, \dots, S_m^*)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout j ($1 \leq j \leq m$), S_j^* est isomorphe à S_j (i.e. il existe une bijection entre S_j et S_j^* telle que la loi de X_{S_j} soit transformée en celle de $X_{S_j^*}$).
2. Chaque élément de S_j^* provient de la démultiplication d'un élément i de S_j au sens suivant : n_i étant le nombre de j tels que $i \in S_j$, il existe k ($1 \leq k \leq n_i$), une partition $(L_1, L_2, \dots, L_k)$ de $\{j; i \in S_j\}$ et k éléments de S^* , notés $(i_{L_1}, \dots, i_{L_k})$, tels que pour tout h ($1 \leq h \leq k$) i_{L_h} appartient aux S_j^* tels que $j \in L_h$ et à aucun des autres S_j^* (c'est à dire ceux tels que $j \notin \cup_{h' \neq h} L_{h'}$) ; si $n_i = 1$, il existe un seul élément provenant de la démultiplication de i , qui restera noté i ; on gardera aussi la notation i si $k = 1$ (aucune démultiplication effectuée).
3. Les v.a $X_{L_1}, \dots, X_{L_k}$ sont indépendantes.
4. $\mathcal{S}^*$ est en panne si sont en panne tous les éléments de l'un des ses S_j^* .

Visualisons cette définition sur l'exemple (figure 1) d'un système $\mathcal{S}$ à 8 éléments pour lequel on présente des décompositions de plus en plus importantes, la dernière (schéma (V)) étant celle où le recouvrement est une partition (objet du théorème 1)

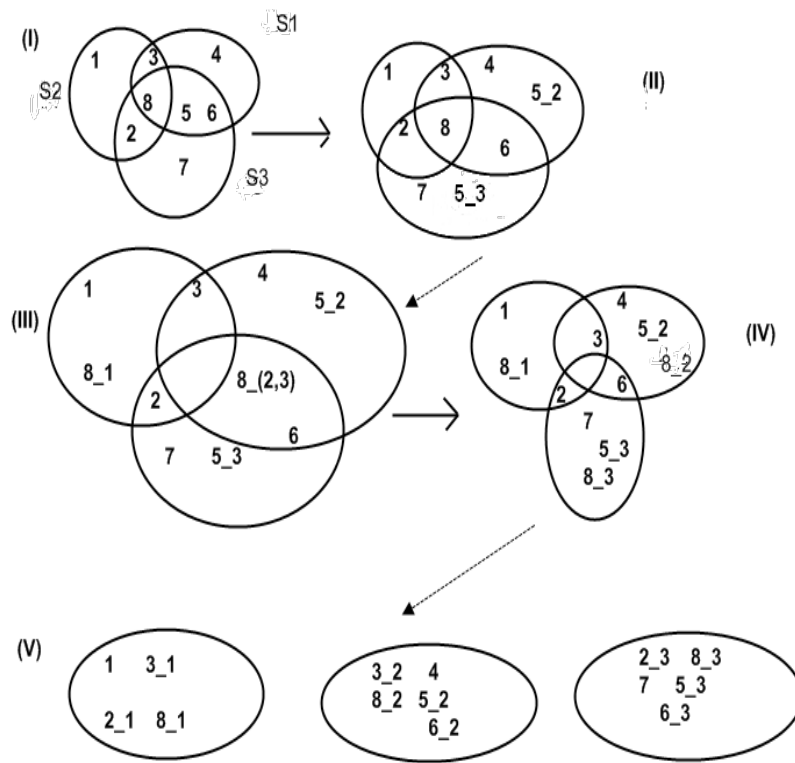


FIGURE 1

Théorème 2

$\mathcal{S}^*$ étant déduit du système $\mathcal{S}$ à recouvrement indépendant par démultiplication d'éléments, on a :

$$P(M_S) \geq P(M_{S^*}) \geq P(M_{S'}) = \prod_{j=1}^m P(M_{S'_j}).$$

Commentaire.

Une telle situation peut être intéressante si la structure de $\mathcal{S}$ rend le calcul de fiabilité très lourd alors que celle de $\mathcal{S}^*$ serait techniquement plus abordable (sans être bien sûr aussi immédiate que celle de $\mathcal{S}'$) ; $P(M_{S^*})$ fournirait alors un minorant de la fiabilité de $\mathcal{S}^*$ de meilleure qualité que $P(M_{S'})$.

La démonstration du théorème repose sur une succession de décomposition d'un composant chaque fois en deux nouveaux composants indépendants. Considérons donc d'abord le cas de "dédoublément". Pour cela reprenons exactement la situation du lemme 3. Dans $U = T_1 \cap T_2$, considérons un composant i_0 et définissons le système $\mathcal{T}^*$ dont l'ensemble des composants est $T^* = (T_1 - T_2) \cup (U - \{i_0\}) \cup \{i_0^1, i_0^2\} \cup T_2$.

On a $\text{card } T^* = \text{card } T + 1$ et on note

$$T_1^* = (T_1 - T_2) \cup (U - \{i_0\}) \cup \{i_0^1\}$$

$$T_2^* = (T_2 - T_1) \cup (U - \{i_0\}) \cup \{i_0^2\}$$

Les lois de $X_{T_1^*}$ et $X_{T_2^*}$ sont identiques respectivement à celles de X_{T_1} et X_{T_2} (avec toutes les hypothèses d'indépendance qui les concernent) et de plus nous créons l'indépendance entre $X_{i_0^1}$ et $X_{i_0^2}$. Le nouveau système $\mathcal{C}^*$ a donc la même structure que $\mathcal{C}$, après dédoublement de i_0 en i_0^1 et i_0^2 ; en particulier $\mathcal{C}^*$ consiste en le montage en série de $\mathcal{C}_1^*$ et $\mathcal{C}_2^*$, $\mathcal{C}_1^*$ est monté en parallèle et $\mathcal{C}_2^*$ est cohérent ; ces deux sous systèmes ont en commun les composants de $U - \{i_0\}$ (sauf si $U = \{i_0\}$). On a alors le résultat suivant :

Lemme 4

La fiabilité de $\mathcal{T}^*$ est inférieure à celle de $\mathcal{T}$.

