



HAL
open science

Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan

Frederic Brechenmacher

► **To cite this version:**

Frederic Brechenmacher. Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan. Images des Mathématiques, 2012. hal-00700467

HAL Id: hal-00700467

<https://hal.science/hal-00700467>

Submitted on 23 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan

Frédéric Brechenmacher*

*Université d'Artois,
Laboratoire de mathématiques de Lens (EA 2462)
rue Jean Souvraz S.P. 18, F- 62300 Lens France*



Camille Jordan (1838-1922), sous le pinceau de son oncle,
le peintre Puvis de Chavanne.

*Electronic address : frederic.brechenmacher@euler.univ-artois.fr

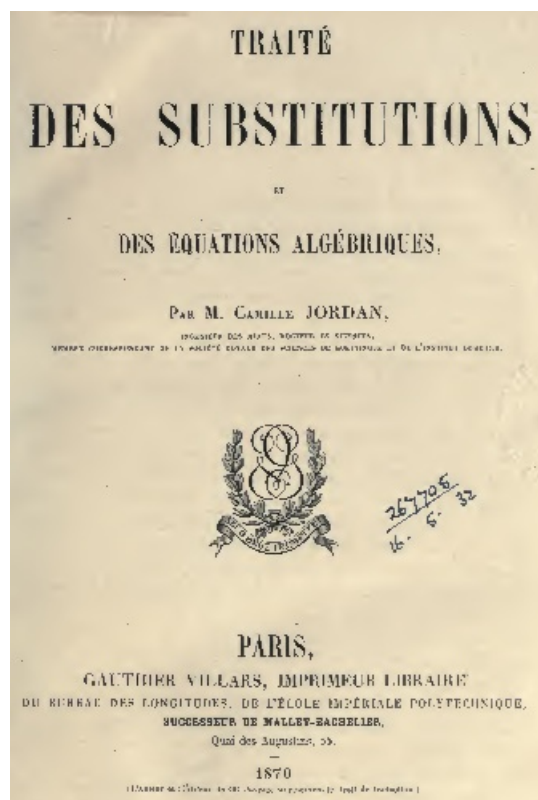
Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche : projet CaaFÉ (ANR-10-JCJC 0101)

Table des matières

1	Un "grand algébriste" en relation directe avec les "idées de Galois"	8
2	Un portrait kaléidoscopique du <i>Traité</i> dans les textes mathématiques entre 1870 et 1914	12
3	Le premier théorème de Jordan : l'origine du groupe linéaire	13
3.1	Le problème du nombre des valeurs d'une fonction	13
3.2	Une approche générale par des réductions successives	14
3.3	La représentation analytique des substitutions	15
3.4	Le premier théorème de Jordan	16
3.5	Retour sur la relation Jordan-Galois	17
4	L'"essence" du <i>Traité</i> des substitutions et des équations algébriques	19
4.1	Livre I. Des congruences	19
4.2	Livre II. Des substitutions	20
4.3	Livre III. Des irrationnelles	21
4.4	Livre IV. De la résolution par radicaux	22
5	La théorie de l'ordre	23
6	Conclusion	29
A	Annexe 1	
	Réceptions des travaux de Jordan	
	entre 1870 et 1914	31
A.1	Une synthèse sur la théorie des substitutions	31
A.2	Les équations spéciales des fonctions elliptiques et abéliennes . .	32
A.3	Les solides réguliers	33
A.4	Groupes linéaires et champs de Galois	34
A.5	Représentations simplifiées des répartitions des types de références à Jordan	35
B	Annexe 2.	
	Nombre des valeurs d'une fonction	
	et résolution algébrique des équations	37
B.1	L'équation quadratique	37

B.2	L'équation de troisième degré	38
B.3	En général	39
C	Annexe 3.	
	La représentation analytique des substitutions	40
C.1	Représentation et indexation	40
C.2	Le critère de résolubilité de Galois	44
C.3	Le Fragment de second mémoire	45
C.4	Les imaginaires de Galois	47
C.5	Principes généraux et applications	48
C.6	La représentation analytique des substitutions et les réceptions des travaux de Galois	49
D	Annexe 4.	
	Sur le livre III Des irrationnelles	
	du <i>Traité</i> de Jordan	51
	Références	54

Un premier visage de Camille Jordan se dessine ci-dessus à l'âge de 17 ans auquel notre héros intègre l'École polytechnique (1855). Cet article est principalement consacré à la première décennie de travaux de ce mathématicien, c'est-à-dire à la période séparant la soutenance en 1860 par Jordan de sa première thèse d'algèbre et la parution en 1870 du célèbre *Traité des substitutions et des équations algébriques*, second héros de cet article.



Comme nous allons le voir, le visage du jeune Jordan nous présente différentes facettes qu'il nous faudra scruter avec attention afin de restituer l'originalité des approches développées par le mathématicien dans son *Traité*.

D'un point de vue institutionnel, Jordan poursuit une carrière classique de savant du XIX^e siècle : issu de la bourgeoisie lyonnaise, il intègre l'École polytechnique puis débute ses travaux mathématiques en parallèle de ses fonctions d'ingénieurs des mines.¹

1. Pour une notice biographique sur Jordan, voir notamment : LEBESGUE (Henri), Notices

A partir de la fin des années 1870, Jordan se voit confié les principales clés des institutions mathématiques en France : nommé Professeur d'Analyse à l'École polytechnique en 1876, élu à l'Académie des sciences en 1881, puis nommé Professeur au Collège de France en 1883.

Jordan est également célèbre pour son *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* dont le premier volume paraît en 1882.²



Archives de l'École polytechnique.

On peut l'apercevoir ci-dessus, croqué dans la force de l'âge par un élève de l'École polytechnique : traçant à la craie des successions d'intégrales ; caricaturé reproduisant une faute d'impression de son Cours d'Analyse : "je crois que j'ai fait une petite faute de calcul" ; prenant le temps de la réflexion en vidant un verre d'eau sucrée : "nous allons faire un petit changement de variable" ; déambulant sur l'estrade ; puis, chiffon à la main : "nous reprendrons

d'histoire des mathématiques. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan, *L'enseignement mathématique* (1923), p. 40-49.

2. Voir à ce sujet GISPERT (Hélène), *Camille Jordan et les fondements de l'analyse : Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son cours d'analyse de l'École polytechnique*, Thèse de doctorat, Orsay : 1982.

cette question la prochaine fois”. Jordan était visiblement apprécié des élèves polytechniciens qui ont baptisé de son nom le verre d'eau sucrée du professeur.

Jordan. — On désigne par ce mot le *verre d'eau sucrée* du professeur à l'amphithéâtre. Quelques professeurs et en particulier M. Jordan, ont l'habitude de le remplir et de le vider à plusieurs reprises pendant la leçon. M. Jordan, membre de l'Académie des sciences et professeur d'analyse, aborde dans son cours les questions de mathématiques transcendantes les plus ardues. Il fait au tableau une effrayante consommation de lettres et d'exposants; on ne manque pas de le faire remarquer le jour de la séance des *Ombres* et quand sa silhouette paraît, voici la leçon qu'on lui met dans la bouche :



— Nous avons vu dans la dernière leçon que j'avais beaucoup intégré. Reprenons plus clairement. Voyons!... Considérons deux chemins particuliers quelconques... représentés par les fonctions... comment les appellerons-nous? Il y en a plusieurs de ces fonctions, il y en a une infinité. Nous connaissons leurs intégrales $g_1 q; g_2 q$.. d'abord combien ai-je de q ?... Si vous voulez, nous allons changer de varia-



ble... Posons $Flye$, je veux dire φ , égal à zéro. On voit tout de suite que ma constante est nulle... Alors il ne reste plus qu'à différentier... et ensuite nous intégrerons... Vous le voyez, c'est le moyen d'analyse le plus puissant...

Et tout l'amphithéâtre éclate en applaudissements, car M. Jordan est un sympathique. Ses camarades, ses collègues reconnaissent qu'il est aussi savant que modeste et qu'il a consacré sa vie à la science de la manière la plus désintéressée. A l'École, pendant qu'il était élève, il s'occupait surtout de littérature et de grec; ces travaux *gigonnaires* ne nuisirent pas d'ailleurs à son classement puisqu'il sortit *second major*.



Testard, É. (ed). *L'Argot de L'X*,
Paris : Albert-Lévy et G. Pinet, 1894, p. 178.

De 1885 à sa mort en 1922, Jordan était également directeur du *Journal de*

mathématiques pures et appliquées, l'un des principaux journaux de recherche mathématique de l'époque.³

A première vue, notre héros semble donc parfaitement en prise avec l'organisation institutionnelle des sciences mathématiques de son temps. Pourtant, Jordan a souvent été considéré comme "travaillant dans une solitude presque totale", [16] isolé sur la scène mathématique française et même "presque allemand".⁴

Brosser un portrait de Camille Jordan pose donc le problème de la restitution des dimensions collectives dans lesquelles saisir la création mathématique individuelle. Jordan était-il réellement isolé? Dans le cas contraire, dans quels cadres collectifs ses travaux se situaient-ils?

Afin d'aborder ce problème, il est nécessaire d'étudier à la fois les espaces sociaux dans lesquels se situent les mathématiques et les organisations collectives des savoirs en théories ou disciplines. Comme nous allons le voir, la présentation de Jordan comme savant isolé participe d'un portrait qui a souvent forcé le trait sur le développement de la "théorie des groupes", de la "théorie de Galois" et plus généralement de l'"algèbre". Or aucune de ces catégories n'est stable historiquement; il faut donc en restituer les significations variées dans différents temps et espaces.

Nous allons envisager ces questions en prenant à la fois pour héros un mathématicien, Jordan, et un texte mathématique, le *Traité des substitutions*⁵ et des équations algébriques.

Ce texte a été conçu afin de permettre différents niveaux de lectures : des compléments mathématiques peuvent être obtenus en cliquant sur les termes colorés en **bleu**, des citations peuvent être déroulées en cliquant sur les termes colorés en **rouge**, enfin des compléments historiques sont proposés dans quatre annexes accessibles par des liens hypertextes.

3. Voir BRECHENMACHER (Frédéric), Le "journal de M. Liouville" sous la direction de Camille Jordan (1885-1922), *Bulletin de la Sabix*, 45 (2009), p. 65-71.

4. KLEIN (Felix), [1921-1923] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Springer : Berlin, 1921, vol. 1, p. 51

5. Une substitution est ce que nous désignerions aujourd'hui comme une permutation d'un nombre fini de lettres (a, b, c, d, \dots). En des termes qui nous sont contemporains, la théorie des substitutions correspond donc à la théorie des groupes finis.

1 Un "grand algébriste" en relation directe avec les "idées de Galois"

Un premier portrait du jeune Camille Jordan s'esquisse en clair obscur, dans l'ombre de la grande figure d'un autre jeune mathématicien : Évariste Galois. Les nombreuses nécrologies publiées après le décès de Jordan en 1922 insistent en effet toutes sur la relation entre le *Traité* et les travaux de Galois.⁶ Ainsi, Émile Picard déclarait-il à l'Académie des sciences le 23 janvier 1922 :

C'est surtout dans la théorie des substitutions et des équations algébriques que Jordan laisse une trace profonde. Dans un Ouvrage considérable sur les *Substitutions*, il a fait une étude approfondie des idées de Galois [...]. Ces études ont permis à Jordan de résoudre un problème posé par Abel, celui de rechercher les équations de degré donné résolubles par radicaux et de reconnaître si une équation rentre ou non dans cette classe.⁷

Plus généralement, les travaux de Jordan ont souvent été placés dans le cadre d'une évolution de l'algèbre envisagée comme passant d'une théorie des équations à une discipline centrée sur des structures abstraites comme les groupes. Successeur de Jordan au Collège de France, Henri Lebesgue a publié une *biographie* de notre héros qui mettait elle aussi en avant la relation Jordan-Galois :

Dans ses recherches, Jordan utilise la géniale méthode de Galois, dont le point essentiel est l'introduction d'un certain nombre de substitutions, déjà aperçu par Lagrange, que l'on peut attacher à chaque équation algébrique et dans lequel les propriétés des équations se reflètent fidèlement. Mais pour savoir observer dans ce miroir, il faut avoir appris à distinguer les diverses qualités des groupes de substitutions et à raisonner sur elles. C'est ce qu'a fait Jordan avec une habile ténacité et un rare bonheur ; dans son *Traité des Substitutions et des Équations algébriques*, où il a réuni et coordonné ses recherches, les propriétés des équations dérivent tout de suite de celles des groupes de substitutions. [...] Le théorème de Jordan sur la composition des groupes est le plus connu de tous ses résultats ;

6. Pour un panorama général sur la relation Jordan-Galois voir : BRECHENMACHER (Frédéric), Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan), *Revue d'histoire des mathématiques*, t. 17, fasc. 2, p. 271-369.

7. PICARD (Émile), Résumé des travaux mathématiques de Jordan, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 174 (1922), p. 210-211.

il entraîne cette conséquence fondamentale : il n'y a pas lieu de choisir entre les différents procédés de résolution algébrique d'une équations : ils sont tous équivalents et conduisent aux mêmes calculs à l'ordre près.⁸

Mais cette relation directe entre les idées de Galois et le *Traité* de Jordan amène une tension entre les dimensions individuelles et collectives des travaux de ce dernier. D'une part, Jordan a été célébré comme l'un des principaux fondateurs de la théorie des groupes, c'est à dire d'une théorie qui allait jouer un rôle majeur et structurant pour les organisations collectives des mathématiques au XX^e siècle. Dans le cadre de l'édition des œuvres de Jordan en 1961, Jean Dieudonné présentait ainsi notre héros comme un second père de la théorie des groupes : après Galois, le géniteur, Jordan serait le guide qui fait gagner l'âge adulte :

La théorie des groupes finis a été le sujet de prédilection de Jordan [...]. Son œuvre dans ce domaine est immense par le volume comme par l'importance, et son influence sur les développements ultérieurs de la théorie ne peut guère se comparer qu'à celle des travaux de Galois lui-même. [...] Au moment où Jordan commence à écrire, la théorie des groupes est encore dans l'enfance, et en fait ce n'est guère qu'avec la publication de son traité qu'elle accèdera au rang de discipline autonome.[16]

Mais d'autre part, et pour la même raison, Jordan a été présenté comme isolé et incompris en son temps. Ainsi, dans la préface du premier tome des Œuvres de Jordan, Gaston Julia estimait-il que :

Longtemps, Jordan a travaillé dans une solitude presque totale. Rares étaient ceux qui pouvaient apprécier la valeur de son œuvre. Aujourd'hui ses travaux sont plus actuels que lorsqu'ils ont été écrits, on les voit dans leur vraie lumière avec leur véritable portée. Dans cette lumière, Jordan nous apparaît, avec Galois et Sophus Lie, comme un des trois grands créateurs de la théorie générale des groupes. Cette reconnaissance de la valeur de ses méthodes et de ses résultats l'aurait certes réjoui, mais probablement pas surpris, car s'il était très modeste, il savait à coup sûr que son œuvre était solide et qu'elle porterait ses fruits dans l'avenir.[16]

8. DIEUDONNÉ (Jean), Notes sur les travaux de Camille Jordan relatifs à l'algèbre linéaire et multilinéaire et la théorie des nombres, [16, p.V-XX].

