



HAL
open science

Une démonstration du théorème de Catalan-Mihailescu et généralisation à la conjecture de Pillai

Jamel Ghannouchi

► **To cite this version:**

Jamel Ghannouchi. Une démonstration du théorème de Catalan-Mihailescu et généralisation à la conjecture de Pillai. 2012. hal-00695280v10

HAL Id: hal-00695280

<https://hal.science/hal-00695280v10>

Preprint submitted on 25 Jun 2012 (v10), last revised 31 Jan 2013 (v22)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une démonstration du théorème de Catalan-Mihailescu et généralisation à la conjecture de Pillai

Jamel Ghanouchi

jamel.ghanouchi@topnet.tn

Résumé

(MSC=11D04) Plus d'un siècle après sa formulation par le mathématicien Belge Eugene Catalan, Preda Mihailescu a résolu le problème demeure jusque-là ouvert. Mais, est-ce tout ? On est en droit de se poser la question parce que la solution de Mihailescu utilise abondamment le calcul sur machines. Quoique l'on pense sur l'aide apportée par les machines au travail humain, la question qui se pose reste celle de l'existence d'une preuve totalement algébrique. En fait, nous proposons dans ce travail une telle démonstration qui en plus simplifie largement la question et la met sur une autre orbite, celle des théorèmes les plus fameux de la théorie des nombres. Notre preuve est élémentaire et répond à une quête inscrite sciemment dans nos travaux de recherche. Car le problème de Catalan, même s'il est résolument moderne, plonge ses racines dans le moyen-âge d'il y a mille ans. C'est à cette époque-là en effet que l'énigme est née avec Levy Ben Gershom. Si le présent travail s'avère concluant, on pourra en effet dire que l'énigme aurait pu être résolue dès le XII^{ème} siècle. Telle est la gageure et le but de ce mémoire : présenter une solution assez élémentaire pour qu'elle eut pu être trouvée il y a environ mille ans. Car cette énigme, au-delà de son intérêt mathématique intrinsèque est l'une des plus anciennes et des plus captivantes de l'humanité. Cependant, aussi intéressant que soit ce résultat, il ne suffit pas car nous avons généralisé l'approche aux équations de Pillai et démontré qu'elles ont un nombre fini de solutions. (Keywords : Equations diophantiennes ; équation de Pillai ; équation de Catalan ; Résolution Algébrique)

Abstract

(MSC=11D04) More than one century after its formulation by the Belgian mathematician Eugene Catalan, Preda Mihailescu has solved the open problem. But, is it all ? Mihailescu's solution utilizes computation on machines, we propose here not really a proof as it is intended classically, but a resolution of an equation like the resolution of the polynomial equations of third and fourth degrees. This solution is totally algebraic and does not utilize, of course, computers or any kind of calculation. Then, we generalize the proof to Pillai conjecture.

(Keywords : Diophantine equations ; Catalan equation ; Pillai conjecture ; Algebraic resolution)

L'approche

L'équation de Catalan est $Y^p = X^q + 1$ et se formule par y a-t-il deux puissances pures consécutives ? Posons donc avec p, q, X, Y tous des entiers strictement supérieurs à 1.

$$c = \frac{X^p - 1}{Y^{\frac{p}{2}}}, \quad c' = \frac{7 - X^p}{Y^{\frac{p}{2}}}$$

Et

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = X^p - 1 + 7 - X^p = 6 \Rightarrow Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6}{c + c'}$$

Soit

$$X^p = cY^{\frac{p}{2}} + 1 = \frac{6c}{c + c'} + 1 = \frac{7c + c'}{c + c'}$$

Donc

$$X^q = Y^p - 1 = \frac{36 - (c + c')^2}{(c + c')^2}$$

Mais aussi

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6 > 0$$

Ainsi $c + c' > 0$. Et aussi

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1 > 0$$

Soit $c > 0$. Or $X^p \geq 4$, donc

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1 \geq 7 - X^p = c'Y^{\frac{p}{2}}$$