DEMONSTRATION

Avec des notations évidentes, la propriété à démontrer s'écrit :

$$P(M_1, M_2) \geq P(M_1^*, M_2^*)$$

autrement dit $P(F_1, M_2) \leq P(F_1^*, M_2^*)$.

Notons $U^* = U - \{i_0\}$ (voir figure 2) ;

alors $T_1^* = (T_1 - T_2) \cup U^* \cup \{i_0^1\}$

et $T_2^* = (T_2 - T_1) \cup U^* \cup \{i_0^2\}$.

Il vient

$$\begin{aligned} P(F_1, M_2) &= P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{U^*} = 0_{U^*}, X_{i_0} = 0, M_2) \\ &= P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{i_0} = 0, M_2 \mid X_{U^*} = 0_{U^*})P(X_{U^*} = 0_{U^*}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } P(F_1^*, M_2^*) &= P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{U^*} = 0_{U^*}, X_{i_0^1} = 0, M_2^*) \\ &= P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{i_0^1} = 0, M_2^* \mid X_{U^*} = 0_{U^*})P(X_{U^*} = 0_{U^*}) \end{aligned}$$

On remarque que, conditionnellement à $X_{U^*} = 0_{U^*}$, on se trouve exactement dans la situation décrite dans le commentaire qui suit le lemme 3, le sous ensemble des composants initialement communs aux deux sous systèmes (noté U dans ce commentaire) étant ici le singleton $\{i_0\}$.

Sous ce conditionnement, les ensembles d'états de marche sont, dans $\mathcal{T}_1^*$, caractérisés par $X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}$ et $X_{i_0} = 0$ et, dans $\mathcal{T}_2^*$, caractérisés par M_2^* ; de plus il y a indépendance conditionnelle entre la marche de $\mathcal{T}_1^*$ et celle de $\mathcal{T}_2^*$.

Donc l'inégalité (1) du commentaire qui suit le lemme 3 s'écrit ici :

$$\begin{aligned} &P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{i_0} = 0, M_2 \mid X_{U^*} = 0_{U^*}) \\ &\leq P(X_{T_1-T_2} = 0_{T_1-T_2}, X_{i_0^1} = 0, M_2^* \mid X_{U^*} = 0_{U^*}) \end{aligned}$$

d'où $P(F_1, M_2) \leq P(F_1^*, M_2^*)$. □

Représentation graphique :

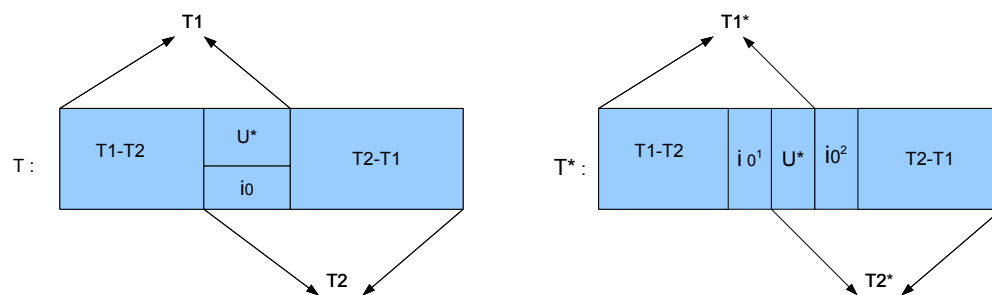


FIGURE 2

DEMONSTRATION DU THEOREME 2

On modifie le système à recouvrement indépendant $\mathcal{S}$ par démultiplication d'un certain nombre de composants. Ceci peut s'effectuer par la succession d'étapes consistant en le seul dédoublement d'un seul composant à chaque fois ; donc à chaque étape, on se trouve face à un système à recouvrement indépendant, soit $\widetilde{\mathcal{S}}$, qu'on veut transformer en $\widetilde{\mathcal{S}}^*$ en choisissant un élément i_0 , contenu dans au moins deux parties $\widetilde{S}_j$ du recouvrement de $\widetilde{S}$; s'il y en a plus de deux, on choisit l'une de ces parties, soit $\widetilde{S}_{j_0}$ et on décide de dédoubler i en deux composants qui seront l'un ajouté à $\widetilde{S}_{j_0} - \{i_0\}$ et l'autre ajouté à l'union, privée de i_0 , des $\widetilde{S}_j$ tels que $j \neq j_0$.

Le lemme 3 s'applique à chaque étape en prenant pour T_1 la partie $\widetilde{\mathcal{S}}_{j_0}$ et pour T_2 l'union des $\widetilde{S}_j$ tels que $j \neq j_0$. $\square$

5 Systèmes k -consécutifs-sur- n de dimension d

Nous revenons aux systèmes classiques, k -consécutifs-sur- n de dimension 1. Nous considérerons successivement les systèmes unidimensionnels, bidimensionnels (donnés en exemple en section 2) puis tri-dimensionnels et enfin de dimension quelconque.

