



**HAL**  
open science

## Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes avec perturbations et retards

Christophe Fiter, Laurentiu Hetel, Wilfrid Perruquetti, Jean-Pierre Richard

► **To cite this version:**

Christophe Fiter, Laurentiu Hetel, Wilfrid Perruquetti, Jean-Pierre Richard. Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes avec perturbations et retards. 8th Colloque Francophone sur la Modélisation des Systèmes Réactifs (MSR), Nov 2011, Villeneuve d'Ascq, France. pp.189-203, 10.3166/jesa.45.189-203 . hal-00698568

**HAL Id: hal-00698568**

**<https://hal.science/hal-00698568>**

Submitted on 16 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes avec perturbations et retards

Christophe Fiter\* — Laurentiu Hetel\* — Wilfrid Perruquetti\*,\*\* — Jean-Pierre Richard\*,\*\*

\* Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (CNRS FRE 3303)  
École Centrale de Lille, Cité Scientifique – B.P. 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex  
christophe.fiter@centraliens-lille.org,  
{laurentiu.hetel, wilfrid.perruquetti, jean-pierre.richard}@ec-lille.fr

\*\* Non-A, INRIA Lille Nord Europe, France

---

*RÉSUMÉ.* Dans ce travail, nous présentons un contrôle dynamique de l'échantillonnage qui permet d'élargir le pas d'échantillonnage de commande par retour d'état. Nous nous intéressons au cas de systèmes échantillonnés linéaires sujets à des perturbations et des retards, et assurons leur stabilité  $\mathcal{L}_2$ . L'approche est basée sur une nouvelle classe de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dont les matrices dépendent de l'état. Grâce aux LMIs obtenues, une cartographie de l'espace d'état est réalisée hors-ligne: elle donne pour chaque point de l'espace d'état le pas d'échantillonnage maximal admissible, ce qui permet de réduire le nombre de mises à jour de l'actionneur pendant le contrôle du système en temps-réel.

*ABSTRACT.* In this work we present a state-dependent sampling control that enlarges the sampling intervals of state-feedback control. We consider the case of perturbed delayed linear time-invariant sampled-data systems and guarantee their  $\mathcal{L}_2$ -stability. The approach is based on a novel class of Lyapunov-Krasovskii functions with state-dependent matrices. It results in an LMI problem that allows for enlarging the sampling interval according to the system state. Then, a mapping of the state space is designed offline: it computes for each state of the state space the maximum allowable sampling interval, which makes it possible to reduce the number of actuations during the real-time control of the system.

*MOTS-CLÉS :* Système embarqué/commandé par réseau, échantillonnage dépendant de l'état, Lyapunov-Krasovskii, inégalité matricielle linéaire, système à retard, stabilité  $\mathcal{L}_2$

*KEYWORDS:* Networked/embedded control system, state-dependent sampling, Lyapunov-Krasovskii, linear matrix inequality, time-delay system,  $\mathcal{L}_2$ -stability

---

## 1. Introduction

Ces dernières décennies, une large attention a été portée aux systèmes embarqués et aux systèmes commandés en réseaux (Zhang *et al.*, 2001). Ces systèmes amènent de nouveaux défis, puisqu'ils doivent très souvent partager des ressources processeur et réseau limitées avec plusieurs applications. En pratique, cela se traduit souvent par l'apparition de retards de transmission ainsi qu'une limitation de la fréquence d'échantillonnage. Ces deux phénomènes, s'ils ne sont pas correctement pris en compte, peuvent fortement dégrader les performances du système, voire le rendre instable.

Du point de vue du contrôle, un enjeu majeur est d'établir des lois de commande robustes à ces retards et pas d'échantillonnage variables. Du point de vue de l'informatique, ce sont les questions d'ordonnancement et de réduction de l'utilisation des ressources (processeur et bande passante) qui sont privilégiées. Dès lors, on peut se demander si les outils de la théorie du contrôle pourraient être utilisés dans le but de limiter l'accès aux capteurs et aux actionneurs afin de libérer des ressources et ainsi permettre potentiellement de faire tourner plus d'applications sur le même hardware.

De nombreux travaux ont traité l'aspect de robustesse vis-à-vis des systèmes à pas d'échantillonnage variable (voir (Fridman *et al.*, 2004), (Fridman, 2010), (Seuret, 2009), et (Hetel *et al.*, 2011)), des systèmes à retard variable (voir (Gu *et al.*, 2003) et (Richard, 2003)), ou des systèmes à retard et pas d'échantillonnage variables (voir (Jiang *et al.*, 2010b), (Naghstabrizi *et al.*, 2010), et (Liu *et al.*, 2009)). Dans tous ces papiers, l'objectif est d'établir des majorations sur le pas d'échantillonnage (resp. le retard) qui assurent la stabilité du système quelles que soient les variations. Cependant, les conditions sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) proposées dans la littérature ne permettent d'obtenir qu'un pas d'échantillonnage maximal unique pour tout l'espace d'état du système. Ceci constitue une restriction : pour réduire le nombre de mises à jour des actionneurs, il peut se révéler utile d'adapter le pas d'échantillonnage en fonction de la position de l'état.

Une piste de recherche récente consiste à contrôler dynamiquement le pas d'échantillonnage dans le but de réduire les charges processeur ou réseau, tout en assurant les performances de contrôle désirées. On trouve deux approches principales dans la littérature. La première est le contrôle "*event-triggered*" ((Tabuada, 2007), (Heemels *et al.*, 2008), (Lunze *et al.*, 2010)), dans lequel les capteurs n'envoient leurs informations au contrôleur que lorsque certains événements sont réalisés (i.e. le croisement d'une frontière de l'espace d'état, ou du niveau d'une fonction de Lyapunov). Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle requiert en général un hardware dédié pour surveiller l'état du système et regarder si les conditions de stabilité établies sont toujours vérifiées. La deuxième approche, le contrôle "*self-triggered*" ((Wang *et al.*, 2009), (Wang *et al.*, 2010), (Mazo-Jr. *et al.*, 2010)), consiste à calculer à chaque instant d'échantillonnage un minorant du prochain plus grand pas d'échantillonnage admissible, afin d'émuler le contrôle "*event-triggered*" sans avoir recours à un hardware supplémentaire. Dans ces travaux, le calcul des prochains instants d'échantillonnage est fait en ligne, ce qui augmente la charge du processeur. Les études dans la

littérature sont basées sur la théorie de stabilité de Lyapunov. Cependant, la façon de choisir ou de calculer les fonctions de Lyapunov ne prend en compte ni les retards, ni l'échantillonnage (les fonctions de Lyapunov sont calculées pour le système à temps continu idéal). Par conséquent, la méthode peut se révéler conservative puisqu'il pourrait très bien exister d'autres fonctions de Lyapunov du même type assurant les mêmes conditions de stabilité pour des pas d'échantillonnage plus grands.