Les commentaires sur le *Traité* présentent souvent une tension analogue entre l'individuel et le collectif. Cet ouvrage était ainsi présenté par le mathématicien américain James Pierpont à la fois comme une "synthèse unifiant les résultats des prédécesseurs de Jordan" et comme "contenant une somme immense de nouveaux résultats".⁹ Pour Bartel van der Waerden, la clef de voûte de cet alliage entre synthèse de travaux collectifs et création individuelle tiendrait à la structure même de l'ouvrage, présentée comme un "chef d'œuvre d'architecture mathématique, un édifice d'une beauté admirable".¹⁰ Les commentateurs ne nous renseignent cependant guère sur cette structure. Au contraire, Félix Klein, qui se trouvait avec Sophus Lie à Paris au moment de la parution du *Traité*, employait une métaphore biblique en comparant le *Traité* à un "livre des sept sceaux".¹¹

L'inscription exclusive du *Traité* dans l'émergence de la théorie de Galois et de la théorie des groupes donne donc une aura mystérieuse aux dimensions collectives des travaux de Jordan. Nous allons tenter dans cet article de dissiper ce mystère en analysant la structure du *Traité*.

Il faut tout d'abord être attentif à la dimension publique des commentaires sur la relation Jordan-Galois. De fait, ce n'est qu'au tournant des XIX^e et XX^e siècles que de telles appréciations apparaissent, c'est à dire à l'époque où la figure de Galois a été érigée en icône mathématique comme l'a étudié Caroline Ehrhardt.¹² C'était en particulier à l'occasion du centenaire de l'École normale supérieure et de la réédition des Œuvres de Galois que Sophus Lie et Émile Picard avaient attribué à Jordan un rôle majeur pour la mise en lumière des idées de Galois.¹³

Un article disponible sur ce site (lien) précise le rôle historique attribué à Jordan en regard des rôles d'autorités endossés par des mathématiciens comme Picard.¹⁴ Ces discours impliquent souvent des hiérarchisations entre praticiens des

9. PIERPONT (James), The History of Mathematics in the Nineteenth Century, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 11, n° 2, 1904, p. 136-159.

10. WAERDEN (Bartel, van der), *A history of Algebra : from Al-Khwàrizmi to Emmy Noether*, New York, Springer Verlag, 1985

11. KLEIN (Felix), *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Springer : Berlin, 1921.

12. EHRHARDT (Caroline), *Evariste Galois. La fabrication d'une icône des mathématiques*, Paris, Éditions de l'EHESS, 2011.

13. LIE (Sophus), Influence de Galois sur le développement des mathématiques, in DUPUY (Paul) (ed.), *Le Centenaire de l'École Normale 1795-1895*, Paris, Hachette, 1895.

GALOIS (Évariste), *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France, avec une introduction par M. Émile Picard*, Paris : Gauthier-Villars, 1897.

14. Pour une discussion plus détaillée de ces questions, voir : BRECHENMACHER (Frédéric), "Galois Got his Gun," prépublication.

mathématiques, notamment entre chercheurs et enseignants ou enseignants et ingénieurs. Les principales catégories mobilisées ("algèbre", "analyse", "théorie des équations", "théorie des groupes", "France", "Allemagne") sont ainsi loin d'être neutres. Elles participent au contraire de l'établissement de frontières entre mathématiques pures et appliquées, entre mathématiques élémentaires et supérieures, entre point de vue unificateur et réducteur, etc. Aux alentours de la Première Guerre mondiale, ces lignes épousent souvent celles des frontières nationales. Galois était alors souvent présenté comme un symbole de l'universalité de la "pensée française". Un tel entrelacement de valeurs mathématiques et patriotiques se manifeste particulièrement dans la nécrologie de Jordan écrite par Robert d'Adhémar en 1922 :

Jordan s'applique, dès 1860, à l'Algèbre de l'ordre, l'Algèbre des idées, bien plus haute que l'Algèbre des calculs, et, tout naturellement, il continue l'œuvre de cet enfant génial et décevant, Galois, qui, blessé dans un duel ridicule, mourut en 1832, âgé de 21 ans. En 10 ans, Jordan construit ce qu'on appelle les Groupes des équations résolubles par radicaux et classe les équations non résolubles, distinguant celles qu'on peut ramener à des équations auxiliaires. Ses découvertes ont été publiées en 1870, dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, qui marque, après Abel et Galois, un progrès immense de l'Algèbre. [...] Chaque fois qu'il manie un être mathématique, Jordan met sur lui sa griffe puissant et austère. Là où il a été, la tranchée a été nettoyée! ¹⁵

Envisagée sur le temps long du XX^e siècle, la structure des histoires présentées par de tels discours manifeste une certaine stabilité. Toutes présentent en effet la relation exclusive de Jordan aux idées de Galois comme donnant aux idées de ce dernier une dimension collective. Jordan était ainsi célébré pour avoir fait passer les travaux de Galois de l'état d'"idées" à une dimension "publique", rendant ces travaux disponibles "au monde entier".¹⁶ La nature même de ces dimensions collectives change néanmoins radicalement entre les années 1900-1930 et 1930-1960, en passant de l'"analyse française" à l'"algèbre allemande" (lien vers l'autre article).

15. ADHEMARD (Robert d'), Nécrologie. Camille Jordan, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, t. 3 (1922), p. 65-66.

16. PIERPONT (James), Early History of Galois Theory of Equations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 2, n° 4 (1897), p. 332-340.

2 Un portrait kaléidoscopique du *Traité* dans les textes mathématiques entre 1870 et 1914

À la différence des discours publics, les textes mathématiques publiés sur la période 1870-1914 font très rarement référence au *Traité* en relation avec les travaux de Galois sur les équations algébriques. De fait, l'approche spécifique de Jordan sur la théorie de Galois n'a en réalité pas été reprise, au contraire d'autres approches, comme celle de Joseph-Alfred Serret dans son *Cours d'algèbre supérieure* de 1866 ou l'approche de Leopold Kronecker, radicalement opposée à celle de Jordan.¹⁷ C'était notamment sur les travaux de Kronecker que s'appuyait Picard dans ses textes mathématiques et ce bien que les discours publics de ce dernier célébraient Jordan pour sa présentation des travaux de Galois.

De nombreux historiens ont interprété cette situation sous l'angle d'une faible réception du *Traité* par les mathématiciens contemporains.¹⁸ Mais le *Traité* est un ouvrage long et complexe. Il faut en envisager des réceptions multiples ainsi que des lectures fragmentées.

L'impression d'isolement de Jordan provient principalement de perspectives rétrospectives ayant recherché les traces des travaux de ce dernier en théorie des groupes, théorie des équations, théorie de Galois ou plus généralement en algèbre. Or, non seulement ces catégories ne sont pas stables et revêtent des significations changeantes mais nous avons vu également que ces catégories sont loin d'être neutres et étaient au contraire employées par des autorités pour discourir publiquement des dimensions collectives des mathématiques.

Comme nous le proposons en [annexe 1](#), dissocier la réception du *Traité* de la question du développement de la théorie des groupes ou de la théorie de Galois permet de brosser un panorama général de la réception des travaux de Jordan.¹⁹ À la différence du portrait public de Jordan dans l'ombre de la figure de Galois, les textes mathématiques nous présentent un kaléidoscope de reflets mobiles et fragmentés qui nous donnent l'occasion d'éclairer les premiers travaux de Jordan sous un nouveau jour.

Nous allons à présent porter notre attention sur un théorème mis en avant

17. Voir à ce sujet : BRECHENMACHER (Frédéric), La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13 (2007), p. 187-257.

18. Voir notamment : WUSSING (Hans), *The Genesis of the Abstract Group Concept*, MIT Press, Cambridge : Mass., 1984. KIERNAN (Melvin), The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 8, n° 1-2 (1971), p. 40-152.

19. BRECHENMACHER (Frédéric), On Jordan's measurements, prépublication.

par certains lecteurs du *Traité* et qui faisait déjà l'objet de la première thèse de Jordan : l'"origine" du groupe linéaire.

3 Le premier théorème de Jordan : l'origine du groupe linéaire

La première thèse présentée par Camille Jordan à la faculté des sciences de Paris en 1860 était consacrée au problème du "nombre des valeurs des fonctions".

3.1 Le problème du nombre des valeurs d'une fonction

Ce problème s'avère l'une des racines de la théorie des groupes de substitutions. Il avait émergé de travaux du XVIII^e siècle sur les équations. Comme nous l'illustrons en [annexe 2](#), la résolubilité par radicaux d'une équation algébrique de degré n avait été mise en relation avec le nombre de valeurs qu'une fonction "résolvante" de n variables peut prendre lorsque ses variables sont permutées de toutes les manières possibles.

Etant donnée une fonction $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n "lettres", une "valeur" de ϕ est une fonction obtenue par permutation des variables pour toute substitution $\sigma \in \Sigma(n)$,

$$\phi^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \dots, x_{n\sigma})$$

En général, une fonction peut ainsi prendre $n!$ valeurs différentes mais il peut arriver que quelques unes de ces valeurs deviennent identiques et le problème abordé par la thèse de Jordan consiste à déterminer le nombre de valeurs pouvant être prises pour certaines classes de fonctions. En termes contemporains, le problème revient à déterminer tous les ordres possibles des sous-groupes du groupe symétrique $\Sigma(n)$.

Au cours du XIX^e siècle, ce problème avait donné lieu à des développements autonomes de la théorie des équations. Augustin-Louis Cauchy (1815, 1844-46), Joseph Bertrand, (1845) et Serret (1849) avaient notamment énoncé des bornes pour le nombre de valeurs pouvant être prises par des fonctions de certains types généraux.²⁰ Charles Hermite et Kronecker avaient davantage porté leur attention sur des fonctions spéciales, comme une fonction de 6 variables prenant

²⁰. Dès le début du XIX^e siècle, Ruffini et Cauchy avait par exemple montré que le nombre de valeurs d'une fonction non symétrique de cinq variables ne peut être moindre de cinq à moins qu'il soit égal à deux.

exactement 6 valeurs. À partir des années 1850, ces travaux pouvaient s'appuyer sur un développement théorique dans lequel Cauchy avait mis en avant la notion essentielle de "système de substitutions conjuguées" (c'est-à-dire ce que nous appelons des groupes finis et leurs sous-groupes distingués). En 1860, le problème du nombre de valeurs des fonctions avait été choisi comme sujet du Grand prix des sciences de mathématiques de l'Académie des sciences.²¹ Deux jeunes mathématiciens y consacraient leurs premières recherches : Jordan et Émile Mathieu.

3.2 Une approche générale par des réductions successives

Dans sa thèse, Jordan revendiquait une approche "générale" du problème par des "réductions successives" en sous-problèmes. La première réduction montrait que l'étude des fonctions générales transitives (correspondant à des équations algébriques irréductibles) peut se réduire à l'étude de fonctions sur des "systèmes imprimitifs"²² de lettres : l'ensemble de toutes les lettres peut dans ce cas se diviser en blocs²³ - représentés ci-dessous par une succession de lignes - de manière à ce que les substitutions opèrent soit en permutant entre elles les lettres d'une même ligne soit les lignes les unes avec les autres :

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

21. Voir au sujet de cet épisode, ainsi que des travaux de Thomas Kirkman, également candidat au grand prix de 1860, EHRHARDT (Caroline), *Evariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910)*, Thèse de doctorat. Ecole des Hautes études en sciences sociales. Paris, 2007, p. 291-393.

22. D'un point de vue contemporain, il s'agit ici de décomposer les éléments du corps en blocs d'imprimitivité sous l'action d'un groupe de substitution imprimitif, lui-même décomposé en un groupe primitif quotient. Soit G un groupe transitif opérant sur ensemble Ω . Un sous-ensemble Γ de Ω est appelé bloc d'imprimitivité si $\Gamma \neq \emptyset$ et si pour tout $g \in G$, alors soit $\Gamma g = \Gamma$ soit $\Gamma g \cap \Gamma = \emptyset$. Si Γ est un tel bloc et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, sont les ensembles distincts obtenus par une orbite Γg pour $g \in G$, alors $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m)$ est une partition de Ω . G est dit imprimitif s'il existe un bloc propre non trivial dans Ω . G est dit primitif s'il n'est pas imprimitif.

23. Jordan désignait en réalité par le terme "groupe" les blocs de lettres, c'est à dire un sous-ensemble d'un corps fini, et ce que nous appellerions des groupes des substitutions par le terme de système conjugué introduit par Cauchy. Rappelons que chez des auteurs antérieurs, comme Galois ou Poincaré, le terme groupe concernait intrinsèquement à la fois des arrangements de lettres en blocs de permutations et les opérations sur de tels arrangements par des substitutions. Voir notamment à ce sujet : DAHAN (Amy), Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept de groupe, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 23, 1980, p. 279-319.

L'enjeu de cette première réduction était d'introduire une indexation des lettres par des suites d'entiers $(1, 2, \dots, m)$ de manière à faire opérer les substitutions non plus sur des lettres mais sur des nombres.

3.3 La représentation analytique des substitutions

Une telle indexation était un préalable à l'introduction du problème crucial de la représentation analytique des substitutions : étant donnée une substitution S sur p lettres a_0, a_1, \dots, a_{p-1} , ce problème consistait à trouver une fonction analytique ϕ telle que

$$S(a_i) = a_{\phi(i)}$$

Bien qu'elle soit passée inaperçue de nombreux travaux historiques, la représentation analytique des substitutions a joué un rôle important au XIX^e siècle.

Comme le détaille l'[annexe 3](#), cette représentation avait notamment été mise en avant au début du XIX^e siècle par Louis Poinsot à la suite des travaux de Carl Friedrich Gauss sur les équations cyclotomiques.²⁴ Étant donné un nombre p premier, l'équation cyclotomique associée à l'équation binôme

$$x^p - 1 = 0$$

est l'équation irréductible :

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

Toutes les racines de cette équation peuvent être exprimées en fonctions de l'une d'entre elles, ω (une racine primitive) :

$$\omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}$$

Les substitutions des racines forment ainsi un groupe cyclique engendré par une substitution pouvant être représentée analytiquement par son action sur les puissances i indexant les racines, c'est à dire par $(i \ i+1)$. Une propriété cruciale

²⁴. Voir à ce sujet : BOUCARD (Jenny), Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois?, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17, fasc. 1 (2011), p. 41-138. FREI (Gunther), The unpublished section eight : On the way to function fields over a finite field, in GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), SCHWERMER (Joaquim) (eds.), *The Shaping of Arithmetics after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007, p. 159-198. NEUMANN (Olaf), The Disquisitiones Arithmeticae and the Theory of Equations, in GOLDSTEIN, SCHAPPACHER, SCHWERMER, *op. cit.*, p. 107-128.

des équations cyclotomiques est que la suite des racines peut être réindexée par une racine primitive g de l'équation binôme de congruence :

$$i^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

de manière à obtenir la suite :

$$\omega^g, \omega^{g^2}, \dots, \omega^{gp-1}$$

Le groupe cyclique est alors engendré par une substitution représentée analytiquement par $(i \ gi)$.