5.1 Cas unidimensionnel : dédoublements sélectifs

Soit $\mathcal{S}$ un système k -consécutifs-sur- n ; donc $S = \{1, 2, \dots, n\}$ et c'est un système à recouvrement en prenant pour tout j ($1 \leq j \leq n - k + 1$), $S_j = \{j, \dots, j + k - 1\}$.

Notre but est de fournir des minorants de la fiabilité utiles quand n est "très grand, avec k petit devant n ". Pour cela, on se donne un entier b et on décide de n'effectuer des calculs explicites de fiabilité que pour des systèmes k -consécutifs où le nombre de composants est compris entre $2(k - 1)$ et b .

A cet effet, on choisit un recouvrement de S en $v + 1$ intervalles appelés blocs, $B_0, \dots, B_v$ rangés dans l'ordre strictement croissant de leur plus petit élément noté a_u (avec $a_0 = 1$) et qui sont " $(k - 1)$ -enchaînés", c'est à dire que l'intersection de deux blocs successifs a $k - 1$ éléments.

Nous allons établir par application du théorème 2 que le produit des fiabilités des systèmes $\mathcal{S}_u$ obtenus par restriction de $\mathcal{S}$ à chacun de ces blocs et qui sont eux mêmes de type k -consécutifs, est un minorant de la fiabilité de $\mathcal{S}$.

Si on note b_u la longueur de B_u (avec, comme annoncé, $2(k-1) \leq b_u \leq b$), on a :

$B_u = \{a_u, \dots, a_u + b_u - 1\}$ avec $(a_v + b_v - 1 = n)$
et le $(k-1)$ -enchaînement s'exprime par :
 $A_u = B_u \cap B_{u-1} = \{a_u, \dots, a_u + k - 2\}$ ($1 \leq u \leq v$)
ce qui est en particulier impose que $a_v + k - 2 \leq n$; le fait que, pour tout u , $b_u \geq 2(k-1)$ implique que les A_u sont disjoints.

On construit un nouveau système, $\mathcal{S}^*$, par dédoublement de chacun des composants appartenant à l'un des A_u , et conservation des autres. Si i est dédoublé, il donne naissance à deux nouveaux composants, notés i' et i'' , et donc

$$S^* = \{i; i \notin \cup_{u=1}^v A_u\} \cup \{i'; i' \notin \cup_{u=1}^v A_u\} \cup \{i''; i'' \notin \cup_{u=1}^v A_u\}$$

Pour expliciter la construction de $\mathcal{S}^*$ selon les termes de la définition 2, il nous faut indiquer comment, pour tout i dédoublé, i' et i'' se répartissent sur les éléments de recouvrement $\mathcal{C} = (C_j)_{1 \leq j \leq m}$, qui donnent naissance, dans le nouveau système, au recouvrement $\mathcal{C}^* = (C_j^*)_{1 \leq j \leq m}$, où, pour tout j , C_j^* est en bijection avec C_j . A cette fin, nous allons tout d'abord effectuer cette construction sur un exemple simple, avec $k = 3$, $n = 10$ et $v = 2$.

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ C_1 &= \{1, 2, 3\}, C_2 = \{2, 3, 4\} \\ C_3 &= \{3, 4, 5\}, C_4 = \{4, 5, 6\}, C_5 = \{5, 6, 7\} \\ C_6 &= \{6, 7, 8\}, C_7 = \{7, 8, 9\}, C_8 = \{8, 9, 10\} \end{aligned}$$

On impose $b = 5$ et on prend

$$B_0 = \{1, 2, 3, 4\}, B_1 = \{3, 4, 5, 6, 7\}, B_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

autrement dit, $b_0 = 4$, $b_1 = 5$, $b_2 = 5$,

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6, A_1 = \{3, 4\}, A_2 = \{6, 7\}.$$

Le système $\mathcal{S}^*$ obtenu par dédoublement de 3, 4, 6 et 7 vérifie :

$$S^* = \{1, 2, 3', 4', 3'', 4'', 5, 6', 7', 6'', 7'', 8, 9, 10\}$$

$$\begin{aligned}
C_1^* &= \{1, 2, 3'\}, C_2^* = \{2, 3', 4'\} \\
C_3^* &= \{3'', 4'', 5\}, C_4^* = \{4'', 5, 6'\} C_5^* = \{5, 6', 7'\} \\
C_6^* &= \{6'', 7'', 8\}, C_7^* = \{7'', 8, 9\}, C_8^* = \{8, 9, 10\}
\end{aligned}$$

Autrement dit, conformément à la définition 2, le dédoublement s'effectue selon la règle d'affectation suivante :

$$\begin{aligned}
3 &\in C_1 \cap C_2 \cap C_3, \text{ ce qui donne } 3' \in C_1^* \cap C_2^* \text{ et } 3'' \in C_3^* \\
4 &\in C_2 \cap C_3 \cap C_4, \text{ ce qui donne } 4' \in C_2^* \text{ et } 4'' \in C_3^* \cap C_4^* \\
6 &\in C_4 \cap C_5 \cap C_6, \text{ ce qui donne } 6' \in C_4^* \cap C_5^* \text{ et } 6'' \in C_6^* \\
7 &\in C_5 \cap C_6 \cap C_7, \text{ ce qui donne } 7' \in C_5^* \text{ et } 7'' \in C_6^* \cap C_7^*
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}^*$ n'est pas de type "k-consécutif-sur-n", mais il est décomposé en 3 systèmes disjoints, $\mathcal{S}_0^*$, $\mathcal{S}_1^*$ et $\mathcal{S}_2^*$ qui, eux, le sont, de supports respectifs $S_0^* = \{1, 2, 3', 4'\}$, $S_1^* = \{3'', 4'', 5, 6', 7'\}$, $S_2^* = \{6'', 7'', 8, 9, 10\}$.