Dans ce travail, nous concevons une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui maximise le pas d'échantillonnage sous certaines conditions de stabilité  $\mathcal{L}_2$  pour des systèmes échantillonnés linéaires avec perturbations et retards. Contrairement à l'approche du contrôle "self-triggered", notre approche permet :

- de réduire le nombre d'échantillonnages *dans le pire des cas* (i.e. d'augmenter le minorant  $\tau^+$  du plus grand pas d'échantillonnage indépendant de l'état admissible), *tout en prenant en compte les retards, les perturbations, et l'échantillonnage*,
- de construire *hors-ligne*, une fois pour toute, la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau_{\max}(x) \geq \tau^+, x \in \mathbb{R}^n$  qui maximise le pas d'échantillonnage du système perturbé et à retard, pour chaque état de l'espace d'état.

L'analyse de stabilité est basée sur une nouvelle classe de fonctions de Lyapunov-Krasovskii (LKF) avec des matrices dépendantes de l'état. De la même façon que l'on calcule la fonction  $\tau_{\max}(x)$  donnant le pas d'échantillonnage maximal en fonction de l'état, les matrices de la LKF vont être calculées et commuter en fonction de la région de l'espace d'état dans laquelle se trouve l'état échantillonné. Les conditions LMI obtenues permettent de calculer les matrices de la LKF assurant les plus grand pas d'échantillonnage dépendants de l'état admissibles.

Ce travail est une continuation naturelle de la recherche menée dans (Fiter *et al.*, 2011c) et (Fiter *et al.*, 2011b), dans laquelle nous proposons une analyse de stabilité exponentielle basée sur des fonctions de Lyapunov ou Lyapunov-Razumikhin ainsi que sur des arguments de convexification, pour des systèmes échantillonnés idéaux, sans retards ni perturbations.

Ici, nous introduisons l'aspect de robustesse et considérons une perturbation extérieure  $w \in \mathcal{L}_2$ , ainsi qu'un retard variable  $h$  supposé tel que les entrées de contrôle arrivent aux actionneurs dans l'ordre dans lequel elles ont été envoyées.

Le papier est organisé comme suit : la Section 2 formule le problème, la Section 3 présente les résultats de stabilité, et la Section 4 fournit l'algorithme permettant de construire hors-ligne la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état. Enfin, la Section 5 montre quelques résultats de simulations, avant la conclusion, Section 6.

**Notations :**  $M^T$  désigne la transposée de  $M \in \mathcal{M}_{n,m}$  (l'ensemble des matrices réelles  $n \times m$ ).  $S_n$  dénote l'ensemble des matrices symétriques  $n \times n$ ,  $S_n^+$  (resp.  $S_n^{+*}$ ) l'ensemble des matrices positives (resp. définies positives)  $P \succeq 0$  (resp.  $P \succ 0$ ) de  $S_n$ .  $\mathcal{L}_2$  est l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Enfin, on note  $\|\cdot\|_2$  la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2}$  la norme  $\mathcal{L}_2$  sur  $\mathcal{L}_2$  :  $\|f\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ .

## 2. Formulation du problème

On considère le système linéaire invariant dans le temps

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t) &= x_0, \forall t \leq 0, \end{aligned} \right\}, \forall t \geq 0 \quad [1]$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  une perturbation exogène de  $\mathcal{L}_2$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  la commande, et  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  la sortie.  $A, B, C, D$ , et  $E$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La commande est définie comme un retour d'état constant par morceaux :

$$u(t) = \begin{cases} -Kx(s_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \\ -Kx_0, \forall t \in [0, t_0), \end{cases} \quad [2]$$

avec une matrice de retour d'état  $K$  constante,  $s_k$  le  $k^{\text{ème}}$  instant d'échantillonnage (quand la  $k^{\text{ème}}$  commande est calculée) et  $t_k$  le  $k^{\text{ème}}$  instant d'actuation (quand la  $k^{\text{ème}}$  commande est reçue par les actionneurs). La séquence des instants d'échantillonnage  $(s_k)_{k \geq 0}$  vérifie  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$ .

Les instants d'échantillonnage et d'actuation sont liés par la relation

$$s_k = t_k - h(t_k), \quad [3]$$

avec un retard  $h(t)$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, h(t) &\in [h_1, h_2] \text{ et } \dot{h}(t) \in [e_1, e_2], \\ \text{avec } 0 &\leq h_1 \leq h_2 \text{ et } e_1 \leq e_2 < 1. \end{aligned} \quad [4]$$

Supposer  $e_2 < 1$  assure que les entrées de contrôle arrivent aux actionneurs dans l'ordre dans lequel ils ont été envoyés :  $t_{k+1} - t_k > 0, \forall k \geq 0$ .

Le système en boucle fermée  $\{[1],[2],[3],[4]\}$  sera noté  $\mathbf{T}$ . De par la présence des perturbations extérieures inconnues, nous étudierons le système du point de vue de la stabilité  $\mathcal{L}_2$ .

**Définition.** Un système linéaire  $\mathbf{F}$  est dit  $\mathcal{L}_2$ -stable de  $w$  à  $\mathbf{F}w$  avec un gain induit inférieur à  $\gamma$  si  $\mathbf{F}$  est un opérateur linéaire de  $\mathcal{L}_2$  dans  $\mathcal{L}_2$  et qu'il existe des réels positifs  $\gamma$  et  $\xi$  tels que pour tout  $w \in \mathcal{L}_2$ ,

$$\|\mathbf{F}w\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|w\|_{\mathcal{L}_2} + \xi. \quad [5]$$

L'objectif de ce travail est de construire, hors-ligne, une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau_{\max}(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}^n$  qui maximise les pas d'échantillonnage :

$$s_{k+1} - s_k = \tau_{\max}(x(s_k)), \quad [6]$$

tout en assurant la stabilité  $\mathcal{L}_2$  de  $\mathbf{T}$  de  $w$  à  $z$ , avec un gain induit inférieur à un certain  $\gamma \geq 0$  fixé.

