



**HAL**  
open science

## Proposition d'une méthode xTAN pour modéliser les processus complexes

Olivier Maurice, Alain Reineix

► **To cite this version:**

Olivier Maurice, Alain Reineix. Proposition d'une méthode xTAN pour modéliser les processus complexes. 2012. hal-00695458v2

**HAL Id: hal-00695458**

**<https://hal.science/hal-00695458v2>**

Preprint submitted on 20 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Proposition d'une méthode 'xTAN' pour modéliser les processus complexes

Olivier Maurice - olivier.maurice@gmail.com

Alain Reneix - alain.reineix@xlim.fr

20 mai 2012

## Résumé

Différents tâtonnements de travaux précédents, permettent aujourd'hui de présenter une technique qui devra être validée par diverses applications à venir. L'objectif de cette technique est de fournir une méthodologie qui conduise à la modélisation de processus complexes comme par exemple des processus bio-sociaux-psychiques. La technique fait appel à des concepts avancés qui devront aussi être positionnés mathématiquement. Le premier affichage consiste en deux arbres parallèles : un arbre d'évolutions et un arbre de décisions. Ces deux arbres sont duaux et des relations relient les sorties de l'évolution aux valeurs des décisions et réciproquement. L'arbre de l'évolution est symbolique. Il manipule des transformations apportées à un tenseur fondamental rattaché à la description des structures du système étudié sous forme de graphes étendus (nous précisons cette extension). Les deux arbres partent d'un état supposé, à la fois en métrique et en probabilité de décision. A chaque extrémité de branches on peut calculer une espérance de gain comme le produit scalaire des vecteurs des observables en sortie de couche physique (implémentée dans l'arbre d'évolution) et des probabilités en sortie d'arbre de décision. Les deux arbres sont encadrés par des environnements, respectivement physique et psychique. On incorpore ainsi élégamment la théorie des jeux dans un graphe dynamique où les transformations peuvent évoluer dans le temps. L'objectif de cet article est de présenter les différents aspects de la méthode avec des détails d'un niveau intermédiaire sur ses techniques. Comme nous le signalons par la suite, nous avons parfois employé des "raccourcis" qui nécessitent à eux seuls des développements conséquents pour pouvoir fournir aux ingénieurs des pistes de compréhension détaillées mais qui ne demandent pas des connaissances mathématiques poussées. Ainsi nous prenons le risque de ne satisfaire personne ! Cependant, d'expérience nous savons que cette insatisfaction est incontournable pour présenter une telle méthode en quelques pages. Une présentation édulcorée permettrait de mieux comprendre la démarche, et nous la réaliserons. Mais sa seule existence pourrait paraître presque comme une affabulation si elle n'était appuyée d'un écrit plus détaillé. Et une description précise nécessitera un ouvrage. xTAN signifie eXtended Tensorial Analysis of Networks.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Idée</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Couche physique</b>	<b>3</b>
2.1	Environnement de la couche physique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Couche psychique</b>	<b>5</b>
3.1	Environnement psychique . . . . .	6
3.2	Liens entre les deux arbres . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Structure d'ensemble</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Un exemple de modélisations à venir</b>	<b>7</b>
5.1	Processus de croissance d'un axone et transmissions d'in- formations chimiques . . . . .	8
5.2	Etablissement des opérateurs $(\gamma, l)$ . . . . .	8
5.3	Définitions de $m$ et $\omega$ . . . . .	9
5.4	Définition de la condition initiale . . . . .	10
5.5	Métrique de la condition initiale . . . . .	11
5.6	Sources . . . . .	12
5.7	Incidence . . . . .	12
5.8	Connectivité . . . . .	12
5.9	Spatialité & zones chimio-attractives ou chimio-répulsives . . . . .	13
5.10	Modélisation . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Annexe I</b>	<b>17</b>
7.1	Graphes . . . . .	17
7.2	Kets déduits des graphes . . . . .	19
7.3	Bras et espaces duaux . . . . .	20
7.4	Tenseur fondamental et Invariant . . . . .	21
7.5	Conclusion . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Annexe II</b>	<b>23</b>
8.1	Graphe équivalent d'un stimuli . . . . .	23
8.2	Graphe du rayonnement d'une alimentation vers une an- tenne (exemple tiré de l'électronique) . . . . .	24
8.3	Symboles disponibles . . . . .	25
8.4	Eléments de graphes . . . . .	25
8.4.1	Incidence et connectivité . . . . .	26
8.4.2	Matrice d'incidence . . . . .	27
8.4.3	Matrice de connectivité . . . . .	28
<b>9</b>	<b>Annexe III</b>	<b>29</b>
9.1	Branche de Kirchhoff . . . . .	29
9.2	Connectivité . . . . .	29
9.3	Equations dans l'espace complet . . . . .	30
<b>10</b>	<b>Annexe IV</b>	<b>31</b>

# 1 Idée

L'idée est de décrire les structures somatiques que nous nommerons "physique" par un outil à même de décrire des systèmes physiques par des graphes orientés aux propriétés définies. Ces graphes, comme les structures qu'ils modélisent, évoluent. Par ailleurs on modélise des comportements, des automatismes psychiques que nous engloberont sous le terme "psychique" sans prétendre à ce que ce terme soit toujours le plus approprié, par une théorie des jeux. Les deux structures sont alimentées par un environnement. En connectant les deux techniques et en les encadrant par des environnements nous espérons parvenir à une méthode de modélisation pour les processus bio-sociaux-psychiques. Les environnements peuvent provenir de la proximité de structures similaires avec celle étudiée. Nous donnons en annexe des présentations de l'analyse tensorielle des réseaux et de la théorie des jeux, très simples pour les personnes qui ne sont pas du tout de métiers utilisant ces sciences. Quelques raccourcis et simplifications abusives sont opérés que les spécialistes voudront bien excuser, il est difficile d'être à la fois pédagogue et rigoureux dans un cadre d'introduction.

## 2 Couche physique

De nombreux auteurs ont travaillé sur "l'analyse tensorielle des réseaux". Cette méthode, inventée par Gabriel Kron<sup>1</sup> relie une algèbre tensorielle à une théorie des graphes. Nous en donnons annexe I les grandes lignes. Elle permet de transformer des graphes, les relier, les connecter, les faire croître ou les coupler par des fonctions complexes, etc. Bref, elle permet de réaliser une quantité d'opérations et cela à différents niveaux de description des réseaux : au niveau de leurs nœuds, de leurs branches, de leurs mailles, et même sur de nouveaux éléments comme les moments. Pour modéliser un système, ces graphes peuvent être nombreux et se rattacher à des structures réelles différentes : un graphe peut ainsi se rattacher à un circuit électrique quant un autre se rattache à un circuit thermique, etc. Ces graphes ont aussi été utilisés pour modéliser des appareils biologiques comme l'appareil de Golgi<sup>2</sup>. A partir d'une multitude de

---

1. Gabriel Kron était un ingénieur, Hongrois émigré aux états-unis. Il a appliqué la récente théorie tensorielle en 1920 à des réseaux électriques. Ensuite, de nombreux chercheurs ont repris ses travaux et les ont appliqués à de très diverses matières. En France, Denis-Papin et Kaufmann furent les principaux transmetteurs de cette méthode. Aujourd'hui des travaux menés pour son utilisation à résoudre les problèmes de compatibilité électromagnétique par Olivier Maurice, Alain Reineix, François Dubois et Philippe Durand ont conduits à généraliser la méthode et l'enrichir de possibilités supplémentaires.

2. Thèse de Mathieu Poudret soutenue à l'université d'Evry Val d'Essonne en 2006 : "Transformations de graphes pour les opérations topologiques en modélisation géométrique. Application à l'étude de l'appareil de Golgi". Dans sa thèse Mathieu Poudret commence par revisiter les notions de variétés, de cartes et d'atlas pour construire des objets quelconques. Une variété est une forme - par exemple un cylindre - que l'on peut localement assimiler à un espace cartésien. Le long de ces variétés on peut définir des espaces affines : des points repérés et des droites, sur lesquels on pourra ensuite tisser des vecteurs, des directions. En collant ces variétés on peut construire des formes diverses et des cartes précisent comment sont effectués les collages. Un atlas catalogue l'ensemble des cartes nécessaires pour fabriquer un objet complet.

graphes chacun connexe (c'est à dire sans nœuds qui serait connecté à une seule branche) on peut construire un "super graphe" résultant du regroupement de tous ces graphes auquel on rajoute encore des couplages entre les graphes<sup>3</sup>.

On dispose donc d'un "monde somatique" représenté par une multitude de graphes reliés entre eux (le lien entre réalité visuelle et graphe est détaillé annexe II). L'évolution de ce monde est mémorisée dans un arbre et une matrice associée. L'arbre pointe à chacun de ses sommets un état du monde. D'un sommet partent des liens qui pointent d'autres sommets. Ces autres sommets correspondent à des transformations - des évolutions du monde précédent. Par exemple, la figure 1 montre le passage d'un état du monde somatique à un autre, via une transformation notée "Q" (nous pourrions dresser un "bestiaire" des transformations possibles au fur et à mesure de leurs constructions).

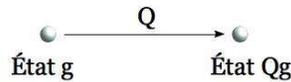


Figure 1 : évolution de l'état somatique

A mesure que l'arbre de l'évolution de la couche physique intègre plus de transformations, sa taille va devenir importante, et il faut pouvoir synthétiser cette croissance sous une forme compacte. Pour cela on crée une matrice - que nous appelons "propagateur" - qui renferme les opérations de transformations appliquées entre chaque couple d'états. Considérons par exemple l'arbre de la figure 2. Il comporte 3 sommets et 2 liens. Nous pouvons au départ dire qu'un état " $g_0$ " caractérise le système sur son premier sommet. Une matrice  $\gamma$  - le propagateur, contient les transformations P et Q qui sont appliquées à  $g_0$  par les liens 1 et 2 vers les deux sommets du bas de l'arbre. Un vecteur que nous appelons "vecteur d'information" recense les états de tous les sommets de l'arbre. Ce vecteur comporte trois composantes puisqu'il y a 3 sommets dans l'arbre. Au départ de l'échelle des temps considérée, seul le premier sommet a un état défini. Le vecteur d'information noté  $q$  vaut donc :  $q = (g_0, 0, 0)$ . Nous avons dit que les deux transformations indiquées sur les liens étaient P et Q. La matrice  $\gamma$  a de fait l'organisation suivante :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

Un graphe est alors une succession de branches collées représentant ces différentes variétés par homotopie : une branche est une variété à laquelle on a fait subir un amaigrissement drastique. Partant de différentes variétés et différents objets physiques, on construit différents graphes mais qui peuvent être connectés à des objets très différents de natures. Chaque classe d'objets constitue une catégorie. Pour chacune de ces catégories on va chercher à définir des variétés et les cartes qui décrivent leurs rattachements seront le morphisme nécessaire pour définir la catégorie.

