



**HAL**  
open science

## Cartes de photons et visibilité

Romuald Perrot, Lilian Aveneau, Daniel Meneveaux, Frédéric Mora

► **To cite this version:**

Romuald Perrot, Lilian Aveneau, Daniel Meneveaux, Frédéric Mora. Cartes de photons et visibilité. 2012. hal-00695651v1

**HAL Id: hal-00695651**

**<https://hal.science/hal-00695651v1>**

Submitted on 9 May 2012 (v1), last revised 8 Jun 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

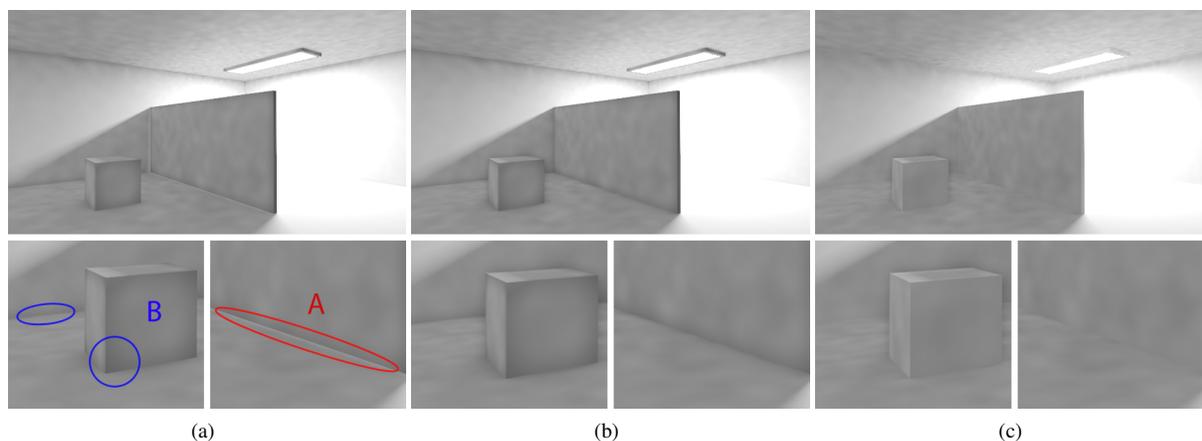
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Cartes de photons et visibilité

Romuald Perrot<sup>1</sup>, Lilian Aveneau<sup>1</sup>, Daniel Meneveaux<sup>1</sup>, Frédéric Mora<sup>2</sup>

<sup>1</sup> XLIM-SIC - UMR CNRS 7252 - Université de Poitiers

<sup>2</sup> XLIM-DMI - UMR CNRS 7252 - Université de Limoges



**Figure 1:** Biais dans l'estimation de densité. (a) Sans correction du biais, des débordements lumineux sont présents (indiqués en A sur la figure) et l'éclairement au bord des objets est sous estimé (en B sur la figure). (b) Avec correction du biais de frontière les débordements lumineux sont corrigés. (c) Avec correction du biais de proximité et biais de frontière les bords des objets ne sont plus sous estimés.

## Abstract

Les méthodes de simulation d'éclairage par tracé de photons sont souvent utilisées pour leur simplicité et leur versatilité. Les deux étapes classiques de ces approches sont : (i) les calculs d'inter-réflexions lumineuses, indépendantes du point de vue, correspondant à des suivis de chemins lumineux dont les impacts sur les surfaces de la scène sont stockés sous forme de cartes de photons ; (ii) l'exploitation des cartes de photons pour produire une ou plusieurs images de l'environnement virtuel. La première phase repose exclusivement sur des méthodes de Monte-Carlo ; la seconde requiert au moins une estimation de densité pour le calcul d'éclairement. Malheureusement, le tracé de photons est également connu pour les différents biais produits lors de l'estimation de densité des photons pour le calcul de l'éclairement en un point. Ce rapport montre pourquoi la visibilité est un élément fondamental lors de l'estimation de densité ; nous proposons de la prendre en compte de manière précise pour réduire ou supprimer certains biais. Nos résultats mettent en évidence l'importance de la visibilité dans la qualité des images produites.

## 1. Introduction

Le tracé de photons est souvent utilisé pour les calculs de simulation d'éclairage parce qu'il possède de nombreux

avantages : il fait partie des méthodes de Monte-Carlo permettant de réaliser les calculs d'inter-réflexions lumineuses de manière indépendante du point de vue ; le résultat de la simulation est l'ensemble des points d'impacts des photons sur les surfaces pouvant être exploité indépendamment de la représentation géométrique de l'environnement ; la répartition des photons donne une bonne idée des flux lumineux à l'intérieur de l'environnement virtuel ; etc. De plus, tout en étant relativement rapide, le processus de simulation est également indépendant du point de vue ; le stockage des photons dans une structure arborescente de type *kd-tree* (*carte de photons* ou *photon map*) rend efficace l'estimation de densité utilisée pour le calcul de l'éclairage.

Bien que de nombreux systèmes de simulation d'éclairage reposent sur ce type d'approche pour des environnements diffus, le biais issu de l'estimation de densité pousse parfois les utilisateurs à se tourner vers d'autres méthodes. En effet, même si un processus de collecte finale peut être mis en œuvre pour atténuer les défauts visibles sur les images, il ne résout pas fondamentalement le problème.

Le biais peut être classé en trois catégories [Sch03] : (i) le *biais de proximité*, qui se traduit par des débordements lumineux incohérents, par exemple à travers des murs fins, ou encore sous les portes (Figure 1 zone A) ; (ii) le *biais de frontière* qui entraîne un assombrissement au bords des objets du fait d'un mauvais calcul de l'aire utilisée pour l'estimation de densité (Figure 1 zones B) ; (iii) le *biais topologique* dont les effets se traduisent par une surestimation de l'éclairage sur des surfaces courbes.

Dans ce rapport, nous montrons pourquoi la visibilité est un facteur prépondérant dans l'estimation de densité pour supprimer le biais de frontière et réduire le biais de proximité. Nous l'exploitons de deux manières différentes : la visibilité point à surface nous permet de résoudre le problème du calcul de normalisation du noyau utilisé pour l'estimation de densité supprimant ainsi le biais de frontière ; des tests de visibilité point à point sont mis en œuvre pour atténuer le biais de proximité. Plus précisément, nos contributions concernent :

1. l'utilisation de la visibilité point à surface pour déterminer le domaine d'intégration du noyau lors de la normalisation de l'estimation de densité ;
2. l'utilisation de cette normalisation pour supprimer le *biais de frontière* dans le cas d'un noyau constant ;
3. le calcul du facteur de normalisation par un processus de Monte-Carlo pour la suppression du biais de frontière dans le cas d'un noyau quelconque ;
4. la mise en œuvre d'un système simple et robuste pour réduire le *biais de proximité* lors de l'estimation de densité ;

Les contributions proposées dans ce rapport sont appliquées à diverses méthodes de simulation d'éclairage par cartes de photons : visualisation directe de la carte de photons [Jen96] ; collecte finale [Jen01] ; cartes de photons

progressives [HOJ08]. L'architecture logicielle de notre moteur de rendu repose sur une parallélisation des calculs, permettant de bénéficier des processeurs multi-coeurs actuels. L'utilisation de la visibilité lors du tracé de photons et de l'estimation de densité induit une augmentation relativement importante en temps de calcul. Cependant, la qualité des images résultantes et la réduction de biais ne peuvent pas être atteints avec les méthodes classiques, y compris en augmentant le nombre de photons et de rayons lors d'une collecte finale.

La suite de ce document est organisée de la façon suivante : la section 2 positionne nos contributions par rapport aux travaux existants ; la section 3 décrit notre méthode pour supprimer le biais de frontière ; la section 4 traite de la réduction du biais de proximité ; la section 6 présente nos résultats ; la section 7 conclut et présente nos principales perspectives.