Comme dans (Fiter *et al.*, 2011c) et (Fiter *et al.*, 2011b), on suppose que l'espace d'état est recouvert par un ensemble de  $q$  régions coniques  $\mathcal{R}_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T \Psi_\sigma x \geq 0\}$ ,  $\Psi_\sigma \in S_n$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$  pour lesquelles des pas d'échantillonnage maximaux  $\tau_\sigma^+$  sont définis. Une illustration de ces régions coniques dans  $\mathbb{R}^2$  est donnée dans la Figure 1. Pour des dimensions supérieures, on peut utiliser les coordonnées sphériques généralisées dans  $\mathbb{R}^n$ , chaque région  $\mathcal{R}_\sigma$  étant associée à un certain intervalle pour les  $(n-1)$  coordonnées angulaires  $\theta_i : \theta_i \in [\theta_{i,\sigma}^-, \theta_{i,\sigma}^+]$ .

Ici, les pas d'échantillonnage  $(\tau_k = s_{k+1} - s_k)_{k \geq 0}$  sont supposés vérifier la condition

$$\forall k \geq 0, \exists \sigma \in \mathcal{I}(x(s_k)), \tau^- \leq \tau_k \leq \tau_\sigma^+, \quad [7]$$

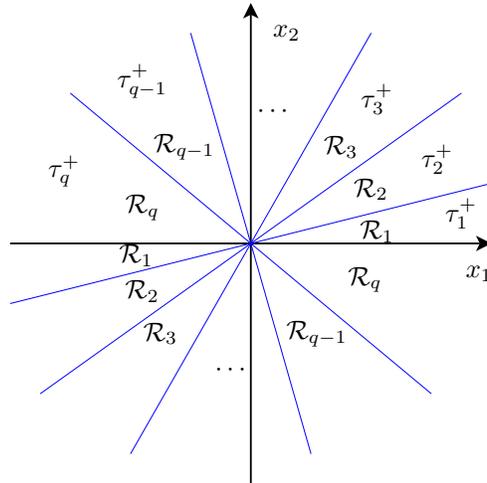
$$\mathcal{I}(x) = \{\sigma \in \{1, \dots, q\}, x \in \mathcal{R}_\sigma\}, \quad [8]$$

avec un pas d'échantillonnage minimal  $\tau^- \geq 0$  donné.

Maintenant, notre objectif est de calculer, hors-ligne, les pas d'échantillonnage maximum admissibles  $\tau_\sigma^+$  pour chaque sous-espace  $\mathcal{R}_\sigma$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$  qui assurent la stabilité  $\mathcal{L}_2$  pour un gain  $\gamma \geq 0$  fixé.

La fonction d'échantillonnage dépendant de l'état [6] sera alors définie par :

$$\tau_{\max}(x) = \max_{\sigma \in \mathcal{I}(x)} \tau_\sigma^+, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad [9]$$



**Figure 1.** Recouvrement de  $\mathbb{R}^2$  avec  $q$  régions coniques  $\mathcal{R}_\sigma$

Dans ce travail, nous utilisons une classe de LKF assez générale (avec des matrices dépendantes de l'état), qui prend en compte les retards, les perturbations, et l'échantillonnage, et nous présentons des outils pour calculer les matrices de la LKF de sorte à maximiser à la fois le plus grand pas d'échantillonnage indépendant de l'état admissible  $\tau^+ = \min_{\sigma \in \{1, \dots, q\}} \tau_{\sigma}^+$ , et la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau_{\max}(\cdot)$  [9].

### 3. Principal résultat de stabilité $\mathcal{L}_2$

Dans cette section, nous proposons des conditions de stabilité  $\mathcal{L}_2$  pour le système perturbé et à retards  $\mathbf{T}$  avec un échantillonnage satisfaisant [7]. On considère la LKF :

$$V(t, x, k) = V_1(t, x) + V_2(t, x, k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \quad [10]$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(t, x) &= \eta^T(t)P\eta(t) + \int_{t-h_1}^t x^T(s)Q_1x(s)ds \\ &+ \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^T(s)Q_2x(s)ds + \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^T(s)Q_3x(s)ds \\ &+ \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)(R_1 + (h(t) - t + s)R_2)\dot{x}(s)ds \\ &+ \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)dsd\theta \\ &+ \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_4\dot{x}(s)dsd\theta \end{aligned} \quad [11]$$

qui est composée de termes classiques utilisés pour les systèmes à retards ((Fridman, 2001), (Richard, 2003), (Jiang *et al.*, 2010a), (Jiang *et al.*, 2010b)), et d'un terme additionnel

$$\begin{aligned} V_2(t, x, k) &= (t_{k+1} - t) \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \eta(t_k) \end{pmatrix}^T \Omega_{\sigma_k} \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \eta(t_k) \end{pmatrix} \\ &+ (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{\eta}^T(s)U_{\sigma_k}\dot{\eta}(s)ds \\ &+ (t_{k+1} - t)(t - t_k)\eta^T(t_k)S_{\sigma_k}\eta(t_k), \end{aligned} \quad [12]$$

avec le vecteur  $\eta(t)^T = [x(t)^T, x(t - h(t))^T]$ , et les matrices  $\Omega_{\sigma}$  définies par :

$$\Omega_{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{X_{\sigma} + X_{\sigma}^T}{2} & -X_{\sigma} + X_{1,\sigma} \\ * & -X_{1,\sigma} - X_{1,\sigma}^T + \frac{X_{\sigma} + X_{\sigma}^T}{2} \end{pmatrix}, \forall \sigma \in \{1, \dots, q\}. \quad [13]$$

Les matrices  $P, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, R_4, U_{\sigma}, S_{\sigma}, X_{\sigma}, X_{1,\sigma}$  sont de dimensions appropriées, avec  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$ . Le paramètre  $\sigma_k$  peut être n'importe quel élément  $\sigma \in \mathcal{I}(x(s_k))$  satisfaisant  $\tau^- \leq \tau_k \leq \tau_{\sigma}^+$  (il en existe au moins un d'après [7]).