3. Entre différentes classes d'objets associés aux graphes, ces couplages sont des fonctions qui relient les éléments d'un graphe à ceux d'un autre. Entre catégories, ce type de relation très généralisée est appelé un foncteur.

En multipliant  $\gamma$  par  $q$ , on transforme le vecteur d'information qui prend alors les valeurs suivantes :  $q = (0, P.g_0, Q.p_0)$ . On voit que le vecteur d'information contient les opérations appliquées et les objets auxquelles elles sont appliquées dans les expressions littérales de ses composantes.

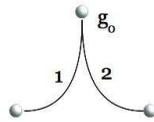


Figure 2 : un arbre à trois sommets

$g_0$  est un tenseur, c'est à dire un objet qui contient toute l'information détaillée de la structure physique. Nous verrons plus loin un peu son allure, sans pouvoir l'étudier complètement ici, il nécessite à lui seul plus d'un ouvrage complet. On donne néanmoins annexe III quelques rappels sur l'analyse tensorielle attachée à la méthode de Kron.

## 2.1 Environnement de la couche physique

La couche physique répond à un environnement par les excitations des capteurs multiples qui la composent. Cette environnement est acoustique, thermique, olfactif, gustatif, visuel et de touché. Ce sont autant de stimuli qui viennent alimenter des capteurs nombreux présents dans les réseaux qui composent la couche physique. Cet environnement sera noté  $E_\phi$ . Notons que la couche physique rayonne aussi vers l'environnement et l'alimente.

## 3 Couche psychique

L'arbre de décision est l'image de l'arbre somatique. Il lui est en tout point similaire. L'arbre de décision propage les probabilités qu'a le système de s'orienter vers telle évolution. Le fonctionnement de cet arbre est celui d'une forme extensive en théorie des jeux. On présente en annexe IV quelques notions de théorie des jeux. Par exemple l'arbre de décision image de l'arbre de la figure 2 donne les probabilités que le système dans l'état  $g_0$  passe dans l'état  $P.g_0$  ou dans l'état  $Q.g_0$ . Ces probabilités sont argumentées et dépendent du vécu, du passé, de la mémoire du système. Pour décrire cet arbre, on crée un vecteur des probabilités qui change par produit par le propagateur de l'arbre de décision qui porte les probabilités de passage entre sommets. Le mécanisme est identique à celui de l'arbre de la couche physique. Le produit du propagateur "I" par le vecteur de probabilités (ou vecteur des décisions) fait évoluer le vecteur des probabilités et ces dernières se déplacent de sommets en sommets. La matrice "I" a l'organisation suivante :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les probabilités de passage du sommet 1 vers les sommets 2 et 3.

### 3.1 Environnement psychique

Comme la couche physique, la couche psychique a son environnement  $E_\psi$ . Les habitudes culturelles, le passé mémorisé, le vécu, etc., sont autant de sources d'environnement comme l'acquis inné. Mais tous ces environnements de la couche psychique ont pour point commun de ne pas provenir de la couche physique sensorielle. C'est à dire que nous excluons ici toutes sources mesurables au sens d'observables physiques, aussi complexes soient-elles (d'autres sources que la mémoire et le vécu, le passé par exemple). On peut objecter que cet environnement provient forcément de structures physiques, mais on est pas obligé d'y faire référence. On peut aussi supposer pourquoi pas des sources non identifiées d'influence. En s'autorisant à ne pas préciser l'origine de cet environnement, on se dote d'une liberté supplémentaire pour ne pas non plus tomber dans l'excès de vouloir à tout prix trouver une explication à tout. Comme pour la couche physique, la couche psychique rayonne aussi vers son environnement.

### 3.2 Liens entre les deux arbres

Les probabilités peuvent être liées à des signaux visibles sur les graphes de la couche physique. A chaque étape de ces arbres (c'est à dire à chaque niveau de sommets) on peut calculer le produit scalaire du vecteur d'information par le vecteur de décisions de mêmes dimensions puisque les deux arbres sont image l'un de l'autre. Ce produit donne "l'espérance de gain". On peut alors se baser sur deux postulats robustes pour construire des couplages entre les deux arbres :

1. l'espérance de gain est le liant qui relie les deux descriptions physique et psychique (ou physique et de décision, etc.) ;
2. tout système dans son évolution tente d'accroître son espérance de gain, pour un environnement et des conditions initiales données.

Partant d'une condition initiale physique, on peut se doter d'observables sensibles  $\theta$  sur les éléments des réseaux de la couche physique, à un état donné  $N$  d'évolution correspondant à un degré  $N$  d'application de  $\gamma$ . L'espérance de gain à cet instant est donnée par le produit scalaire du vecteur des observables  $\theta$  et du vecteur d'information  $p$  :  $EG|_N = \theta|_N \cdot p|_N$ . On peut alors définir une distance entre l'objectif d'espérance de gain  $EG(F)$  et l'espérance de gain effective à un instant  $N$  :

$$D = |EG(F) - EG|_N|$$

Partant de cette distance, on peut argumenter la probabilité  $p_k$  de réalisation de telle transformation  $t_k$  pour tel chemin  $k$  dans l'évolution comme étant une fonction de cette distance :

$$p_k(t_k) = f(D)$$

Deux opérateurs :  $\omega$  et  $m$  traduisent cette relation.  $\omega$  renvoie des observables pour calculer des espérances de gain et  $m$  renvoie les transformations possibles.

## 4 Structure d'ensemble

Partant des brèves descriptions précédentes, nous pouvons dresser un schéma de la structure d'ensemble, qui incorpore les environnements, les arbres, les conditions initiales, les couplages et les développements. Cette structure constitue l'ossature de la méthodologie que nous proposons et de son mode d'application (nous entendons ici le sens de structure suivant la mécanique, c'est à dire un ensemble d'éléments à même de construire un édifice, et non la structure au sens mathématique, soit un ensemble muni d'une loi de composition, etc.).

Un problème est ainsi finalement rattaché à une structure :

$$\{E_{(\phi,i)}, E_{(\psi,i)}, (\gamma_i, l_i, m_i, \omega_i)\}$$

Nous avons indiqué les éléments de cette structure (dont il reste à définir précisément la nature mathématique) que nous appellerons module, car nous pouvons assembler plusieurs de ces structures et les coupler par des opérateurs externes  $m_k, \omega_k$  pour modéliser des structures très complexes. La figure 3 montre un module ainsi constitué.

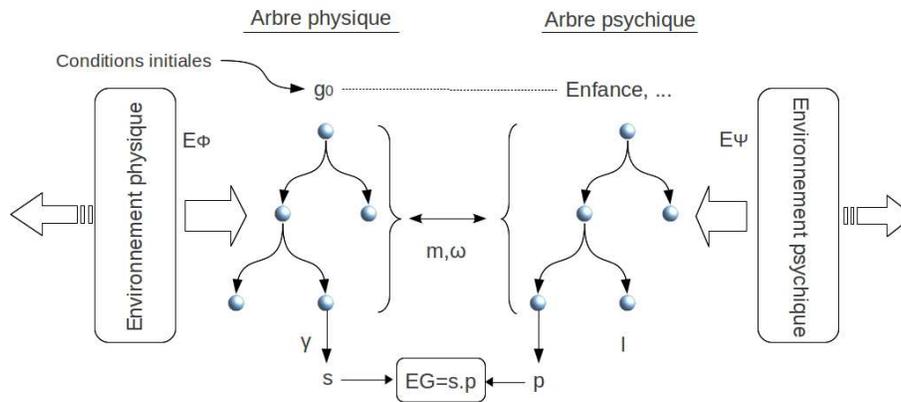


Figure 3 : module

## 5 Un exemple de modélisations à venir

Nous voulons présenter ici un exemple type des modélisations à venir, en fournissant des mécanismes possibles dans quelques domaines. Il n'est pas question ici de fournir un modèle - rappelons que notre objectif est seulement de proposer une méthodologie - mais de montrer comment la technique proposée va pouvoir répondre à différents processus depuis la genèse du système nerveux

central jusqu'à la modélisation de son fonctionnement dans un environnement biologique, écosystémique et social. Il n'est pas question d'imaginer un graphe qui englobe tout le système complexe, mais bien de jouer sur les capacités multi-échelle de la méthode en modélisant des parties puis en connectant ces parties par diakoptique.

## 5.1 Processus de croissance d'un axone et transmissions d'informations chimiques

Un moyen de traduire la transmission d'informations chimiques variées peut être de transcrire les molécules ou éléments chimiques véhiculés en leurs spectres, ou les projeter sur un spectre des éléments de la table de Mendeleev. Admettons donc que chaque molécule est identifiée par une fréquence propre, émise pendant un temps propre. Une molécule est donc reliée à un couple  $(f, \Delta t)$ . Les flux transportés par les axones ou autres fibres nerveuses sont repérés dans la base des flux de l'espace des branches au départ. Chaque flux a donc ses propriétés de fréquence et durée. A une fréquence donnée, le graphe traduit la propagation d'une information chimique dans tout le système représenté. L'intensité du signal à ces fréquences représente la concentration en molécules et la succession des impulsions la période d'émission. On peut étendre ce concept sans doute aux molécules complexes, enzymes, etc.

Les processus synaptiques et les blocages ou ouvertures de "portes" cellulaires à telles ou telles molécules peuvent être traduits dès lors par des circuits de filtres, qui vont couper ou laisser passer telle concentration de produit. Notons une particularité : il semblerait que les échanges ne soient pas bidirectionnels. On ne peut donc utiliser des connexions directes de branches sur des sommets, mais utiliser des cordes qui autorisent ces couplages monodirectionnels. Le principe devient un peu similaire à un "accrochage magnétique"<sup>4</sup>. On va traduire la croissance de l'axone par un déplacement de point central de maille, puis quand cette extrémité de maille sera proche de cellules cibles, des excroissances (cône de croissance de l'axone) apparaîtront qui se dirigeront proche des attracteurs et loin des répulseurs. Une fois très proches, des couplages par cordes à fréquences spécialisées traduiront les échanges chimiques (ouvrage de Savioz page 60, figure 2.11). Essayons de traduire ce premier processus.