Et $c \geq c'$

$$7 - X^p = 7 - \frac{7c + c'}{c + c'} = \frac{6c'}{c + c'}$$

Si

$$c' > 0$$

Alors $X^p < 7$ et nous aurions $X^p = 4$, nous supposons donc $c' < 0$, avec

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6 > 0$$

$$(c + c')X^p = 7c + c' > 0$$

avec $c + c' > 0$. Et

$$Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6}{c + c'} \geq 3 \Rightarrow c + c' \leq 2$$

Résultats importants Retenons que

1) $c' < 0$

2) $0 < c + c' < 2$

3) $0 < 7c + c'$

Et nous discuterons deux cas

I) $c^2 < 1$

II) $c^2 \geq 1$

cas $c^2 < 1$ Prenons

$$\begin{aligned} 2X^q - X^{2p} &= \frac{72 - 2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{72 - 51c^2 - 3c'^2 - 18cc'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{51(1 - c^2) - 3c'(c + c') - 15cc' + 21}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Numérotons ce résultat

$$2X^q > X^{2p} \quad (1)$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36c^2 - c^2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(6c - 7c - c')(6c + 7c + c') - c^2(c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-(c + c')(13c + c') - c^2(c + c')^2}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Soit

$$c^2 X^q < X^{2p} \quad (2)$$

Donc

$$X^{2p-q-1} < \frac{2}{X} \leq 1$$

Soit

$$2p \leq q + 1$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} 2c^2 X^{2p-1} - X^{2p} &= \frac{2c^2(7c + c')^2 - X(7c + c')^2}{X(c + c')^2} \\ &< \frac{2(7c + c')^2 - X(7c + c')^2}{X(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit $2c^2 < X$. Posons

$$X^p < u_n c^{2p}$$

Avec $u_0 > 0$ et $u_n > 2^p$, nous avons

$$X^p - 2^p c^{2p} = \frac{2^p}{u_n} X^p - 2^p c^{2p} + \left(1 - \frac{2^p}{u_n}\right) X^p < \frac{u_n - 2^p}{u_n} X^p$$

Et

$$X^p - u_n c^{2p} = X^p - 2^p c^{2p} + (2^p - u_n) c^{2p} < 0$$

Donc

$$X^p - 2^p c^{2p} < (u_n - 2^p) c^{2p}$$

En additionnant

$$\begin{aligned} 2X^p - (u_n + 2^p) c^{2p} &< 2X^p - 2^{p+1} c^{2p} < (u_n - 2^p) \left(\frac{X^p}{u_n} + c^{2p}\right) \\ &= (u_n - 2^p) \left(c^{2p} - \frac{X^p}{u_n}\right) + 2(u_n - 2^p) \frac{X^p}{u_n} < \left(2 - \frac{2^{p+1}}{u_n}\right) X^p \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{2^{p+1}}{u_n} X^p < (u_n + 2^p) c^{2p}$$

Ou encore

$$X^p < \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} c^{2p} = u_{n+1} c^{2p}$$

Avec

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} > \frac{2^p(2^p + 2^p)}{2^{p+1}} = 2^p$$

Pour tout n y compris à l'infini, or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = L$$

Et L vérifie la relation de récurrence donc

$$L = \frac{L(L + 2^p)}{2^{p+1}} \Rightarrow L = 2^p$$

D'où

$$X^p < \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) c^{2p} = 2^p c^{2p}$$

Donc, nous avons simultanément

$$2c^2 > X > 2c^2$$

Soit $X = 2c^2$, mais

$$2c^2 X^q = X^{q+1} < 2X^{2p}$$

Donc $X^{-1} < X^{q-2p} < \frac{2}{X} < 1$ et $2p = q + 1$

$$X = \frac{X^{2p}}{X^q} = 2c^2 = \frac{2X^{2p} - 4X^p + 2}{X^q + 1}$$

Et

$$X - X^{q+1} + 4X^p = 2 \Rightarrow 1 - X^q + 4X^{p-1} = \frac{2}{X} \Rightarrow X = 2 = 2c^2 \Rightarrow c^2 = 1$$

Ou

$$2^p - 2 = 2^{q-p} \Rightarrow 2^{p-1} - 1 = 2^{q-p-1} \Rightarrow q = p + 1 = 3 \Rightarrow Y = \pm 3$$