La panne de $\mathcal{S}^*$ intervient si et seulement si sont en panne tous les éléments de l'une des parties C_j^* ; or

$$\begin{aligned}
C_1^* \text{ et } C_2^* &\text{ sont des intervalles de longueur 3 dans } S_0^* \\
C_3^*, C_4^* \text{ et } C_5^* &\text{ sont des intervalles de longueur 3 dans } S_1^* \\
C_6^* \text{ et } C_7^* &\text{ sont des intervalles de longueur 3 dans } S_2^*.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathcal{S}^*$ est le montage en série de 3 systèmes indépendants, chacun de type "3-consécutifs" (respectivement sur 4, 5 et 5 composants).

On remarque qu'il est essentiel que les intersections de A_1 et A_2 soient d'effectif au moins égal à 2 pour maximiser la longueur des bloc sous la contrainte $b = 5$. En effet, si par exemple on avait pris $B_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B_1 = \{4, 5, \dots\}$, autrement dit $A_1 = 4$, on aurait obtenu $S_0^* = \{1, 2, 3, 4'\}$ et $S_1^* = \{4'', 5, \dots\}$; les conditions de panne de $\mathcal{S}^*$ auraient dû prendre en compte la panne de tous les éléments de $C_3^* = \{3, 4', 5\}$ qui est à "cheval" sur S_0^* et S_1^* ; $\mathcal{S}^*$ n'aurait plus été décomposable en 3 sous systèmes $\mathcal{S}_0^*$, $\mathcal{S}_1^*$, $\mathcal{S}_2^*$ indépendants, pouvant être considérés séparément.

A la lumière de cet exemple, nous allons décrire la construction de $\mathcal{S}^*$ dans le cas général.

Soit $A_u = B_u \cap B_{u-1} = \{a_u, \dots, a_u + k - 2\}$; on dédouble chaque i de A_u ($a_u \leq i \leq a_u + k - 2$) en i' et i'' affectés aux C_j^* de la manière suivante :

$$a_u \in \bigcap_{j=a_u-k+1}^{a_u} C_j, \text{ d'où } a'_u \in \bigcap_{j=a_u-k+1}^{a_u-1} C_j^* \text{ et } a''_u \in C_{a_u}^*$$

$$\begin{aligned}
a_u + 1 &\in \bigcap_{j=a_u-k+2}^{a_u+1} C_j, \text{ d'où } (a_u + 1)' \in \bigcap_{j=a_u-k+2}^{a_u+1} C_j^* \text{ et } (a_u + 1)'' \in \bigcap_{j=a_u}^{a_u+1} C_j^* \\
&\dots \\
a_u + k - 2 &\in \bigcap_{j=a_u-1}^{a_u+k-2} C_j, \text{ d'où } (a_u + k - 2)' \in C_{a_u-1}^* \text{ et } (a_u + k - 2)'' \in \bigcap_{j=a_u}^{a_u+k-2} C_j^* \\
&\qquad\qquad\qquad i \\
&\text{(de manière générale, } i \text{ vérifiant } a_u \leq i \leq a_u + k - 1, \text{ appartient à } \bigcap_{j=i-k+2} C_j
\end{aligned}$$

$$\text{et se décompose en } i' \in \bigcap_{j=i-k+1}^{a_u-1} C_j^* \text{ et en } i'' \in \bigcap_{j=a_u}^i C_j^*$$

En procédant ainsi on fabrique bien un système $\mathcal{S}^*$ qui est le montage en série de $v + 1$ systèmes indépendants, $\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_2^*, \dots \mathcal{S}_v^*$, chacun de type k -consécutifs (respectivement sur $b_0, b_1, \dots, b_v$). Les probabilités de marche de ces systèmes étant notées $P(M_u^*)$ ($0 \leq u \leq v$), on a donc :

$$P(M^*) = \prod_{u=0}^v P(M_u^*)$$

Et on sait (d'après le théorème 2) que $P(M) \geq P(M^*)$

Pour la mise en œuvre de ce calcul d'un minorant de la fiabilité, le choix de b est crucial : plus b est grand, plus est petit le nombre de composants dédoublés, et donc meilleure doit être la borne inférieure ; en revanche, quand b augmente, la complexité du calcul aussi.

Pour apprécier l'influence de ce choix de b , nous allons préciser le calcul dans le cas où les composants ont la même probabilité de marche (soit p) et où les blocs sont régulièrement répartis, c'est à dire tous (sauf éventuellement le dernier) sont de longueur b et leurs plus petits éléments forment une suite arithmétique de premier élément égal à 1 et de raison $b - k + 1$; alors

$$a_u = 1 + u(b_k + 1) ;$$

le dernier élément de cette suite, a_v doit vérifier

$$a_v + k - 2 \leq n$$

Donc v est la partie entière de $\frac{n-k+1}{b-k+1}$.

Si on note $P_{k,n,p}$ la probabilité de fonctionnement du système k -consécutifs-sur- n où tous ses composants, indépendants, ont pour fiabilité p , on a alors :

$$P(M) \geq (P_{k,b,p})^v P_{k,n-v(b-k+1),p}$$

où $v = \lfloor \frac{n-k+1}{b-k+1} \rfloor$.