Le nouvel aspect du terme additionnel [12] comparé aux travaux antérieurs portant sur les systèmes à échantillonnage variable ((Fridman, 2010), (Seuret, 2009), (Jiang *et al.*, 2010b)) est le fait qu'il est composé d'éléments qui commutent en fonction de

l'état du système. En effet, notez que les termes matriciels  $\Omega_{\sigma_k}$ ,  $U_{\sigma_k}$ , et  $S_{\sigma_k}$  commutent aux instants  $t_k$  en fonction de la région dans laquelle se trouve  $x(s_k)$ . Cette commutation en fonction de l'état est possible grâce au fait que  $V_2(t_k, x(t_k), k) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} V_2(t, x, k) = 0$ , ce qui assure la continuité de  $V_2$ .

Cette fonction avec des matrices dépendantes de l'état est une extension naturelle des travaux basés sur des LKF pour des systèmes à retards ((Fridman, 2001), (Richard, 2003), (Jiang *et al.*, 2010a)), échantillonnés ((Fridman, 2010), (Seuret, 2009)), ou à la fois à retards et échantillonnés ((Jiang *et al.*, 2010b)).

L'analyse de stabilité  $\mathcal{L}_2$ , basée sur le Lemme 3 (en Annexe) est divisée en deux étapes principales.

– Tout d'abord, on montre que la LKF [10] est continue sur  $\mathbb{R}$  et différentiable pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , et on fournit des conditions assurant son caractère positif défini.

– Ensuite, on différentie la LKF, on majore le résultat obtenu, et on en déduit les conditions de stabilité  $\mathcal{L}_2$ .

On introduit deux scalaires qui seront utilisés dans le prochain lemme :

$$\begin{aligned} T_{1,\sigma} &= T_1 = \max \left\{ \tau^- + h_1 - h_2, \frac{\tau^-}{1-e_1} \right\}, \\ T_{2,\sigma} &= \min \left\{ \tau_\sigma^+ + h_2 - h_1, \frac{\tau_\sigma^+}{1-e_2} \right\}. \end{aligned} \quad [14]$$

**Lemme 1.** *La LKF [10] est continue sur  $\mathbb{R}$  et différentiable pour tout  $t \neq t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Si ses matrices satisfont  $P \in S_{2n}^*$ ,  $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, R_4 \in S_n^+$ ,  $U_\sigma, S_\sigma \in S_{2n}^+$ ,  $X_\sigma, X_{1,\sigma} \in \mathcal{M}_{2n,2n}$ , et si il existe  $q$  scalaires  $\varepsilon_\sigma \geq 0$  tels que*

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T_{2,\sigma} \Omega_\sigma - \varepsilon_\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi_\sigma \end{pmatrix} \succ 0, \forall \sigma \in \{1, \dots, q\}, \quad [15]$$

alors  $V$  est de plus définie positive.

*Démonstration.* Pour des raisons de place, la preuve de ce Lemme est omise mais peut être lue dans (Fiter *et al.*, 2011a).  $\square$

Maintenant que la régularité et le caractère défini positif de  $V$  a été étudié, la deuxième étape de l'étude concerne l'analyse de stabilité. On introduit les matrices  $M_{i \in \{1, \dots, 11\}} \in \mathcal{M}_{n,11n+n_w}$  et  $M_{12} \in \mathcal{M}_{n_w,11n+n_w}$  :

$$(M_1^T \quad \dots \quad M_{12}^T) = I, \quad [16]$$

et on définit les matrices  $N_{j \in \{1, \dots, 7\}}$  :

$$\begin{aligned} N_1 &= AM_1 - BK M_4 + EM_{12}, N_2 = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} N_1 \\ M_7 \end{pmatrix}, \\ N_4 &= \begin{pmatrix} M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}, N_5 = \begin{pmatrix} N_2 \\ N_4 \end{pmatrix}, N_6 = \begin{pmatrix} M_8 \\ M_9 \end{pmatrix}, N_7 = CM_1 - DK M_4. \end{aligned} \quad [17]$$

**Théorème 2.** On considère des scalaires  $\gamma \geq 0$ ,  $h_1, h_2, e_1, e_2, \tau^-$ , et un ensemble de  $q$  régions coniques recouvrant l'espace d'état  $\mathcal{R}_\sigma = \{x, x^T \Psi_\sigma x \geq 0\}$ ,  $\Psi_\sigma \in S_n$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$ , avec des pas d'échantillonnage maximaux  $\tau_\sigma^+$ .

Le système avec perturbations et retards  $\mathbf{T}$  est  $\mathcal{L}_2$ -stable de  $w$  à  $z$  avec un gain inférieur à  $\gamma$  pour toute séquence d'échantillonnage satisfaisant [7] si il existe des matrices  $P \in S_{2n}^+$ ,  $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, R_4 \in S_n^+$ ,  $U_\sigma, S_\sigma \in S_{2n}^+$ ,  $X_\sigma, X_{1,\sigma} \in \mathcal{M}_{2n,2n}$ ,  $Y_{1,\sigma} \in \mathcal{M}_{7n,2n}$ ,  $Y_{2,\sigma}, Y_{3,\sigma} \in \mathcal{M}_{7n,n}$ , et des scalaires  $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_{i,j,l,o,\sigma} \geq 0$  tels que les équations [15] et [18] sont satisfaites pour tout  $\sigma \in \{1, \dots, q\}$  et  $(i, j, l, o) \in \{1, 2\}^4$ :

$$\Xi_{i,j,l,o,\sigma} + \varepsilon_{i,j,l,o,\sigma} M_4^T \Psi_\sigma M_4 \leq 0, \quad [18]$$

avec

$$\Xi_{i,j,l,1,\sigma} = \Xi_{i,j,\sigma} + T_{l,\sigma} \left[ N_4^T S_\sigma N_4 + N_3^T U_\sigma N_3 + N_3^T \Omega_{1,\sigma} N_5 + N_5^T \Omega_{1,\sigma}^T N_3 \right], \quad [19]$$