Deuxième preuve : Or $c^2 < 1$, $\exists m > 1$ pour lequel $c^2 = \frac{m-1}{m}$ et $1 - c^2 = \frac{1}{m} < \frac{X-1}{X}$ soit $c^2 X > 1$ et

$$X^{2p+1} = \frac{(7c + c')^2 X}{(c + c')^2} > \frac{36c^2 X}{(c + c')^2} > \frac{36 - (c + c')^2}{(c + c')^2} = X^q$$

On en déduit

$$X^{2p} < c^2 X^{2p+1}$$

Ou encore

$$c^2 X > 1$$

Donc

$$36X^{-1} - X^{-1}(c + c')^2 < 36c^2 < (7c + c')^2$$

Soit

$$X^{q-1} < X^{2p}$$

Donc

$$X^q \leq X^{2p} \leq X^{q+1}$$

Comme q ne peut être pair, il s'ensuit $q + 1 = 2p$ Donc

$$0 > (c^2 - 1)Y^p = X^{2p} - 2X^p - X^q = X^{q+1} - 2X^p - X^q > 0$$

Et $c^2 = 1$ ou

$$\begin{aligned} X^p - X^{q-p} &= 2 \\ X^{p-1} - X^{q-p-1} &= \frac{2}{X} \end{aligned}$$

c'est un entier, donc $X = 2$ et

$$2^{p-1} = 1 + 2^{q-p-1} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow q = 2p - 1 = 3 \Rightarrow Y = \pm 3$$

Cas $c \geq 1$ Nous devons retenir ici

1) $c^2 > 1$

2) $c + c' < 2$

3) $c' < 0$

Nous avons, dans le même esprit que précédemment :

$$\begin{aligned} 2c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{72c^2 - 2c^2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{72c^2 - 49c^2 - c'^2 - 14cc' - 2c^2(c^2 + c'^2 + 2cc')}{(c + c')^2} \\ &= \frac{c^2(23 - 2(c + c')^2) - c'(c + c') - 13cc'}{(c + c')^2} \\ &> \frac{15c^2 - c'(c + c') - 13cc'}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Que nous numérotions comme suit

$$2c^2 X^q > X^{2p} \quad (5)$$

Mais aussi

$$2c^2 X^q > X^{2p} > 4X^p \Rightarrow c^2 X^q > 2X^p \quad (5')$$

Et

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36c^2 - c^2(c+c')^2 - (7c+c')^2}{(c+c')^2} \\ &= \frac{(6c-7c-c')(6c+7c+c') - c^2(c+c')^2}{(c+c')^2} \\ &= \frac{-(c+c')(13c+c') - c^2(c+c')^2}{(c+c')^2} < 0 \end{aligned}$$

D'où l'encadrement suivant

$$\frac{1}{2}X^{2p} < c^2 X^q < X^{2p} < c^2 X^{2p} \quad (6)$$

Or

$$X^{2p-q} > c^2 > 1$$

Nous avons donc ici

$$2p \geq q + 1$$

Nous avons vu $2c^2 X^{2p-1} \geq 2c^2 X^q > X^{2p}$, on en déduit $2c^2 > X$. Posons

$$X^p > u_n c^{2p}$$

Avec $u_0 > 0$ et $u_n < 2^p$, nous avons

$$X^p - 2^p c^{2p} = \frac{2^p}{u_n} X^p - 2^p c^{2p} + (1 - \frac{2^p}{u_n}) X^p > \frac{u_n - 2^p}{u_n} X^p$$

Et

$$X^p - u_n c^{2p} = X^p - 2^p c^{2p} + (2^p - u_n) c^{2p} > 0$$

Donc

$$X^p - 2^p c^{2p} > (u_n - 2^p) c^{2p}$$

En additionnant

$$\begin{aligned} 2X^p - (u_n + 2^p) c^{2p} &> 2X^p - 2^{p+1} c^{2p} > (u_n - 2^p) \left(\frac{X^p}{u_n} + c^{2p} \right) \\ &= (u_n - 2^p) \left(c^{2p} - \frac{X^p}{u_n} \right) + 2(u_n - 2^p) \frac{X^p}{u_n} > \left(2 - \frac{2^{p+1}}{u_n} \right) X^p \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{2^{p+1}}{u_n} X^p > (u_n + 2^p) c^{2p}$$