## 5.2 Etablissement des opérateurs $(\gamma, l)$

Le fait de renseigner les matrices  $\gamma$  et  $l$  suffit pratiquement à poser le graphe à construire et à résoudre, et pose aussi la modélisation que l'on considère et le processus lié. La notion de condition initiale existe ici aussi, car on doit préciser une structure de départ que l'on va ensuite modifier. Il s'agit d'une sorte d'axone embryonnaire dont on admet l'existence (on pourrait aussi modéliser sa création, mais ce serait une autre modélisation). Soit  $g_0$  cette configuration

---

4. Voir "La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes" d'O.Maurice chez Hermès-Sciences, page 139.

initiale, la croissance de l'axone va ensuite résulter de transformations apportées à  $g_0$ . La première transformation va faire croître l'axone. Une seconde va partager son extrémité en deux vers deux récepteurs à deux fréquences (sensibles à deux molécules) différentes. La dernière transformation va engendrer le couplage entre les deux extrémités et les cellules réceptrices. Appelons A (pour Allongement), Y (pour constitution de l'Y d'extrémité) et C (pour Couplages) les trois transformations. Une première fabrication de  $\gamma$  conduit à un arbre de branches uniques à 4 sommets. Maintenant on peut imaginer différents processus dont par exemple un processus où la croissance de l'axone ne se fait pas pour X raisons (absence d'une molécule nécessaire, etc.). Cette absence de croissance sera associée à une probabilité faible mais non nulle. Une correspondance avec un arbre  $l$  est ainsi constituée (dans les développements à venir, ces réflexions seront bien sûr beaucoup plus complexes et riches). Pour une structure d'arbre donnée figure 4, on obtient le couple  $(\gamma, l)$  suivant (on suppose les sommets numérotés de haut en bas de l'arbre et de gauche à droite) :

$$\gamma/\gamma_{21} = A, \gamma_{31} = \bar{A} \quad \gamma_{42} = Y, \gamma_{52} = \bar{Y} \quad \gamma_{64} = C, \gamma_{74} = \bar{C} \quad \text{sinon } \gamma_{ij} = 0 \forall i \forall j$$

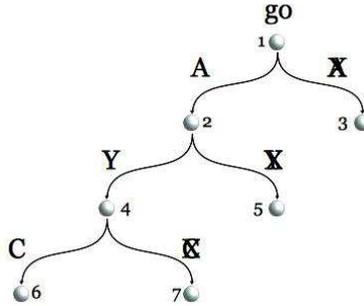


Figure 4 : arbre de l'exemple

La matrice  $l$  a la même définition où les labels des matrices de transformations sont remplacés par les probabilités associées à ces transformations (ou absence de transformations). Néanmoins la matrice  $l$  doit être déduite de la matrice  $\gamma$  et réciproquement par les opérateurs  $m$  et  $\omega$ . Il nous faut maintenant définir ces deux opérateurs.

### 5.3 Définitions de $m$ et $\omega$

Il y a bijection sur les branches qui ne conduisent à aucune transformations. Ainsi pour  $\omega$  cela définit une fonction du type  $I \rightarrow p_0$ , et pour  $m$ , une fonction du type  $p_0 \rightarrow I$ , où  $I$  est l'identité (car la non transformation signifie la conservation de l'état précédent). Les autres possibilités conduisent de fait à des probabilités  $(1 - p_0)$ , ceci quelle que soit la transformation. Après, comme pour ce cas simple nous ne nous sommes pas donnés d'objectif, il n'est pas nécessaire de relier  $\gamma$  et  $l$ , de même qu'il n'y a pas de notion d'espérance de gains.

## 5.4 Définition de la condition initiale

La condition initiale est un système embryonnaire  $g_0$ , lui-même issu d'un processus précédent. Prenons pour exemple une structure très simple constituée de deux sommets, deux branches et une maille. C'est un graphe tel que le réseau 2 présenté figure "graphes orientés" annexe I. Aux sommets de ce graphe est connecté un référentiel géométrique leurs procurant des propriétés de position. Mettons que l'on choisisse un référentiel dont le premier sommet du graphe est l'origine. Le second sommet est distant de  $z$  (axe vertical choisi par exemple) du premier, ses autres coordonnées étant aussi nulles. Comme cela nous suffit pour notre exemple, on peut rester en 1D pour décrire la position du sommet qui va se déplacer sous l'action de la transformation. Les propriétés des branches peuvent être (toujours arbitrairement pour cet exemple) purement réelles.

Les trois cellules réceptrices sont de structures similaires, mais les propriétés attachées aux branches sont différentes. Ce sont des résonateurs, chaque cellule étant sensible à une fréquence différente. Pour les sources, l'axone est équipé de deux sources à deux fréquences correspondant à deux des réseaux cibles. Les sommets de ces réseaux sont aussi repérés dans le même espace que le réseau "axone". L'ensemble constitue deux espaces des sommets et des branches de dimensions 8 (figure 5 on compte 8 branches réparties sur 4 cellules et 8 sommets également répartis sur ces 4 cellules).

La première transformation A ne va jouer que sur la connectivité entre sommets et espace géométrique. La seconde va créer un troisième sommet au premier réseau. La troisième va créer les couplages vers les cellules. Deux seulement de ces cellules seront réceptives.

L'Analyse Tensorielle des Réseaux (ATR) autorise la création de boucles de surfaces nulles. Ce concept est assez abstrait mais nous verrons qu'il est, dans notre cas par exemple, très intéressant.

La métrique (disons la matrice de réseau global) qui définit notre condition initiale - notre graphe de départ - est une métrique à 8 branches, faites de 4 réseaux non connexes. 1 réseau d'axone et 3 réseaux de cellules réceptrices. Dans l'espace des branches (c'est à dire sous une représentation par branches) notre métrique a l'allure suivante :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{bmatrix}$$

Chacun des termes  $z$  de cette matrice est lui-même une matrice 2x2 (de deux lignes et deux colonnes). Pour commencer à renseigner ces matrices, nous devons nous doter du graphe complet orienté numéroté. Nous admettons que tout le travail de détermination de ce graphe a été effectué préalablement. La figure 5 montre le graphe considéré en condition initiale.

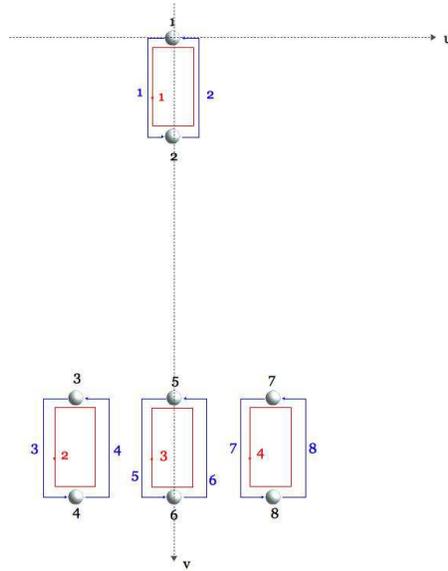


Figure 5 : graphe de condition initiale

Nous y voyons numérotés les sommets en noir, les branches en bleu et les mailles en rouge. Nous n'avons pas besoin d'autres espaces pour cet exercice. Ce graphe est associé à différents tenseurs que nous allons décrire pour ensuite leur appliquer différentes transformations. La figure 6 montre la succession de transformations que nous pouvons modéliser.

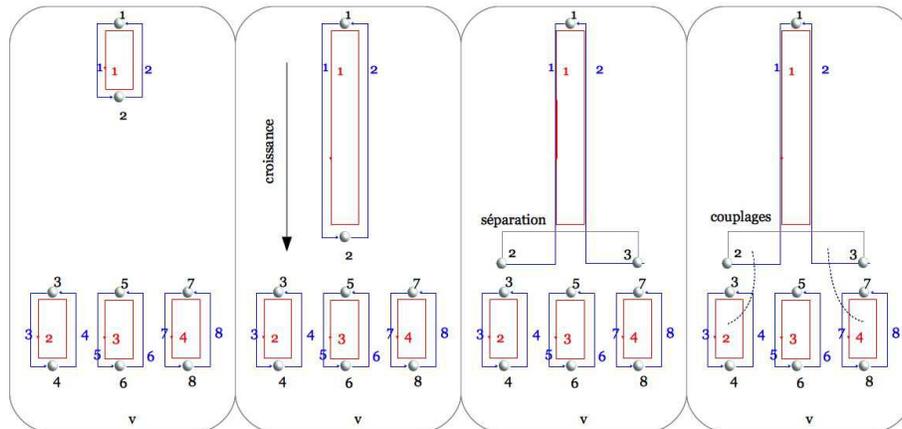


Figure 6 : succession d'évolutions modélisable

## 5.5 Métrique de la condition initiale

Il nous faut décrire chacun des éléments  $z_i$ ,  $i$  allant de 1 à 4. Le premier peut être (il s'agit ici d'un modèle totalement arbitraire, des travaux futurs choisiront

une métrique adéquate et justifiée) un couple de résistance et une inductance qui permettra de traduire ensuite le couplage avec les cellules (un “transformateur”). De fait :

$$z_1 = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 + L_0 p \end{bmatrix}$$

Dans cette expression,  $p$  est l’opérateur de Laplace en calcul symbolique.

Les métriques des trois cellules sont accordées à une fréquence particulière correspondant à leurs réceptivité moléculaire. Nous choisissons de fait de les modéliser par des circuits résonants accordés à ces trois fréquences. La métrique typique d’un tel élément est la suivante :

$$z_i, i \in (2, 3, 4) / z_i = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & L_i p + \frac{1}{C_i p} \end{bmatrix}$$

## 5.6 Sources

Le vecteur des sources du graphe complet est un vecteur qui comporte deux générateurs aux deux fréquences des cellules cibles. Comme une de ces trois cellules n’est pas attractive (répulsive) on retient les deux fréquences de la première et de la dernière cellule (métriques  $z_2$  et  $z_4$ ) que nous nommerons  $f_2$  et  $f_4$ .