Si $\frac{n-k+1}{b-k+1}$ est entier, le facteur $P_{k,n-v(b-k+1),p}$ vaut 1 et donc :

$$P(M) \geq (P_{k,b,p})^v$$

où $v = \frac{n-k+1}{b-k+1}$

Si $\frac{n-k+1}{b-k+1}$ n'est pas entier, on peut encore obtenir un minorant de la fiabilité, un peu plus petit que la précédent, en remplaçant le dernier bloc de longueur strictement inférieure à b , par un bloc de longueur b , dont la fiabilité est nécessairement plus faible, autrement dit, en remplaçant la suite initiale de n composants par une suite un peu plus longue qui contient exactement $v + 1$ blocs, donc de longueur $k - 1 + (v + 1)(b - k + 1)$. On a alors :

$$P(M) \geq (P_{k,b,p})^{v+1}$$

Des exemples numériques sont donnés en annexe.

5.2 Cas bidimensionnel : dédoublement ou quadruplement sélectifs

Soit $\mathcal{S}$ un système bidimensionnel (k, k') -consécutifs-sur- (n, n') :

$$S = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n'\};$$

il est en panne si sont en panne tous les composants (i, i') appartenant à un sous-rectangle de S , de dimension k et k' . Autrement dit, c'est un système à recouvrement, les éléments de ce recouvrement étant les

$$S_{j,j'} = \{(j, \dots, j+k-1) \times (j', \dots, j'+k'-1)\}$$

où $1 \leq j \leq n-k+1$ et $1 \leq j' \leq n'-k'+1$.

Sa fiabilité est notée $P_{(k,k'),(n,n'),p}$.

Le but est de fournir des minorants de la fiabilité en utilisant le calcul de la fiabilité pour des systèmes (k, k') -consécutifs-sur- (m, m') où m et m' sont inférieurs à des bornes b et b' .

Par analogie avec le cas unidimensionnel, on recouvre S par des blocs rectangulaires $B_{u,u'}$ (où $0 \leq u \leq v$, $0 \leq u' \leq v'$) de la forme $\{a_u \dots, a_u + b_u - 1\} \times \{a_{u'} \dots, a_{u'} + b_{u'} - 1\}$ avec $b_u \leq b$ et $b_{u'} \leq b'$.

Pour tout rectangle de la forme $D \times D'$ où $D \subset \{1, \dots, n\}$ et $D' \subset \{1, \dots, n'\}$ on dira que D est sa base et D' sa hauteur et on impose que :

- deux blocs voisins horizontalement (c'est à dire $B_{u-1,u'}$ et $B_{u,u'}$) aient une intersection $A_{u,u'}$ dont la base a pour longueur $k - 1$
- deux blocs voisins verticalement ($B_{u,u'-1}$ et $B_{u,u'}$) aient une intersection $A'_{u,u'}$ dont la hauteur a pour longueur $k' - 1$

On fait en sorte ensuite que les A_u (où u' est fixé et u parcourant $\{1, \dots, v\}$) soient d'intersection vide et de même pour les A'_u (u est fixé et u' parcourant $\{1, \dots, v'\}$). On remarque qu'alors, si 4 blocs sont voisins par le "coin", c'est

à dire de la forme $B_{u-1,u'-1}, B_{u-1,v'}, B_{u,v'-1}, B_{u',v'}$, leur intersection est un rectangle dont la base est de longueur $k - 1$ et la hauteur est de longueur $k' - 1$

En revanche, si les deux blocs B_{u_1,u'_1} et B_{u_2,u'_2} sont tels que l'une au moins des inégalités $|u_1 - u_2| \geq 1$ ou $|u'_1 - u'_2| \geq 1$ soit satisfaite, leur intersection est vide.

Par analogie avec le cas unidimensionnel, on définit un nouveau système $\mathcal{S}^*$ en dédoublant les composants qui sont dans deux blocs voisins horizontalement (resp. verticalement) mais pas dans deux blocs qui sont voisins verticalement (resp. horizontalement) et en quadruplant les composants qui sont dans quatre blocs voisins par le coin.

$\mathcal{S}^*$ est l'union de vv' rectangles $B_{u,u'}^*$, disjoints, sur lesquels la loi de la variable aléatoire de fonctionnement est isomorphe à celle de la restriction $\mathcal{S}$ à $B_{u,u'}$; ces v.a. sont indépendantes et donc on a l'inégalité :

$$P(M) \geq \prod_{0 \leq u \leq v} \prod_{0 \leq u' \leq v'} P(M_{B_{u,u'}})$$

$P(M_{B_{u,u'}})$ se calcule dans un système bidimensionnel (k, k') -consécutifs-sur- $(b_u, b_{u'})$ où $b_u \leq b$ et $b_{u'} \leq b'$.

Comme dans le cas unidimensionnel, on peut considérer le cas de blocs régulièrement répartis. Alors, avec $v = \lfloor \frac{n-k+1}{b-k+1} \rfloor$ et $v' = \lfloor \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1} \rfloor$ on a :

$$P(M) \geq (P_{(k,k'),(b,b'),p})^{vv'} Q$$

où Q fait intervenir les blocs dont au moins l'un des deux indices est égal à v pour le premier et v' pour le second.