## 2. Cartes de photons

### 2.1. Notations et formulation

Les formulations suivantes sont celles introduites par [Vea97] avec la notation de [PH10]. Le tracé de photons consiste à construire des chemins lumineux depuis les sources vers les objets de l'environnement. À chaque point d'impact sur un objet, une particule appelée *photon* est stockée en mémoire. Chaque photon est identifié par une position  $x_i$ , une direction incidente  $\mathbf{i}$  et une énergie  $\alpha_i$ . Selon la terminologie employée dans [Vea97],  $\alpha_i$  est également appelé le *poids* du photon, calculé de la façon suivante :

$$\alpha^0 = \frac{L_e(y, \mathbf{o})(\mathbf{N}_y \cdot \mathbf{o})}{p(y, \mathbf{o})} \quad (1)$$

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i \frac{f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i})(\mathbf{N}_x \cdot \mathbf{o})}{p(\mathbf{o})} \quad (2)$$

où  $\alpha^0$  est le poids d'une particule émise depuis une source lumineuse depuis la position  $y$  dans la direction  $\mathbf{o}$ ,  $N_x$  est la normale à la surface considérée au point  $x$ ,  $p(y, \mathbf{o})$  est la probabilité d'avoir émis la particule depuis la position  $y$  dans la direction  $\mathbf{o}$ . Le poids  $\alpha^{i+1}$  est celui de la particule après  $i+1$  rebonds dans la scène. Le dernier rebond s'effectuant au point  $x$  depuis la direction incidente  $\mathbf{i}$  dans la direction  $\mathbf{o}$  avec une probabilité  $p(\mathbf{o})$ . Enfin,  $L_e$  est l'émissivité de la surface et  $f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i})$  est la fonction de réflectance bidirectionnelle au point  $x$  pour les directions  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{o}$ .

Le calcul de l'éclairage en un point  $x$  dans une direction  $\mathbf{o}$  peut être scindé de la façon suivante :

$$L(x, \mathbf{o}) = L_e(x, \mathbf{o}) + L_{dir}(x, \mathbf{o}) + L_{ind}(x, \mathbf{o}) \quad (3)$$

où  $L_{dir}$  est l'éclairage direct et  $L_{ind}$  est l'éclairage

indirect. Avec le tracé de photons, le troisième terme est usuellement approché par une estimation de densité généralisée utilisant les  $k$  plus proches voisins [Jen01, PH10] :

$$L_{ind}(x, \mathbf{o}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i})}{A^k(x)} K\left(\frac{x - y_i}{d_k}\right) \quad (4)$$

où  $n$  est le nombre de photons utilisés pour l'estimation de densité,  $\alpha_i$  est le poids du photon  $i$  et  $A^k(x)$  est l'aire du plus petit disque de rayon  $d_k$  qui contient les  $k$  plus proches photons du point  $x$ ,  $y_i$  est la position du photon  $i$ , et  $K(u)$  est une fonction d'interpolation appelée *noyau*.

## 2.2. Etat de l'art

Pour le tracé de photons, Schregle [Sch03] propose une classification du biais en trois catégories et décrit une solution pour réduire le biais de proximité. Le principe est de réaliser une succession d'estimations de densité selon l'approche des  $k$  plus proches voisins en faisant varier le nombre  $k$  de photons. Ils utilisent une heuristique basée sur la variance permettant de choisir le paramètre  $k$  le plus adapté. Malheureusement, cette approche ne suffit pas pour supprimer le biais car même avec un rayon adapté, certains photons à l'origine des débordement lumineux continuent d'être employés à tort lors de l'estimation de densité.

À notre connaissance, la première approche basée sur la visibilité pour diminuer le biais de proximité est proposée par Tobler et Maierhofer dans [TM06]. Pour cela, l'objectif est de déterminer les limites d'une boîte englobante servant de filtre de validation des photons à utiliser lors de l'estimation de densité. Par ailleurs, ils décrivent une amélioration du calcul de l'aire de la surface utilisée pour l'estimation de densité de manière à réduire le biais de frontière. Néanmoins, l'approche du calcul d'aire repose sur une approximation de la surface occupée par les photons conduisant notamment à des instabilités numériques pour des régions sous-échantillonnées. La réduction du biais de proximité reste partielle et les débordements lumineux sous une porte par exemple, ne peuvent pas être supprimés avec cette approche.

Lastra *et al.* [LURM02] et Havran *et al.* [HBHpS05] proposent deux approches similaires pour ne plus avoir à gérer le biais de frontière sur des petites surfaces, dû au faible nombre de photons trouvés lors de la recherche des  $k$  plus proches voisins. Elles reposent sur une estimation de densité non plus à partir de la *position* des photons mais de leur *trajet*. Le principe est de déterminer l'intersection entre le disque virtuel centré autour du point d'estimation et les trajets des photons. Cependant, cette méthode accroît le biais de proximité puisqu'un flux lumineux rasant la surface mais sans la toucher peut quand même être pris en compte dans l'estimation. De plus, pour de nombreuses configurations géométriques, le traitement proposé ne réduit pas le

biais de frontière ou peut le remplacer par un biais de proximité. Par exemple à l'intersection entre les murs et les sols le biais de frontière persiste ; pour deux tables séparées par une cloison, le biais de frontière est remplacé par un biais de proximité.

Lavignotte et Paulin [LP03] proposent pour un système de visualisation interactif basé sur le principe de l'étalement de photons (*photon splatting*), une méthode permettant de réduire le biais de frontière lors de l'estimation de densité. Il s'agit de calculer l'intersection entre le support de l'estimation de densité et la géométrie sous-jacente. Cela assure une meilleure gestion des instabilités numériques puisque l'aire n'est pas calculée en fonction des photons mais de la géométrie de la scène. Malheureusement, la méthode ne permet pas de corriger le biais dans certaines configurations géométriques (similaires à celles décrites dans [LURM02]).

Bekaert *et al.* [BSC\*03] proposent de réutiliser les calculs d'un tracé de chemin bidirectionnel pour plusieurs images. Les points d'impacts des chemins sont stockés pour une première image, et réutilisés pour les images suivantes. L'estimation de densité exploite des calculs de visibilité associés à un *noyau généralisé* ; les tests de visibilité sont effectués seulement de manière probabiliste et la méthode ajoute un biais en raison de l'introduction d'un facteur de normalisation qui ne peut pas être déterminé de manière exacte.

De manière générale, les méthodes d'estimation de densité sont sources d'erreurs et sur-estiment ou sous-estiment l'éclairement car les informations de visibilité entre la source lumineuse (directe ou indirecte) et l'élément de surface récepteur sont erronées ou manquantes. Dans ce rapport, nous montrons qu'il est possible de réduire de manière significative les erreurs d'estimation de densité grâce à des calculs de visibilité précis.

Dans la littérature, de nombreuses méthodes ont été proposées pour le calcul de visibilité analytique, en particulier pour l'éclairement direct. Cela a été appliqué à des sources ponctuelles [NN74, AWG78], et les premiers algorithmes de calcul *point à surface* [NN72, WA77] opèrent en dimension 2 après une projection de la géométrie dans le plan de la surface depuis un point considéré. Combiné aux volumes d'ombre [Cro77], ce type d'approche a ensuite été étendu aux sources surfaciques [NN83]. La visibilité point à surface peut aussi être calculée analytiquement avec des méthodes basées sur du lancé de faisceaux [HH84, ORM07], en particulier pour déterminer l'éclairement dû à des sources surfaciques.