## 5.7 Incidence

La matrice d’incidence relie les numéros de sommets aux numéros de branches. L’incidence est identique pour tous les réseaux :

$$B_i = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

L’incidence totale est la simple réunion des 4 incidences partielles :

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}$$

## 5.8 Connectivité

La connectivité relie les couples et les mailles aux branches. Nous suivons ici les conventions présentées en annexe 1 sur la méthode xTAN. De même pour un réseau nous avons la connectivité suivante pour une base  $(c, m)$  avec un seul couple et une seule maille :

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De même encore, la connectivité totale est la réunion des 4 connectivités des 4 réseaux séparés :

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}$$

## 5.9 Spatialité & zones chimio-attractives ou chimio-répulsives

Les sommets ont des coordonnées dans le référentiel choisi et reporté figure 5, dont le sommet 1 constitue l'origine. On crée donc une matrice qui, à chaque sommet, fait correspondre trois coordonnées : u, v et le temps t. Chaque sommet se projette sur ces trois coordonnées rattachées à l'espace-temps choisi ici, soit pour le sommet 2 par exemple :  $S_2 = n_2^u \vec{u} + n_2^v \vec{v} + 0t$ . Soit n cette matrice, en condition initiale nous avons :

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 \\ -10^{-2} & 0.1 & 0 \\ -10^{-2} & 0.11 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0 \\ 10^{-2} & 0.1 & 0 \\ 10^{-2} & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

En plus, nous avons la présence dans l'espace de zones chimio-répulsives ou attractives. Nous ne les détaillerons pas ici, car elles interviennent avant tout en programmation et ne posent pas de difficultés d'implémentations.

## 5.10 Modélisation

La modélisation porte avant tout sur l'étude de l'évolution de l'arbre présenté figure 4. A chaque sommet de cet arbre, le graphe présenté figure 5 subit des transformations diverses. Le premier "encapsule" le second. Le début de la modélisation consiste à définir le quintuplet  $\left\{ \begin{matrix} e_0 \\ g_0 \end{matrix} \right\}, \gamma, \omega, m, l$ . On va ensuite appliquer l'évolution en réalisant une première application de  $\gamma$  et l. Au début de la simulation, le vecteur d'information (ou d'état) vaut :

$$V_\phi = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le propagateur  $\gamma$  est donné par :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les opérateurs complémentaires correspondent à l'identité. Le produit de  $\gamma$  par  $V_\phi$  donne le vecteur :

$$V_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ Ag_0 \\ g_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$g$  est la métrique du graphe complet dans l'espace des mailles. On l'obtient par :  $g = L^T z L$ . On applique un changement de base similaire aux sources pour les exprimer dans l'espace des mailles :  $e_0 = L^T e^T$ , le vecteur des sources initial étant donné par :  $e = [G(f_1) + G(f_2) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  où les  $G$  sont des générateurs d'énergie. Rappelons que les sources sont en partie issues de l'environnement  $E \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ \psi \end{array} \right\}$ .

La métrique dans le seul espace des mailles après transformation (partie  $L_m$  de  $L$ ) devient :

$$g = \begin{bmatrix} 2R_0 + L_0 p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 + L_2 p + \frac{1}{C_2 p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 + L_3 p + \frac{1}{C_3 p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 + L_4 p + \frac{1}{C_4 p} \end{bmatrix}$$

$g_0$  est l'ensemble des objets initiaux : métriques  $g$ , sources  $e_0$ , incidence  $B$ , connectivité  $L$ , spatialité  $n$ , etc. La transformation  $A$  joue sur la spatialité  $u, v$ . Elle modifie la coordonnée  $v$  du sommet 2. Elle modifie le temps également en fonction de l'intervalle de temps nécessaire à la croissance de l'axone. Si l'on convient de définir un réseau dans l'ordre :  $g_0 = \{e_0, g, B, L, n\}$ ,  $A$  ne jouant que sur  $n$  est de la forme :  $A = \{1, 1, 1, 1, A_n(\cdot)\}$ . La transformation  $A_n(n)$  est une dilatation de 9 cm dans la direction  $v$  qui rapproche l'axone des cellules et augmente le temps donnée par :

$$A_n(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot n + n_{\Delta t}$$

$n_{\Delta t}$  est une matrice n où dans la colonne du temps tous les zéros ont été remplacés par  $\Delta t$ .

S'il y a un déficit de fonctionnement, la transformation  $\bar{A}_n$  est l'identité qui ne modifie rien sur  $g_0$  sauf à modifier le temps dans n comme  $A_n$ .

Au vecteur  $V_\phi$  et à  $\gamma$  correspondent les images  $V_\psi$  et l. La valeur initiale de probabilité de  $V_\psi$  n'est pas forcément égale à 1. Elle peut soit être guidée par  $\omega$  dans un cadre plus large, soit par des considérations autres liées à l'environnement (au sens large). L'opérateur l lui donne les probabilités de réalisation de A et  $\bar{A}$  suivant des considérations sur les stratégies, l'environnement, le passé, etc. (suivant que le jeu soit à information complète ou non, parfaite ou non, coopératif ou non, etc.). L'application de l à  $V_\psi$  donne le nouveau vecteur des probabilités un instant plus tard sur les sommets 2 et 3, etc. Nous reviendrons sur le résultat final ultérieurement.

La transformation suivante va créer un nouveau sommet sur le réseau de l'axone, mais ne change pas les autres propriétés du réseau  $g_0$ . Cette transformation agit donc sur l'incidence, la connectivité et la spatialité du seul réseau de l'axone. Y est donnée par :  $Y = \{1, 1, Y_B(\cdot), Y_L(\cdot), Y_n(\cdot)\}$ . Elle modifie aussi la coordonnée de temps associée aux sommets. Rajouter un sommet - appelons-le 1' - c'est rajouter une colonne dans la matrice d'incidence  $B_1$  et une ligne pour la branche rajoutée. Il s'agit d'un étirement du sommet 2 pour lui donner une longueur et l'associer à une nouvelle branche que nous pouvons noter 1'. Pour réaliser cette transformation, il faut unir B avec une matrice singleton [1] ce qui crée une ligne et une colonne supplémentaire, puis additionner avec une matrice de même dimension résultante et comportant un "-1" pour obtenir en final la sous matrice suivante :

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cette transformation est possible en écrivant B dont on repart sous la forme :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B$$

puis de modifier le premier terme pour réunir à nouveau les  $B_i$  séparés et reconstituer l'incidence pour un espace des branches de dimension 9 avec 9 sommets également.

La connectivité  $L$  est inchangé, si ce n'est qu'il faut rajouter une ligne pour la nouvelle branche 1' et la connecter par "+1" à la maille 1. La métrique dans l'espace des mailles est inchangée structurellement puisque le nombre de maille reste invariant (on voit ici l'intérêt de pouvoir travailler dans différents espaces). Mais l'opérateur associé à sa première composante peut voir son expression modifiée par adjonction de la branche. Une transformation de fonction a alors lieu pour réaliser cette modification. C'est une identité dont le premier terme est égal au rapport des expressions symboliques.

Au niveau de  $n$ , il faut rajouter une ligne pour définir les coordonnées du nouveau sommet 1'. 1' se rapproche de la première cellule, soit  $u=-1$  cm et  $v=9$  cm, et 2 se rapproche de la troisième cellule, soit  $u=+1$  cm et  $v=9$  cm. Après rajout de la ligne pour le nouveau sommet, il faut modifier les coordonnées du sommet 2, on aura défini celles du sommet 1' en même temps que l'on crée sa ligne, puis pour terminer, modifier la valeur du temps à  $\Delta t + \Delta t'$  par exemple. On voit que la transformation globale  $Y$  revêt un nombre d'opérations conséquent mais ne posant aucune difficulté particulière. L'opération  $\gamma_{\Delta t} \circ \gamma_{\Delta t'}$  conduit finalement pour  $V_\phi$  au vecteur suivant :

$$V_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ YAg_0 \\ \bar{Y}Ag_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dernière opération réalise le couplage entre l'axone et les cellules repérées par les mailles 2 et 4. Il s'agit ici simplement de l'ajout d'un tenseur de couplage  $\mu$  à la métrique  $g : g \rightarrow g + \mu$ . Chaque cellule ne sera sensible qu'à sa bande puisque leurs métriques sont des résonateurs centrés sur une fréquence étroite  $f_1$  ou  $f_2$ . La ségrégation de dialogue - d'échanges moléculaires - entre cellules et axone porteur d'une information multiple se fait donc naturellement et automatiquement.

Suite à cette dernière transformation, le vecteur  $V_\phi$  devient :

$$V_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ CYAg_0 \\ \bar{C}YAg_0 \end{bmatrix}$$

On peut pour chaque équations décrite comme composante de  $\gamma$  calculer le flux. Celui qui nous intéresse (il suffit d'en calculer 1 puisque nous sommes dans

un jeu à sommes nulles) et le premier terme - sommet 6 de l'arbre physique. Le flux est donné par :  $k = g^{-1}e_0$  où  $g$  est la métrique globale dans sa dernière expression et  $e_0$  les sources également dans leur dernière expression, dont nous retenons les termes  $k^2$  et  $k^4$ . Si ce sont nos observables de gains, ayant parallèlement obtenu la probabilité de réalisation de ce gain dans l'arbre de jeu par  $l \circ l \circ l$  appliqué à  $V_\psi$ , on trouve l'espérance de gain de cette évolution par

$$f(k^2(V_{\phi,6}), k^4(V_{\phi,6})) V_{\psi,6}$$

La méthode donne ainsi les chances de suivre telle évolution du système mais aussi un critère pour pondérer et discuter des raisons de cette chance. La majorité de la discussion pour justifier des probabilités retenues dans l'arbre de jeu constitue la part "psychique" de l'analyse où intervient un environnement et un passé. L'environnement intervient aussi dans la couche physique pour pondérer et régler les sources et les structures possibles ainsi que les évolutions envisageables.

## 6 Conclusion

L'exemple choisi reste très simple, ne serait-ce que parce qu'il ne fait pas intervenir d'interactions entre les arbres (termes  $\omega$  et  $m$  négligés). Mais il suffit pour montrer que les mécanismes disponibles donnent accès à des modélisations de processus extrêmement complexes, à même de fournir une bonne base pour attaquer une modélisation de phénomènes bio-sociaux-psychiques.

## Remerciements

Nous tenons à remercier Pierre Marchais pour ses encouragements à la rédaction de cet article et pour ses nombreuses remarques, suggestions et explications qui nous ont permis d'être un peu moins ignorants lorsque nous abordions les notions rattachées au psychisme.

## 7 Annexe I

Nous décrivons ici sommairement l'analyse tensorielle des réseaux dite "étendue"<sup>5</sup>. Il ne s'agit pas ici d'en donner tous les ressorts mais juste un aperçu qui permette de se faire une idée de son fonctionnement et de l'étendue de ses possibilités.