3.4 Le premier théorème de Jordan

Mais revenons à la première thèse de Jordan. Après avoir réduit le problème à l'étude des fonctions imprimitives, Jordan montrait comment poursuivre la réduction aux fonctions primitives, c'est à dire au cas où il n'est pas possible de subdiviser les lettres en plusieurs lignes, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, que les substitutions permuteraient en blocs. Le point clef de cette réduction consistait à montrer que les substitutions opérant sur les systèmes imprimitifs peuvent être décomposées en deux espèces, correspondant aux deux formes de représentations analytiques des cycles sur le modèle de la décomposition réalisée par Gauss pour les équations cyclotomiques ([annexe 3](#)).

- La première espèce permute cycliquement les blocs $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ eux-mêmes par des substitutions du type $(i \ i+1)$ sur les indices. Dans le cas plus général de lettres indexées par n indices $a_{x,x',x'',\dots}$ ces substitutions prennent la forme :

$$a_{x+\alpha \pmod{p}, x'+\alpha' \pmod{p}, x''+\alpha'' \pmod{p}, \dots}$$

- La seconde espèce permute cycliquement les lettres à l'intérieur de chaque bloc Γ_i par des substitutions du type $(i \ gi)$. Dans le cas de n indices, elles prennent ainsi la forme :

$$a_{ax+bx'+cx'' \dots \pmod{p}, a'x+b'x'+c'x'' \dots \pmod{p}, a''x+b''x'+c''x'' \dots \pmod{p}}$$

Jordan énonçait alors son [principal théorème](#) :²⁵

25. En termes contemporains, le théorème de Jordan peut s'interpréter comme énonçant que le sous-groupe normal minimal A d'un groupe primitif résoluble G est abélien du type

Premier théorème de Jordan

- Les systèmes primitifs comportent un nombre de lettres donné par la puissance d'un nombre premier p^n .
- Les substitutions sur ces systèmes ont une forme analytique linéaire :

$$(x, x', x'' \dots; ax+bx'+cx''+\dots+d, a'x+b'x'+c'x''+\dots+d', a''x+b''x'+c''x''+\dots+d'', \dots)$$

que l'on peut également dénoter par :

$$\begin{vmatrix} x & ax + bx' + cx'' + \dots \\ x' & a'x + b'x' + c'x'' + \dots \\ x'' & a''x + b''x' + c''x'' + \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ce groupe devait être désigné par Jordan quelques années plus tard sous le nom de "groupe linéaire".²⁶.

3.5 Retour sur la relation Jordan-Galois

C'est en déterminant l'ordre de ce groupe que Jordan s'apercevait de la relation entre ses propres travaux et ceux menés par Galois pour le cas de p^2 lettres (annexe 3). Dans la version modifiée de sa thèse, publiée en 1861, Jordan ajoutait alors un supplément dans lequel il commentait le "Fragment de second mémoire" de Galois sur les équations primitives de degré p^n .²⁷

(1, 1, ..., 1) (donc isomorphe à un produit de groupes cycliques ou au groupe multiplicatif d'un corps fini GF_{p^n}). L'action de G sur A définit un groupe linéaire.

26. Nous le désignerions aujourd'hui comme un groupe affine sur un corps fini.

27. Une équation irréductible de degré composé $n = pq$ a un bloc d'imprimitivité de taille p si et seulement si il existe une équation auxiliaire $g(x) = 0$ de degré m telle que l'adjonction de toutes les racines de cette équation permet de factoriser $f(x)$ en un produit de p facteurs irréductibles de degré q . Considérons par exemple $f(x) = x^6 - 2 = 0$ et $g(x) = x^3 - 2$. Le degré du corps de décomposition K de f sur \mathbb{Q} est 12 et le groupe de Galois G est le groupe diédral d'ordre 12, qui peut être représenté comme le groupe des symétries d'un hexagone régulier (dont les sommets sont indexés par les racines sixièmes de 2). G est engendré par deux éléments : x , la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, et y , la symétrie d'axe une diagonale. Soit alors les deux générateurs de K : $\alpha = \sqrt[6]{2}$ et $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}}$, les éléments de G peuvent être décrits comme automorphismes de K par :

$$x : \alpha \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}}\alpha, \omega \rightarrow \omega ; y : \alpha \rightarrow \alpha, \omega \rightarrow \omega^2$$

Alors G_α le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par y (i.e. la conjugaison complexe) est un bloc d'imprimitivité. Si l'on adjoint à \mathbb{Q} la racine $\gamma = \sqrt[3]{2}$ de $g(x) = 0$ ainsi qu'une racine primitive ω de l'unité, on obtient en effet la factorisation : $f(x) = (x^2 - \gamma)(x^2 - \omega\gamma)(x^2 - \gamma^2\alpha)$ sur $\mathbb{Q}(\gamma, \omega)$. Voir à ce sujet : NEUMANN (Peter M.), The concept of Primitivity in Group Theory and the Second Memoir of Galois, Archive for History of Exact Sciences, 60 (2006), p. 379-429.

Cet intérêt de Jordan pour la question générale de la résolubilité des équations de degré composé, et donc des groupes primitifs de degré p^n , s'avère la principale spécificité de la relation établie par ce dernier aux travaux de Galois. Contrairement à d'autres aspects des travaux de Galois, comme le critère de résolubilité des équations de degré premier, les imaginaires de la théorie des nombres ou les équations modulaires, le cas des équations primitives de degré p^n n'avait en effet avant Jordan été envisagé que par Enrico Betti et Alexandre Allégret ([annexe 3](#)).

Jordan s'appuyait ainsi principalement sur une lecture du "Fragment du second mémoire" de Galois et non sur le célèbre "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" dans lequel se trouvent les principes généraux de ce que nous appelons aujourd'hui la théorie de Galois. Au contraire de Jordan qui, comme nous l'avons vu, s'intéressait ainsi aux groupes linéaires de n variables, la grande majorité des présentations des travaux de Galois se focalisaient jusqu'à la fin du siècle sur les principes généraux du "Mémoire" et leur application aux équations de degré premier p qui nécessitent uniquement de considérer des groupes linéaires à une variable ($i ai + b$).

Comme nous l'avons vu, Jordan avait cependant introduit le groupe linéaire dans sa thèse indépendamment de Galois et ce n'était qu'a posteriori qu'il s'était intéressé aux travaux de ce dernier sur la résolubilité des équations. Dans ses travaux ultérieurs, Jordan insistait à de nombreuses reprises sur la différence entre ses propres travaux et ceux de Galois. Il critiquait notamment la généralisation abusive par Galois de son critère de résolubilité des équations primitives de degré p aux équations primitives de degré p^n ([annexe 3](#)). **Galois avait en effet énoncé que de telles équations sont résolubles si et seulement si leur groupe est linéaire :**

Galois avait annoncé que les équations primitives et solubles par radicaux rentreraient dans un type unique, sauf pour le neuvième et le vingt-cinquième degré, qui présenteraient certains types exceptionnels. On voit par les énoncés qui précèdent qu'il faut prendre presque exactement le contre-pied de cette assertion.[9, p.113]

Or la forme linéaire des substitutions n'est pas un critère suffisant pour caractériser les groupes résolubles de degré non premier. Comme le montrait Jordan au cours des années 1860, il est nécessaire de poursuivre plus avant la chaîne successive de réductions du problème en recherchant les sous-groupes résolubles du groupe général linéaire.

Récapitulons. Comme nous l'avons vu, l'objet principal de la thèse de Jordan était d'énoncer un théorème "engendrant" le groupe linéaire. Ce groupe n'était ainsi pas défini, comme nous le ferions aujourd'hui, par une liste d'axiomes. Au contraire, le groupe linéaire se présentait comme engendré par une chaîne de réductions successives d'un problème général en sous-problèmes.

Par ailleurs, les substitutions linéaires étaient avant tout identifiées par leur forme analytique. Comme nous le détaillons en [annexe 3](#) et comme nous allons le voir plus précisément dans la suite, la représentation analytique des substitutions n'était pas une simple notation mais s'accompagnait de procédures spécifiques de réductions auxquelles Jordan attribuait l'"essence" d'une approche transversale à diverses théories mathématiques.

4 L'"essence" du *Traité* des substitutions et des équations algébriques

Abordons à présent la question de la structure du *Traité* de 1870. Nous allons retrouver le premier théorème de Jordan dispersé dans les quatre livres qui composent cet ouvrage. Mais nous allons voir également que ce théorème donne l'"essence" sous-jacente à la structure du *Traité*.

La réduction de la représentation analytique des substitutions linéaires par les deux formes de représentations de cycles sous-tend en effet une chaîne de généralisations successives courant les trois premiers livres du *Traité* jusqu'à l'énoncé du "théorème fondamental" sur la résolubilité des équations algébriques. Ce théorème permet alors de retourner cette chaîne en une suite de réductions successives d'un problème général.

4.1 Livre I. Des congruences

L'ouverture du *Traité* introduit les notions relatives aux congruences qui permettent l'indexation de lettres et, par là, la représentation analytique des substitutions. Après l'exposé des propriétés des congruences binômes, ce premier livre expose ce que Jordan dénommait la "théorie de Galois". Cette désignation ne correspond pas à ce que recouvre aujourd'hui cette théorie mais désigne

les "imaginaires de Galois" permettant d'indexer des systèmes de p^n lettres en généralisant les propriétés des racines cyclotomiques des équations de degré p aux congruences irréductibles de degré $n \bmod p$ (annexe 3). Ce premier livre est ainsi l'occasion d'introduire un cas particulier de représentation analytique de substitutions : les cycles $(i \ i + a)$ et $(i \ gi)$.

4.2 Livre II. Des substitutions

Un premier chapitre de généralités sur les substitutions présente une synthèse de résultats antérieurs de mathématiciens comme Cauchy, Serret, Bertrand ou Mathieu. Le second chapitre, qui représente la partie la plus importante de ce deuxième livre, est consacré aux propriétés des groupes linéaires généraux et spéciaux étudiés par Jordan depuis sa thèse.

Le problème de la représentation analytique des substitutions ouvre ce second chapitre et amène la "génération du groupe linéaire". Nous avons vu que l'origine de ce groupe avait fait l'objet du premier théorème de Jordan. Le théorème se présente cependant la tête en bas en 1870 : alors que le groupe linéaire était engendré en 1860 par des réductions successives du problème du nombre de valeurs d'une fonction, cette génération intervient à présent à partir du problème de la recherche de la forme analytique de l'ensemble des substitutions g "permutant" des produits de cycles $(x \ x + 1)$ de la forme analytique suivante :²⁸

$$|x, x', \dots, x + \alpha, x' + \alpha', \dots|$$

c'est à dire transformant une substitution élémentaire c de la forme ci-dessus en une autre $c' : gcg - 1 = c' :^{29}$

Ces dernières substitutions, que nous représenterons indifféremment par l'une ou l'autre des deux notations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} x \quad ax + bx' + cx'' + \dots \\ x' \quad a'x + b'x' + c'x'' + \dots \\ x'' \quad a''x + b''x' + c''x'' + \dots \\ \dots \quad \dots \end{array} \right|, (x, x', \dots; ax+bx'+\dots, a'x+b'x'+\dots, \dots)$$

forment évidemment un groupe, que nous appellerons le groupe linéaire. [13, p.91]

28. Il s'agit, en termes contemporains, d'un groupe abélien élémentaire.

29. En termes contemporains, il s'agit de rechercher le plus grand groupe dans lequel un groupe abélien élémentaire est distingué.

La démonstration, détaillée ici (lien), consiste à générer le groupe linéaire par les deux formes de représentations analytiques des cycles introduites au Livre I.

4.3 Livre III. Des irrationnelles

Le troisième livre s'ouvre par une présentation des principes généraux de Galois sur la résolubilité des équations algébriques. Ce premier chapitre du Livre III a été amplement commenté, je ne vais pas le détailler davantage ici.³⁰ Notons l'expression "Des irrationnelles" utilisée par Jordan pour ce que nous désignons aujourd'hui comme la théorie de Galois et sur laquelle l'annexe 4 propose un éclairage.

Le livre se poursuit par trois chapitres d'applications : applications algébriques, applications géométriques et applications aux transcendentes. Le chapitre consacré aux équations algébriques éclaire sous un nouveau jour l'origine du groupe linéaire telle que présentée au Livre II comme permutant les cycles introduits au Livre I.

Jordan commence par considérer le cas des équations abéliennes, dont toutes les racines s'expriment en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, et plus spécifiquement le cas des équations cyclotomiques pour lesquelles les racines sont donnés par la suite des puissances d'une racine primitive. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, le groupe associé à l'équation est engendré par le cycle $(i \ i + 1)$ mais les racines peuvent être réindexées de manière ce que le groupe cyclique soit engendré par le cycle $(i \ gi)$. Le cas des "équations de Galois", pour lesquelles toutes les racines sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles, se présente alors comme une généralisation naturelle des équations abéliennes sur le modèle de l'origine du groupe linéaire. En effet, ces équations sont associées à un groupe de substitutions linéaires de la forme $(i \ ai + b)$ (annexe 3). Or le groupe linéaire a précisément été engendré au Livre II par la combinaison des cycles $(i \ i + 1)$ et $(i \ gi)$. L'origine du groupe linéaire donne ainsi un modèle de réduction du groupe d'une équation de Galois : $(i \ ai + b)$ se décompose en effet en $(i \ i + 1)$ et $(i \ gi)$. La résolution d'une équation de Galois se ramène par conséquent à celle de deux équations abéliennes.

Comme nous allons le voir à présent, cette situation donne à son tour un

30. Voir à ce sujet : EHRHARDT (Caroline), *Evariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910)*, Thèse de doctorat. Ecole des Hautes études en sciences sociales. Paris, 2007. CORRY (Leo), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel : Birkhäuser, 1996. KIERNAN (Melvin), *The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin*, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 8, n° 1-2 (1971), p. 40-152

modèle pour un ultime maillon de la chaîne de généralisation présentée par Jordan.