Concernant l'éclairement indirect, l'utilisation de la visibilité exacte point à surface est en revanche une approche très peu explorée. Dans le cadre d'un calcul hiérarchique de la radiosité, Durand *et al.* [DDP99] utilisent le squelette de visibilité [DDP97] pour guider la subdivision d'un maillage de discontinuités par la visibilité. De plus, le squelette

de visibilité est utilisé pour effectuer des requêtes de visibilité point à surface afin de calculer les facteurs de forme de manière analytique.

De manière plus générale, les solutions analytiques dédiées au problème de la visibilité surface à surface sont réalisées dans un espace de droites (espace de *Plücker*) [NBG02, HMN05, MA05]. Bien qu'elles reposent sur un pré-calcul coûteux en temps et en mémoire, elles permettent ensuite d'extraire rapidement des informations exactes de visibilité ; cela revient à exploiter la cohérence visuelle entre deux surfaces.

Ce rapport montre (i) pourquoi la visibilité est un facteur prépondérant dans l'estimation de densité et (ii) comment l'utilisation de calculs de visibilité permettent de réduire le biais de diverses méthodes basées sur le tracé de photons. Notre approche permet d'introduire la visibilité pour supprimer le biais de frontière en précisant le calcul proposé par Lavignotte et al. [LP03] et de Lastra et al. [LURM02]. Nous généralisons également l'utilisation de la visibilité introduite dans [BSC\*03] pour réduire le biais de proximité dans un contexte de simulation d'éclairage par tracé de photons.

### 3. Biais de frontière

Le biais de frontière est caractérisé par une sous-estimation de l'éclairement aux bords des surfaces ; nous proposons ici de préciser l'origine de ce biais et une manière de le supprimer.

#### 3.1. Cause du phénomène

Le biais de frontière est directement lié à la définition de l'estimation de densité. Nous décrivons ici l'utilisation d'un noyau à support fixe, mais la démonstration est généralisable à une approche de type  $k$  plus proches voisins.

Soit  $f(x)$  une fonction de densité de probabilité et  $F(x)$  sa fonction de répartition. Nous avons :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}. \quad (5)$$

La dérivation numérique, ou *estimateur*  $\hat{f}(x)$  de (5) donne alors pour  $n$  échantillons :

$$\hat{f}(x) = \frac{\#\{x_i \in ]x-h; x+h]\}}{2nh}. \quad (6)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme d'une somme sur l'ensemble des  $n$  échantillons [Sim96] :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (7)$$

où  $K$  est la fonction rectangle normalisée centrée sur  $] -1; 1 ]$  :

$$K(u) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } u \in ] -1; 1 ] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8)$$

Les équations (7) et (8) forment ce qui est communément appelé une estimation de densité de type histogramme. Une *estimation de densité par noyau* est une généralisation du procédé en utilisant tout type de fonction  $K(u)$ , appelée *noyau*, respectant les propriétés suivantes :

$$K(u) \geq 0, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(u) du = 1. \quad (10)$$

Ces deux critères assurent à l'estimateur  $\hat{f}(x)$  d'être une fonction de densité de probabilité.

Le biais de frontière survient lorsque l'estimateur est appliqué à une fonction définie sur un intervalle borné  $[a; b]$ . Par exemple, aux bornes de l'intervalle d'estimation, c'est-à-dire lorsque l'estimation est proche de  $a$  ou proche de  $b$  (*i.e.* lorsque  $x \in [a; a+h]$  ou  $x \in [b-h; b]$ ), le noyau n'est plus utilisé sur l'ensemble de son support. Dans ce cas, le critère (10) n'est plus respecté rendant ainsi l'estimateur non-consistant. Afin de résoudre ce problème et donc rendre l'estimateur à nouveau consistant, une normalisation de l'estimation de densité peut être utilisée [Jon93] :

$$\hat{f}_N(x) = \frac{1}{K_N} \hat{f}(x) \quad (11)$$

où  $K_N$  est le facteur de normalisation suivant :

$$K_N = \int_R K(u) du \quad (12)$$

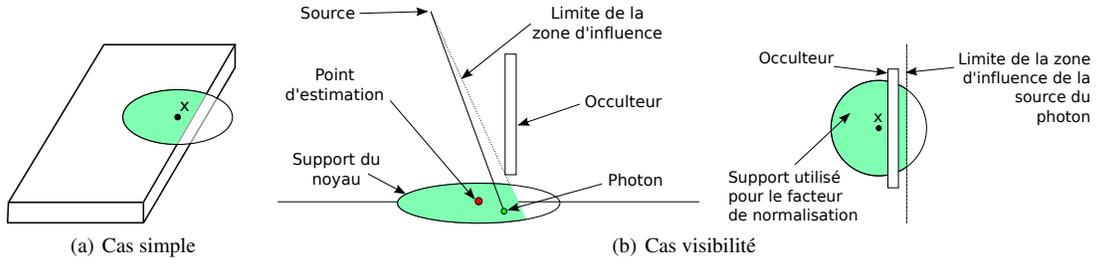
$R$  étant l'intervalle sur lequel est défini la fonction  $f$  autour du point  $x$  :

$$R = \left[ \frac{a}{h}; \frac{b}{h} \right] \cap \left] \frac{x-h}{h}; \frac{x+h}{h} \right]. \quad (13)$$

Note : sur l'intervalle  $[a+h; b-h]$ , le facteur de normalisation  $K_N$  est égal à 1.

#### 3.2. Application au tracé de photons

Dans le cas du tracé de photons, le support du noyau dépend non seulement des frontières des objets, mais aussi de zones d'influence des sources d'éclairement (directes ou



**Figure 2:** Estimation de densité avec prise de la limite pour le support du noyau.

indirectes) [LURM02]. La figure 2 montre les deux cas pour lesquels le support du noyau doit être réajusté. Lorsque la source d'éclairage est occultée par un objet, le support doit également être adapté en fonction de la visibilité. Pour cela, nous proposons de déterminer la portion visible exacte de la surface considérée depuis la source (calcul de visibilité exact point à surface), et de prendre en compte pour chaque photon l'intersection avec le support complet. Pour un photon  $i$  donné, cette surface définit le domaine d'intégration  $\mathcal{R}^i$  du facteur de normalisation  $K_N^i$ . De cette manière, l'estimation de densité utilisée pour les cartes de photons devient :

$$L_{ind}(x, \mathbf{o}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i})}{A^k(x) K_N^i} K\left(\frac{x - y_i}{d_k}\right) \quad (14)$$

### 3.2.1. Noyau constant

Dans le cas d'une estimation de densité avec un noyau constant, le facteur de normalisation associé à un photon donné est proportionnel à l'aire du domaine  $\mathcal{R}$ . En effet, dans ce cas précis on a :

$$K_N = \int_{\mathcal{R}} K(u) du = \int_{\mathcal{R}} c du = cS \quad (15)$$

où  $S$  est l'aire du domaine  $\mathcal{R}$ .

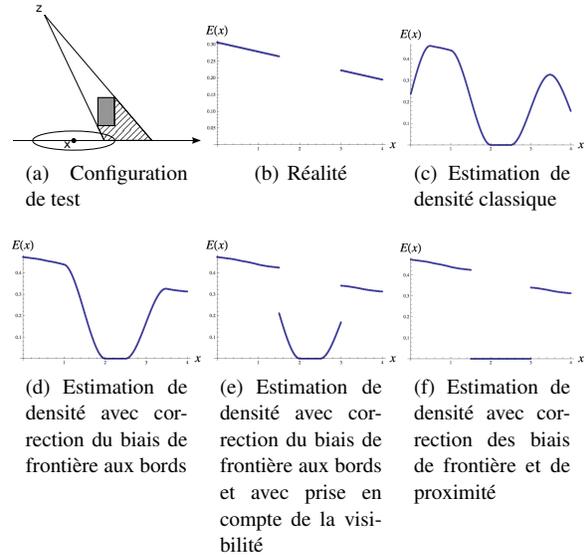
### 3.2.2. Noyau non constant

Dans le cas d'un noyau non constant, il n'est pas possible d'obtenir une formule close simple pour calculer  $K_N$ . Nous décidons dans ce cas d'obtenir une estimation de  $K_N$  par un processus de Monte-Carlo :

$$\langle K_N \rangle = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{K(x - s_j)}{p(s_j)}. \quad (16)$$

Le processus revient donc à choisir (aléatoirement) des échantillons  $s_j$ , sur le domaine  $\mathcal{R}$ , et à sommer leurs contributions avec les pondérations  $p(s_j)$  correspondantes. En pratique,  $m$  échantillons sont choisis sur le support complet  $\mathcal{D}$  ; si un échantillon  $s_j$  n'appartient pas à  $\mathcal{R}$ , sa valeur  $K(x - s_j)$

est considérée comme nulle. Cette approche permet à la fois d'estimer la valeur de  $K_N$  tout en évitant le calcul exact de  $\mathcal{R}$ .



