



HAL
open science

On the KKM principle

Marc Lassonde

► **To cite this version:**

Marc Lassonde. On the KKM principle. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1990, 310 (7), pp.573-576. hal-00699227

HAL Id: hal-00699227

<https://hal.science/hal-00699227>

Submitted on 18 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur le principe KKM

Marc LASSONDE

Nous montrons d'abord que les versions "fermée" et "ouverte" du Principe KKM se déduisent l'une de l'autre. Nous montrons ensuite que, comme la version "fermée" (dont les applications sont bien connues), la version "ouverte" possède quelques conséquences remarquables : par exemple, elle conduit directement au théorème de "matching" de Fan et permet une démonstration particulièrement simple du théorème de point fixe de Kakutani-Fan-Glicksberg.

On the KKM principle

Abstract – *We first show that the "close" and "open" versions of the KKM principle can be derived from each other. We next show that, just like the "closed" version (whose applications are well known), the "open" version has some noteworthy consequences: for instance, it directly leads to Fan's matching theorem and permits a very simple proof of Kakutani-Fan-Glicksberg's fixed point theorem.*

1. VERSIONS FERMÉE ET OUVERTE DU PRINCIPE KKM. – Soient D et X deux ensembles et $F : D \rightarrow X$ une application multivoque (appelée simplement application par la suite). On appelle *valeurs* de F les ensembles Fx , $x \in D$, et *fibres* de F les ensembles $F^{-1}y = \{x \in D : y \in Fx\}$, $y \in X$.

Soient X un ensemble convexe (dans un espace vectoriel) et $D \subset X$. On note coD l'enveloppe convexe de D , et $\langle D \rangle$ l'ensemble de toutes les parties finies non vides de D . On désigne par X_f l'ensemble X muni de la *topologie finie*⁽¹⁾.

Le lemme classique de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz conduit directement au principe suivant :

PRINCIPE KKM_f. – *Soient D un sous-ensemble quelconque d'un ensemble convexe X et $F : D \rightarrow X$ une application à valeurs fermées dans X_f . Si pour tout $A \in \langle D \rangle$ on a $coA \subset \bigcup_{x \in A} Fx$, alors pour tout $A \in \langle D \rangle$ on a $coA \cap \bigcap_{x \in A} Fx \neq \emptyset$.*

Nous allons montrer par un argument simple que l'on peut remplacer *valeurs fermées* par *valeurs ouvertes* dans l'énoncé ci-dessus. Nous obtenons ainsi une version "ouverte" du principe KKM :

THÉORÈME 1 (*Principe KKM_o*)⁽²⁾. – Soient D un sous-ensemble quelconque d'un ensemble convexe X et $G : D \rightarrow X$ une application à valeurs ouvertes dans X_f . Si pour tout $A \in \langle D \rangle$ on a $coA \subset \bigcup_{x \in A} Gx$, alors pour tout $A \in \langle D \rangle$ on a $coA \cap \bigcap_{x \in A} Gx \neq \emptyset$.

Démonstration. – On peut clairement supposer que D est un ensemble fini. Pour tout $A \in \langle D \rangle$, la famille finie $\{Gx \cap coA\}_{x \in A}$ forme un recouvrement ouvert de l'ensemble compact coA . Il existe donc, pour tout $A \in \langle D \rangle$, une application $F_A : A \rightarrow coA$ telle que la famille $\{F_Ax\}_{x \in A}$ forme un recouvrement fermé de coA et $F_Ax \subset Gx$ pour tout $x \in A$. Alors l'application $F : D \rightarrow X$ définie par

$$x \rightarrow Fx = \bigcup \{F_Ax : A \in \langle D \rangle \text{ et } A \ni x\}$$

est à valeurs fermées dans X_f et vérifie $coA \subset \bigcup_{x \in A} Fx$ pour tout $A \in \langle D \rangle$. Il résulte du Principe KKM_f que $coA \cap \bigcap_{x \in A} Fx \neq \emptyset$ pour tout $A \in \langle D \rangle$, d'où la conclusion puisque $Fx \subset Gx$ pour tout $x \in D$. \square

Un argument similaire permet, réciproquement, de retrouver la version “fermée” du principe KKM à partir de la version “ouverte” :

Démonstration du Principe KKM_f à partir du Principe KKM_o. – Supposons que $coA \cap \bigcap_{x \in A} Fx = \emptyset$ pour un certain $A \in \langle D \rangle$. Il existe alors une application $G_A : A \rightarrow coA$ à valeurs ouvertes telle que $\bigcap_{x \in A} G_Ax = \emptyset$ et $G_Ax \supset Fx \cap coA$ pour tout $x \in A$. On déduit du Principe KKM_o que, pour un certain $B \in \langle A \rangle$, coB n'est pas contenu dans $\bigcup_{x \in B} G_Ax$, donc *a fortiori* coB n'est pas contenu dans $\bigcup_{x \in B} Fx$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Le Principe KKM_f possède de nombreuses applications dans divers domaines des mathématiques : voir par exemple [3, 8, 2]. Dans ce qui suit, nous montrons que le Principe KKM_o possède lui aussi quelques applications remarquables (voir également [6]).