4.4 Livre IV. De la résolution par radicaux

Ce livre, qui représente à lui seul plus du tiers de l'ensemble de l'ouvrage, s'ouvre comme les précédents par un premier chapitre de généralités. Jordan y énonce une suite de théorèmes se concluant par le "théorème fondamental"³¹ suivant :

Théorème fondamental du Livre IV

Pour qu'un groupe L soit résoluble, il faut et il suffit qu'on puisse former une suite de groupes $1, F, G, H, \dots, L$ se terminant par L , et jouissant des propriétés suivantes : 1° chacun de ces groupes est contenu dans le suivant, et permutable aux substitutions de L ; 2° deux quelconques de ses substitutions sont échangeables entre elles, aux substitutions près du groupe précédent [13, p.395].

Ce théorème se présente comme une généralisation de la décomposition du groupe des équations de Galois en deux groupes cycliques ; il englobe ainsi le critère de résolubilité énoncé par Galois pour les équations de degré premier (annexe 3). Mais nous retrouvons surtout dans le théorème fondamental une dimension cruciale du premier théorème de Jordan, à savoir l'approche générale que ce dernier entendait développer au moyen d'une chaîne de réductions successives.

L'énoncé de ce théorème permet alors de retourner la chaîne de généralisations que nous avons vu courir au long des trois premiers livres du *Traité*. Le théorème fondamental sous-tend en effet une chaîne de réductions des groupes les plus généraux aux groupes les plus spéciaux - les groupes cycliques - en passant par les groupes linéaires. C'est précisément à une telle réduction que s'emploie le Livre IV en abordant le problème de la recherche des groupes résolubles généraux par des réductions successives à des groupes résolubles spéciaux : groupes transitifs, primitifs, linéaires, symplectiques etc.

Supposons que nous ayons formé, pour un degré donné, le tableau de tous les groupes résolubles et transitifs les plus généraux. Cha-

31. En des termes qui nous sont contemporains, ce théorème énonce qu'une équation irréductible est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois peut être "réduit" en une suite $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_m = I$ dans laquelle chaque H_k est un sous-groupe normal de G et les quotients $\frac{H_k}{H_{k+1}}$ sont abéliens.

cun d'eux caractérisera un type distinct d'équations irréductibles résolubles par radicaux. Les groupes résolubles et transitifs, non généraux, caractériseront des types d'équations plus spéciaux, et contenus dans les précédents comme cas particuliers.[13, p. 396]

Plus encore, cette chaîne de réductions constituait, pour Jordan, l'essence même de sa méthode :

L'essence de ma méthode consiste à déterminer successivement les groupes partiels F, G, H, \dots [8, p.963].

Dans cette chaîne, le groupe linéaire joue un rôle essentiel en tant que groupe le plus général dont les substitutions disposent d'une représentation analytique. Le Livre IV fait en effet un usage constant des procédés de décompositions des formes analytiques des substitutions linéaires.

5 La théorie de l'ordre

Nous avons vu le rôle joué dans le *Traité* par une chaîne de réductions des groupes prenant modèle sur la réduction de la représentation analytique des substitutions linéaires en produits de cycles. Nous avons vu également que cette approche n'était pas directement liée à ce que nous appelons aujourd'hui "théorie de Galois" : non seulement Jordan avait développé de telles méthodes dès sa thèse, soit avant d'étudier les écrits de Galois, mais il avait à plusieurs reprises insisté sur la différence entre son approche et les principes généraux énoncés par Galois pour la résolubilité des équations. Par conséquent, les travaux de Jordan ne peuvent pas s'envisager uniquement sous l'angle d'une relation exclusive aux idées de Galois.

Abordons à présent la question cruciale des dimensions collectives des recherches de Jordan dans les années 1860. Dès l'introduction de sa thèse, Jordan avait placé le problème du nombre des valeurs d'une fonction dans le cadre de la "théorie de l'ordre" en revendiquant l'héritage des travaux de Poincaré. Cette théorie était présentée comme englobant les travaux de Gauss sur les équations cyclotomiques, ceux d'Abel et de Galois sur la résolubilité des équations ainsi que l'approche de Cauchy sur les déterminants :

Mais il pourra arriver que quelques-unes d'entre elles [les fonctions obtenues par permutation de leurs variables] deviennent identiques, par suite de quelque symétrie que présente la fonction primitive. L'étude de ces diverses sortes de symétrie offre un grand intérêt ; car

c'est la base et le point de départ naturel de ce genre de recherches que M. Poincaré a distingué de tout le reste des mathématiques sous le nom de théorie de l'ordre : elle présente en outre d'importantes applications. C'est dans le Mémoire où M. Cauchy a donné les premiers principes généraux de cette théorie, qu'il a établi pour la première fois les théorèmes fondamentaux sur les déterminants. Abel s'est appuyé sur elle pour établir l'irrésolubilité de l'équation générale du cinquième degré. Galois, dans un admirable Mémoire, en a fait dépendre, non seulement les conditions de la résolution algébrique, mais la théorie entière des équations, considérée sous son point de vue le plus général, et la classification des irrésolubles algébriques.[7]

Des travaux récents de Jenny Boucard ont montré que la théorie de l'ordre avait été envisagée par Poincaré comme articulant les analogies présentées par les situations cycliques rencontrées en algèbre, théorie des nombres, géométrie et mécanique.³²

Pour Jordan, la théorie de l'ordre était associée au caractère "essentiel" de sa "méthode de réduction" de la représentation analytique des substitutions. Cette "réduction" exprimait en effet le type de relations cachées entre diverses théories ou classes d'objets auxquelles Jordan attribuait l'essence de son approche. Ainsi, tout en admettant que sa réduction des groupes n'était pas des plus avantageuses dans les applications, Jordan insistait que "si l'on se borne à étudier le problème de la symétrie en lui-même, cette méthode, plus naturelle et plus directe, peut seule conduire aux véritables principes". Et d'ajouter :

On pourrait voir une image de ce résultat dans le théorème de mécanique qui ramène le mouvement général d'un corps solide à un mouvement de translation combiné avec une rotation autour du centre de gravité. Ce principe du classement des lettres en divers groupes est le même dont Gauss et Abel ont déjà montré la fécondité dans la théorie des équations : il me semble être dans l'essence même de la question, et sert de fondement à toute mon analyse.[7, p.5]

Le procédé de réduction des substitutions linéaires en produits de cycles représentés par $(i \ i + 1)$ et $(i \ gi)$ et sa généralisation par Jordan à la décomposition des groupes imprimitifs étaient ainsi envisagés comme une sorte de dévissage par

³². BOUCARD (Jenny), Louis Poincaré et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois?, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17, fasc. 1 (2011), p. 41-138.

analogie avec la décomposition du mouvement hélicoïdal d'un solide en mouvements de rotation et de translation. Jordan allait par la suite développer cette analogie dans ses travaux en s'inspirant des travaux géométriques et mécaniques de Poincaré mais aussi de ceux de Bravais sur la cristallographie.³³ Chez Jordan, la théorie de l'ordre se présentait comme transversale à différents domaines qui allaient représenter l'essentiel des préoccupations de notre héros jusqu'en 1867-1868 :

- théorie des nombres (cyclotomie, congruences)
- algèbre (équations, substitutions)
- analyse (groupes de monodromie et lacets d'intégration des équations différentielles linéaires)
- géométrie/ topologie (cristallographie, symétries des polyèdres et des surfaces (y compris de Riemann))
- mécanique (mouvements des solides).

Lors de la présentation de ses travaux à l'occasion de sa candidature à l'Académie en 1881, Jordan décrivait l'orientation générale de ses travaux comme portant davantage sur les relations entre des classes d'objets que sur les objets eux-mêmes **dans l'héritage des travaux de Poincaré** :

Les Mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas seulement en vue la proportion et la *mesure* ; il peut encore considérer le *nombre* en lui-même, l'*ordre* et la *situation* des choses, sans aucune idée de leurs rapports ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent. Si l'on parcourt les différentes parties des Mathématiques, on y trouve partout ces deux objets de nos spéculations. Ainsi, à côté de l'Algèbre ordinaire, il y a une Algèbre supérieure, qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons. D'autre part, ce qui rend la théorie des polyèdres très difficile, c'est qu'elle tient essentiellement à une science presque encore neuve, que l'on peut nommer *Géométrie de situation*, parce qu'elle a principalement pour objet, non la grandeur ou la proportion des figures, mais l'ordre ou la situation des éléments qui les composent. [...] la tendance générale de mes recherches [a] eu presque constamment pour but d'approfondir la *théorie de l'ordre* au double point de vue de la Géométrie pure et de l'Analyse. En Géométrie,

33. SCHOLZ (Erhard), *Symmetrie, Gruppe, Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*, Basel : Birkhäuser, 1989.

j'ai étudié successivement les lois de la symétrie des polyèdres, des systèmes de lignes et des systèmes de molécules. En Analyse, j'ai pris pour objet principal de mes travaux la théorie des substitutions (qui n'est au fond autre chose que celle de la symétrie des expressions algébriques) et ses applications à la théorie des équations algébriques et celle des équations différentielles linéaires.[15, p.7-8]

Cette approche transversale permet de jeter un nouvel éclairage sur la dimension collective des travaux de Jordan des années 1860. En effet, ces travaux manifestent des interactions avec des publications de nombreux autres mathématiciens contemporains dans divers domaines comme les mouvements des solides et l'étude des polyèdres,³⁴ la géométrie cinématique,³⁵ la déformation des surfaces,³⁶ la cristallographie,³⁷ les substitutions,³⁸ ou encore l'étude des fonctions spéciales en lien avec les surfaces de Riemann et leurs applications aux équations différentielles.³⁹

Parmi ces mathématiciens, les auteurs français étaient pour la plupart liés à l'École polytechnique. On peut donc soupçonner la transmission d'une culture mathématique spécifique dans le cadre de l'enseignement polytechnicien de cette époque. Mais un domaine semblable à ce que Jordan désignait comme la théorie de l'ordre était également reconnu par d'autres acteurs à une échelle européenne. Ce domaine semble donc constituer un champ de recherche spécifique dans les années 1860-1880. La question des dimensions collectives d'un tel ensemble de travaux reste cependant encore ouverte et appelle davantage de recherches historiques.

L'identification de l'approche transversale de Jordan donne également de nouvelles perspectives sur la réception des travaux de ce dernier. Elle met notamment en évidence la circulation de procédés de réductions des représentations analytiques des substitutions entre différents domaines et différents auteurs.

Comme nous allons l'illustrer rapidement, les travaux de Jordan en théorie des groupes ne peuvent en effet être dissociés d'autres domaines comme, par exemple, les équations différentielles. Nous avons déjà évoqué que Jordan avait consacré de nombreux travaux à l'étude des sous-groupes résolubles du groupe linéaire. Le mémoire "Sur la résolution algébrique des équations primitives de

34. Bertini, Godt, Goursat, Kirkmann, Fedorow, Hagen, etc.

35. Houël, Méray, etc.

36. Becker, Boussinesq

37. Sohncke

38. Allégret, Despeyroux, Mathieu.

39. Schwarz, Klein, Gierster, Hess, Hurwitz, Bukhardt etc.

degré p^2 , publié en 1868 dans le Journal de Liouville, visait ainsi à étudier les sous-groupes résolubles des groupes linéaires à deux variables ($Gl_2(F_p)$), une problématique que l'auteur présentait comme dépassant les explorations de Galois dans son "Fragment d'un second mémoire" (annexe 3). La décomposition de la forme analytique des substitutions linéaires y jouait un rôle crucial. C'est notamment dans ce cadre que Jordan énonçait son célèbre théorème de réduction canonique des substitutions linéaires "à une forme aussi simple que possible".

En effet, contrairement au cas des substitutions d'une variable ($x \mapsto ax + b$) pouvant se réduire à une combinaison d'opérations ($x \mapsto x + 1$) et ($x \mapsto ax$), l'étude de substitutions de n variables nécessite la prise en compte de situations plus complexes. Jordan montrait ainsi que toute substitution linéaire à deux variables peut s'écrire sous l'une des trois formes suivantes, selon qu'une équation du second degré (l'équation caractéristique) admette deux racines réelles distinctes α, β , deux racines imaginaires distinctes $\alpha + \beta i, \alpha + \beta i^p$ (où $i^2 \equiv 1 \pmod{p}$) ou une racine double :

$$\left| \begin{array}{cc} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} z & (\alpha + \beta i)z \\ u & (\alpha + \beta i^p)u \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} z & \alpha z \\ u & \beta z + \gamma u \end{array} \right|$$

Ce résultat met à nouveau en évidence le rôle de modèle joué par la décomposition de la forme linéaire en deux formes de représentations analytiques de cycles : les formes canoniques réduisent les substitutions linéaires à des multiplications (deux premiers cas) ou des combinaisons multiplication-addition (troisième cas). Dans son traité, Jordan généralisait ce théorème à **la réduction canonique des substitutions linéaires de n variables** :

Théorème de réduction canonique

Cette forme simple

$$\left| \begin{array}{cc} y_0, z_0, u_0, \dots, y'_0, \dots & K_0 y_0, K_0(z_0 + y_0), \dots, K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \dots, y'_1, \dots & K_1 y_1, K_1(z_1 + y_1), \dots, K_1 y'_1 \\ \dots & \dots \\ v_0, \dots & K'_0 v_0, \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right|$$

à laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme canonique.[13, p.127]

Plus encore, Jordan investissait immédiatement ce résultat à d'autres domaines comme celui des équations différentielles linéaires (à coefficients constants d'abord

puis dans le cas des équations de Fuchs). Dans ce cas, les substitutions présentent pourtant une nature différente, puisqu'agissant sur le corps infini des nombres complexes et non sur des corps finis. Jordan s'appuyait cependant sur la permanence de la forme analytique des substitutions afin de transférer ses procédés de réductions des groupes finis aux **systèmes d'équations différentielles** :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_1x_1 + \dots + l_1x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2x_1 + \dots + l_2x_n \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_nx_1 + \dots + l_nx_n\end{aligned}$$

Ce problème peut se résoudre très simplement par un procédé identique à celui dont nous nous sommes servi, dans notre **Traité des substitutions**, pour ramener une substitution linéaire quelconque à sa forme canonique. Nous allons ramener de même le système à une forme canonique qui puisse s'intégrer immédiatement.

$$\frac{dy_1}{dt} = \sigma y_1, \frac{dz_1}{dt} = \sigma z_1 + y, \frac{du_1}{dt} = \sigma u_1 + z_1, \dots, \frac{dw_1}{dt} = \sigma w_1 + v_1$$

[...] le système des équations aura évidemment pour intégrales le système suivant :

$$w_1 = e^{\sigma t}\psi(t), v_1 = e^{\sigma t}\psi'(t), \dots, y_1 = e^{\sigma t}\psi^r(t),$$

$\psi(t)$ étant une fonction entière arbitraire du degré $r - 1$. [14, p.787]

L'étude de la circulation de tels procédés de réductions de la représentation analytique des substitutions dévoile des héritages des travaux de Jordan durant la fin du XIXe siècle. Elle permet notamment de mettre à jour l'importance de ces travaux pour l'élaboration par Henri Poincaré de la théorie des fonctions fuchsienues en entremêlant théorie des groupes, équations différentielles, arithmétique, mécanique etc.⁴⁰ Plus tard, au tournant du siècle, les procédés de réduction de Jordan allaient constituer la base d'une culture algébrique spécifique partagée par un groupe de mathématiciens français et américains.⁴¹

40. BRECHENMACHER (Frédéric), *Autour de pratiques algébriques de Poincaré*, prépublication.

41. BRECHENMACHER (Frédéric) *Linear groups in Galois fields. A case study of tacit circulation of explicit knowledge*, Oberwolfach Reports, 2012.