$$\Xi_{i,j,l,2,\sigma} = \Xi_{i,j,\sigma} + T_{l,\sigma} \left[ -N_4^T S_\sigma N_4 - N_6^T U_\sigma N_6 + \bar{Y}_{1,\sigma} N_6 + N_6^T \bar{Y}_{1,\sigma}^T \right], \quad [20]$$

$$\begin{aligned} \Xi_{i,j,\sigma} = & N_3^T P N_2 + N_2^T P N_3 + M_1^T Q_1 M_1 \\ & + M_5^T (Q_2 - Q_1) M_5 - M_6^T Q_3 M_6 - N_5^T \Omega_\sigma N_5 \\ & + N_1^T (R_1 + h_j R_2 + h_2 R_3 + (h_2 - h_1) R_4) N_1 \\ & - \frac{1}{1-e_1} M_7^T R_1 M_7 + (1 - e_i) M_2^T (Q_3 - Q_2) M_2 \\ & - \frac{1}{h_1} (M_1 - M_5)^T ((1 - e_i) R_2 + R_3) (M_1 - M_5) \\ & - (h_j - h_1) M_{10}^T ((1 - e_2) R_2 + R_3 + R_4) M_{10} \\ & - (h_2 - h_j) M_{11}^T (R_3 + R_4) M_{11} \\ & + \bar{Y}_{1,\sigma} (-N_2 + N_4) + (-N_2 + N_4)^T \bar{Y}_{1,\sigma}^T \\ & + \bar{Y}_{2,\sigma} ((h_j - h_1) M_{10} - M_5 + M_2) \\ & + ((h_j - h_1) M_{10} - M_5 + M_2)^T \bar{Y}_{2,\sigma}^T \\ & + \bar{Y}_{3,\sigma} ((h_2 - h_j) M_{11} - M_2 + M_6) \\ & + ((h_2 - h_j) M_{11} - M_2 + M_6)^T \bar{Y}_{3,\sigma}^T \\ & + N_7^T N_7 - \gamma^2 M_{12}^T M_{12}, \end{aligned} \quad [21]$$

$$\Omega_{1,\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{X_\sigma + X_\sigma^T}{2} & -X_\sigma + X_{1,\sigma} \end{pmatrix}, \quad [22]$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{1,\sigma} &= \begin{pmatrix} Y_{1,\sigma} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{11n+n_w, 2n}, \\ \bar{Y}_{a,\sigma} &= \begin{pmatrix} Y_{a,\sigma} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{11n+n_w, n}, a \in \{2, 3\}. \end{aligned} \quad [23]$$

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème, nous devons montrer que la fonction  $V$  satisfait les conditions du Lemme 3 (en Annexe). Le Lemme 1 assure la bonne régularité de  $V$ . Il ne reste alors plus qu'à montrer que l'on a

$$\forall t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \dot{V}(t, x, k) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0. \quad [24]$$

La démonstration (que nous omettons pour raison de place, mais que l'on peut également trouver dans (Fiter *et al.*, 2011a)), consiste donc à calculer puis à majorer la dérivée de  $V$  sur un intervalle  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  quelconque. Les principaux outils utilisés sont l'Inégalité de Jensen (Gu *et al.*, 2003) pour la majoration des intégrales rémanentes, le Lemme de Finsler (Fang *et al.*, 2004), et la S-procedure (Boyd *et al.*, 1994) pour inclure l'information selon laquelle  $x(s_k) \in \mathcal{R}_{\sigma_k}$ .  $\square$

REMARQUE. — Si  $w$  vérifie  $z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \geq 0$ , et si les LMIs (18) sont strictes, le système échantillonné  $\mathbf{T}$  est asymptotiquement stable pour toute séquence d'échantillonnage satisfaisant [7]. Dans le cas non perturbé ( $w(t) = 0$ ), le terme  $z^T(t)z(t) = \phi^T(t)N_7^T N_7 \phi(t)$  et les lignes/colonnes correspondant à  $w(t)$  sont retirées des LMIs [18].

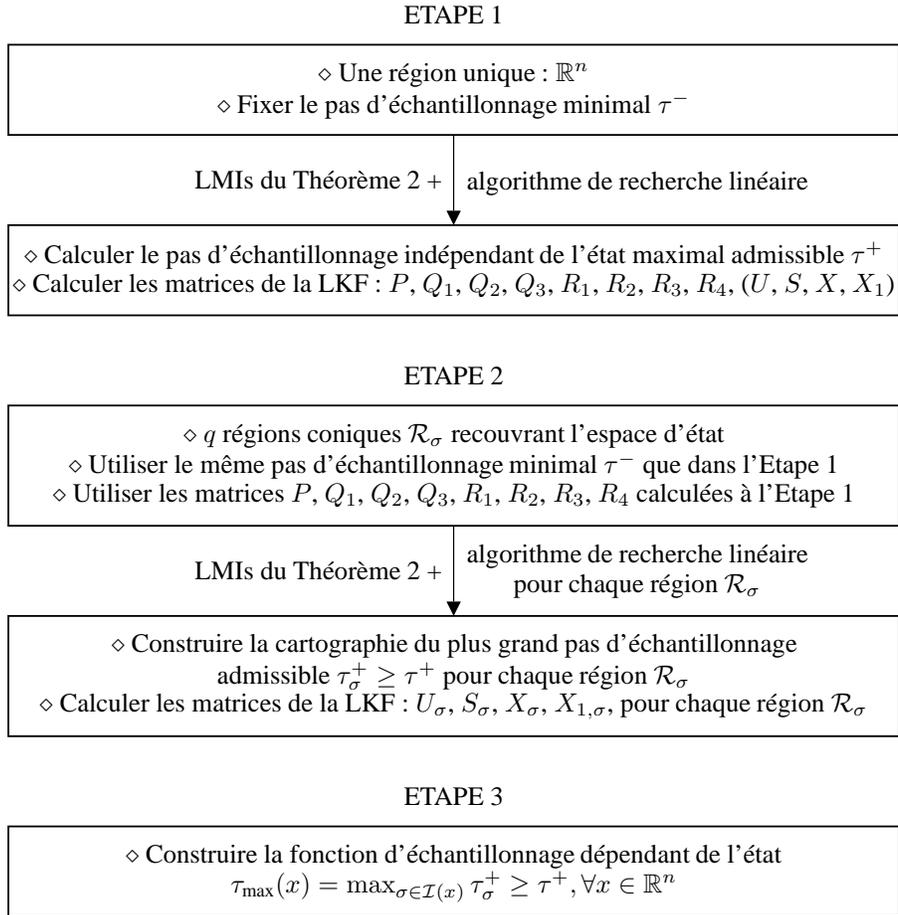
REMARQUE. — Quand on cherche des solutions pour les LMIs [15] et [18], il est nécessaire de retirer les lignes/colonnes de zéros (correspondant aux états  $\nu_1(t)$ ,  $\nu_3(t)$ , ou  $\nu_4(t)$ ) qui pourraient apparaître dans [18] suivant les valeurs de  $i$ ,  $j$ , et  $l$ , puisque les solveurs de LMIs recherchent des solutions strictes. On peut voir que  $\Xi_{i,j,l,\sigma}$  est : indépendant de  $\nu_1$  si  $l = 1$  ou  $T_{j,\sigma} = 0$ ; indépendant de  $\nu_3$  si  $i = 1$ ; indépendant de  $\nu_4$  si  $i = 2$ .