### 7.1 Graphes

Un graphe est un ensemble de sommets (ou nœuds ou points), de branches, ou segments ou arêtes ou arcs, de mailles ou boucles ou cycles, de couples ou

---

5. Voir de nombreuses autres informations sur le site "<http://olivier.maurice.pagesperso-orange.fr/>"

paires de sommets, de moments, de cordes et de réseaux. La figure 7 “exemple de graphe” montre ces éléments sur un graphe simple.

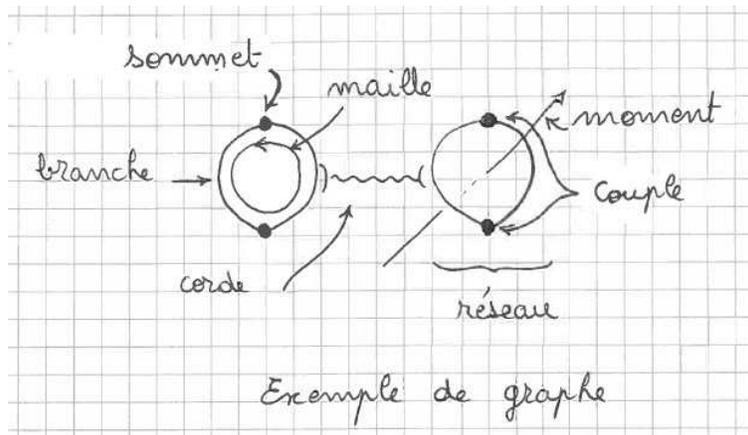


Figure 7 : exemple de graphe

On peut représenter à peu près tout par un graphe - même la pensée<sup>6</sup> ! On visualise efficacement par un graphe des échanges entre des points, des circulations de flux sur des branches, etc. Certains autres niveaux, comme les mailles sont plus abstraits, mais ils apportent aussi de grandes simplifications dans les calculs.

Le graphes que nous allons utiliser sont numérotés et orientés. Numérotés signifie que chaque branche, chaque sommet, chaque maille, chaque moment, etc. porte un numéro qui lui est propre. Orientés signifie que les branches, les mailles, les moments, etc., ont une direction : les branches vont d’un sommet vers un autre, les mailles parcourent les branches dans un sens défini, etc. La figure 8 “graphe orienté” montre ces propriétés. Elles sont essentielles, et le premier travail pour étudier un problème par la méthode xTAN (eXtended Analysis of Networks) consiste à créer un graphe orienté, numéroté (notons que les cordes ne portent pas de numéros, elles sont forcément automatiquement repérées par les éléments qu’elles pointent).

6. Travaux de Gärdenfors sur les représentations de la pensée.

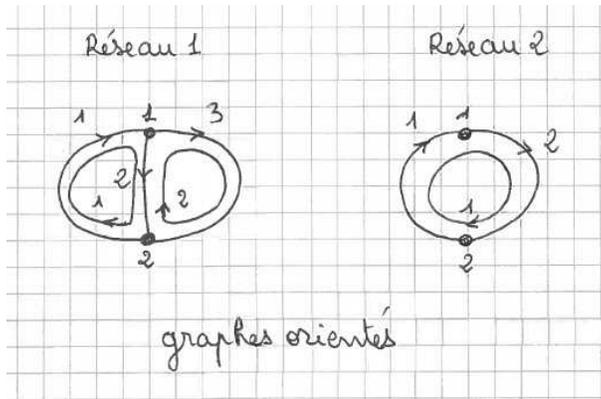


Figure 8 : graphes orientés

## 7.2 Kets déduits des graphes

Sur ces graphes on distingue autant de sortes d'espaces qu'il y a de sortes d'éléments. A partir de toutes les branches on peut construire un espace des branches. A partir de tous les sommets, un espace des sommets, etc. Considérons l'espace des branches du graphe de la figure 9 "graphe et espace des branches".

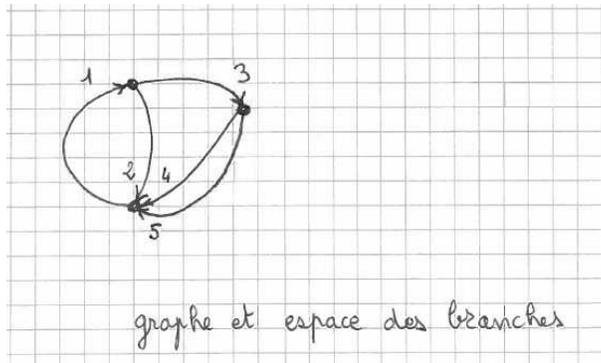


Figure 9 : graphe et espace des branches

Ce graphe comporte 5 branches. L'espace des branches que l'on peut construire pour ce graphe est donc de dimension 5 : il inclut les 5 branches numérotées de ce graphe. On peut donc créer un ensemble de ces 5 branches :  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ . A cet ensemble on peut associer une base puis un vecteur que l'on appelle un Ket. En notant le Ket :  $|i\rangle$  on désigne l'ensemble de tous poids (intensités) associés aux branches du graphe considéré et implicitement, on les range par ordre croissant de 1 à 5. Ces 5 intensités de branches (de courants si on considère les courants circulant sur ces branches) sont les composantes du vecteur  $|i\rangle$  sur la base des branches  $b_k$  dans l'espace des branches  $B$  du graphe  $G$ . On procède de

même pour tous les éléments : sommets, branches, mailles, moments, réseaux. Pour chacun, l'ensemble des éléments engendre un espace et à cet espace est associé une base. Ces bases sont dites "naturelles" en ce sens qu'elles découlent naturellement des espaces construits. Chacun des éléments de ces bases constitue une direction de l'espace. Ainsi on peut pour l'espace des branches de la figure "graphe et espace des branches" distinguer 5 directions différentes : une direction par branche. Un vecteur Ket sera une combinaison linéaire de ces directions. Par exemple à un instant donné, un vecteur Ket  $|i\rangle$  de l'espace des branches du graphe de la figure "graphe et espace des branches" pourra s'écrire :

$$|i\rangle = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3 + i_4 b_4 + i_5 b_5$$

Ce vecteur peut être représenté par ses seules composantes - la base devient implicite, et ces composantes sont rangées dans une matrice colonne (ce point est fondamental). Soit :

$$|i\rangle = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}$$

On utilisera ainsi différents Ket engendrés par différents espaces. Dans la figure "graphes orientés", le réseau 1 comporte une base de deux éléments  $(m_1, m_2)$  dans l'espace des mailles. Un Ket projeté sur cette base s'écrira de fait :  $|m\rangle = k_1 m_1 + k_2 m_2$ , etc.

Les graphes étant orientés, les poids affectés aux vecteurs de base lors des projections pour construire des Ket ont un signe. Si le signe est négatif, cela signifie que le courant désigné par la composante du Ket est en sens inverse de la direction de base : soit dans le sens inverse de l'orientation de la branche, ou dans le sens inverse de la circulation de la maille, ou dans le sens inverse de la direction du moment. Pour les sommets, un signe moins indique une masse (au sens généralisée) négative et pour les réseaux, on ne peut pas avoir de signe négatif. Ainsi dans le graphe du réseau 2 de la figure "graphes orientés", si un Ket a pour composante  $-4.7, -4.7$  cela signifie que le courant de matière associé à ce Ket va dans le sens opposé aux directions indiquées sur les branches.

### 7.3 Bras et espaces duaux

Considérons l'espace des branches B. Sur cet espace on a construit une base  $b_j$  de directions associées aux branches. Il est possible de construire un espace dual  $B^*$  et une base dite "duale" de cette base naturelle. Soit  $b^*_i$  les directions pointées par cette base duale, elle a par définition la propriété suivant laquelle :

$$\delta_{ij} = b^*_i b_j$$

Cette notion de dualité est un peu abstraite mais très puissante. La propriété de l'opérateur de Dirac  $\delta_{ij}$  est de valoir 1 si  $i=j$  et 0 sinon.

Qu'est-ce déjà que cet espace dual ? En fait l'idée consiste à associer à chaque direction de branches un nombre qui n'ait pas de propriété de direction (vectorielle) mais qui permette de distinguer aussi nettement chaque branche. La distinction est univoque car la propriété  $\delta_{ij} = b^*_i b_j$  garantie que chaque branche a un vecteur de base duale  $b^*_i$  unique et ne peut être à ce titre confondue avec une autre branche. Par exemple, considérons au lieu de la direction de la branche, le couple de sommets associé à chaque branche. La base des couples de sommets est une base duale de la base des directions. Si l'on repère chaque couple de sommets par un nombre, l'ensemble de ces nombres constitue la base duale de celle des directions. Les bases étant normalisées et chaque branche étant associée à un couple de façon univoque, la relation  $\delta_{ij} = b^*_i b_j$  est bien vérifiée. Par exemple si l'on créait un espace vectoriel des empreintes digitales, un dual de cet espace serait celui des numéros de sécurité sociale. Du coup on peut projeter une représentation des personnes soit sur les empreintes digitales, soit sur les numéros. Idem avec nos graphes, on peut projeter des courants sur les directions, mais on peut aussi créer un vecteur dual sur la base duale. Ce vecteur est celui des différences de potentiels. Ce vecteur est un Bra qui est une combinaison linéaire sur la base duale :

$$(v| = v_1 b^*_1 + v_2 b^*_2 + v_3 b^*_3 + v_4 b^*_4 + v_5 b^*_5$$

Les Bra sont aussi appelés des covecteurs. On peut aussi dire que si on trace une application reliant chaque numéro de branche à une direction dans l'espace géométrique, l'application duale va faire correspondre à chaque direction un nombre. A la première application est liée une matrice de correspondances. A l'application duale est liée la matrice inverse (lorsque cette matrice est une matrice de 1 et de 0, son inverse est sa transposée). La composition de l'application et de sa duale redonne l'élément de départ, donc revient bien à l'unité ou l'opérateur de Dirac par bijection. L'application qui à chaque vecteur va faire correspondre un unique nombre est appelée forme linéaire. Elle joue un rôle primordial dans l'étude des espaces de Hilbert.