6 Conclusion

Les portraits de Camille Jordan ont souvent brossé les traits d'un mathématicien solitaire dans l'ombre d'Évariste Galois. Nous avons vu qu'un tel éclairage projette cependant sur le passé des organisations du savoir mathématique utilisées de nos jours : théorie des groupes, théorie de Galois, algèbre, etc. Envisagés dans la perspective de la théorie de l'ordre, les premiers travaux de Jordan nous apparaissent au contraire prendre place dès les années 1860 dans un cadre collectif. Plus encore, leurs héritages se manifestent dans des domaines variés des sciences mathématiques de la fin du XIX^e siècle.

Le problème de la restitution des dimensions collectives dans lesquelles saisir la création mathématique individuelle nous invite ainsi à redécouvrir des organisations des savoirs antérieures aux disciplines qui nous contemporaines et qui, comme l'algèbre linéaire, sont centrées sur des objets comme les groupes, corps et espaces vectoriels.

Le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de 1870 présentait cependant déjà une nature hybride entre l'approche transversale de la théorie de l'ordre et une théorie centrée sur des objets. À partir de 1867, Jordan avait en effet progressivement attribué à la notion de groupe de substitutions l'"essence" qu'il avait initialement associé à la théorie de l'ordre. Il avait alors réorganisé ses travaux dans un nouveau cadre, centré non plus sur des *relations transversales* mais sur des *objets* comme les substitutions et les irrationnelles des équations algébriques.

Cette hybridité se manifeste notamment dans le choix de Jordan de ne pas aborder dans son *Traité* les questions relatives aux polyèdres, à la cristallographie ou à la cinématique des corps solides mais, au contraire, de placer au coeur de son ouvrage une présentation des principes généraux de Galois sur les équations algébriques :

Le but de cet Ouvrage est de développer les méthodes de Galois et de les constituer en corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations.[13, p.VII]

Le Livre III, consacré aux irrationnelles, se plaçait dans un cadre collectif antérieur aux travaux de Jordan mais différent de celui de la théorie de l'ordre. Il s'inscrivait en effet dans l'héritage d'une interprétation préexistante des "principes de Galois" en termes d'"ordres d'irrationalités" définis par les racines de types d'équations algébriques non résolubles par radicaux :

De ce point de vue élevé, le problème de la résolution par radicaux, qui naguère encore semblait former l'unique objet de la théorie des équations, n'apparaît plus que comme le premier anneau d'une longue chaîne de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification.[13, p. VI].

Cet héritage impliquait notamment des travaux d'Hermite et Kronecker qui s'étaient appuyé constamment sur des articulations entre algèbre, arithmétique et analyse.⁴² Il s'agissait de déterminer les fonctions analytiques les plus générales permettant d'exprimer les racines d'équations de degré supérieur à cinq. Jordan mêlait cet héritage à la récente approche géométrique de Clebsch et en présentait une synthèse originale centrée sur la notion de groupe (annexe 4).

Le *Traité* de 1870 présente donc une tension entre, d'une part, sa structure sous-tendue par les procédés de décompositions analytiques des substitutions hérités du cadre transversal de la théorie de l'ordre et, d'autre part, la mise en avant d'une théorie unificatrice basée sur deux objets : les substitutions et équations algébriques. Ces deux facettes ont donné lieu à des réceptions différentes. La première a marqué en profondeur les pratiques algébriques de mathématiciens français puis américains. Certains aspects de la seconde ont dans un premier temps été envisagés dans la continuité de travaux antérieurs à ceux de Jordan, notamment ceux d'Hermite et Clebsch, tandis que l'ambition unificatrice de Jordan a été ignorée ou même vivement critiquée, notamment par Kronecker.⁴³ Plusieurs décennies plus tard, cette ambition allait au contraire être saluée comme marquant l'une des principales étapes du développement de la théorie des groupes comme domaine autonome.

42. Voir à ce sujet : GOLDSTEIN (Catherine), Charles Hermite's strolls in Galois fields, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17(2011), p. 211-270. GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), A Book in Search of a Discipline (1801-1860) in [Goldstein, Schappacher, Schwermer, *op. cit.*], p. 3-66. GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), Several Disciplines and a Book (1860 ?1901), in [Goldstein, Schappacher, Schwermer, *op. cit.*], p. 67-104.

43. Voir à ce sujet : BRECHENMACHER (Frédéric), La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13 (2007), p. 187-257.

A Annexe 1

Réceptions des travaux de Jordan entre 1870 et 1914

Afin de rendre compte des réceptions des travaux de Jordan, il est nécessaire de ne pas forcer ces derniers à entrer dans des cadres collectifs fixés rétrospectivement et *a priori* (comme la théorie de groupes ou l'algèbre). Nous allons par conséquent rechercher des traces des lectures du *Traité* chez les mathématiciens contemporains de Jordan. L'étude d'un périodique de recensions mathématiques, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, permet de pister les publications faisant référence aux travaux de notre héros sur la période 1870-1914.⁴⁴

Il faut tout d'abord constater que ces publications sont classées dans des rubriques variées des classifications mathématiques de l'époque. Ainsi, alors que la rubrique "théorie des équations" s'avère très marginale et que la rubrique "théorie des substitutions" ne regroupe, avant 1895, qu'environ 10 % des recensions faisant référence à Jordan, les rubriques "théorie des fonctions", "géométrie pure" et "géométrie analytique" sont fortement représentées. Par ailleurs, si la "théorie des groupes" devient très largement majoritaire après 1895, les références à Jordan dans ce contexte sont non seulement indépendantes de la théorie de Galois mais ce phénomène s'avère également limité dans le temps : après 1910, la grande majorité des références à Jordan portent sur le théorème de la courbe de Jordan énoncé dans le *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*.

Quatre principaux types de références au *Traité* peuvent être distingués afin de présenter un panorama simplifié des principaux usages de cet ouvrage sur la période 1870-1914.

A.1 Une synthèse sur la théorie des substitutions

Ce type de références apparaît à un niveau européen peu après la parution du *Traité*. Il perdure sur toute la période et s'étend aux États-Unis dans les années 1880.⁴⁵ Dans ce contexte, l'ouvrage de Jordan n'est pas envisagé comme une rupture mais au contraire dans la continuité de travaux antérieurs de mathématiciens comme Cauchy, Kronecker, Hermite, Bertrand, Serret et

44. BRECHENMACHER (Frédéric), On Jordan's measurements, prépublication.

45. Janni, Sardi, Netto, Klein, Pellet, Bolza, Hölder, Borel et Drach, Vogt, Weber, Picard, Echegaray, Bianchi, Pierpont etc.

Mathieu. Les textes qui s'appuient sur des innovations spécifiques de Jordan en théorie de groupes se réfèrent quant à eux le plus souvent à des articles publiés après le *Traité*. Nous ne détaillerons donc pas ces références ici.⁴⁶

A.2 Les équations spéciales des fonctions elliptiques et abéliennes

Comme le précédent, ce type de références apparaît dès 1870 à un niveau européen. Mais les publications qui l'emploient réagissent cette fois à des innovations qu'elles attribuent spécifiquement à Jordan. Les problèmes traités sont liés à la résolubilité des équations mais se présentent de manière transversale à de nombreuses rubriques comme la "théorie des formes", la "théorie des substitutions", la "géométrie analytique", les "fonctions spéciales" etc.

Rappelons que la démonstration par Abel de l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations algébriques générales de degré supérieur ou égal à cinq n'avait le plus souvent pas été envisagée comme la conclusion d'une longue histoire devant ouvrir l'algèbre sur les nouvelles perspectives de la théorie de Galois. De nombreux mathématiciens avaient au contraire généralisé le problème, traditionnel, de l'expression des racines des équations générales de degré inférieur à quatre par des fonctions algébriques comprenant des radicaux. Il s'agissait alors de rechercher des fonctions analytiques les plus simples permettant d'exprimer les racines d'équations de plus haut degré.

Des mathématiciens comme Hermite, Kronecker, Betti et Brioschi avaient notamment réduit le problème de la résolution de l'équation générale de degré cinq à celui de l'équation modulaire provenant du problème de la division des périodes des fonctions elliptiques, fonctions doublement périodiques sur le plan complexe.⁴⁷ Les racines de l'équation générale de degré cinq avaient ainsi été exprimées analytiquement à l'aide des fonctions elliptiques.

Or, dans son *Traité*, Jordan avait non seulement proposé une nouvelle approche des travaux d'Hermite mais il avait également énoncé l'impossibilité de résoudre les équations générales de degré supérieur à cinq par les fonctions elliptiques. Ce théorème avait été immédiatement reconnu comme l'un des résultats

46. Comme les travaux de Bochert et Maillet sur les théorèmes de finitude des groupes primitifs et transitifs ou les très nombreuses références aux travaux de Jordan de la fin des années 1870 sur la classification des groupes linéaires finis en lien avec les formes quadratiques.

47. Cette équation avait notamment été étudiée par Galois. Voir à ce sujet : GOLDSTEIN (Catherine), Charles Hermite's strolls in Galois fields, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2011), p. 211-270.

majeurs du *Traité*.⁴⁸

Mais Jordan avait aussi abordé la question de la recherche de fonctions permettant la résolution d'équations spéciales de degré supérieur à cinq. C'était dans ce cadre qu'avait été énoncé un autre théorème reconnu comme majeur par les contemporains : le théorème des 27 droites sur une surface cubique.⁴⁹ Jordan avait en effet cherché à généraliser le rôle joué par les équations modulaires des fonctions elliptiques à l'équation de la division des périodes de fonctions hyperelliptiques (ou abéliennes) à quatre périodes. Il avait montré que le groupe de cette dernière équation (de degré 80) contient le groupe de l'équation des 27 droites sur une surface cubique, ouvrant ainsi la voie à des approches mêlant algèbre, analyse et géométrie dans la lignée des travaux de Clebsch et Gordan. C'était à l'occasion de l'énoncé de ce théorème que Jordan annonçait en 1869 la parution prochaine de son *Traité* :

Tous les géomètres connaissent le fait de l'abaissement des équations modulaires pour les transformations des degrés 5, 7 et 11, et les importantes conséquences qu'en a déduites M. Hermite. MM. Clebsch et Gordan ont signalé un abaissement analogue pour les équations des périodes dont dépend la bissection des fonctions abéliennes. Nous venons d'obtenir un résultat du même genre pour l'équation qui donne la trisection dans les fonctions à quatre périodes. [...] La réduite Z présente cette particularité remarquable d'avoir le même groupe que l'équation X qui détermine les vingt-sept droites situées sur une surface du troisième ordre. [...] Mais cette proposition exigeant quelques développements, nous en réservons la démonstration pour le *Traité des équations algébriques* que nous nous occupons de publier.

Le théorème des 27 droites jouait en effet un rôle clé dans la troisième section du *Traité*, "Des irrationnelles" (voir à ce sujet [l'annexe 4](#)).

A.3 Les solides réguliers

Ce type de références témoigne de lectures du *Traité* en relation avec d'autres travaux de Jordan : polyèdres, cristallographie, cinématique, surfaces (y compris les surfaces de Riemann) ou équations différentielles. Bien que Jordan ait choisi

48. Netto, Sylow, Marie, Kronecker, Krause, Nöther etc.

49. Cremona, Clebsch, Geiser, Brioschi.

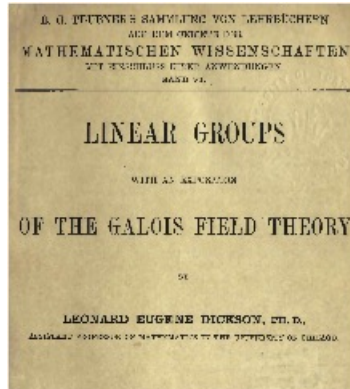
de ne pas inclure de tels sujets dans son *Traité* de 1870, ces problèmes étaient fortement interconnectés à cette époque.

Ces sujets mettent notamment tous en jeu des groupes de substitutions. En effet la donnée d'un polyèdre régulier définit un groupe, le groupe de symétries du solide, pouvant être envisagé d'un point de vue cinématique (mouvements d'un solide autour d'un axe par exemple) et dont l'étude peut non seulement être appliquée à la cristallographie mais aussi à l'étude des symétries des surfaces (y compris des surfaces de Riemann) et, par là, des équations différentielles. Cette approche allait notamment être développée dans les années 1870 par les travaux de Felix Klein.

Comme pour le précédent, ce type de références s'avère transversal à de nombreuses rubriques de la classification mathématique : "surfaces", "cinématique", "physique moléculaire", "fonctions spéciales" etc.

A.4 Groupes linéaires et champs de Galois

Ce type de références se manifeste plus tardivement que les deux précédents et de manière plus locale : il implique essentiellement un groupe de mathématiciens français et américains sur la période 1893-1907.



L'un des auteurs les plus importants de ce groupe, Leonard Dickson de Chicago, publiait en 1901 l'ouvrage : *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*, présentant des généralisations systématiques de résultats du *Traité*.

Dans ce contexte, un type spécifique de lecture du *Traité* est à la base d'une véritable culture algébrique commune à des mathématiciens français et américains.⁵⁰

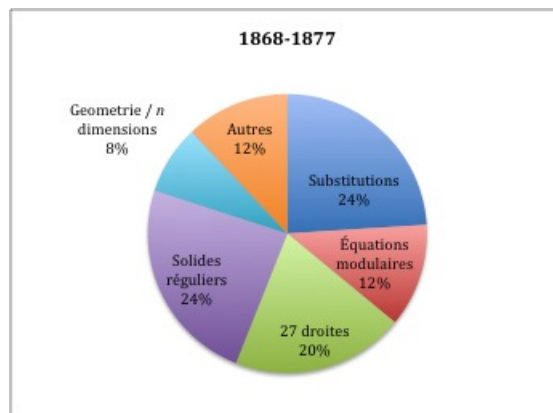
50. BRECHENMÄCHER (Frédéric) Linear groups in Galois fields. A case study of tacit circulation of explicit knowledge, Oberwolfach Reports, 2012.