#### 4. Application à l'échantillonnage dépendant de l'état

La Figure 2 présente un algorithme en trois étapes pour construire la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui maximise les pas d'échantillonnage. On rappelle que toutes ces étapes sont effectuées hors-ligne.

REMARQUE. — L'Étape 1 peut être utilisée comme une analyse robuste pour les systèmes perturbés et à retards avec un échantillonnage variant dans le temps. L'Étape 2 mène à un algorithme de type "self-triggered", à ceci près que tous les calculs sont réalisés hors-ligne, et que les matrices dépendantes de l'état de la LKF,  $U_\sigma$ ,  $S_\sigma$ ,  $X_\sigma$ , et  $X_{1,\sigma}$ , sont calculées lors de cette étape, et non fixées par avance.

REMARQUE. — On peut aussi calculer le pas d'échantillonnage indépendant de l'état maximal admissible  $\tau^+$  (Étape 1) en utilisant la LKF avec des matrices dépendantes de l'état qui commutent sur des régions  $\mathcal{R}_\sigma$  prédéfinies. Bien que cela soit plus complexe à réaliser, cela peut réduire le conservatisme, comme nous le verrons grâce à l'Exemple 2. Pour la même raison, si la première étape a été réalisée avec une région unique  $\mathbb{R}^n$ , il est possible que l'on obtienne dans la deuxième étape  $\min_{\sigma \in \{1, \dots, q\}} \tau_\sigma^+ > \tau^+$ , ce qui veut dire que même le plus grand pas d'échantillonnage indépendant de l'état obtenu peut être augmenté en utilisant la LKF avec des matrices dépendantes de l'état.



**Figure 2.** Algorithme de construction de la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau_{\max}(x)$

## 5. Exemples numériques

### 5.1. Exemple 1

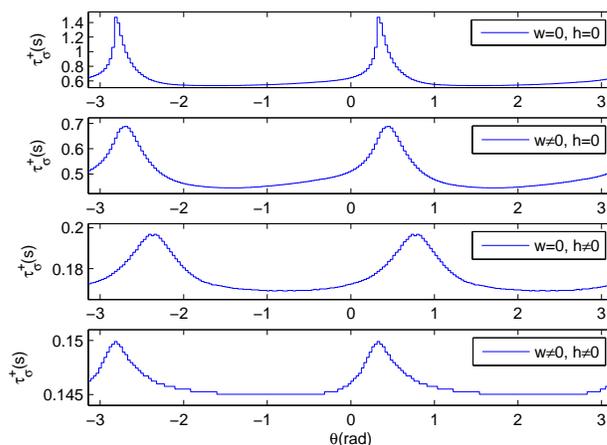
On considère le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Kx(s_k) + w(t), \text{ et}$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}, z(t) = x(t), \text{ pour } t \in [t_k, t_{k+1}).$$

La fonction d'échantillonnage dépendant de l'état (9) va être construite pour quatre cas successifs : 1) système sans retard, ni perturbations ( $w = 0, h = 0$ , stabilité asymptotique); 2) système avec perturbations, sans retard ( $w \neq 0, h = 0$ , stabilité  $\mathcal{L}_2$  avec  $\gamma = \sqrt{10}$ ); 3) système sans perturbations avec un retard  $h(t) \in [10^{-4}, 10^{-1}]$  et  $\dot{h}(t) \in [-0.2, 0.6]$  ( $w = 0, h \neq 0$ , asymptotique); 4) système perturbé, avec le même retard ( $w \neq 0, h \neq 0, \gamma = \sqrt{10}$ ).

On règle le nombre  $q = 100$  de régions coniques  $\mathcal{R}_\sigma$ , on fixe  $\tau^- = 0$ , et on utilise l'algorithme de la Section 4 pour construire la cartographie qui maximise le pas d'échantillonnage pour chaque état. Puisque l'on travaille dans un espace d'état de dimension 2, les régions coniques sont définies à partir des coordonnées sphériques  $(\rho, \theta)$  de l'état  $x = \rho e^{i\theta}$ , avec  $\rho = 1$  (sur la sphère unité). Construite hors-ligne dans chacun des quatre cas, la Figure 3 présente le pas d'échantillonnage maximal admissible comme une fonction de l'état angulaire  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . Dans les quatre cas, le plus grand pas d'échantillonnage indépendant de l'état obtenu est : 1)  $\tau^+ = 0.535$ ; 2) 0.445; 3) 0.169; 4) 0.145.