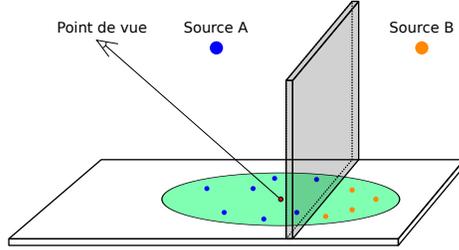
**Figure 3:** Mise en évidence du gain obtenu avec correction du biais de frontière et du biais de proximité

Cette méthode est illustrée sur la figure 3, avec les différents gains lorsque le support est normalisé avec et sans la prise en compte de la visibilité.

## 4. Biais de proximité

Le biais de proximité provient de l'utilisation de photons distants du point d'estimation (équation 4) et produit des débordement lumineux caractéristiques par exemple sous des portes ou le long de cloisons fines dans un bâtiment (figure 4). Supprimer totalement ce biais reviendrait non seulement à réduire le support à un point, mais aussi à disposer d'une infinité de photons en ce point pour représenter l'ensemble des directions d'incidence. Fondamentalement il

n'est pas possible de le supprimer car l'utilisation des photons à une position voisine de leur point d'impact introduit intrinsèquement un biais. Cependant, nous proposons une approche basée sur la visibilité pour supprimer les débordements lumineux caractéristiques.



**Figure 4:** Débordements lumineux dus à l'utilisation de photons incorrects dans l'estimation de densité

Il existe deux configurations essentielles pour lesquelles un photon ne doit pas être considéré pour l'estimation de densité :

- le photon positionné en  $y$  n'est pas visible depuis le point d'observation  $O$  (figure 5.a) ;
- le photon provient d'une source  $P$  non visible depuis le point d'estimation  $x$  (figure 5.b).

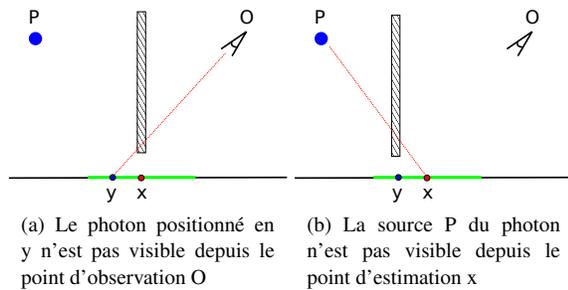
Pour prendre en compte la visibilité dans ce contexte, nous introduisons le concept d'équivalence visuelle. Celui-ci repose sur la notion d'ensemble visible dans un angle solide.

#### 4.1. Ensemble visible dans un angle solide

Soit  $\mathcal{V}_x$ , l'ensemble des directions contenues dans un angle solide  $\omega_x$ , autour d'un point  $x$ .

$$\mathcal{V}_x = \left\{ \omega \mid \omega = \mathbf{xy}, y \in \mathcal{S}^2(\omega_x) \right\}, \quad (17)$$

avec  $\mathcal{S}^2(\omega_x)$ , la portion de surface de la sphère unitaire sous-tendue par l'angle solide  $\omega_x$ .



**Figure 5:** Configurations dans lesquelles un photon ne doit pas être pris en compte dans l'estimation de densité

Nous définissons également  $\psi(x, \mathcal{V}_x)$ , l'ensemble des points visibles depuis le point  $x$  dans l'ensemble des directions unitaires  $\mathcal{V}_x$ .

Ainsi, à l'aide de la fonction usuelle *tracé de rayons*  $\tau(x, \mathbf{d})$  – renvoyant le point le plus proche de  $x$  dans la direction  $\mathbf{d}$  depuis  $x$  – l'expression du tracé de rayons dans un angle solide  $\omega_x$  devient :

$$\psi(x, \mathcal{V}_x) = \{r \mid \exists \mathbf{d} \in \mathcal{V}_x, r = \tau(x, \mathbf{d})\}. \quad (18)$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points visibles depuis  $x$  dans l'ensemble des directions  $\mathcal{V}_x$ .

#### 4.2. Construction d'un angle solide

Soit  $\Omega_x(y, z) = \omega_x$ , un angle solide construit à partir d'un centre  $x$ , autour des points  $y$  et  $z$ , tel que :

$$(\mathbf{xy}, \mathbf{xz}) \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x \quad (19)$$

Cette définition a pour objectif d'assurer que deux points  $y$  et  $z$  sont contenus dans un même angle solide, quelle que soit la construction de  $\Omega_x(y, z)$ .

#### 4.3. Prédicat d'équivalence visuelle

L'ensemble  $\psi(x, \mathcal{V}_x)$  des points visibles dans un angle solide permet de définir une notion binaire d'équivalence visuelle  $\mathcal{E}$ . Ainsi, deux points  $p_1$  et  $p_2$  sont équivalents visuellement s'ils sont dans le même ensemble visible depuis un même angle solide  $\omega_x$  :

$$\mathcal{E}(\omega_x, p_1, p_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (p_1, p_2) \in \psi(x, \mathcal{V}_x) \times \psi(x, \mathcal{V}_x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (20)$$

Cette équivalence peut s'écrire également avec le prédicat de visibilité  $\text{Vis}(a, b)$ , valant 1 si et seulement si  $a$  et  $b$  sont visibles :

$$\mathcal{E}(\omega_x, p_1, p_2) = \begin{cases} \text{Vis}(p_1, x) \text{Vis}(p_2, x) & \text{si } (\mathbf{xp}_1, \mathbf{xp}_2) \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (21)$$

#### 4.4. Réécriture de l'équation de l'estimation de densité

La visibilité est introduite pour valider l'utilisation de chaque photon lors de l'estimation de densité. Nous considérons qu'un photon  $y$  est valide pour un point d'estimation  $x$  s'ils vérifient tous les deux les prédicats d'équivalence

visuelle  $\mathcal{E}(\omega_O, x, y)$  et  $\mathcal{E}(\omega_P, y, x)$ . La première classe d'équivalence est construite à partir du point de vue d'observation  $O$  ; celle-ci assure que le photon est un représentant d'une zone visible depuis le point de vue  $z$ . La deuxième classe d'équivalence est construite depuis la source  $P$  du photon ; celle-ci permet d'assurer que le photon est issu d'une source qui peut contribuer au point d'estimation  $x$ .