Détaillons Q :

- les blocs (où $B_{v,u'} \ u' \leq v'$) ont pour dimensions $n - v(b - k + 1)$ et b'
- les blocs (où $B_{u,v'} \ u \leq v$) ont pour dimensions b et $n' - v'(b' - k' + 1)$
- le bloc $B_{v,v'}$ a pour dimensions $n - v(b - k + 1)$ et $n' - v'(b' - k' + 1)$

Donc :

$$Q = \left[P_{(k,k'),(n-v(b-k+1),b'),p} \right]^{v'} \left[P_{(k,k'),(b,n'-v'(b'-k'+1)),p} \right]^v$$

$$P_{(k,k'),(n-v(b-k+1),n'-v'(b'-k'+1)),p}$$

Comme pour le cas unidimensionnel, ce minorant vaut $(P_{(k,k'),(b,b'),p})^{vv'}$

si $\frac{n-k+1}{b-k+1}$ et $\frac{n'-k'+1}{b'-k'+1}$ sont entiers ; sinon, on obtient un minorant un peu plus faible :

$$P(M) \geq (P_{(k,k'),(b,b'),p})^{ww'}$$

$$\text{où } w = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n-k+1}{b-k+1} \right\rfloor & \text{si } \frac{n-k+1}{b-k+1} \text{ est entier} \\ \left\lfloor \frac{n-k+1}{b-k+1} \right\rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } w' = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1} \right\rfloor & \text{si } \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1} \text{ est entier} \\ \left\lfloor \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1} \right\rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.3 Cas tridimensionnel

Soit $\mathcal{S}$ un système tridimensionnel (k, k', k'') -consécutifs-sur- (n, n', n'') : $\mathcal{S} = \{j, \dots, n\} \times \{j', \dots, n'\} \times \{j'', \dots, n''\}$; il est en panne si sont en panne tous les composants appartenant à une partie de la forme :

$$S_{j,j',j''} = \{j, \dots, j+k-1\} \times \{j', \dots, j'+k'-1\} \times \{j'', \dots, j''+k''-1\}$$

où $1 \leq j \leq j-k+1, 1 \leq j' \leq j'-k'+1, 1 \leq j'' \leq j''-k''+1$.

La technique utilisée dans les cas uni et bidimensionnel se généralise en utilisant des blocs de la forme :

$\{a_u, \dots, a_u + b_u - 1\} \times \{a'_u, \dots, a'_u + b'_u - 1\} \times \{a''_u, \dots, a''_u + b''_u - 1\}$ où $0 \leq u \leq v$, $0 \leq u' \leq v'$, $0 \leq u'' \leq v''$, $b_u \leq b$, $b'_u \leq b'$, $b''_u \leq b''$

Nous écrivons ici le résultat dans le cas des blocs régulièrement répartis.

Alors $v = \left\lfloor \frac{n-k+1}{b-k+1} \right\rfloor$, $v' = \left\lfloor \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1} \right\rfloor$, $v'' = \left\lfloor \frac{n''-k''+1}{b''-k''+1} \right\rfloor$

et le minorant s'écrit comme le produit de 8 facteurs. Pour simplifier les notations, on omet les indices (k, k', k'') et p qui se retrouvent dans chacun de ces facteurs ; ce minorant est le produit de huit facteurs que voici :

$$\begin{aligned} & (P_{b,b',b''})^{vv'v''} (P_{n-v(b-k+1),b',b''})^{v'v''} \\ & (P_{b,n'-v'(b'-k'+1),b''})^{vv''} (P_{b,b'',n''-v''(b''-k''+1)})^{vv'} \\ & (P_{n-v(b-k+1),n'-v'(b'-k'+1),b''})^{v''} (P_{n-v(b-k+1),b',n''-v''(b''-k''+1)})^{v'} \\ & (P_{b,n'-v'(b'-k'+1),n''-v''(b''-k''+1)})^v P_{n-v-(b-k+1),n'-v'(b'-k'+1),n''-v''(b''-k''+1)} \end{aligned}$$

Comme dans le cas unidimensionnel et bidimensionnel, on peut adopter une borne inférieure qui est un peu faible (sauf si $\frac{n-k+1}{b-k+1}$, $\frac{n'-k'+1}{b'-k'+1}$, $\frac{n''-k''+1}{b''-k''+1}$ sont entiers) et on aura :

$$P(M) \geq (P_{b,b',b''})^{ww'w''} \text{ où } w \text{ (resp. } w', w'') \text{ vaut } \left\lfloor \frac{n-k+1}{b-k+1} \right\rfloor \text{ (resp. } \left\lfloor \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n''-k''+1}{b''-k''+1} \right\rfloor) \text{ si } \frac{n-k+1}{b-k+1} \text{ (resp. } \frac{n'-k'+1}{b'-k'+1}, \frac{n''-k''+1}{b''-k''+1}) \text{ est entier ou cette partie entière augmentée de 1 sinon.}$$

5.4 Dimension quelconque

On se contentera ici d'écrire la borne inférieure simplifiée, avec des notations évidentes :

$$(P_{b_1, \dots, b_p})^{v_1 \dots v_p}$$

où, pour tout q ($1 \leq q \leq p$), $v_q = \left\lfloor \frac{n_q - k_q + 1}{b_q - k_q + 1} \right\rfloor$ si $\frac{n_q - k_q + 1}{b_q - k_q + 1}$ est entier, ou cette partie entière augmentée de 1 sinon.

ANNEXE. Calculs pour des systèmes unidimensionnels k -consécutifs-sur- n , à composants i.i.d

Le cas des systèmes unidimensionnels k -consécutifs-sur- n , à composants indépendants et tous de même probabilité de marche p , fournit un moyen de contrôle (*benchmark*) pour la qualité des minorants de la fiabilité proposés dans cet article. En effet, si on note $P_{k,n,p}$ cette probabilité, elle est accessible aisément par une formule de récurrence sur n , portant sur la probabilité de panne $Q_{k,n,p} = 1 - P_{k,n,p}$:

- si $n < k$ $Q_{k,n,p} = 0$,
- si $n = k$ $Q_{k,n,p} = (1 - p)^k$,
- si $n > k$ $Q_{k,n,p} = (1 - p)^k + p[\sum_{i=1}^k (1 - p)^{i-1} Q_{k,n-i,p}]$.