## 7.4 Tenseur fondamental et Invariant

Si l'on fait le produit d'un Bra par un Ket on trouve en dimension 2 (pour un graphe avec deux branches) et dans l'espace des branches une expression de la forme :

$$(v| i) = (v_1 b^*_1 + v_2 b^*_2) (i_1 b_1 + i_2 b_2)$$

En utilisant les propriétés sur les produits des vecteurs duaux cette somme se réduit à :

$$(v| i) = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

qui a la dimension d'une puissance instantanée S. Ainsi, le produit des Bras par les Kets donne la puissance dissipée dans le graphe. Or cette puissance est une propriété intrinsèque du graphe, elle ne doit pas dépendre du choix d'espace

de représentation, ni des bases associées. Entre les vecteurs projetés sur la base choisie et sa duale doit exister une relation puisque tous les deux de façons différentes se déduisent des propriétés de la branches (ou de la maille, ou ...). Soit  $Z$  la matrice de ces relations (que l'on appelle tenseur fondamental). On suppose que l'on peut écrire :  $(v| = Z|i)$ . Soit que chaque composante du Bra  $(v|$  se décompose en combinaison linéaire des composantes du Ket  $|i)$ . Si l'on change soit d'espace (et donc de base) soit de base dans le même espace, on peut développer le Ket  $|i)$  dans une nouvelle base par l'intermédiaire d'une matrice de transformation. Par exemple :  $|i) = T|k)$ . Or si l'on peut appliquer  $T$  à  $|k)$  on doit pouvoir appliquer l'inverse de  $T$  :  $T^{-1} = L$  à  $(v|$ , duale de  $|i)$  pour retrouver le dual de  $|k)$  : soit  $(v|L = (u|$ . Si  $(v|i) = S$  on a bien

$$(u|LT|k) = (u|k) = S$$

Il y a invariance de la puissance quelle que soit la base ou l'espace de représentation choisi. Ce point est très important : il signifie que l'on peut choisir la base et la représentation la plus adéquate pour faire nos calculs, le résultat ne s'en trouvera pas pour autant changé.

Il nous reste à comprendre comment se transforme le tenseur fondamental lors d'un changement de base ? Repartons de la relation de définition de  $Z$  :

$$(v| = Z|i)$$

On peut remplacer  $|i)$  par sa transformation  $T|k)$  :

$$(v| = ZT|k)$$

On multiplie à gauche et à droite par  $L$ , inverse de  $T$  :

$$(v|L = LZT|k) \rightarrow (u| = g|k)$$

Avec :  $g = LZT$

Notons que seul le tenseur fondamental ( $Z$  ou  $g$  ou ... suivant l'espace de représentation) permet de transformer un Ket en Bra et son inverse ( $Y$ ,  $y$ , ...) de transformer un Bra en Ket. **Aucun autre objet ne permet de faire cela.**

## 7.5 Conclusion

Les quelques notions présentées constituent le socle incontournable de la méthode xTAN issue de la "méthode de Kron". On doit retenir que :

1. les graphes sont composés des espaces de représentations par des sommets, branches, mailles, couples, moments, réseaux ;
2. chaque espace a une base et une base duale sur lesquelles on projette les Bras et les Kets ;
3. le produit Bra-Ket dans un espace est invariant et a la grandeur d'une puissance  $S$  ;

4. le tenseur fondamental qui relie les composantes des Bras et de Kets et le seul qui puisse transformer un Ket en Bra (son inverse transformant un Bra en Ket).

## 8 Annexe II

La première difficulté que rencontre l'ingénieur désireux de traduire son problème en équation sous la méthode de Kron (ou xTAN) est la construction d'un graphe qui représente ce problème. Sous des outils comme "SPICE" pour les électroniciens, le fait de glisser une résistance sur l'espace de travail revient dans un graphe à dessiner une branche. Cette analogie paraît évidente, et pourtant elle ne l'est pas tant que cela ! Mais nous nous contenterons pour cet exposé de faire appel à vos connaissances d'ingénieurs, de chimistes, de biologistes, etc., qui savent quasi instinctivement projeter leur réalité sur des branches (principalement). Entre ces branches nous dessinerons des flèches qui symboliseront des interactions rayonnées (champs électromagnétiques, gravifiques, d'influences, visuels, etc.). Ce symbolisme est par contre moins courant et peut désorienter les personnes plus habituées à travailler sur des phénomènes d'ondes guidées ou de contacts directs.

### 8.1 Graphe équivalent d'un stimuli

Réduire un stimuli à une source et une impédance interne, voilà qui est osé ! Cette réduction très efficace de la réalité date de Thévenin (1883). On ne regarde finalement la source d'excitation que depuis ses sorties et on mesure une différence de potentiels (ddp) "à vide", c'est à dire sans charge utile branchée :  $V_{co}$ , une impédance qui peut se déduire de son débit maximum de matière :  $Z$ . Dès lors une source de stimuli se réduit à une branche constituée d'une source de ddp " $V_{co}$ " en série avec une impédance  $Z$ . Notons que si l'on veut modéliser par exemple en électricité une alimentation de 5 V sous  $50 \Omega$  il faut mettre une source de 10 V en série avec  $50 \Omega$  qui délivrera effectivement 5 V sur une charge adaptée. Chargeons cette source par une résistance  $R$ . Le graphe (que l'on appellera schéma équivalent sous un logiciel nodal comme SPICE) de notre montage est donné figure 10 "graphe de l'alimentation". Il comporte deux sommets et deux branches. Il faut un peu d'imagination pour se rappeler que la propriété de la première branche est une impédance  $Z$  et celle de la seconde une impédance  $R$ . Evidemment on peut toujours dessiner ces éléments sur les branches. Mais avec l'habitude ce n'est pas utile, il suffit de repérer les éléments par un nom et avoir une table qui pointe pour chaque numéro de branche la propriété en impédance correspondante.

Pour définir les impédances nous passerons par le calcul symbolique et l'usage de l'opérateur de Laplace.

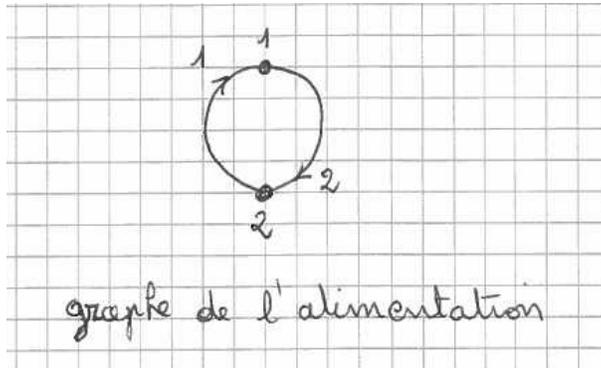


Figure 10 : graphe de l'alimentation

## 8.2 Graphe du rayonnement d'une alimentation vers une antenne (exemple tiré de l'électronique)

Nous considérons le cas en électronique d'un rayonnement électromagnétique engendré par l'alimentation et capté par une antenne radioélectrique. On pourra facilement montrer que le graphe d'une antenne dans sa bande utile est un graphe de deux branches comme celui de l'alimentation. Ajoutons dans notre système un tel graphe, le graphe complet étant maintenant constitué de deux réseaux de deux branches et deux sommets. La figure 11 "alimentation couplée" représente ce système. Vous remarquez que la numérotation des branches pour le graphe de l'antenne suit celle des branches pour le graphe de l'alimentation. Maintenant nous voulons représenter le fait que l'alimentation rayonne en débitant sur sa charge et que ce rayonnement est capté par l'antenne. Pour ce faire, nous ajoutons une ligne pointillée du premier réseau vers le second avec une flèche indiquant la direction du rayonnement. La flèche part de la branche de charge de l'alimentation et pointe la branche de réception de l'antenne. Au départ, un petit trait parallèle à la branche montre la source de rayonnement identifiée. Nous voyons déjà qu'ici nous disposons d'une liberté inexistante sous SPICE. Nous verrons ensuite comment traduire ces symboles. On peut aussi remarquer que nous avons choisi ici de ne pas avoir un rayonnement symétrique : on néglige la réflexion du champ sur l'antenne qui revient vers l'alimentation. C'est un choix d'ingénieur, basé sur l'expérience ou des calculs précédents. Là aussi, la méthode nous laisse toute liberté pour implémenter notre savoir.

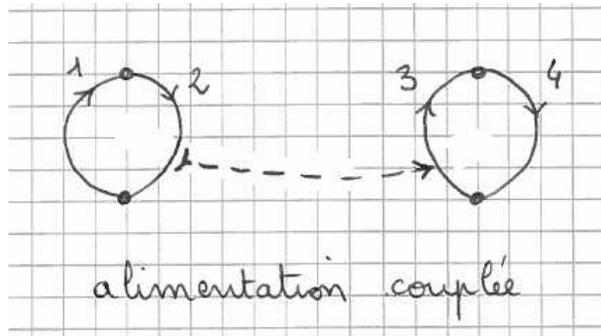


Figure 11 : alimentation couplée

### 8.3 Symboles disponibles

En plus des branches, les graphes peuvent être enrichis de cordes, de lignes qui traduisent des interactions complexes entre les électroniques dont les propriétés sont portées par les branches. Ces cordes, nous le verrons dans les exemples traités, sont un moyen très puissant pour considérer du rayonnement, de la propagation guidée, des fonctions de transfert complexes. De fait, dès que l'on veut traduire sur un graphe ces interactions il suffit de “tirer une corde” pour la concrétiser dans la topologie du problème. Nous verrons ensuite comment implémenter ces cordes dans les tenseurs attachés au graphe.

### 8.4 Eléments de graphes

Les graphes sont constitués de sommets, branches, mailles, moments (inventés par les auteurs), couples (usuellement appelés paires de sommets ou paires de nœuds) et réseaux. La figure “graphe de l'alimentation” montre ces différents constituants. La manipulation des structures de graphes constitue le fondement de ce que Philip Stanley<sup>7</sup> appela la “Diakoptic” (que nous traduisons par diakoptique en Français). Diakoptique signifie découper, partager. Le découpage des graphes, leur assemblage sont des opérations dites de “chirurgie” en topologie moderne. Nous, nous voulons simplement repérer les bases dans un graphe, ce qui constitue la troisième étape de la méthode. Les couples sont un espace peu utilisé par les approches nodales classiques d'étude des réseaux. Ils constituent certainement un des apports de Kron sur l'analyse des réseaux. Les couples appartiennent à l'arbre couvrant et cela constitue leur première caractéristique. Ensuite, on peut montrer que les flux de branches se déclinent suivant les sources de courants (au sens général) rattachées aux couples et les fém rattachées aux mailles. Cette distinction découle de propriétés fondamentales de la topologie des complexes cellulaires.