Nous définissons formellement l'utilisation des classes d'équivalence dans l'estimation de densité de type  $k$  plus proches voisins (*i.e.* tel que formulé dans [Jen01]). Soient  $O$  le point de vue d'observation,  $x$  le point d'estimation,  $x_i$  la position du  $i^{\text{ème}}$  photon et  $P_i$  la position de la source de ce photon, l'estimation de densité au point  $x$  avec l'utilisation de l'équivalence visuelle est alors :

$$L(x, \mathbf{o}) \approx \sum_{i=1}^n f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i}) \frac{\Phi_i(x, \mathbf{i})}{\pi r^2} \times \mathcal{E}(\Omega_O(x, y_i), x, y_i) \times \mathcal{E}(\Omega_{P_i}(x, y_i), x, y_i). \quad (22)$$

L'équation (21) ainsi que le fait que  $O$  et  $P_i$  soient les sources respectives de  $x$  et  $y_i$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Omega(O, x, y_i), x, y_i) &= \text{Vis}(O, y_i) \\ \mathcal{E}(\Omega(P_i, x, y_i), x, y_i) &= \text{Vis}(x, P_i) \end{aligned}$$

et donc l'équation (22) devient :

$$L(x, \mathbf{o}) \approx \sum_{i=1}^n f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i}) \frac{\Phi_i(x, \mathbf{i})}{\pi r^2} \text{Vis}(O, y_i) \text{Vis}(x, P_i). \quad (23)$$

De cette manière, seuls deux tests de visibilité supplémentaires permettent de supprimer tout débordement lumineux.

#### 4.5. Validation de l'approche

Cette formulation respecte la convergence de l'estimation de densité vers une solution exacte [Jen01] : lorsque le nombre de photons augmente, l'estimation de densité est réalisée avec un disque de rayon de plus en plus petit.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_i) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Vis}(O, y_i) &= \text{Vis}(O, x) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Vis}(P_i, x) &= \text{Vis}(P_i, y_i) = 1. \end{aligned}$$

avec  $d(x, y)$  la distance entre les points  $x$  et  $y$ . La conséquence immédiate est alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_r(x, \mathbf{o}, \mathbf{i}) \frac{\Phi_i(x, \mathbf{i})}{\pi r^2} \text{Vis}(O, y_i) \text{Vis}(x, P_i) = L(x, \mathbf{o}). \quad (24)$$

## 5. Mise en œuvre

Les méthodes développées dans le cadre de ce rapport reposent sur un moteur de lancé de rayons, avec une structure accélératrice de type QBVH [DHK08]. Tous les tests de visibilité *point à point* sont réalisés avec ce lancé de rayons. Pour un point donné, les calculs de visibilité *point à surface* sont basés sur une description hiérarchique des portions visibles de la surface considérée ; nous utilisons l'implémentation décrite dans [MAAG12]. Cette méthode s'avère plus particulièrement efficace lorsque les tests de visibilité sont cohérents, c'est-à-dire lorsque de nombreuses requêtes sont réalisées pour un même ensemble de surfaces.

### 5.1. Biais de frontière

Pour supprimer du biais de frontière, l'objectif est de calculer précisément le facteur de normalisation. Pour cela, plusieurs solutions peuvent être envisagées selon le noyau choisi. Avec l'utilisation d'un noyau constant, la correction consiste à calculer de manière exacte le domaine du facteur de normalisation. Pour le cas général, nous proposons d'approcher la valeur à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo, en plaçant des échantillons  $s_i$  sur le disque d'estimation ; les échantillons  $s_i$  sont ensuite utilisés pour le calcul seulement s'ils sont visibles depuis la source  $P$  du photon. Au total, nous avons mis en œuvre trois méthodes.

- La méthode *analytique* est spécifique à l'utilisation d'un noyau constant. Elle est basée sur un calcul exact de l'intersection [Arv91] entre le disque d'estimation de densité et l'ensemble  $E_v$  des surfaces visibles depuis la source du photon.  $E_v$  est obtenu à l'aide d'une méthode de calcul exact de visibilité, il est constitué de polygones convexes triangulés.
- La méthode *PP-MC* est une première estimation de Monte-Carlo pour le facteur de normalisation dont l'objectif est de déterminer la visibilité entre la source  $P$  et chacun des échantillons par lancé de rayons.
- La méthode *Exact-MC* est une seconde estimation de Monte-Carlo pour le facteur de normalisation : l'ensemble des échantillons  $s_i$  visibles depuis  $P$  est déterminé par un test de visibilité exact point à surfaces. Nous utilisons la méthode point à surface, de façon à parcourir en une seule fois toutes les portions des surfaces visibles depuis  $P$  et qui portent l'ensemble des échantillons  $s_i$ .

### 5.2. Biais de proximité

La réduction du biais de proximité implique de vérifier que les sources des photons participent à l'éclairage du point d'estimation et que les photons sont également visibles de l'observateur. Nous proposons trois méthodes différentes pour traiter ce problème. Rappelons que les tests de visibilité point à surface sont particulièrement efficaces lorsque de nombreuses requêtes sont réalisées à partir de points proches et vers les mêmes surfaces.

- Une méthode point à point appelée *PP* : les deux tests de validation sont réalisés par lancé de rayons.
- Une méthode appelée *Exact-PP* : le test de validation entre l’observateur et la position des photons y est réalisé par un calcul de visibilité point à surface ; le test de validation entre les sources des photons et le point d’estimation est effectuée par lancé de rayons. Notons que cette configuration est la meilleure possible pour réaliser de nombreuses requêtes point à surface cohérentes.
- Une méthode appelée *Exact-Exact* : les deux tests de validation sont réalisés avec l’approche de type point à surface. Cette configuration conserve la cohérence des tests de visibilité entre l’observateur et les photons, mais ne l’assure pas pour les requêtes entre le point d’estimation et les sources des photons.

Pour compléter toutes les configurations possibles, une autre méthode (*PP-Exact*) pourrait être développée, mais nous ne l’avons pas mis en œuvre car il s’agit de la configuration la moins efficace possible. En effet, non seulement la cohérence des tests de visibilité entre les sources des photons et les points d’estimations n’est plus assurée, mais aussi l’avantage de la cohérence des tests de visibilité depuis l’observateur n’est pas exploitée.

### 5.3. Méthodes de rendu

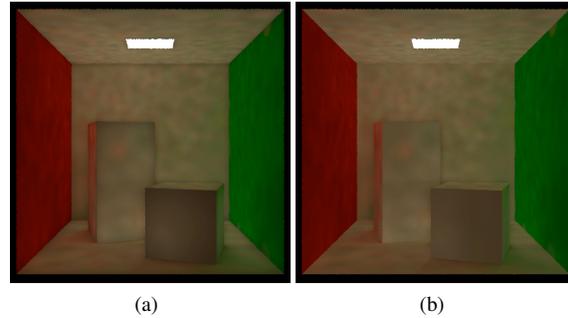
Nous avons implanté les méthodes de réduction du biais de frontière et de proximité dans trois méthodes reposant sur les cartes de photons :

- visualisation directe de la carte de photons par estimation de densité généralisée de type  $k$  plus proches voisins [Jen96] ;
- visualisation par méthode de collecte finale [Jen01], pour laquelle 32 rayons de collecte sont utilisés avec un anti-aliasage de 16 rayons par pixel ;
- cartes de photons progressives [HOJ08], avec 100 000 photons émis par itération.

Pour les cartes de photons progressives, seule la correction du biais de proximité peut être prise en compte. En effet notre méthode de suppression du biais de frontière nécessite de connaître la source des photons aux points d’estimation, or la méthode du tracé de photons progressif repose justement sur un principe de *remplacement* des photons à chaque nouvelle itération.

## 6. Résultats

Nous avons mis en œuvre l’ensemble des algorithmes décrits dans ce rapport. Les résultats ont été produit sur un MacBook pro 8.2 avec un processeur core i7 cadencé à 2.2 Ghz et disposant de 8Go de mémoire centrale. Le nombre de polygones et la résolution des images correspondant à chacune des scènes de tests employées dans ce rapport sont donnés dans le tableau 1.