2. AUTRES FORMULATIONS DU PRINCIPE KKM_o. – Le Principe KKM_o peut se formuler comme un théorème de “matching” (théorème 2) ou comme un théorème de point fixe (théorème 3).

THÉORÈME 2. – Soient D un sous-ensemble quelconque d'un ensemble convexe X et $F : D \rightarrow X$ une application à valeurs fermées dans X_f . S'il existe $A \in \langle D \rangle$ tel que $coA \subset \bigcup_{x \in A} Fx$, alors il existe $B \in \langle D \rangle$ tel que $coB \cap \bigcap_{x \in B} Fx \neq \emptyset$.

On passe du théorème 1 au théorème 2 (et vice-versa) en considérant l'application $x \rightarrow Gx = X \setminus Fx$.

THÉORÈME 3⁽³⁾. – Soient X un ensemble convexe non vide et $T : X \rightarrow X$ une application à valeurs convexes et à fibres fermées dans X_f . S'il existe une partie finie $A \subset X$ telle que $Tx \cap A \neq \emptyset$ pour tout $x \in coA$, alors il existe un point $x_0 \in X$ tel que $x_0 \in Tx_0$.

Démonstration. – Considérons $F : X \rightarrow X$ définie par $Fx = T^{-1}x$ pour tout $x \in X$. La condition $Tx \cap A \neq \emptyset$ pour tout $x \in coA$ est équivalente à $coA \subset \bigcup_{x \in A} Fx$. D’après le théorème 2 il existe donc $B \in \langle X \rangle$ tel que $coB \cap \bigcap_{x \in B} Fx \neq \emptyset$. Soit alors $x_0 \in coB$ tel que $x_0 \in Fx$ pour tout $x \in B$, c’est-à-dire tel que $x \in Tx_0$ pour tout $x \in B$. Comme Tx_0 est convexe, $coB \subset Tx_0$ et donc $x_0 \in Tx_0$. \square

Réciproquement, on peut démontrer le théorème 2 à l’aide du théorème 3 de la façon suivante. Soient D, X et $F : D \rightarrow X$ comme dans le théorème 2. Supposons qu’il existe $A \in \langle D \rangle$ tel que $coA \subset \bigcup_{x \in A} Fx$. L’application $x \rightarrow co(F^{-1}x \cap A)$ de coA dans coA vérifie alors les conditions du théorème 3. Elle possède par conséquent un point fixe, ce qui implique la conclusion du théorème 2, comme on le vérifie facilement.

Remarque. – Si l’on remplace *fermé* par *ouvert* dans les théorèmes ci-dessus, on obtient des énoncés équivalents au Principe KKM_f.

3. APPLICATION 1 : THÉORÈMES D’INTERSECTION. – Les résultats suivants sont des conséquences immédiates du théorème 2.

THÉORÈME DE “MATCHING” DE FAN⁽⁴⁾. – *Dans un ensemble convexe X muni de la topologie finie, soient $\{A_i\}_{i=1}^n$ une famille de n sous-ensembles fermés recouvrant X et $\{x_i\}_{i=1}^n$ une famille de n points quelconques. Alors, il existe un sous-ensemble d’indices $J \subset I = \{1, \dots, n\}$ tel que $co\{x_j : j \in J\} \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.*

Démonstration. – Posons $D = \{x_1, \dots, x_n\}$ et considérons l’application $F : D \rightarrow X$ définie par $Fx_i = A_i$ pour chaque $x_i \in D$. Comme $coD \subset \bigcup_{x \in D} Fx$, on déduit du théorème 2 qu’il existe $J \subset I$ tel que $co\{x_j : j \in J\} \cap \bigcap_{j \in J} Fx_j \neq \emptyset$. \square

THÉORÈME D’ALEXANDROFF-PASYNKOFF [1]. – *Dans un ensemble convexe X muni de la topologie finie, soient $\{A_i\}_{i=1}^n$ une famille de n sous-ensembles fermés recouvrant X et $\{x_i\}_{i=1}^n$ une famille de n points tels que $co\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \subset A_i$ pour chaque $i = 1, \dots, n$. Alors $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$.*

Démonstration. – D’après le théorème précédent, il existe $J \subset I = \{1, \dots, n\}$ tel que $co\{x_j : j \in J\} \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$. Or, $co\{x_j : j \in J\} \subset \bigcap\{A_i : i \in I \setminus J\}$, d’où le résultat. \square

GÉNÉRALISATION DU LEMME DE KLEE⁽⁵⁾. – *Dans un ensemble convexe X muni de la topologie finie, soit $\{A_i\}_{i=1}^n$ une famille de n sous-ensembles fermés recouvrant X . Si l’intersection de $n - 1$ quelconques d’entre ces sous-ensembles est non vide, alors il existe un sous-ensemble d’indices $J \subset I = \{1, \dots, n\}$ tel que $co(\bigcap\{A_i : i \in I \setminus J\}) \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.*

Démonstration. – Pour chaque $i \in I$, choisissons $x_i \in \bigcap\{A_j : j \in I \text{ et } j \neq i\}$. D’après le théorème de “matching” de Fan, il existe $J \subset I$ tel que $co\{x_j : j \in J\} \cap \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$. Or, $\{x_j : j \in J\} \subset \bigcap\{A_i : i \in I \setminus J\}$, d’où le résultat. \square

Remarque. – On peut remplacer *fermé* par *ouvert* dans les résultats ci-dessus : il suffit pour cela d'utiliser le Principe KKM_f plutôt que le Principe KKM_o .