7. Voir “Gabriel Kron and Systems Theory” de H.H.Happ, chez Union College Press.

### 8.4.1 Incidence et connectivité

Considérons le graphe présenté figure 12 “structure de graphe” - (a). Nous voyons un graphe non orienté. Choisissons le sommet “1” pour référence arbitraire. En partant de ce sommet on peut trouver un arbre couvrant. Un arbre couvrant du graphe est une succession de branches qui permet de toucher tous les sommets du graphe. La figure “structure de graphe” - (b) montre un tel arbre pour ce graphe. Du coup nous avons numéroté et orienté les branches dans le sens du parcours de l’arbre couvrant. Sur cet arbre nous pouvons définir une base de “mailles ouvertes” ou encore couples”. L’arbre couvrant ici montre deux couples associés aux branches numérotées 1 et 2. Connaissant cet arbre on peut trouver les mailles par des opérations de fermetures. Repartons du premier sommet et cherchons au sommet du premier couple (donc ici le sommet 2) et regardons si des branches permettent de revenir au sommet de départ. Il y en a bien une, la branche 3 (figure -(c)). En parcourant les branches 1 puis 3, on engendre une maille numérotée 1. Comme il n’existe pas de branches supplémentaires qui referment le parcours vers le sommet 1, on passe au sommet 3. De ce sommet on trouve une branche qui ramène au sommet 1 : ce sera la branche 4 et une maille parcourant les branches 1, 2 et 4. Une seconde maille est trouvée du même sommet 3 créant une maille constituée des branches 1, 2 et 5. Ayant trouvé toutes les mailles possibles ramenant au sommet 1, on pourrait continuer le parcours de l’arbre couvrant et prendre cette fois pour référent le sommet 2, puis appliquer la même démarche pour trouver de nouvelles mailles. Mais dans le cas du graphe que nous avons pris pour exemple, nous pouvons nous arrêter là. En effet ce graphe est constitué de 1 réseau (ensemble R) : c’est à dire d’un seul graphe connexe, où aucun sommet n’est connecté qu’à une branche. Si on avait deux graphes connexes séparés, en fait le graphe d’ensemble serait constitué de 2 réseaux.

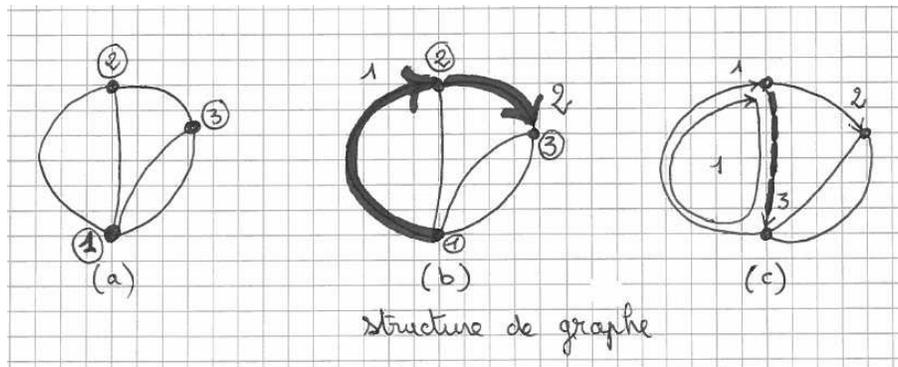


Figure 12 : structure de graphe

Ce graphe est constitué de 5 branches (ensemble B) et 3 sommets (ensemble N). Enfin nous avons trouvé 3 mailles (ensemble M). Le **nombre de maille nécessaire et suffisant** est donné par la relation d’Euler - Poincaré :  $M :$

$B - N + R$ , soit ici  $M=5-3+1=3$ . Le nombre de couple (espace P) est lui donné par :  $P = N - R$ . Nous avons donc besoin pour ce graphe de 3 mailles et 2 couples. Nous les avons, il n'est donc pas nécessaire de chercher plus loin. Vous remarquerez que comme le choix de l'arbre couvrant est arbitraire, plusieurs bases sont possibles. Nous montrerons ensuite que, par l'algèbre tensorielle qui sous-tend la théorie des graphes dans la méthode, le choix de la base n'impacte pas les résultats.

Notre algorithme de construction est finalement le suivant :

1. Choisir un sommet de départ (préférentiellement une référence de source d'énergie). Initialiser  $S = 0, M = 0, St = 1$ , numéros de sommet et de maille et sommet de départ courant.
2. Trouver un chemin permettant de toucher tous les sommets sans retour en arrière - ce chemin est l'arbre couvrant. Il comporte  $DS$  sommets et le réseau doit avoir  $DM$  mailles.
3. repartir du premier sommet :  $S = S + 1$ , aller au premier suivant et regarder si une branche non déjà parcourue permet de revenir au sommet de départ.
4. Si oui  $\rightarrow$  associer cette branche à la maille  $M + 1$ .
5. Si NON, aller au sommet suivant sur le parcours de l'arbre couvrant :  $S = S + 1$ .
6. Une fois atteinte l'extrémité de l'arbre, repartir du sommet  $St + 1$  de l'arbre si  $St \neq DS$ . Si  $St = DS$  ou  $M = DM$  la scrutation est finie.

Ayant défini et numéroté les sommets, branches, mailles, nous pouvons remplir deux matrices très importantes : la matrice d'incidence et la matrice de connectivité.

#### 8.4.2 Matrice d'incidence

La matrice d'incidence donne les relations entre sommets et branches. Quand une branche quitte un sommet, on lui affecte le poids (-1) et quand une branche rejoint (alimente) un sommet, on lui affecte le poids (+1). Dans la figure 13 "graphe final" reportant le graphe précédemment étudié, on peut voir les quatre composantes sommets, branches, couples, mailles. Les numéros des sommets sont entourés d'un cercle, ceux des branches sont simples, ceux des mailles entourés d'un carré et ceux des couples précédés d'un "p". Nous noterons souvent  $n_x$  le sommet de numéro x,  $b_x$  la branche de numéro x,  $m_x$  la maille de numéro x,  $p_x$  le couple de numéro x et enfin  $R_x$  le réseau de numéro x. Pour ce graphe, la matrice d'incidence A est la suivante (le graphe comportant 3 sommets et 5 branches, la matrice a 5 lignes de  $b_1$  à  $b_5$  et 3 colonnes  $s_1$  à  $s_3$ ) :

$$A = \begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline b_1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline b_2 & 0 & -1 & 1 \\ \hline b_3 & 1 & -1 & 0 \\ \hline b_4 & 1 & 0 & -1 \\ \hline b_5 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

La relation entre sommets et branches s'écrit comme relations entre les différences de potentiels et potentiels aux sommets :  $|b) = A |n)$ .

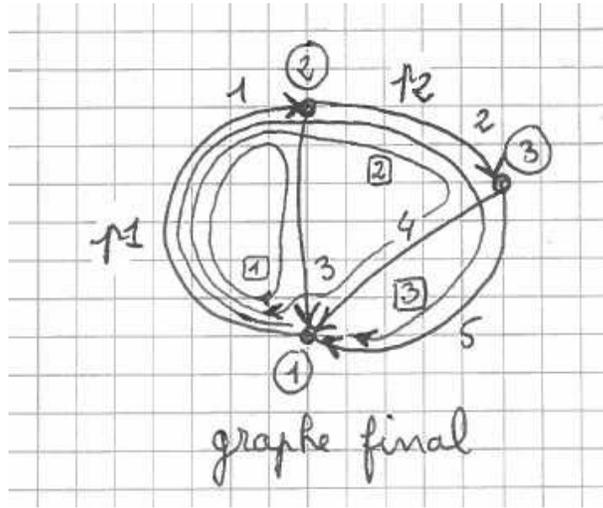


Figure 13 : graphe final

### 8.4.3 Matrice de connectivité

La connectivité relie les branches - en lignes, aux couples et aux mailles. Si l'on somme les deux relations de Poincaré, on trouve que la somme du nombre de couples et de mailles est égale au nombre de branche. La connectivité est de fait une matrice carré, contrairement à l'incidence. Pour le graphe précédent, sachant que l'on a en colonnes d'abord les couples puis les mailles dans l'ordre :  $c_1, c_2, m_1, m_2, m_3$ , on trouve la connectivité L suivante (voir §9.2 pour le détail de cette connectivité) :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous remarquez que, tel que nous avons procédé pour construire les couples et les mailles, tous les coefficients sont à 1 ou 0, il n'y a pas de (-1). Les branches

de fermetures ne dépendent jamais des couples, par principe. La connectivité est un changement de base. Au lieu d'exprimer les propriétés du graphe via les branches, on transpose ces propriétés via des couples ou des mailles. Entre les courants des branches et ceux des couples ou mailles on a la relation :  $|i\rangle = L|c, m\rangle$ . Nous avons choisi d'ordonner la connectivité suivant la séquence couples - mailles. Certains choisissent l'ordre inverse. Peu importe. La base dans la représentation couples - mailles que nous nommerons "CM" est une liste de 5 vecteurs de  $c_1$  à  $m_3$ .

## 9 Annexe III

Tout part de la branche de Kirchhoff! Et ce, quelle que soit la physique dans laquelle on travaille. La figure "branche de Kirchhoff" présente ce schéma. On y trouve une source de force électromotrice  $e$ , une source de débit de matière - de courant  $j$  (nous retiendrons ce terme de courant pour désigner tout débit), une impédance au sens généralisé (en calcul symbolique) qui est n'importe quelle fonction de Laplace appliquée au courant dans la branche. Le courant total (courant de branche  $i_0$  plus source de courant  $j$ ) et la différence de potentiels  $v$  sont inconnus.

### 9.1 Branche de Kirchhoff

La figure de la branche de Kirchhoff nous permet d'établir l'équation :  $v + e = Z(j + i_0) = Zi$  au niveau de cette branche seule. Pour  $N$  branches dans un espace des branches à  $N$  Dimensions, on généralise cette relation par :

$$(v| + (e| = Z|i) \tag{1}$$

Dans cette relation,  $|i\rangle$  est le Ket des courants totaux, courants de branches additionnés des sources de courant si elles existent. Ces courants de branches, par changement de bases, se développent suivant les courants de couples et de mailles (que nous noterons  $k_c$  et  $k_m$ ) :

$$|i\rangle = L \begin{bmatrix} |k_c\rangle \\ |k_m\rangle \end{bmatrix} \tag{2}$$

Les courants de couples se déduisent des sources de courants :  $|k_c\rangle = \epsilon|j\rangle$ . La matrice  $\epsilon$  est une matrice identité dont certains des "1" diagonaux sont nuls si un courant de couple est rattaché à une branche qui ne comporte pas de source de courant.