**Figure 6:** Exemple caractéristique de correction du biais de frontière. Dans l’exemple, seule la contribution indirecte est affichée; (a) sans la correction, les bords des objets sont trop sombres car l’éclairage est sous-estimé, (b) avec la correction, cet assombrissement disparaît.

Pour plus de clarté, nous présentons les résultats dans un premier temps avec une méthode de visualisation directe de la carte de photons par estimation de densité, sans collecte finale (final gather).

### 6.1. Biais de frontière

Pour rappel, les différentes approches permettant de supprimer le biais de frontière sont : (i) analytique avec construction du domaine d’intégration, (ii) Monte-Carlo et visibilité par lancé de rayons, (iii) Monte-Carlo et visibilité point à surface. Le nombre d’échantillons utilisés par les méthodes de Monte-Carlo est indiqué dans le tableau 1, avec les temps de calcul donnés dans le tableau 2. Un exemple caractéristique de correction du biais de frontière est donné dans la figure 6 (les deux images ont été réalisées avec exactement les mêmes photons).

Scène	résolution	# polys.	# échant.
Cornell Box	$512 \times 512$	32	64
Demi	$1280 \times 720$	94	64
Eventail	$1280 \times 720$	222	256
Classroom	$1280 \times 720$	10 000	64
Sponza	$1280 \times 720$	53 734	256

**Table 1:** Résolution d’image, nombre de polygones et nombre d’échantillons  $s_i$  utilisés pour chaque scène lors du calcul du facteur de normalisation par la méthode de Monte-Carlo.

Le biais de frontière, dans le cas d’une correction analytique nécessite des calculs géométriques coûteux pour la construction du domaine  $\mathcal{R}$  du facteur de normalisation. En effet, ce type de calcul est sujet à des problèmes d’instabilité numérique, nécessitant l’utilisation de *transformations sans erreur de calculs flottants* [MBdD\*10] et d’une bibliothèque

Scène	Analytique	PP-MC	Exact-MC
Cornell Box	20m 16s	1m 33s	51s
Demi	4h 28m 53s	13m 24s	7m 20s
Eventail	2h 21m 36s	23m 19s	5m 05s
Classroom	4h 18m 02s	17m 05s	15m 17s
Sponza	48h 00m 12s	1h 24m 47s	2h 46m 48s

**Table 2:** Temps de calcul (hors rendu) avec la suppression du biais de frontière. Le temps de calcul est un temps pour un rendu complet de l'image (hors temps de tracé de photons).

numérique en précision arbitraire [FHL\*07]. Dans le cas d'une approche de type Monte-Carlo pour le calcul des facteurs de normalisation, ces considérations ne sont plus à prendre en compte, puisque le domaine d'estimation n'est pas construit explicitement.

Pour les deux méthodes de Monte-Carlo, les temps de calcul dépendent non seulement de la géométrie de la scène, mais également du nombre d'échantillons  $s_i$  choisis pour l'intégration. Le tableau 4 indique pour chaque scène le temps par échantillon. Ce tableau montre que la cohérence des requêtes joue un rôle très important pour le temps calcul. En particulier, les scènes Eventail et Demi ont de très bonnes statistiques de taux de réutilisation pour les requêtes de visibilité, car les requêtes sont souvent effectuées avec les mêmes objets occultants.

Scène	PP	Exact	# Créat.	# Req.
Cornell Box	1,45	0,79	231	$2,81 \cdot 10^7$
Demi	12,56	6,87	578	$2,65 \cdot 10^8$
Eventail	5,46	1,19	2701	$6,32 \cdot 10^7$
Classroom	16,02	14,32	$1,24 \cdot 10^6$	$1,21 \cdot 10^8$
Sponza	19,87	39,09	$1,1 \cdot 10^7$	$3,36 \cdot 10^8$

**Table 3:** Temps en secondes par échantillon  $s_i$  pour la suppression du biais de frontière par méthode de Monte-Carlo. Dans le cas de la méthode exacte, le nombre de créations d'arbres et ainsi que le nombre total de requêtes de visibilité sont donnés

## 6.2. Biais de proximité

Les méthodes de correction de biais apportent des coûts supplémentaires qui sont directement dépendants du nombre de photons à valider pour les deux approches. Le biais de proximité ne nécessitant que des tests de visibilité (*i.e.* visible ou non visible), son surcoût est modéré. Le tableau 5 indique le temps de calcul lié uniquement au biais de proximité lors de la création d'une image. Rappelons que la réduction du biais de proximité consiste à vérifier que les photons utilisés pour l'estimation de densité sont bien visibles de l'observateur et réciproquement que les sources des photons sont bien visibles depuis le point d'estimation.

Scène	PP	Exact-PP	Exact-Exact
Cornell Box	2,96s	2,41s	2,90s
Demi	21s	19s	24s
Eventail	6s	7s	20s
Classroom	35s	21s	6m 52s
Sponza	35s	34s	15m 55s

**Table 4:** Performances pour le biais de proximité. PP indique des tests point à point pour les deux tests de validation des photons. Exact-PP indique un test point à point pour valider du point de vue de la source du photon et un test point à surface pour le point de vue d'observation. Exact-Exact indique des tests de visibilité avec la méthode point à surface dans les deux cas.

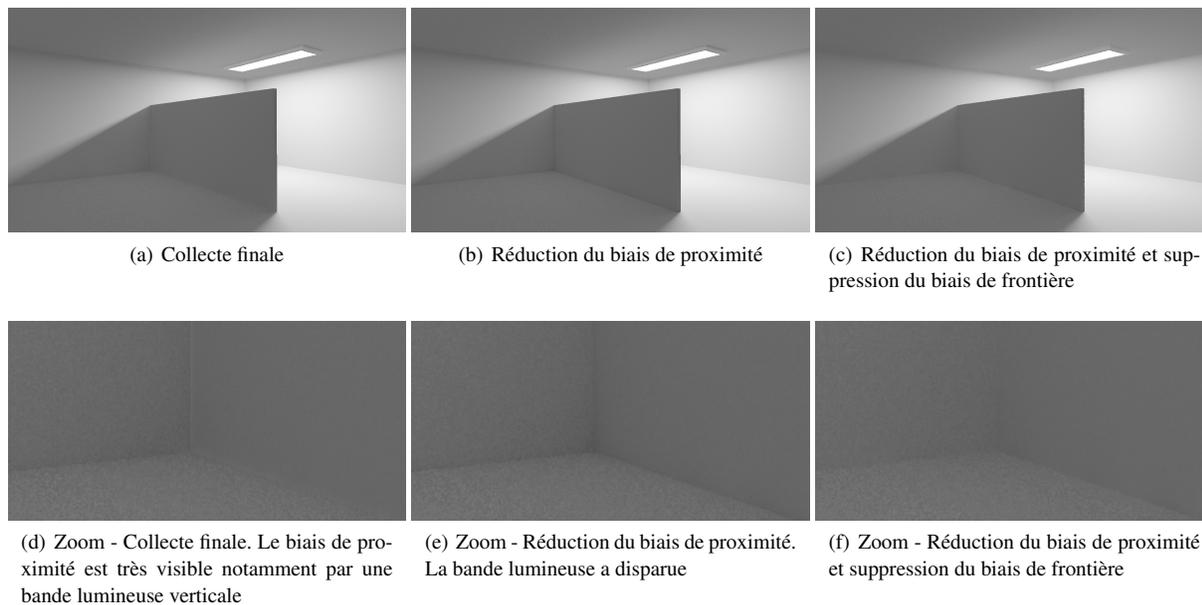
La méthode *Exact-PP* produit les meilleures performances. En effet, la section 5 explique pourquoi les calculs exacts points à surface sont plus efficaces lorsqu'ils sont réalisés plusieurs fois à partir d'une région vers les mêmes surfaces. La colonne *Exact-PP* correspond au meilleur des cas puisque depuis l'observateur la surface sur laquelle reposent les photons est la même pour tous les tests de visibilité (calculs de visibilité exacte), et depuis le point d'estimation, les sources des photons ne sont pas localisées sur les mêmes surfaces.