Cette formule est élémentaire et s'obtient par décomposition de l'événement "le système est en panne" selon la place du premier élément qui est en marche :

- si les k premiers éléments sont en panne (événement de probabilité $(1 - p)^k$), le système est en panne (dans ce cas le premier élément en marche soit n'existe pas, soit occupe une place strictement supérieure k),
- si la place du premier élément en marche est i , avec $1 \leq i \leq k$ (événement de probabilité $p(1 - p)^{i-1}$), le système est en panne si et seulement si le sous-système forme des composants au delà strictement de i est en panne (événement de probabilité $Q_{k,n-i,p}$, indépendant du précédent).

Si on pose alors, k et p étant fixés, $Q_{k,n,p} = (1 - p)^k u_n$, la suite des u_n vérifie la relation de récurrence :

- $u_1 = \dots = u_{k-1} = 0$,
- $u_k = 1$,
- pour $n > k$, $u_n = 1 + p[\sum_{i=1}^k (1 - p)^{i-1} u_{n-i}]$.

Les tableaux qui suivent (chacun relatif à un couple (k, p)) donnent, par des applications de cette formule de récurrence, et pour différentes valeurs de n , les valeurs de $P_{k,n,p}$ (ou $Q_{k,n,p}$) et de ses minorants (ou majorants) associés à différents choix de longueurs de blocs, b , selon la méthode de calcul par dédoublements sélectifs selon des blocs homogènes $(k - 1)$ -enchaînés présentée ci-dessus en sous-section 5.1.

On ne considérera évidemment que des valeurs de p correspondant à des composants de bonne fiabilité ($p = 0,9$, $p = 0,99$).

On remarque que choisir $b = n$ revient à faire le calcul de la valeur exacte de $P_{k,n,p}$ (qu'on retrouve donc en diagonale dans les tableaux) et que choisir $b = 1$ revient à fournir le minorant $(1 - (1 - p)^k)^{n-k+1}$ qui est celui proposé dans l'article de Yi-Chih Hsieh et Ta-Cheng Chen. Dans le cas général, si la division euclidienne de n par $b - k + 1$ est $n = a(b - k + 1) + c$, on place, dans $\{1, \dots, n\}$, a blocs de taille b plus, si $c > 0$, un bloc plus court, de taille c , tous $(k - 1)$ -enchaînés ; donc le calcul de ce minorant est : $(1 - (1 - p)^{k u_b})^a (1 - (1 - p)^{k u_c})$.

1. $k = 3, p = 0,9$ (les blocs sont 2-enchaînés)

On donne tout d'abord, pour certains couples (n, b) avec $b < n$, les valeurs des couples d'entiers $(a ; c)$ définis ci-dessus

	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$b = 10$		6 ; 2	12 ; 4	62 ; 4	124 ; 8
$b = 50$			2 ; 4	10 ; 20	20 ; 40
$b = 100$				5 ; 10	10 ; 20
$b = 500$					2 ; 4
$b = 1000$					

Voici maintenant 2 tableaux de valeurs de minorants (et de valeurs exactes pour $b = n$), pour $p = 0,9$ et $p = 0,99$:

minorants de $P_{3,n,p}$ ($p = 0,9$)	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$b = 1$	0,992028	0,953111	0,906660	0,607593	0,366843
$b = 10$	0,992709	0,957046	0,914197	0,634085	0,401382
$b = 50$		0,957497	0,915059	0,637202	0,405333
$b = 100$			0,915235	0,637507	0,405720
$b = 500$				0,637811	0,406030
$b = 1000$					0,406107

minorants de $P_{3,n,p}$ ($p = 0,99$)	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$b = 1$	0,9999920	0,9999520	0,9999020	0,9995021	0,9990025
$b = 10$	0,9999921	0,9999524	0,9999029	0,9995065	0,9990092
$b = 50$		0,9999525	0,9999030	0,9995070	0,9998124
$b = 100$			0,9999930	0,9995070	0,9990124
$b = 500$				0,9995071	0,9990124
$b = 1000$					0,9990125

On constate bien que, dans chaque colonne, les valeurs de ces minorants augmentent avec b (leur qualité s'accroît).

Exemple de calcul de minorant, pour $p = 0,9$, $n = 500$, $b = 50$

Alors $500 = 10 \times 48 + 20$, donc $a = 10$ et $c = 20$: il y a 10 blocs "complets" de 50 éléments, 2-enchaînés, plus un reliquat de 20 éléments ($\{481, \dots, 500\}$) ; un programme de calcul de la suite (u_n) fournit les valeurs :

$u_{50} = 42,502519$ et $u_{20} = 16,213854$;

le minorant vaut :

$$(1 - (0,1)^3 u_{50})^{10} (1 - (0,1)^3 u_{20}) = (0,957497)^{10} \times 0,983786 = 0,637202$$

2. $k = 11$ (les blocs sont 10-enchaînés)

On donne tout d'abord, pour certains couples (n, b) avec $b < n$, les valeurs des couples d'entiers $(a ; c)$.