### 9.2 Connectivité

La connectivité comme nous l'avons vu, peut se décomposer en quatre parties, le quadrant supérieur gauche reliant branches de l'arbre couvrant et couples, le quadrant supérieur droit reliant branches de l'arbre couvrant et mailles, le

quadrant inférieur gauche étant nul car aucune relation n'existe par construction entre les branches de fermetures et les branches de l'arbre couvrant et enfin le quadrant inférieur droit qui est l'identité puisque pour les branches de fermetures, chacune de ces branches n'est reliée par construction qu'à une seule maille. De fait :

$$L = \begin{bmatrix} L_c & L_m \\ 0 & L_1 \end{bmatrix}$$

Nous notons  $L_c, L_m, 0, L_1$  respectivement les quatre quadrants.

Remplaçons dans l'équation 1 le courant total par son développement en courants de couples et mailles :

$$(v| + (e| = Z \begin{bmatrix} L_c & L_m \\ 0 & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |k_c \\ |k_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

La somme des Bra  $v$  et  $e$  peut être remplacée par un vecteur de Bra où le premier terme donne la somme des ddp de couples  $v$  et des fém des branches de l'arbre couvrant  $a$ , et le second terme les seules fém des branches de fermetures  $b$  :

$$(v| + (e| = \begin{bmatrix} (v + a| \\ (b| \end{bmatrix}$$

La matrice de connectivité  $L$  est une matrice d'Hadamard. Son inverse est sa transposée :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_c & 0 \\ L_m & L_1 \end{bmatrix}$$

### 9.3 Equations dans l'espace complet

En multipliant à gauche les termes de l'équation 3 et en notant :

$$L^{-1}ZL = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

on trouve :

$$\begin{bmatrix} L_c & 0 \\ L_m & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v + a| \\ (b| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |k_c \\ |k_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

De ce système on tire la deuxième équation :

$$L_m (v + a| + L_1 (b| = g_3 |k_c) + g_4 |k_m)$$

Comme  $(v + a| = (v| + (a|$  et  $L_m (v| = 0$  (cette dernière expression correspond au rotationnel d'un gradient), on obtient finalement :

$$|k_m) = \frac{1}{g_4} \{L_m (a| + L_1 (b| - g_3 |k_c)\} \quad (5)$$

En calculant les courants de mailles  $k_m$  on peut ensuite déduire de la loi des courants totaux et de la branche de Kirchhoff (figure 14) les ddp de couples :

$$(v| = ZL |k_c, k_m) - (e| \quad (6)$$

L'ensemble de ces équations constitue le fondement de la méthode de Kron. On peut ensuite utiliser d'autres connexions L, enrichir les métriques Z, g, etc., mais on retrouve des formulations similaires sauf lors de réseau en mouvement relatif accélérés où se rajoutent des coefficients de connexions de Christoffel (utilisés dans les modélisations par la méthode de Kron des machines électriques). N'oubliez pas que les métriques sont particulières, ce sont des matrices d'opérateurs. Dans le cas le plus général, chaque éléments des Bra, Ket ou métriques sont eux-mêmes des matrices, par exemple des quaternions en algèbre de Clifford.

Les équations obtenues sont dites décrites dans l'espace "complet", exploitant les bases de couples et de mailles. On pourra facilement montrer que ces équations peuvent être simplifiées et le système final réduit à la seule seconde équations, s'il n'existe pas de source de courant dans les réseaux calculés. Sachant que grâce à Norton et Thévenin, on sait transformer une source de courant en source de tension, on comprendra que l'on peut résoudre énormément de problèmes dans le seul espace des mailles que l'on pratiquera dans le cadre des exercices présentés.

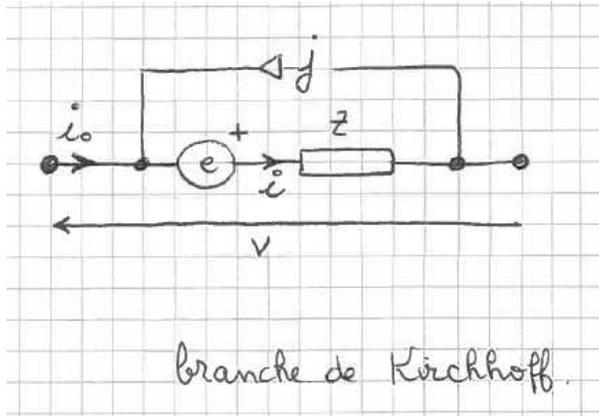


Figure 14 : branche de Kirchhoff

## 10 Annexe IV

La théorie des jeux (TDJ) a pour objet le calcul d'espérances de gain dans des jeux dont les hypothèses et règles sont précisément définies. Suivant ces hypothèses on va parler de jeux à somme constante ou pas, de jeux à information incomplète, etc. Au-delà de la prévision de résultats de jeux classiques, la théorie des jeux est particulièrement intéressante en ce sens qu'elle peut offrir un biais rigoureux pour introduire des hypothèses dépendant de facteurs non maîtrisés comme des choix d'opérateurs humains. Il ne s'agit pas de simples bilans de

gains en fonction de choix ou d'un simple traitement statistique où l'on pondère des hypothèses de probabilités de réalisations, mais de ces bilans ou traitements augmentés d'un critère de gain qui va guider les choix, justifier des pondérations statistiques et qui va permettre de faire un lien, certes difficile, entre des comportements et des stratégies de jeux : c'est à dire des successions de choix selon des règles définies pour atteindre un gain dépendant d'un profil psychique ou de compétences. Prenons un exemple simple et quelque peu irréaliste pour en illustrer les mécanismes. Considérons deux duellistes pouvant choisir deux armes : l'épée ou le pistolet (on suppose le duel non statique et une seule balle dans le pistolet ! Mais dans ce premier cas pour les duellistes, cela revient à jouer à pile ou face.). Suivant un premier jeu, la règle est que chaque duelliste prend une arme au hasard et en même temps. Connaissant la règle du jeu et sans autres hypothèses sur les joueurs, on doit fournir une matrice des gains (appelée matrice des « payoff » en Anglais). Cette matrice fournit des valeurs qui sont fixées de façon arbitraire, statistique ou déterministe. Par exemple nous pouvons supposer ici que le gain est une part d'une somme d'argent suivant l'arme tirée au hasard par chaque joueur. C'est un jeu à somme fixe : la somme des gains par options doit faire 100 écus d'or ! Si E est l'épée et P le pistolet on construit le tableau suivant :

	<i>E</i>	<i>P</i>
<i>E</i>	(50, 50)	(10, 90)
<i>P</i>	(90, 10)	(50, 50)

Dans chaque cas d'arme prise par le premier joueur (valeurs en lignes) et le second joueur (valeurs en colonnes) on exprime entre parenthèses les gains de chaque joueur en commençant par le premier puis le deuxième. On est ici dans une matrice de gain en stratégie pure, c'est à dire que l'on ne discute pas de la probabilité qu'a chaque joueur de prendre telle arme. On comptabilise tous les cas pour explorer systématiquement les gains pour chaque couple possible de résultats. Maintenant on peut progressivement complexifier le jeu, ses règles et hypothèses pour arriver au type de jeu qui nous intéresse, minimum pour la CEM (parmi les hypothèses le jeu peut être coopératif ou non. Ici, nous sommes dans une hypothèse de jeu non coopératif évidente, puisqu'il s'agit d'un duel!). On dit cette fois qu'il s'agit d'un vrai duel et que chaque joueur peut choisir son arme et un joueur choisi après l'autre. Le choix de chaque joueur va cette fois mettre en œuvre une réflexion pour judicieusement augmenter ses chances de rester en vie. Chaque joueur va considérer ses propres performances dans chaque arme et supposer celles de son adversaire. On voit que dans ce cas, chaque choix sera en partie guidé par des considérations subjectives, exploitant des appréciations personnelles, des rumeurs, des soupçons, des croyances. Une représentation plus adéquate de ce nouveau jeu utilise une forme extensive avec un arbre des choix. La figure 4 donne une représentation de cet arbre pour le jeu précédent avec les nouvelles règles. Le fait que le second joueur ne connaisse pas au départ le choix que va faire son adversaire et fasse des hypothèses constitue un jeu à information incomplète. Nous avons ici développé l'arbre à partir du

premier joueur, mais nous aurions pu tracer l'étude de la décision du seul second joueur pour deux hypothèses de choix du premier, reliant par une ligne pointillée les deux jonctions de ces deux hypothèses sans utiliser la première jonction. Le calcul utilise les probabilités conditionnelles de Bayes. On va conduire des raisonnements du type : « si le premier joueur sait le second fort à l'épée et que lui-même est mauvais à l'épée, il peut choisir le pistolet en espérant être assez vif pour éviter l'épée et se rapprocher assez de son adversaire pour faire mouche du premier coup » ; etc.

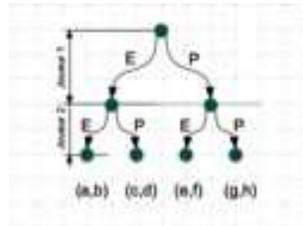


Figure 15 : arbre de la forme extensive de la représentation du jeu

Ces hypothèses traduisent des croyances des joueurs vis à vis des compétences des autres joueurs, et on doit essayer d'explorer toutes les croyances possibles pour ensuite associer à chaque choix une probabilité de réalisation. On peut associer une probabilité de 98% de chance que le premier joueur dans la croyance précédente choisisse le pistolet. Il reste une chance non nulle qu'au dernier moment, se sentant de toute façon perdu, il décide de mourir avec panache dans un duel à l'épée. . . L'arbre complètement renseigné, on peut calculer l'espérance de gain de chaque joueur, c'est à dire les produits des gains associés à chaque nœud terminal de l'arbre par les produits des probabilités des suites de chemins qui conduisent à ces nœuds. On appelle équilibre de Nash, une solution de meilleur compromis vers laquelle convergent les décisions des joueurs pour maximiser leurs gains. Si le raisonnement est robuste et si les conditions du jeu répondent à des critères précis (et en pratique assez restrictifs), l'équilibre de Nash est forcément la stratégie que choisiront les joueurs.