4. APPLICATION 2 : POINTS FIXES APPROCHÉS. – Soient D et X deux espaces topologiques. Une application $\Gamma : D \rightarrow X$ est dite *semi-continue supérieurement* si pour chaque ensemble fermé $B \subset X$, l'ensemble $\Gamma^{-1}(B) = \{x \in D : \Gamma x \cap B \neq \emptyset\}$ est fermé dans D ; Γ est dite *compacte* si l'ensemble $\Gamma(D) = \bigcup_{x \in D} \Gamma x$ est relativement compact dans X .

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 3.

THÉORÈME 4. – Soient X un ensemble convexe non vide dans un espace vectoriel topologique E et $\Gamma : X \rightarrow X$ une application compacte, semi-continue supérieurement de X_f dans E , à valeurs convexes non vides. Alors, pour tout voisinage convexe fermé V de l'origine dans E , il existe un point $x_V \in X$ tel que $\Gamma x_V \cap (x_V + V) \neq \emptyset$.

Démonstration. – Puisque Γ est compacte, il existe un ensemble fini $A \subset X$ tel que $\Gamma(X) \subset A + V$. Il s'ensuit que $(\Gamma x - V) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Alors l'application $T : X \rightarrow X$ définie par $x \rightarrow Tx = (\Gamma x - V) \cap X$ vérifie les conditions du théorème 3. Elle possède donc un point fixe, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque. – Si l'on part du Principe KKM_f (au lieu du Principe KKM_o), on aboutit à un théorème de point fixe approché pour applications semi-continues *inférieurement* (au lieu de *supérieurement*).

Le dernier théorème est une généralisation du théorème de point fixe de Kakutani-Fan-Glicksberg :

THÉORÈME DE HIMMELBERG [5]. – Soient X un ensemble convexe non vide dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et $\Gamma : X \rightarrow X$ une application compacte, semi-continue supérieurement, à valeurs convexes fermées non vides. Alors, il existe un point $x_0 \in X$ tel que $x_0 \in \Gamma x_0$.

Le théorème de Himmelberg résulte aussitôt du théorème 4 et du lemme bien connu suivant :

LEMME. – Soient X un ensemble convexe non vide dans un espace vectoriel topologique séparé et $\Gamma : X \rightarrow X$ une application compacte, semi-continue supérieurement, à valeurs fermées non vides. Alors, Γ possède un point fixe si et seulement si pour tout voisinage V de l'origine, il existe un point $x_V \in X$ tel que $\Gamma x_V \cap (x_V + V) \neq \emptyset$.

L'auteur remercie A. Granas pour des discussions fructueuses concernant ce travail.

(1) Un ensemble $U \subset X$ est ouvert pour X_f si pour tout $A \in \langle X \rangle$, $U \cap coA$ est ouvert dans coA muni de la topologie euclidienne.

(2) Ce théorème est suggéré par un résultat de [6]; notre démonstration est cependant fort différente puisqu'elle ne fait pas appel au théorème de point fixe de Kakutani, contrairement à celle de [6].

- (3) Améliore légèrement [6, Theorem 3].
- (4) Ce résultat est démontré dans [4] à partir du théorème de point fixe de Kakutani-Fan-Glicksberg.
- (5) Dans le lemme de Klee [7] les ensembles A_i sont supposés convexes.

References

- [1] P. ALEXANDROFF ET B. PASYNKOFF, Elementary proof of the essentiality of the identical mapping of a simplex (en russe), *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 12 (5) (77), 1957, p. 175-179
- [2] J. DUGUNDJI ET A. GRANAS, *Fixed point theory, Vol. I*, Monografie Matematyczne 61, Varsovie, 1982
- [3] K. FAN, A minimax inequality and applications, *in Inequalities III* (O. Shisha, Ed.), p. 103-113, Academic Press, New York/London, 1972
- [4] K. FAN, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, 266, 1984, p. 519-537
- [5] C. J. HIMMELBERG, Fixed points of compact multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.*, 38, 1972, p. 205-207
- [6] W. H. KIM, Some applications of the Kakutani fixed point theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 121, 1987, p. 119-122
- [7] V. L. KLEE, On certain intersection properties of convex sets, *Canad. J. of Math.*, 3, 1951, p. 272-275
- [8] M. LASSONDE, Multi-applications KKM en analyse non linéaire, Thèse de Doctorat, Université de Montréal, 1978

Département de Mathématiques Appliquées
Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand)
63177 Aubière Cédex