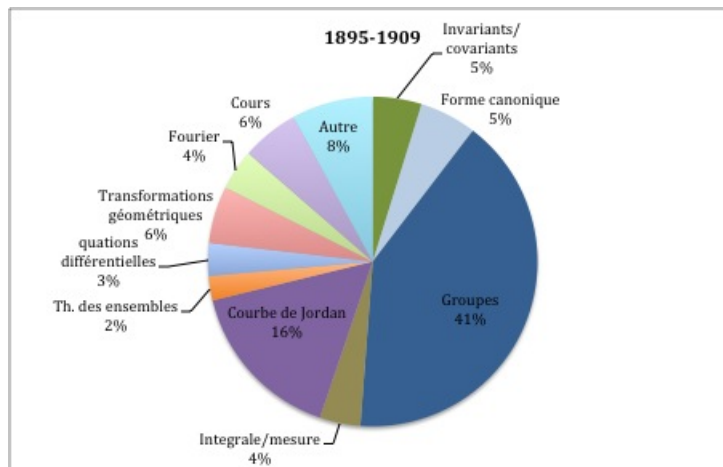
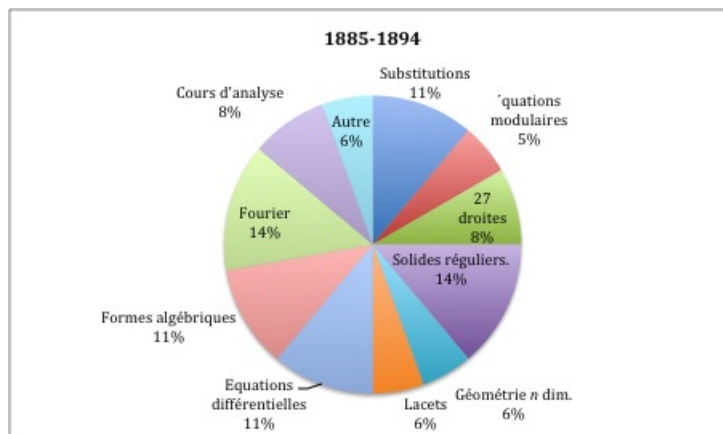
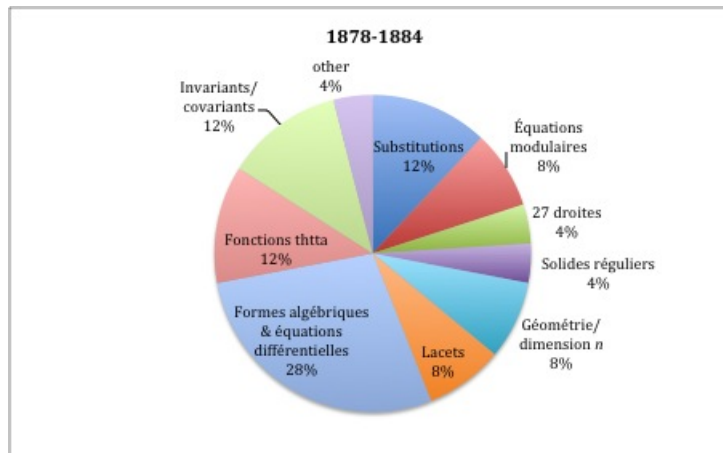
Comme le manifeste l'expression "Jordan's linear groups" utilisée par ces derniers, Jordan était cité principalement pour un théorème qui faisait déjà l'objet de sa première thèse en 1860 et qui jouait un rôle structurant pour le traité de 1870 : l'origine des groupes linéaires finis.

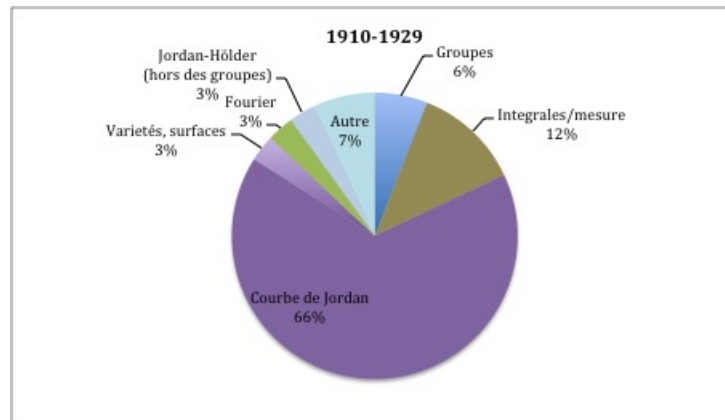
C'est aussi principalement dans ce contexte que les travaux de Jordan étaient cités en compagnie de ceux de Galois. Mais la référence à ce dernier ne portait pas sur ce que nous désignons aujourd'hui comme "théorie de Galois" mais sur ce qui était alors dénommé les "imaginaires de Galois", "champs de Galois" ou "Galois fields", c'est-à-dire les corps finis introduits par Galois dans sa note "Sur la théorie des nombres" publiée en 1830.

Comme nous le montrons dans le corps du texte et en [annexe 4](#), les imaginaires de Galois permettent d'indexer les lettres permutées par des groupes finis et ainsi de représenter les substitutions par une forme analytique. Dans les travaux de Jordan, cette forme de notation s'accompagnait de procédures spécifiques de réductions de la représentation analytique des substitutions linéaires. Dans les années 1870-1880, ces procédures avaient circulé en profondeur dans des travaux de mathématiciens comme Henri Poincaré. Ces derniers ne faisaient pas pour autant toujours explicitement référence aux travaux de Jordan. Pour cette raison, ce type de référence n'avait émergé au grand jour que dans les années 1890. Il s'agit là de l'un des principaux héritages des travaux de jeunesse de Jordan.

A.5 Représentations simplifiées des répartitions des types de références à Jordan







B Annexe 2.

Nombre des valeurs d'une fonction et résolution algébrique des équations

B.1 L'équation quadratique

Prenons pour premier exemple le cas de l'équation quadratique sur le corps des nombres rationnels :

$$x^2 - c_1x + c_2 = 0$$

Les coefficients c_1 et c_2 sont des fonctions symétriques des racines x_1 et x_2 . Il s'agit donc de fonctions qui ne prennent qu'une seule valeur par permutations des racines :

$$c_1 = x_1 + x_2 ; c_2 = x_1x_2$$

Toute fonction qui ne prend qu'une seule valeur peut être exprimée rationnellement dans le corps de nombres auxquels appartiennent les coefficients c_1 et c_2 , c'est à dire ici sur \mathbb{Q} . Au contraire, la fonction

$$x_1 - x_2$$

prend deux valeurs par permutations des racines et n'est donc pas rationnellement connue. On peut alors s'intéresser au groupe des permutations qui laissent fixe cette fonction. Ce groupe laisse également fixe la racine x_1 et, par conséquent, x_1 et $x_1 - x_2$ peuvent être exprimés rationnellement l'un par rap-

port à l'autre :

$$x_1 = \frac{c_1 + x_1 - x_2}{2}$$

Ainsi, si l'on adjoint au corps de nombres initial le nombre $x_1 - x_2$, on obtient également le nombre x_1 : au XIX^e siècle, les fonctions de plusieurs variables, ou résolvantes, étaient employées pour penser ce que nous envisageons aujourd'hui en termes de structures algébriques de corps et d'extensions de corps.

Revenons à présent à l'équation quadratique. Le discriminant Δ ci-dessous est une fonction d'une seule valeur et peut donc être exprimé à l'aide des coefficients c_1 et c_2 :

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = c_1^2 - 4c_2$$

La fonction $\sqrt{\Delta}$ est, quant à elle, une fonction de deux valeurs, tout comme les racines x_1 et x_2 elles mêmes. Ces fonctions peuvent donc être exprimées rationnellement l'une par rapport à l'autre avec les formules bien connues de résolution par radicaux de l'équation quadratique.

B.2 L'équation de troisième degré

Dans le cas de l'équation du troisième degré

$$x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3 = 0$$

la résolution nécessite la détermination de trois fonctions x_1, x_2, x_3 prenant trois valeurs par permutations, c'est à dire finalement d'une fonction prenant $3! = 6$ valeurs. Soit a_1, a_2, a_3 trois paramètres, la fonction $\xi = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ est une telle fonction de $3! = 6$ valeurs. Il s'agit là de ce que l'on a appelé à la suite des travaux d'Enrico Betti une "résolvante de Galois". Si l'on parvient à exprimer les racines à l'aide de radicaux, alors ξ est également exprimable par radicaux et réciproquement.

En un sens, le problème de la résolution algébrique de l'équation consiste à passer des trois fonctions d'une valeur c_1, c_2, c_3 à la fonction de six valeurs ξ . Comme dans le cas de l'équation quadratique, la racine du déterminant donne une fonction de deux valeurs à partir de laquelle toute fonction de deux valeurs peut être exprimée rationnellement. Pour résoudre le problème, il suffit donc de trouver une fonction des racines dont une certaine puissance prend deux valeurs. Tel est le cas du cube de ce que l'on appelle la résolvante de Lagrange :

$$\phi = x_1 + \omega^2x_2 + \omega x_3$$

où ω est une racine primitive de l'unité ($\omega^3 = 1$).

On peut donc exprimer ϕ rationnellement à l'aide de $\sqrt{\Delta}$:

$$\phi^3 = \frac{1}{2}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_2 + 3\sqrt{-3\Delta})$$

et l'on déduit de l'expression ci-dessus les célèbres formules de Cardan.

B.3 En général

Résoudre une équation générale de degré n implique la considération d'une fonction résolvente prenant $n!$ valeurs distinctes. C'est à partir de la considération de l'ensemble des substitutions laissant invariantes de telles fonctions et leurs facteurs polynomiaux que Galois définissait ce que l'on appelle aujourd'hui le groupe de Galois d'une équation.⁵¹ Nous avons vu qu'une résolvente de Galois est une fonction de n variables prenant $n!$ valeurs distinctes. Elle n'est par conséquent invariante que par le groupe trivial réduit à la permutation identité. A l'opposé, une fonction symétrique est invariante par toutes les substitutions du groupe symétrique. Adjoindre des racines à une équation comme nous l'avons fait plus haut avec $\sqrt{\Delta}$ implique une décomposition de la résolvente de Galois en facteurs. A chacun de ces facteurs peut être associé le groupe des substitutions le laissant invariant.

Par exemple, pour $n = 4$, la fonction suivante peut être interprétée comme exprimant les relations entre les racines d'une équation irréductible du quatrième degré :

$$\phi = x_1x_2 + x_3x_4$$

Cette fonction prend trois valeurs pour toutes les $4! = 24$ permutations de $\Sigma(4)$:

$$x_1x_2 + x_3x_4, x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3$$

Le groupe G associé à la fonction ϕ est composé des huit substitutions laissant ϕ globalement invariante :

$$G = I, (x_1x_2), (x_3x_4), (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3), (x_1x_3x_2x_4), (x_1x_4, x_2x_3).$$

⁵¹. C'est à dire, en termes contemporains, laissant stable un corps de racines.

C Annexe 3.

La représentation analytique des substitutions

C.1 Représentation et indexation

Au cours du XIX^e siècle, différentes formes de représentations des substitutions ont été développées. Citons notamment :

- la représentation en deux lignes (a s’envoie sur d ; b sur c etc.) :

$$(a, b, c, d, e, \dots)(d, c, a, e, b, \dots)$$

- la représentation par produits de transpositions :

$$(ad)(de)(eb)(bc)(ca)$$

- la représentation symbolique des opérations sur les substitutions :

$$ghg^{-1} = k$$

- la représentation tabulaire, notamment utilisée par Galois comme l’a analysé Caroline Ehrhardt⁵²

b	e	d	e	c	d	e	b	d	e	b	e
d	e	b	d	e	d	e	b	e	d	e	b
d	e	b	e	b	e	b	e	e	d	e	b
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
e	a	c	d	e	a	c	d	e	a	c	d
e	d	e	c	d	e	a	d	e	a	e	e
d	d	e	a	d	e	a	e	a	e	d	e
d	e	a	e	a	e	d	e	e	d	e	a
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
e	a	b	d	e	a	b	d	e	a	b	d
a	e	d	b	d	e	a	d	b	a	e	d
b	d	e	a	d	b	a	e	a	e	d	b
d	b	a	e	a	e	d	b	b	d	e	a

- la représentation analytique.

Cette dernière forme de représentation a joué un rôle important bien qu’elle soit passée inaperçue de nombreux travaux historiques. Elle consiste à indexer les lettres par des entiers afin de représenter les substitutions par des polynômes.

Étant donné une substitution S sur p lettres a_0, a_1, \dots, a_{p-1} , le problème consiste à déterminer une fonction analytique ϕ telle que $S(a_i) = a_{\phi(i)}$. La résolution peut s’appuyer sur l’utilisation de polynômes d’interpolation de Lagrange. Par exemple, pour $p = 5$, Hermite a démontré que les formes réduites

⁵² EHRHARDT (Caroline), *Evariste Galois. La fabrication d’une icône des mathématiques*, Paris, Éditions de l’EHESS, 2011.

de telles substitutions sont de la forme :

$$i ; i^2 ; i^3 + ai.$$

Dans le cas d'un nombre premier p de lettres, une indexation peut être obtenue par cyclotomie en considérant ces lettres comme des racines p^e de l'unité, c'est à dire comme des racines de l'équation binôme $x^p = 1$ et dont toutes les p racines sont obtenues par la suite des puissances d'une racine primitive ω de l'unité :

$$\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^i, \dots, \omega^{p-1}$$

Cette indexation, $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$, correspond donc à un groupe cyclique engendré par la substitution représentée analytiquement par $(i \ i + 1)$. Mais les racines peuvent aussi être réindexées en considérant une racine primitive g de l'équation cyclotomique $\text{mod.} p$

$$x^p \equiv 1 \text{ mod}(p)$$

afin d'obtenir la suite :

$$\omega^g, \omega^{g^2}, \dots, \omega^{g^{p-1}}$$

correspondant au même groupe cyclique mais dont la substitution génératrice est cette fois représentée sous la forme analytique $(i \ gi)$.

Dans ses célèbres *Disquisitiones arithmeticae* de 1801, Gauss avait étudié la résolubilité par radicaux des équations cyclotomiques, c'est à dire des équations irréductibles déduites des équations binômes :⁵³

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

A cette occasion, l'ensemble des racines d'une telle équation avait été décomposé en ce que Jordan désignait comme des systèmes imprimitifs. Cette décomposition s'appuyait sur des réindexations des racines en un ordre spécifique à l'aide des indexations données par une racine primitive de l'unité ω et d'une racine primitive g de l'unité modulo p , c'est à dire par les deux formes de représentations analytiques des cycles.

53. NEUMANN (Olaf), *The Disquisitiones Arithmeticae and the Theory of Equations*, in GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), SCHWERMER (Joaquim) (eds.), *The Shaping of Arithmetics after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007, p. 107-128.