Nous avons implanté les méthodes de réduction du biais de frontière et de proximité dans deux méthodes reposant sur les cartes de photons : la collecte finale et les cartes de photons progressives.

## 6.3. Collecte finale et cartes de photons progressives

La figure 7 montre les améliorations visuelles produites par la suppression de biais de frontière et réduction du biais de proximité avec 32 rayons de collecte finale (et la même carte de photons pour toutes les images). Les images montrent bien que sans correction du biais, les débordements lumineux et la sous estimation de l'éclairement aux bords des surfaces subsistent ; la correction des biais de frontière et de proximité permet de supprimer définitivement ces défauts.

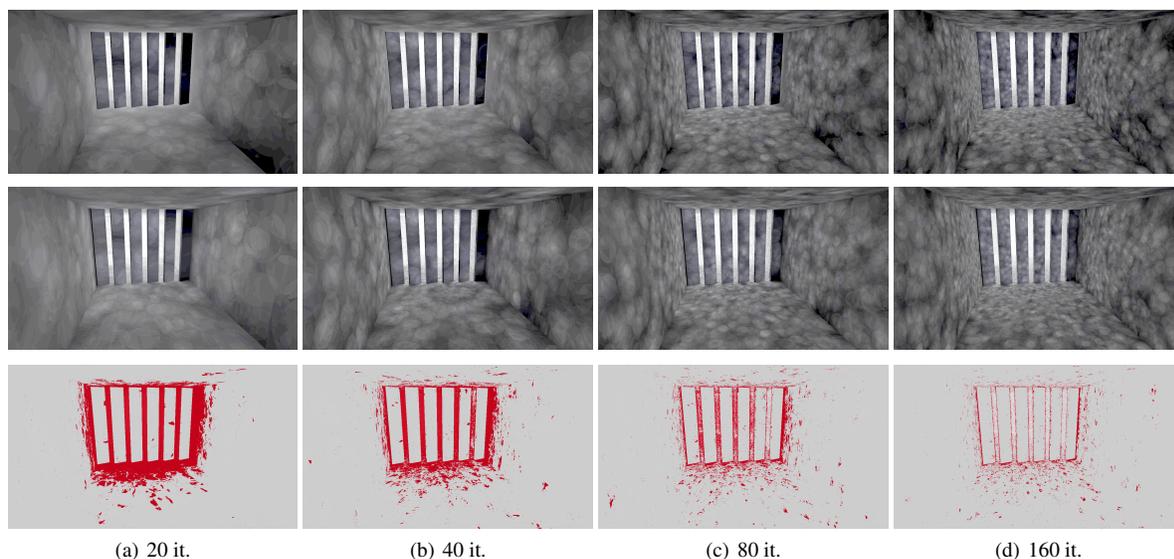
Les cartes de photon progressives intègrent le calcul de l'éclairement direct, l'utilisation de la correction du biais de proximité devient très important. C'est particulièrement le cas de la figure 8 où l'éclairement direct est dû à une source ponctuelle, sans correction, les ombres ne sont pas définies nettement, tandis qu'avec la correction, elles retrouvent leur délimitations franches. Les temps de rendu avec et sans correction du biais de proximité sont donnés dans le tableau 6. La figure 9 illustre les différences visuelles pour 4 itérations différentes de cette méthode.



**Figure 7:** Exemple de rendus par collecte finale avec et sans correction des biais de frontière et de proximité ; les photons utilisés pour produire ces images sont toujours les mêmes.



**Figure 8:** Exemple de calcul de l'éclairage direct avec les cartes de photons progressives. (a) Sans correction du biais de proximité. (b) Avec correction du biais de proximité. La correction du biais de proximité permet de produire des ombres dures directement avec l'estimation de densité.



**Figure 9:** Différences entre les images produites par la méthode des cartes de photons progressives avec et sans correction du biais de proximité pour la scène "Eventail". Les images correspondent à plusieurs itérations du calcul, allant de 20 à 160. Ligne 1 : images sans correction ; ligne 2 image avec correction ; ligne 3 : différences deux à deux entre les versions avec et sans correction. Ces images illustrent bien la correction du biais au niveau des régions où les débordements lumineux sont importants.

Nb itérations	20	40	80	160
CB	24s	42s	1m 15s	2m 27s
CB Prox	1m 19s	1m 37s	2m 09s	3m 14s
Demi	57s	1m 15s	2m 00s	3m 39s
Demi Prox	3m 27s	3m 59s	4m 36s	6m 08s
Eventail	1m 12s	1m 43s	3m 6s	5m 59s
Eventail Prox	2m 47s	3m 28s	4m 44s	7m 25s
Classroom	1m 12s	2m 31s	5m 46s	10m 4s
Classroom Prox	4m 5s	5m 41s	8m 4s	10m 44s
Sponza	1m 0s	1m 57s	3m 51s	7m 27s
Sponza Prox	1m 16s	2m 11s	3m 57s	7m 48s

**Table 5:** Temps de calcul d'une image en tracé de photons progressif sans et avec correction du biais de proximité.

#### 6.4. Analyse et limitations

Les résultats obtenus pour nos méthodes de suppression du biais de frontière et réduction du biais de proximité montrent bien l'intérêt de prendre en compte la visibilité pour les méthodes basées sur le tracé de photons et l'estimation de densité. Le tableau 7 donne une comparaison des résultats obtenus entre une méthode de tracé de chemins (non biaisée) et trois versions de l'estimation de densité, sans et avec correction des biais de frontière et de proximité. Ce tableau montre que dans tous les cas notre méthode apporte une réduction notable du biais global.

Malheureusement, les corrections apportées induisent des surcoûts inévitables liés aux calculs de visibilité. Cependant, la manière dont la visibilité est traitée influe largement sur les performances des algorithmes. En particulier les méthodes point à point (réalisées par lancé de rayons) sont intéressantes lorsqu'il n'est pas possible d'assurer la cohérence des requêtes de visibilité (par exemple pour toutes les requêtes entre un point d'estimation et les sources des photons). En revanche des calculs de visibilité point à surface sont plutôt adaptés pour la validation des photons depuis l'observateur. Par exemple, dans le cas de la scène *Eventail*, la visibilité exacte point à surface permet des gains de l'ordre de 500% par rapport à une approche point à point.

Malheureusement pour certaines configurations géométriques (par exemple pour la scène *Sponza*, tableau 4), les requêtes de visibilité ne sont pas assez rentabilisées et ne permettent pas d'obtenir des gains en performances intéressants par rapport à des calculs de visibilité point à point. Cela s'explique par deux raisons principales : (i) les requêtes ne sont pas suffisamment cohérentes, et (ii) les précalculs sont trop souvent supprimés faute d'espace mémoire et reconstruits ensuite.

#### 7. Conclusion

Ce rapport montre que la visibilité est un facteur important pour l'utilisation de cartes de photons, notre objectif est de proposer des outils permettant de réduire le biais issu de

Scène	Classique	Prox	Prox+Front
Cornell Box	9,63 %	9,77 %	9,33 %
Demi	13,38 %	13,53 %	12,35 %
Eventail	5,05 %	5,17 %	4,94 %
Classroom	9,13 %	9,32 %	8,72 %
Sponza	10,51 %	10,65 %	9,21 %

**Table 6:** Erreur relatives entre les différentes méthodes et la méthode de référence. Nous calculons une différence moyenne pixel à pixel entre une image de référence (calculée par un tracé de chemin avec 8192 rayons par pixels) et chacune des méthodes. Une valeur plus faible indique un meilleur résultat.

l'estimation de densité. Pour cela, nous reprenons deux des trois catégories de biais proposées dans [Sch03] : le biais de frontière et le biais de proximité. Nous montrons comment la visibilité permet de supprimer le biais de frontière et de réduire le biais de proximité. Les calculs de visibilité proposés peuvent reposer sur des méthodes classiques de lancé de rayons (point à point), mais des calculs de visibilité exacte point à surface peuvent se montrer plus efficaces dans certaines configurations.