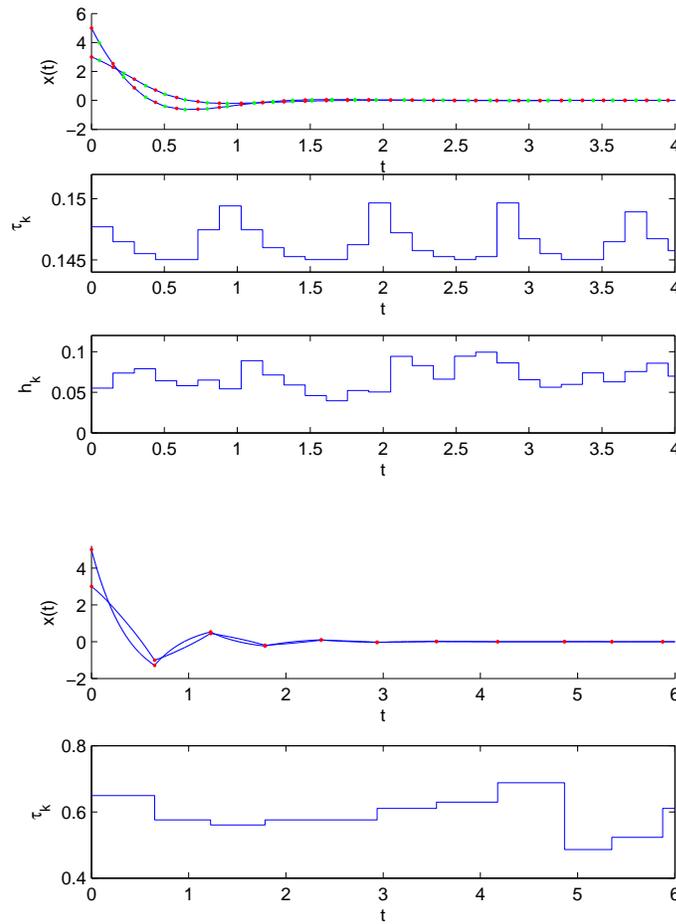
**Figure 3.** Exemple 1 : Cartographie du pas d'échantillonnage maximal admissible  $\tau_\sigma^+$  pour le système avec ou sans perturbations  $w$  et/ou retard  $h$

Notons que dans le cas idéal (sans retard ni perturbation), le système est instable pour tout pas d'échantillonnage constant supérieur à  $\bar{\tau}_{\text{constant}} = 0.646$ . Or avec la fonction d'échantillonnage de la Figure 3, on peut échantillonner au delà de cette limite dans certaines régions de l'espace d'état, jusqu'à  $\tau = 1.472$ .

Notons aussi que puisque  $\tau^-$  a été fixé à 0, la stabilité  $\mathcal{L}_2$  (ou asymptotique) du système est préservée pour n'importe quel échantillonnage variable dans le temps inférieur à  $\tau^+$ . De plus, grâce à la cartographie réalisée, la robustesse classique vis-à-vis

de la variation du pas d'échantillonnage est étendue à tout échantillonnage dépendant de l'état et variant dans le temps se trouvant sous les courbes de la Figure 3.

La Figure 4 montre des résultats obtenus en simulation pour un système avec une perturbation sinusoïdale  $w(t)$  satisfaisant  $\|w(t)\|_2 = \frac{1}{\gamma}\|z(t)\|_2 \simeq 32\%\|z(t)\|_2$ , avec ou sans retard variable.



**Figure 4.** Exemple 1 : Etat  $x(t)$ , pas d'échantillonnage  $\tau_k = \tau_{\max}(x(s_k))$ , retard  $h_k = h(t_k)$  (en haut), pour le système avec une perturbation sinusoïdale vérifiant  $\|w(t)\|_2 = \frac{1}{\gamma}\|z(t)\|_2$ , avec un retard variable (en haut), ou sans retard (en bas)

## 5.2. Exemple 2

Pour montrer la réduction de conservatisme apportée par la LKF avec des matrices dépendant de l'état, on considère le système proposé dans (Fiter *et al.*, 2011c) :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Kx(s_k), \text{ et} \\ K = (-1.02 \quad 5.62), \quad z(t) = x(t), \text{ pour } t \in [s_k, s_{k+1}).$$

On fixe  $\tau^- = 0$ . Si l'on applique l'Etape 1 de l'algorithme décrit en Section 4 en utilisant une seule région  $\mathbb{R}^n$ , le plus grand pas d'échantillonnage indépendant de l'état  $\tau^+$  (*i.e.* valable quel que soit l'état) que l'on obtient est égal à 0.267, alors que l'on obtient 0.309 si l'on utilise la LKF avec  $q = 100$  régions  $\mathcal{R}_\sigma$ . Cela correspond à une borne de stabilité robuste qui peut être comparée à celles obtenues dans (Fridman, 2010) ( $\tau^+ = 0.259$ ), (Fujioka, 2009) ( $\tau^+ = 0.204$ ), ou (Seuret, 2009) ( $\tau^+ = 0.198$ ).

Comme dans l'Exemple 1, l'Etape 2 de l'algorithme peut ensuite être utilisée pour construire la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau_{\max}(\cdot)$  pour obtenir des pas d'échantillonnage encore plus grands que cette limite indépendante de l'état  $\tau^+$  (en effet, par construction,  $\tau_{\max}(\cdot)$  est minorée par  $\tau^+ : \tau_{\max}(x) \geq \tau^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ).

## 6. Conclusion

Ce travail introduit une nouvelle classe de fonctions de Lyapunov-Krasovskii avec des matrices dépendantes de l'état. Elle permet de concevoir une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui réduit le nombre d'actuations, tout en garantissant la stabilité  $\mathcal{L}_2$  pour un système à retour d'état linéaire avec des perturbations et des retards. La méthode proposée peut être vue à la fois comme un contrôle "self-triggered" et une nouvelle analyse de robustesse vis-à-vis des variations du pas d'échantillonnage amenant à un contrôle de l'échantillonnage dépendant de l'état. Nous pensons que l'approche présente deux avantages principaux, puisqu'elle permet :

- de maximiser le pas d'échantillonnage minimal  $\tau^+ = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau_{\max}(x)$  de la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état, et de calculer la fonction de Lyapunov-Krasovskii associée, qui assure la stabilité  $\mathcal{L}_2$  du système ;
- de concevoir hors-ligne une cartographie de l'espace d'état avec un pas d'échantillonnage maximal admissible pour chaque sous-espace. Par conséquent, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire lors du contrôle du système en-ligne.

## Remerciements

Ce travail a été soutenu financièrement par le Ministère de l'Éducation Supérieure et de la Recherche, Le Conseil de la Région Nord-Pas de Calais et FEDER, au moyen du 'Contrat de Projets État Région (CPER) 2007-2013'.