Détaillons un exemple pour $p = 19$. Dans ce cas, $p - 1 = 18$ peut se factoriser en $18 = 3 \cdot 6$. Par conséquent, les 18 racines cyclotomiques

$$\omega, \omega^2, \dots, \omega^{18}$$

peuvent se répartir en 6 "périodes" (pour reprendre le terme de Gauss) de 3 racines et donc en un produit d'équations de degrés 3 et 6. Par exemple, la période des 3 racines η_1, η_2, η_3 de l'équation

$$x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$$

correspond aux sommes suivantes :

$$\eta_1 = \omega + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{18} \quad \eta_2 = \omega^2 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^{14} + \omega^{16} + \omega^{17} \quad \eta_3 = \omega^4 + \omega^6 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{13} + \omega^{15}$$

Les exposants de chaque suite de termes impliqués dans ces sommes sont indexés par des puissances successives d'une racine primitive $\text{mod.}19$. Ici, par exemple, $g = 2$ est une racine primitive de l'unité $\text{mod.}19$ (car $2^{18} = 262144 = 1 + 19 \cdot 13797$) et les indexations des η_i correspondent aux 3 cycles des 6 puissances de $2^3 \text{ mod.}19$:

$$(2^3)^0 \equiv 1 \text{ mod}(19)$$

$$(2^3)^1 \equiv 8 \text{ mod}(19)$$

$$(2^3)^2 \equiv 7 \text{ mod}(19)$$

$$(2^3)^3 \equiv 18 \text{ mod}(19)$$

$$(2^3)^4 \equiv 11 \text{ mod}(19)$$

$$(2^3)^5 \equiv 12 \text{ mod}(19)$$

Soit, finalement :

$$1, 7, 8, 11, 12, 18$$

Les exposants des deux autres suites sont alors obtenus en multipliant cette suite par $g \equiv 2 \text{ mod}(19)$ puis $g \equiv 2^2 \text{ mod}(19)$.

En général, pour toute factorisation de $p - 1 = ef$, posons $h = ge$ et considérons l'équation de degré e dont les racines correspondent aux e périodes de sommes de f termes :

$$\eta_i = \omega^i + \omega^{ih} + \dots + \omega^{ih^{f-1}} \quad (1 \leq i \leq e)$$

Cette décomposition des racines en périodes donne une factorisation de l'équation initiale en e facteurs de degrés f .

Comme l'a analysé récemment Jenny Boucard, Poinsoot avait insisté, lors d'un commentaire des travaux de Gauss en 1808, sur le procédé de décomposition simultané en "groupes" des substitutions et des lettres sur lesquelles agissent ces substitutions.⁵⁴ Il avait aussi à cette occasion mis en avant les deux formes de représentation analytique des cycles : dans la méthode de décomposition de Gauss, les "groupes" de racines peuvent être représentées "comme sur un cercle" de sorte que l'on passe d'une racine à l'autre en "avançant" d'un rang dans la liste des index i des puissances de la racine primitive ω , c'est à dire par l'opération d'addition ($i \rightarrow i + 1$) tandis que l'on passe d'un "groupe" à l'autre par "rotation" du cercle sur lui même, c'est à dire par l'opération de multiplication ($i \rightarrow gi$).

de la manière suivante :



toutes les substitutions que l'on pourra former avec deux permutations prises à la suite l'une de l'autre, et d'orient en occident dans le polygone dont il s'agit, seront équivalentes entre elles et à $\left(\begin{smallmatrix} A_i \\ A_i \end{smallmatrix} \right)$, et toutes celles que l'on pourra former avec deux permutations séparées l'une de l'autre par un nombre r de côtés dans ce même polygone seront équivalentes à la puissance r de la substitution $\left(\begin{smallmatrix} A_i \\ A_i \end{smallmatrix} \right)$. On aura, de

Un même type de représentation circulaire avait été utilisé par Cauchy dans ses travaux sur les nombres de valeurs des fonctions publiés en 1815. Contrairement à Poinsoot, Cauchy avait cependant préféré d'autres modes de représentations à la représentation analytique (notation symbolique, produits de transpositions, représentations tabulaires).⁵⁵ Il avait introduit les termes de "substitutions arithmétiques" pour le cas ($i \rightarrow i+a$) et "substitutions géométriques" pour le cas ($i \rightarrow gi$). Ces termes avaient été repris par la grande majorité de présentations de la théorie des substitutions jusqu'à la fin du XIX^e siècle. Les travaux de Jordan revendiquaient quant à eux l'héritage de Poinsoot et développaient

54. Voir à ce sujet : BOUCARD (Jenny), Louis Poinsoot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois?, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17, fasc. 1 (2011), p. 41-138. FREI (Gunther), The unpublished section eight : On the way to function fields over a finite field, in GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), SCHWERMER (Joaquim) (eds.), *The Shaping of Arithmetics after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007, p. 159-198. NEUMANN (Olaf), The Disquisitiones Arithmeticae and the Theory of Equations, in GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), SCHWERMER (Joaquim) (eds.), *op. cit.*, p. 107-128.

55. Voir DAHAN (Amy), Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept de groupe, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 23, 1980, p. 279-319.

des considérations générales sur les groupes imprimitifs sur p^n lettres. Décomposés sur le modèle de la méthode de Gauss, ces groupes engendrait des "groupes linéaires" de substitutions de forme analytique $(i \ ai + b)$.

C.2 Le critère de résolubilité de Galois

La représentation analytique des substitutions ne se limitait en effet pas à une simple notation mais s'accompagnait de procédures spécifiques de décompositions sur le modèle de la méthode de Gauss. Cette situation est bien illustrée par le rôle clé joué par cette représentation dans les travaux de Galois.

Rappelons que le théorème qui concluait le célèbre "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux" énonçait un critère de résolubilité d'une classe d'équations algébriques : les équations dont toutes la racines sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles.

Cette classe d'équations généralisait les équations étudiées par Abel, pour lesquelles toutes les racines sont fonctions d'une seule d'entre elles, équations généralisant elles mêmes les équations cyclotomiques de Gauss pour lesquelles toutes les racines peuvent être obtenues comme puissances successives d'une racine primitive.

De fait, la liste de propositions donnée par Galois ne s'arrêtait pas à l'exposé général de la première partie du Mémoire dans laquelle se trouve la célèbre présentation du problème de la résolubilité en termes d'adjonctions de racines et décompositions successives de groupes. Au contraire, la partie d'applications du mémoire visait notamment à donner un critère de résolubilité pour les équations irréductibles de degré premier.

La représentation analytique des substitutions jouait un rôle crucial dans l'énoncé et la démonstration du théorème de Galois. Ainsi, pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble par radicaux :

il faut et il suffit que toute fonction invariable par les substitutions

$$x_i, x_{ai+b}$$

soit rationnellement connue.[2, p.431]

Dans le cadre de la théorie de Galois qui nous est contemporaine, ce théorème peut s'interpréter comme énonçant qu'une équation irréductible de degré p est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est un sous groupe du groupe affine. Mais cette interprétation rétrospective ne permet pas de per-

cevoir le rôle crucial joué par la représentation analytique des substitutions. Ce rôle se manifeste au contraire dans la démonstration de Galois qui consistait à rechercher la forme analytique f des substitutions $(x_i, x_{f(i)})$ les plus générales transformant un cycle $(i \ i + a)$ en un cycle,⁵⁶ c'est à dire telle que

$$f(i + a) = f(i) + A$$

Par conséquent

$$f(i + 2a) = f(i) + 2A, \dots, f(i + ma) = f(i) + mA$$

Si $a = 1$ et $i = 0$, alors $f(i) = ai + b$. Galois désignait de telles substitutions par le terme " substitution linéaire".

Le critère de résolubilité de Galois allait constituer la principale référence aux travaux de ce dernier jusqu'à la fin du XIX^e siècle. C'était notamment ce critère qui était mis en avant par Liouville lors de l'édition des oeuvres de Galois en 1846. C'était aussi par ce critère que se concluaient toutes les présentations des travaux de Galois dans les traités publiés jusqu'à la fin du siècle, à l'exception de ceux de Jordan et Klein.

C.3 Le Fragment de second mémoire

Contrairement à la majorité de ses contemporains, Jordan s'était davantage intéressé au "Fragment d'un second mémoire" de Galois qu'au célèbre "Mémoire sur la résolubilité des équations algébriques".⁵⁷ Dans ce fragment, Galois avait tenté de généraliser son théorème aux équations irréductibles de degré p^n . Afin d'indexer des systèmes de p^n lettres, il avait partagé les lettres du "groupe", c'est à dire ici de l'ensemble des racines de l'équation,⁵⁸ en n groupes d'un

56. Il s'agit en termes contemporains de rechercher le plus grand groupe dans lequel un p groupe abélien élémentaire est distingué. Comme nous le commentons dans le coeur du texte, il s'agit également de la manière dont Jordan introduit le groupe linéaire dans son *Traité* de 1870.

57. Rappelons que si ce texte n'a été publié qu'en 1846, il n'en est probablement pas moins antérieur à la version finale du premier mémoire en raison des épisodes bien connu des pertes successives des deux premières versions soumises par Galois à l'Académie.

58. Rappelons que chez Galois, le terme "groupe" pouvait selon les cas désigner des systèmes de substitutions et des blocs de lettres. Cette ambiguïté a souvent été soulignée par les historiens. Remarquons cependant qu'il s'agit là de la nature même du concept de groupe tel qu'il se présente par exemple dans les périodes de Gauss.

même nombre de lettres p , représentés sous la forme tabulaire suivante :

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{p-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Cette décomposition permettait une indexation des lettres en n séries de p indices :

La forme générale des lettres sera

$$\begin{array}{cccccc} a & & & & & \\ k, & k, & k, & \dots & k, & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \mu & \end{array}$$

$k, k, k, \dots, k,$ étant des indices qui peuvent prendre chacun les P valeurs $0, 1, 2, 3, \dots, P - 1$.

L'indexation visait à introduire une représentation analytique des substitutions de p^n lettres par des fonctions $\phi, \psi, \chi, \dots, \sigma$ des indices :⁵⁹.

[...] dans le groupe H , toutes les substitutions seront de la forme

$$\left[\begin{array}{cccccc} a & & & & & \\ k, & k, & k, & \dots & k, & a \phi(k), \psi(k), \chi(k), \dots \sigma(k), \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \mu & 1 & 2 & 3 & \dots & \mu \end{array} \right]$$

Comme pour le cas des équations de degré premier, Galois recherchait alors la représentation analytique des substitutions "transformant les cycles en cycles".⁶⁰ Il ne donnait cependant une solution de ce problème que pour le cas des équations primitives de degré p^2 . Dans ce cas, les cycles prennent la forme

$$\left[\begin{array}{cccc} a & & & \\ k, & k', & a k + \alpha, & k' + \alpha' \\ 1 & 2 & 11 & 22 \end{array} \right]$$

59. En termes contemporains, les indices forment un corps fini de p^n éléments défini comme un espace vectoriel de dimension n sur le corps F_p

60. En termes contemporains, il s'agit de rechercher le groupe maximal dans lequel un groupe abélien élémentaire est un sous groupe distingué.

et Galois montrait que la forme analytique des substitutions cherchées est une "forme linéaire" :

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ k, & k', & mk + n, & mk' + n \\ 1 & 2 & 11 & 22 \end{bmatrix}$$

Comme nous le détaillons dans le corps de l'article, Jordan avait présenté d'une manière semblable l'"origine du groupe linéaire" sur p^n lettres dans son *Traité* de 1870.

C.4 Les imaginaires de Galois

La représentation analytique des substitutions était également liée à l'introduction par Galois des "imaginaires de la théorie des nombres" dans une note, publiée dans le *Bulletin de Férussac* en juillet 1830, et présentée comme un lemme pour l'étude des substitutions primitives.⁶¹

Nous avons vu que dans le cas de substitutions permutant un nombre premier de lettres, la suite d'indices $0, 1, 2, \dots, p - 1$ peut être réindexée par la suite $1, g, g^2, \dots, g^{p-1}$ ou g est une racine primitive de l'équation $x^p \equiv 1 \pmod{p}$. Nous avons vu également que de telles réindexations permettent de passer d'une forme d'action des cycles à une autre, c'est à dire de la représentation analytique $(i \ i + 1)$ à $(i \ gi)$. Dans sa "Note sur la théorie des nombres", Galois avait généralisé ce mode d'indexation au cas de p^n lettres. Il considérait les p^n expressions algébriques

$$a^{j^{n-1}} + b^{j^{n-2}} + \dots + 1$$

formées avec une racine imaginaire j d'une équation irréductible de degré n modulo p ,

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

et montrait que des telles expressions peuvent être considérées comme les p^n racines de l'équation

$$x^{p^n} \equiv x \pmod{p}$$

Un système de p^n indices peut être ainsi **réindexé**⁶² par analogie avec l'indexation cyclotomique de p lettres par la suite des puissances d'une racine primitive

61. Avant Galois, les équations de congruences et corps finis avaient été considéré par Gauss ainsi que par Poinsot. Voir Frei, 2007, *op. cit* et Boucard, 2011, *op. cit*.

62. En termes contemporains, un corps fini de p^n éléments définit à la fois un groupe additif, ou un espace vectoriel de dimension n sur F_p , et un groupe cyclique de p^{n-1} éléments, son groupe multiplicatif.

j de la congruence ci-dessus.

La conclusion de la note est consacrée à l'utilisation d'une telle indexation pour les racines d'une équation primitive de degré p^n . Une représentation analytique des substitutions sur p^n lettres est ainsi obtenue par le recours à un seul paramètre j , à la différence des suites d'indices employées dans le fragment de second mémoire.

Galois en déduisait un critère de résolubilité des équations primitives de degré p^n que Jordan allait plus tard contredire, à savoir que de telles équations sont résolubles si et seulement si leurs substitutions prennent une forme linéaire. Il n'avait cependant pas donné de démonstration de son énoncé et s'était contenté d'indiquer que celui-ci découlait de la décomposition de la forme linéaire des substitutions

$$(j(aj + b)^{p^r})$$

en un produit

$$a'(i + b')^{p^r}$$

sur le modèle de la démonstration du critère de résolubilité des équations de degré p : "les personnes habituées à la théorie des équations le verront sans peine".[2, p.435]

C.5 Principes généraux et applications

Il est bien connu que Galois avait distingué entre les principes généraux qu'il avait exposé dans son Mémoire et leurs applications aux équations de degré premier, aux équations primitives de degré p^n et aux équations modulaires.

Durant le XX^e siècle, les commentaires sur Galois se sont souvent focalisés sur ces principes généraux dans le cadre de quêtes d'origines de la théorie de Galois et de la théorie des groupes. Il faut cependant être attentif au rôle de modèle joué par les "applications". La décomposition de la forme analytique des substitutions linéaires donne en particulier un modèle aux principes plus généraux de décompositions des groupes. Ce rôle de modèle se manifeste aussi dans le *Traité* de Jordan en 1870 comme nous le décrivons dans le corps du texte.