Nos résultats mettent en évidence l'amélioration de la qualité des images avec les corrections proposées dans ce rapport, aussi bien avec l'utilisation directe des cartes de photons, la collecte finale ou bien les cartes de photons progressives.

Cependant, ces corrections induisent un surcoût de calcul non négligeable et nous pensons que la visibilité exacte point à surface peut être une solution efficace à plus long terme. En particulier, une structure hiérarchique pourrait probablement réduire de manière significative les coûts des requêtes de visibilité.

Par ailleurs, nous avons proposé une solution analytique pour la suppression du biais de frontière dans le cas d'un noyau constant. Nous pensons que les travaux de Walter [WHSG97] pourraient permettre de généraliser ce travail à des facteurs de normalisation analytiques pour des noyaux quelconques.

## References

- [Arv91] ARVO J. (Ed.): *Graphics gems II*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1991. 7
- [AWG78] ATHERTON P., WEILER K., GREENBERG D.: Polygon shadow generation. In *SIGGRAPH '78: Proceedings of the 5th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1978), ACM Press, pp. 275–281. 3
- [BSC\*03] BEKAERT P., SLUSALLEK P., COOLS R., HAVRAN V., SEIDEL H.-P.: *A custom designed density estimation method for light transport*. Research Report MPI-I-2003-4-004, Max-Planck-Institut für Informatik, Stuhlsatzenhausweg 85, 66123 Saarbrücken, Germany, September 2003. 3, 4
- [Cro77] CROW F. C.: Shadow algorithms for computer graphics. In *SIGGRAPH '77: Proceedings of the 4th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1977), ACM Press, pp. 242–248. 3
- [DDP97] DURAND F., DRETTAKIS G., PUECH C.: The visibility skeleton: a powerful and efficient multi-purpose global visibility tool. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1997), ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 89–100. 3
- [DDP99] DURAND F., DRETTAKIS G., PUECH C.: Fast and accurate hierarchical radiosity using global visibility. *ACM Trans. Graph.* 18, 2 (1999), 128–170. 3
- [DHK08] DAMMERTZ H., HANIKA J., KELLER A.: Shallow bounding volume hierarchies for fast SIMD ray tracing of incoherent rays. In *Computer Graphics Forum (Proc. 19th Eurographics Symposium on Rendering)* (2008), pp. 1225–1234. 7
- [FHL\*07] FOUSSE L., HANROT G., LEFÈVRE V., PÉLISSIER P., ZIMMERMANN P.: Mpf: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding. *ACM Trans. Math. Softw.* 33, 2 (June 2007). 9
- [HBHpS05] HAVRAN V., BITTNER J., HERZOG R., PETER SEIDEL H.: Ray maps for global illumination. In *Eurographics Symposium on Rendering/Eurographics Workshop on Rendering Techniques* (2005), pp. 43–54. 3
- [HH84] HECKBERT P. S., HANRAHAN P.: Beam tracing polygonal objects. In *SIGGRAPH '84: Proceedings of the 11th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1984), ACM Press, pp. 119–127. 3
- [HMN05] HAUMONT D., MAKINEN O., NIRENSTEIN S.: A low dimensional framework for exact polygon-to-polygon occlusion queries. In *Eurographics Workshop on Rendering* (2005), pp. 211–222. 4
- [HOJ08] HACHISUKA T., OGAKI S., JENSEN H. W.: Progressive photon mapping. *ACM Transactions on Graphics* 27 (2008). 2, 8
- [Jen96] JENSEN H. W.: Global illumination using photon maps. In *Eurographics Symposium on Rendering/Eurographics Workshop on Rendering Techniques* (1996), pp. 21–30. 2, 8
- [Jen01] JENSEN H. W.: *Realistic image synthesis using photon mapping*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2001. 2, 3, 7, 8
- [Jon93] JONES M.: Simple boundary correction for kernel density estimation. *Statistics and Computing* 3, 3 (1993), 135–146. 4
- [LP03] LAVIGNOTTE F., PAULIN M.: Scalable photon splatting for global illumination. In *Computer graphics and interactive techniques in Australasia and South East Asia* (2003). 3, 4
- [LURM02] LASTRA M., UREÑA C., REVELLES J., MONTES R.: A particle-path based method for Monte-Carlo density estimation. 3, 4, 5
- [MA05] MORA F., AVENEAU L.: Fast and exact direct illumination. In *Computer Graphics International* (Juin 2005). Proceedings of CGI'2005, New York, Stony Brooks. 4
- [MAAG12] MORA F., AVENEAU L., APOSTU O. L., GHAZANFARPOUR D.: Lazy visibility evaluation for exact soft shadows. *Computer Graphics Forum* 31, 1 (2012), 132–145. 7
- [MBdD\*10] MULLER J.-M., BRISEBARRE N., DE DINECHIN F., JEANNEROD C.-P., LEFÈVRE V., MELQUIOND G., REVOL N., STEHLÉ D., TORRES S.: *Handbook of Floating-Point Arithmetic*. Birkhäuser Boston, 2010. ACM G.1.0; G.1.2; G.4; B.2.0; B.2.4; F.2.1., ISBN 978-0-8176-4704-9. 8
- [NBG02] NIRENSTEIN S., BLAKE E., GAIN J.: Exact from-region visibility culling. In *Eurographics workshop on Rendering* (June 2002), Eurographics Association, pp. 191–202. 4

- [NN72] NISHITA T., NAKAMAE E.: An algorithm for hidden line elimination of polyhedra. *Information Processing in Japan 12* (1972), 134–141. [3](#)
- [NN74] NISHITA T., NAKAMAE E.: An algorithm for half toned representation of three dimensional objects. *Information Processing in Japan 14*, 1 (1974), 93–99. [3](#)
- [NN83] NISHITA T., NAKAMAE E.: Half-tone representation of 3-d objects illuminated by area sources or polyhedron sources. In *Proceedings of IEEE Computer Software and Application Conference* (1983), pp. 237–342. [3](#)
- [ORM07] OVERBECK R., RAMAMOORTHI R., MARK W. R.: A real-time beam tracer with application to exact soft shadows. In *Eurographics Symposium on Rendering* (Jun 2007), pp. 85–98. [3](#)
- [PH10] PHARR M., HUMPHREYS G.: *Physically based rendering, second edition: from theory to implementation*, 2nd ed. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2010. [2](#), [3](#)
- [Sch03] SCHREGLE R.: Bias compensation for photon maps. *Computer Graphics Forum 22* (2003), 729–742. [2](#), [3](#), [12](#)
- [Sim96] SIMONOFF J. S.: Smoothing methods in statistics. [4](#)
- [TM06] TOBLER R. F., MAIERHOFER S.: Improved illumination estimation for photon maps in architectural scenes. *International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision* (2006), 257–262. [3](#)
- [Vea97] VEACH E.: *Robust Monte-Carlo methods for light transport simulation*. PhD thesis, 1997. [2](#)
- [WA77] WEILER K., ATHERTON P.: Hidden surface removal using polygon area sorting. In *SIGGRAPH '77: Proceedings of the 4th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 1977), ACM Press, pp. 214–222. [3](#)
- [WHSG97] WALTER B., HUBBARD P. M., SHIRLEY P., GREENBERG D. P.: Global illumination using local linear density estimation. *ACM Trans. Graph.* 16 (July 1997), 217–259. [12](#)