	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$b = 50$		2 ; 20	12 ; 20	24 ; 40
$b = 100$			5 ; 50	11 ; 10
$b = 500$				2 ; 20
$b = 1000$				

Nous présentons des résultats pour $p = 0,9$ et $p = 0,99$, vu l'excellente qualité de la fiabilité (en effet, pour toute suite de 11 composants, la probabilité qu'ils soient tous défaillants est 10^{-11}), nous fournissons

plutôt les valeurs de majorants de la probabilité de défaillance du système $Q_{11,n,p} = 1 - P_{11,n,p}$ (ou valeurs exactes de cette probabilité si $b = n$).

majorants de $Q_{11,n,p}$ ($p = 0,9$)	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$b = 1$	$10^{-11} \times 40$	$10^{-8} \times 0,9000$	$10^{-8} \times 0,4900$	$10^{-8} \times 0,9900$
$b = 50$	$10^{-11} \times 36$	$10^{-8} \times 0,8130$	$10^{-8} \times 0,4423$	$10^{-8} \times 0,8935$
$b = 100$		$10^{-8} \times 0,8109$	$10^{-8} \times 0,4416$	$10^{-8} \times 0,8921$
$b = 500$			$10^{-8} \times 0,4411$	$10^{-8} \times 0,8913$
$b = 1000$				$10^{-8} \times 0,8911$

majorants de $Q_{11,n,p}$ ($p = 0,09$)	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$b = 1$	$10^{-21} \times 4,00$	$10^{-22} \times 90,00$	$10^{-22} \times 490,00$	$10^{-22} \times 990,00$
$b = 50$	$10^{-21} \times 0,27$	$10^{-22} \times 7,27$	$10^{-22} \times 34,57$	$10^{-22} \times 68,14$
$b = 100$		$10^{-22} \times 2,82$	$10^{-22} \times 16,83$	$10^{-22} \times 31,02$
$b = 500$			$10^{-22} \times 2,82$	$10^{-22} \times 7,45$
$b = 1000$				$10^{-22} \times 2,82$

Exemple de calcul de minorant de la fiabilité : cas $p = 0,9$, $n = 500$, $b = 50$.

Alors $500 = 12 \times 40 + 20$, donc $a = 12$ et $c = 20$: il y a 12 blocs "complets" de 50 éléments, 10-enchaînés, plus un reliquat de 20 éléments ; un programme de calcul de la suite (u_n) fournit les valeurs :

$u_{50} = 36,10$ et $u_{20} = 9,10$;

le minorant vaut, avec une précision de 10^{-11} :

$$\begin{aligned}
(1 - (0,1)^{11}u_{50})^{12}(1 - (0,1)^{11}u_{20}) &= (1 - 10^{-11} \times 36,10)^{12}(1 - 10^{-11} \times 9,10) \\
&\simeq (1 - 10^{-11} \times 12 \times 36,10)(1 - 10^{-11} \times 9,10) \\
&\simeq 1 - 10^{-11} \times (9,10 + 12 \times 36,10) \\
&\simeq 1 - 10^{-8} \times 0,442.
\end{aligned}$$

Or $u_{500} = 441,10$; donc la valeur exacte de la fiabilité est :

$$(1 - (0,1)^{11}u_{500}) = 1 - 10^{-8} \times 0,441.$$

Références

- [1] AKIBA T. and YAMAMOTO H.(2003) Upper and mower bounds for 3-dimensional k-within-consecutive-(r1r2,r3)-out-of-(n1n2,n3) :F system, *Advanced reliability Modeling (T. Dohi and WY Yun (eds))*, World Scientific, Singapore, 9-16.
- [2] BOUSHABA M. et All (2004) A 3-dimensional consecutive-k-out-n : F models, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 9.2, pp 193-198.
- [3] BOLLINGER R.C, SALVIA A.A (1982) Consecutive k-out-of-n : F networks, *IEEE Trans. Reliab.*, R31, pp 53-56.
- [4] CHAO M.T., FU J.C., KOUTRAS M.V.(1995) Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F & related systems, *IEEE Trans. Reliab.*, vol 40, pp 120-127.
- [5] CHIANG D., NIU S.C. (1990) Reliability of consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE. Trans. Reliab.*, R-30 pp 87-89.
- [6] DERMAN C., LIEBERMAN G.J., ROSS S.M.(1982) On the consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE. Trans. Reliab.*, R-31 pp 57-63.
- [7] FU J.C. (1987) On reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system with (k-1)-step Markov dependence, *IEEE. Trans. Reliab.*, R-36 pp 75-77.
- [8] GRIFFTH W.S. (1986) On consecutive-k-out-of-n failure systems and their generalizations, *Reliability and Quality Control*, pp 157-165, .
- [9] KOUTRAS M.V. (1996) On a Markov chain approch for study of reliability structures, *J.Appl. Prob.*, vol. 33, pp 357-367.
- [10] KOUTRAS M.V., PAPADOPOULOS G.K.(1993), PAPSTRAVRIDIS S.G. Reliability of 2-Dimensional consecutive-k-out-of-n :Systems, *IEEE Trans.Reliability*, vol. 42, N .4, pp.658-661.
- [11] PAPSTRAVRIDIS S.G. (1987) A limit theorem for the reliability of a consecutive-k-out-of-n :F system, *Adv.Appl. Probab.*, vol. 19, 746-748.
- [12] SALVIA A.A, LASHER W.C (1990) 2-dimensional consecutive-k-out-of-n : F models, *IEEE. Trans. Reliab.*, vol. 39, pp 382-395.

- [13] XIA, A. (1999) A probabilistic proof of the stein's factor, *J. Appl. Prob.*, vol., 36, pp 287-290.
- [14] YI-CHIH HSIEH, TA-CHENG CHEN (2004) Reliability lower bounds for two dimensional consecutive- k -out-of- n : F systems, *Computers & Operations Research*, vol.31, pp 1259-1272.
- [15] ZUO M.J., LIN D., WU Y. (2000) Reliability evaluation of combined k -out-of- n : F, consecutive- k -out-of- n : F and linear connected- (r,s) -out-of- (m,n) : F system structures, *IEEE. Trans. Reliab.*, R-49 pp 99-104.