Dans sa célèbre lettre à Chevalier, Galois lui même soulignait le rôle de modèle joué par la "méthode de décomposition de M. Gauss" pour un premier type de décomposition des groupes. Déjà dans sa première note sur la question de la résolubilité des équations - parue en avril 1830 dans le *Bulletin de Ferrusac*

- Galois avait introduit une distinction entre **équations primitives et non primitives**⁶³ appelées également "équations de M. Gauss". Dans le "Fragment de second mémoire", le problème des équations résolubles de degré composé était précisément réduit par la "méthode de décomposition de M. Gauss" à celui des équations résolubles primitives de degré p^n .

Au contraire, l'étude des cas de réduction de degré des équations modulaires, associées à la forme analytique homographique $\frac{ai+b}{ci+d}$ ($ad - bc \neq 0$), avait servi de modèle à un autre mode de décomposition des groupes et avait par là mis en évidence la spécificité du mode précédent que Galois avait alors dénommé "**décomposition propre**".⁶⁴

Nous avons vu que cette décomposition propre était indissociable de celle de la forme analytique linéaire $(i ai + b)$ en deux formes d'actions des cycles $(i i+1)$ et $(i gi)$. C'était encore sur ce modèle que Galois avait étendu son critère de résolubilité aux équations résolubles primitives de degré p^n en énonçant que ces dernières devaient être associées à la forme linéaire :

$$x_{k,l,m,\dots} | x_{ak+bl+cm+\dots+h, a'k+b'l+c'm+\dots+h', a''k+\dots}$$

La réfutation de cet énoncé allait constituer le point de départ de la relation établie par Jordan à Galois en 1860.

C.6 La représentation analytique des substitutions et les réceptions des travaux de Galois

Les trois formes de représentations analytiques des substitutions utilisées par Galois permettent également de suivre différentes formes de réceptions des travaux de ce dernier. En effet, à l'exception des commentaires systématiques d'Enrico Betti au début des années 1850 et de ceux de Camille Jordan à la fin des années 1860, les références à Galois ont le plus souvent visé une partie précise des travaux de ce dernier.

- La forme $(i ai + b)$

Comme nous l'avons vu, les substitutions linéaires à une variable étaient associées au théorème concluant le Mémoire de Galois et donnant un critère de résolubilité des équations irréductibles de degré premier. Ce

63. Une équation non primitive de degré mn est une équation qui peut être décomposée en m facteurs de degrés n par le moyen d'une seule équation de degré m .

64. Le premier cas correspond en termes contemporains à une décomposition en sous groupes distingués tandis que le second s'appuie sur des sous groupes non distingués.

théorème avait constitué la principale forme de référence aux accomplissements de Galois jusqu'à la fin du XIX^e siècle, c'est à dire pendant la période séparant la mise en lumière de ce théorème par Liouville lors de la première édition des oeuvres de Galois et sa disparition complète de la nouvelle préface rédigée par Picard en 1897.

Le théorème de résolubilité de que l'on a appelé plus tard les "équations de Galois" concluait ainsi la grande majorité des présentations de la théorie de Galois des équations algébriques à l'exception de celles de Jordan et de Klein qui n'y faisaient pas même mention.⁶⁵

- La forme $(i \frac{ai+b}{ci+d})$

Contrairement aux traités, les articles faisant références aux travaux de Galois mentionnent rarement le critère de résolubilité et bien plus souvent l'énoncé de Galois relatifs à la réduction du degré des équations modulaires d'ordre 5, 7 et 11. L'intérêt d'Hermite, Betti et Kronecker pour cet énoncé se manifeste dès le début des années 1850 et s'affirme à la fin de la décennie avec l'utilisation de l'équation modulaire d'ordre 5 pour donner une expression analytique des racines de l'équation générale du cinquième degré à l'aide des fonctions elliptiques.

Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, la référence aux travaux de "Galois-Betti-Hermite" sur l'équation modulaire devient l'une des principales formes de références aux travaux de Galois. Elle intervient notamment de manière cruciale dans le *Traité* de Jordan en 1870 ([annexe 4](#)).

- La forme linéaire générale

$$(k, l, m, \dots; ak + bl + cm + \dots + h, a'k + b'k + c'm + \dots + h', a''k + \dots)$$

Les références aux travaux de Galois sur les équations de degré composé sont nettement plus rares que les précédentes et s'accompagnent d'usages de la représentation analytique des substitutions de p^n variables ainsi que des imaginaires de Galois.

Après Betti en 1851, on trouve une telle référence dans deux courtes notes publiées en 1856 par Alexandre Allégret. Ces notes visaient à généraliser le critère de Galois aux équations de degré composé, problématique que l'auteur avait relié aux travaux récents de Kronecker, Betti et Pierre-Laurent Wantzel. Allégret avait par conséquent été l'un des rares prédécesseurs de

65. Ainsi en est-il des traités de Serret (1866), Netto (1882), Bolza (1891), Borel et Drach (1895), Vogt (1895), Weber (1895), Picard (1897), Pierpont (1900).

Jordan à mettre en avant les "groupes de substitutions linéaires définis par Galois" en relation avec les congruences et les équations cyclotomiques. La référence par Jordan à partir de 1861 à cette partie des travaux de Galois se présente donc comme une spécificité forte des travaux de ce dernier. Son approche générale sur les groupes linéaires de n variables n'allait d'ailleurs pas être reprise par la suite dans les présentations de la théorie des substitutions publiées jusqu'à la fin du siècle.⁶⁶ Comme nous l'évoquons dans le corps du texte, cette approche allait en réalité circuler dans un premier temps dans d'autres domaines comme les équations différentielles linéaires.

D Annexe 4.

Sur le livre III Des irrationnelles du *Traité* de Jordan

A partir de 1867, Jordan avait progressivement réorganisé ses travaux dans un nouveau cadre, centré non plus sur les relations transversales de la théorie de l'ordre mais sur un objet : le groupe de substitutions.

C'était dans ce nouveau cadre que se situait la présentation des principes généraux de Galois donnée au Livre III consacré aux irrationnelles. Cette approche se plaçait dans un héritage différent de celui de la théorie de l'ordre qui consistait en une interprétation des "principes de Galois" en relation avec l'étude "irrationnelles" définies par des types d'équations algébriques générales non résolubles par radicaux (Hermite, Betti, Kronecker, Serret etc.).

Contrairement à ce qui était devenu au XX^e siècle un lieu commun de l'historiographie de l'algèbre, et à l'exception du domaine de l'enseignement de l'Algèbre supérieure, les travaux de Galois ont pendant longtemps été envisagés dans des cadres différents de ceux de la théorie des équations ou de la théorie des substitutions. Le problème de la "classification et la transformation" des "irrationnelles" impliquait notamment les fonctions elliptiques et abéliennes et par conséquent l'analyse complexe. Il mêlait ainsi algèbre, arithmétique et analyse comme l'illustrent les résolutions par Hermite et Kronecker de l'équation générale du cinquième degré par l'équation modulaire d'ordre 5 des fonctions elliptiques. L'impossibilité d'exprimer par des fonctions algébriques les racines

66. Voir notamment les présentations de Netto (1882), Klein (1884), Klein and Fricke (1890), Bolza (1891), Borel et Drach (1895), Weber (1895), Picard (1897), Pierpont (1900).

des équations de degré supérieur ou égal à 5 posait en effet la question de la détermination des fonctions analytiques les plus générales permettant l'expression de telles racines pour des types d'équations caractérisant des "ordres d'irrationalités".

Pour Jordan, l'invariance de la chaîne de quotients successifs de la décomposition des groupes par le théorème dit de Jordan-Hölder caractérisait l'"ordre d'irrationalité" d'une équation algébrique. Le Livre III s'appuyait alors à la fois sur l'approche d'Hermite mêlant analyse, algébrique et arithmétique⁶⁷ et sur l'approche géométrique de Clebsch sur la théorie des invariants et les fonctions abéliennes.

Le résultat clé du Livre III mettait en relation la réduction du degré de l'équation (de degré 80) de la trisection des périodes des fonctions abéliennes à quatre périodes et le groupe de l'équation des 27 droites sur une surface cubique. Cet énoncé jouait un rôle important pour légitimer l'approche de Jordan. Pour ce dernier, le résultat sur les 27 droites témoignait en effet de ce que les [groupes de substitutions des équations spéciales de la géométrie](#)⁶⁸ permettent "l'étude des propriétés cachées de l'équation considérée".[11, p.656]

Tous les géomètres connaissent le fait de l'abaissement des équations modulaires pour les transformations des degrés 5, 7 et 11, et les importantes conséquences qu'en a déduites M. Hermite. MM. Clebsch et Gordan ont signalé un abaissement analogue pour les équations des périodes dont dépend la bissection des fonctions abéliennes. Nous venons d'obtenir un résultat du même genre pour l'équation qui donne la trisection dans les fonctions à quatre périodes. [...] La réduite Z présente cette particularité remarquable d'avoir le même groupe que l'équation X qui détermine les vingt-sept droites situées sur une surface du troisième ordre. [...] Mais cette proposition exigeant quelques développements, nous en réservons la démonstration pour le *Traité des équations algébriques* que nous nous occupons de publier.[12]

67. GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), SCHWERMER (Joaquim) (eds.), *The Shaping of Arithmetics after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007.

68. Ces groupes n'étaient cependant pas introduits comme des groupes de Galois mais par l'invariance de formes algébriques. Le groupe symplectique $Sp_{2n}(p)$ était ainsi introduit par Jordan en 1869 comme laissant invariant une forme bilinéaire alternée non dégénérée. La notion d'"adjonction" de racine algébrique associée à Galois était quant à elle utilisée pour relier les groupes les uns aux autres. Par exemple, par "adjonctions" successives de racines, le groupe des 28 doubles tangentes d'une surface quartique se réduit aux groupes des 27 droites sur une cubique et des 16 droites sur une quartique.

Jordan avait mené la réduction de l'équation des 27 droites sur le modèle de la réduction du degré des équations modulaires des fonctions elliptiques d'ordre 5. Comme l'avait énoncé Galois, et comme l'avait démontré Hermite à la suite de travaux de Betti, l'équation modulaire d'ordre 5 peut être "réduite" du degré 6 au degré 5. Une telle **réduction**⁶⁹ est possible pour les équations modulaires d'ordres $p = 5, 7, 11$.

Une telle équation dont le groupe de Galois est plus petit que le groupe symétrique avait été dénommée "équation affectée" par Kronecker. La notion d'"affect" d'une équation avait été envisagée par ce dernier et par Hermite comme traduisant une propriété relative à l'ordre d'irrationalité de la quantité introduite par l'équation considérée. Cette notion visait initialement surtout les équations de degré 7. En effet, alors que l'équation générale de degré 5 peut être résolue par les fonctions elliptiques, des expressions analytiques de solutions d'équations de degré 7 ne pouvaient être obtenues que pour des cas d'équations affectées. L'un des principaux théorèmes du livre III de Jordan énonçait l'impossibilité de résoudre par les fonctions elliptiques les équations générales de degré strictement supérieur à 5 et la nécessité de recourir à des fonctions abéliennes de plusieurs périodes.

Par sa référence aux travaux de Galois, Jordan visait en partie à légitimer une approche qui, contrairement aux travaux d'Hermite, ne donnait pas plus de solution explicite au problème du nombre des valeurs des fonctions que d'expression analytique des racines d'une équation. Au contraire, Jordan revendiquait une approche "générale" de ces deux problèmes en considérant des substitutions de n variables et en établissant des relations entre des classes de groupes (transitifs, primitifs, linéaires...). Ainsi, lors de son premier commentaire sur Galois dans le supplément de sa thèse, Jordan légitimait son premier théorème sur la décomposition des groupes primitifs en groupes linéaires sur p^n lettres par son application aux équations algébriques :

Il résulte de ce théorème que l'étude générale des équations et celle des systèmes de substitutions ne constituent au fond qu'un seul et même problème. Si les définitions et les théorèmes donnés dans ce Mémoire entrent bien dans le vif de la question, si les distinctions que j'y ai faites sont vraiment fondamentales, elles doivent

⁶⁹. En termes actuels, elle consiste à déterminer un sous groupe non distingué d'index p de $PSL_2(p)$ (qui est simple pour $p > 3$). Le groupe de Galois de l'équation modulaire réduite au degré 5 est $PSL_2(5)$, il est donc isomorphe au groupe alterné A_5 et peut être envisagé comme obtenu par une réduction du groupe symétrique $\Sigma(5)$ par l'"adjonction" du discriminant de l'équation générale du cinquième degré.

représenter quelque propriété essentielle de l'équation correspondante au système considéré .[14, p.187]

L'approche de Jordan avait été sévèrement critiquée par Kronecker comme une approche formelle procédant d'une fausse généralité. Pour ce dernier, Jordan avait donné abusivement à une méthode, l'usage de substitutions, le statut d'un objet d'étude.⁷⁰

Références

- [1] É. Galois, Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations, *Bulletin des sciences mathématiques physiques et chimiques*, t. 13, n° 55 (1830), p. 171-172. Repr. in [Galois 1846, p.395-396].
- [2] É. Galois, Sur la théorie des nombres, *Bulletin des sciences mathématiques physiques et chimiques*, t. 13, n° 55 (1830), p. 428-435. Repr. in [Galois 1846, p.398-407].
- [3] É. Galois, Fragment d'un second Mémoire. Des équations primitives qui sont solubles par radicaux, in [Galois 1846, p.434-444].
- [4] É. Galois, Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, in [Galois 1846, p. 417-433].
- [5] É. Galois, Lettre du 29 mai 1832 à Auguste Chevalier. *Revue encyclopédique*, septembre 1832, p. 568-576. Repr. in [Galois 1846, p. 408-415].
- [6] É. Galois, Œuvres mathématiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11 (1846), 381-444.
- [7] C. Jordan, *Sur le nombre des valeurs des fonctions, Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris par Camille Jordan, 1re thèse*, Paris : Mallet-Bachelier, 1860.
- [8] C. Jordan, Mémoire sur les groupes des équations solubles par radicaux, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 58 (1864), p. 963-966.
- [9] C. Jordan, Mémoire sur la résolution algébrique des équations, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 12(2) (1867), pp. 109-157.
- [10] C. Jordan, Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2 , *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 32 (2) (1868), p. 111-135.

⁷⁰. Voir à ce sujet : BRECHENMACHER (Frédéric), La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13 (2007), p. 187-257.

- [11] C. Jordan, Sur les équations de la géométrie, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t.68 (1869), p. 656-659.
- [12] C. Jordan, Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t.68 (1869), p. 865-869.
- [13] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870.
- [14] C. Jordan, Sur la résolution des équations différentielles linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 73, 787-791.
- [15] C. Jordan, *Notice sur les travaux de M. Camille Jordan à l'appui de sa candidature à l'Académie des sciences*, Paris : Gauthier-Villars, 1881.
- [16] C. Jordan, *Œuvres de Camille Jordan. Publiées sous la direction de M. Gaston Julia, par M. Jean Dieudonné*, Paris : Gauthier-Villars, 1961-1964.