La recherche menant à ces résultats a reçu des fonds du 7<sup>ème</sup> Programme de Travail de la Communauté Européenne (FP7/2007-2013) sous l'accord n°257462 : HYCON2 Network of Excellence "Highly-Complex and Networked Control Systems".

## 7. Bibliographie

- Boyd S., El-Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Studies in Applied Mathematics, 1994.
- Fang L., Lin H., Antsaklis P.-J., « Stabilization and Performance Analysis for a Class of Switched Systems », *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- Fiter C., Hetel L., Perruquetti W., Richard J.-P., Echantillonnage Robuste Dependand de l'Etat pour les Systemes avec Perturbations et Retards, Technical report, LAGIS, 2011a.
- Fiter C., Hetel L., Perruquetti W., Richard J.-P., « State Dependent Sampling : an LMI Based Mapping Approach », *18th IFAC World Congress*, Milan, Italy, 2011b.
- Fiter C., Hetel L., Perruquetti W., Richard J.-P., « A State Dependent Sampling for Linear State Feedback », *Provisoirement accepté*, 2011c.
- Fridman E., « New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems », *Systems and Control Letters*, vol. 43, n° 4, p. 309-319, 2001.
- Fridman E., « A Refined Input Delay Approach to Sampled-Data Control », *Automatica*, vol. 46, n° 2, p. 421-427, 2010.
- Fridman E., Seuret A., Richard J.-P., « Robust Sampled-Data Stabilization of Linear Systems : An Input Delay Approach », *Automatica*, vol. 40, n° 8, p. 1441-1446, 2004.
- Fujioka H., « Stability Analysis of Systems with Aperiodic Sample-and-Hold Devices », *Automatica*, vol. 45, n° 3, p. 771-775, 2009.
- Gu K., Kharitonov V., Chen J., *Stability of Time-Delay Systems*, Boston : Birkhauser, 2003.
- Heemels W., Sandee J.-H., Van Bosch P., « Analysis of Event-Driven Controllers for Linear Systems », *International Journal of Control*, vol. 81, n° 4, p. 571-590, 2008.
- Hetel L., Daafouz J., Jung C., « LMI Control Design for a Class of Exponential Uncertain Systems with Application to Network Controlled Switched Systems », *American Control Conference*, New York City, USA, p. 1401-1406, 2007.
- Hetel L., Kruszewski A., Perruquetti W., Richard J.-P., « Discrete and Intersample Analysis of Systems with Aperiodic Sampling », *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011.
- Jiang W., Kruszewski A., Fridman E., Richard J.-P., « Delay Dependent Stability Analysis of Interval Time-Delay Systems », *9th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Prague, Czech Republic, 2010a.
- Jiang W., Seuret A., « Improved Stability Analysis of Networked Control Systems Under Asynchronous Sampling and Input Delay », *2nd IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems*, Annecy, France, 2010b.
- Liu K., Fridman E., « Stability Analysis of Networked Control Systems : A Discontinuous Lyapunov Functional Approach », *48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China, 2009.

- Lunze J., Lehmann D., « A State-Feedback Approach to Event-Based Control », *Automatica*, vol. 46, n° 1, p. 211-215, 2010.
- Mazo-Jr. M., Anta A., Tabuada P., « An ISS Self-Triggered Implementation of Linear Controllers », *Automatica*, vol. 46, n° 8, p. 1310-1314, 2010.
- Naghstabrizi P., Hespanha J., Teel A., « Exponential Stability of Impulsive Systems with Application to Uncertain Sampled-Data Systems », *Systems and Control Letters*, vol. 57, n° 5, p. 378-385, 2008.
- Naghstabrizi P., Hespanha J., Teel A., « Stability of Delay Impulsive Systems with Application to Networked Control Systems », *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 32, n° 5, p. 511-528, 2010.
- Richard J.-P., « Time Delay Systems : an Overview of Some Recent Advances and Open Problems », *Automatica*, vol. 39, n° 10, p. 1667-1694, 2003.
- Seuret A., « Stability Analysis for Sampled-Data Systems with a Time-Varying Period », *48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China, 2009.
- Tabuada P., « Event-Triggered Real-Time Scheduling of Stabilizing Control Tasks », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, n° 9, p. 1680-1685, 2007.
- Wang X., Lemmon M., « Self-Triggered Feedback Control Systems with Finite-Gain L2 Stability », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, n° 3, p. 452-467, 2009.
- Wang X., Lemmon M., « Self-Triggering Under State-Independent Disturbances », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, n° 6, p. 1494-1500, 2010.
- Zhang W., Branicky M.-S., Phillips S.-M., « Stability of Networked Control Systems », *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, n° 1, p. 84-99, 2001.

## 8. Annexe

**Lemme 3.** *Supposons qu'il existe un réel  $\gamma \geq 0$  et une fonction définie positive  $V : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow V(t) \in \mathbb{R}^+$ , différentiable pour tout  $t \neq t_k, k \in \mathbb{N}$ , qui vérifie*

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0 \quad [25]$$

*sur toutes les trajectoires du système  $\mathbf{T}$ . Alors  $\mathbf{T}$  est  $\mathcal{L}_2$ -stable de  $w$  à  $z$  avec un gain inférieur à  $\gamma$ .*

*Démonstration.* Soit  $t \gg 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $t \in [t_N, t_{N+1})$ . Intégrer [25] sur  $[0, t]$  :

$$\begin{aligned} V(t) - V(t_N) + V(t_N^-) - V(t_{N-1}) + \cdots + V(t_0^-) \\ - V(0) + \int_0^t (z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)) ds \leq 0 \end{aligned}$$

montre, puisque  $V(t) \geq 0$  et  $V(t_k) = V(t_k^-) \forall k \in \mathbb{N}$  ( $V$  est continue), que :

$$\int_0^t z^T(s)z(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^t w^T(s)w(s)ds + V(0).$$

Puisque  $z^T(s)z(s) \geq 0$ , on montre que  $z = \mathbf{T}w \in \mathcal{L}_2$ , et en faisant tendre  $t \rightarrow \infty$  on voit que la condition de stabilité  $\mathcal{L}_2$  [5] est vérifiée, avec  $\xi = \sqrt{V(0)}$ .  $\square$