Ou encore

$$X^p > \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} c^{2p} = u_{n+1} c^{2p}$$

Avec

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} < \frac{2^p(2^p + 2^p)}{2^{p+1}} = 2^p$$

Pour tout n y compris à l'infini, or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = L$$

Et L vérifie la relation de récurrence donc

$$L = \frac{L(L + 2^p)}{2^{p+1}} \Rightarrow L = 2^p$$

D'où

$$X^p > \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)c^{2^p} = 2^p c^{2^p}$$

Donc, nous avons simultanément

$$2c^2 > X > 2c^2$$

Soit $X = 2c^2$ et $X^{q+1} = 2c^2 X^q > X^{2p} \geq X^{q+1}$ d'où $q + 1 = 2p$ et

$$X = \frac{X^{2p}}{X^q} = 2c^2 = \frac{2X^{2p} - 4X^p + 2}{X^q + 1}$$

$$\Rightarrow X - X^{q+1} + 4X^p = 2 \Rightarrow 1 - X^q + 4X^{p-1} = \frac{2}{X}$$

Donc $X = 2c^2 = 2$ et $c^2 = 1$ donc $(2^p - 1)^2 = 2^q + 1$ ou

$$2^p - 2 = 2^{q-p} = 2^{p-1} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow q = 2p - 1 = 3 \Rightarrow Y = \pm 3$$

et nous avons les solutions de Catalan. Voici une autre démonstration :

$$Y^p = X^q + 1 = X^{2p-1} + 1 > X^{\frac{3p}{2}}$$

Donc

$$Y^2 > X^3$$

Posons

$$Y^2 = X^3 + u \geq X^3 + 1$$

Mais si l'on suppose p pair plus grand que 2

$$\begin{aligned} 1 \leq u = Y^2 - X^3 &= \frac{Y^p - X^{3p}}{Y^{p-2} + Y^{p-4}X^3 + \dots + Y^2X^{3p-6} + X^{3p-3}} \\ &= \frac{X^{2p-1} - X^{3p}}{Y^{p-2} + Y^{p-4}X^3 + \dots + Y^2X^{3p-6} + X^{3p-3}} < 0 \end{aligned}$$

Et c'est impossible, cela signifie que p n'est pas plus grand que 2 on en déduit $p = 2$ et $q = 2p - 1 = 3$ et donc $X = 2$ et $Y = \pm 3$. Et si p est un impair plus grand que 3, posons $p = 2k + 1$

$$\begin{aligned} Y^{2k+1} - X^{3p} &= (Y^2 - X^3)(Y^{2k-1} + Y^{2k-3}X^3 + \dots + Y^3X^{3p-9} + YX^{3p-6}) + X^{3p-3}Y - X^{3p} \\ &= (Y^2 - X^3)(X^{3p-3} + Y^2X^{3p-6} + \dots + Y^{2k-2}X^3 + Y^{2k}) + Y^{2k+1} - Y^{2k+2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}((Y^2 - X^3)(Y^{2k-1} + Y^{2k-3}X^3 + \dots + Y^3X^{3p-9} + YX^{3p-6}) + \\ + \frac{1}{2}((Y^2 - X^3)(X^{3p-3} + Y^2X^{3p-6} + \dots + Y^{2k-2}X^3 + Y^{2k}) + Y^{2k+1} - X^{3p} - Y^{2k+2} + X^{3p-3}Y)$$

D'où

$$0 > Y^{2k+1} - X^3 = (Y^2 - X^3)(Y^{2k-1} + \dots + YX^{3p-6} + X^{3p-3} + \dots + Y^{2k}) + YX^{3p-3} - Y^{2k+2}$$

On en déduit

$$X^{3p-3} < Y^{2k+1} = X^{2p-1} + 1$$

Et c'est impossible, donc p n'est pas plus grand que 3 et $p = 3$ et $q = 2p - 1 = 5$, l'équation devient $Y^3 = X^5 + 1$ qui n'a pas de solution!

Généralisation à l'équation de Pillai

L'équation de Pillai est $Y^p = X^q + a$ et se formule par : y a-t-il un nombre fini de couples de puissances pures séparées par un nombre entier a ? Nous allons définir les nombres de Pillai : ce sont des nombres que nous notons comme suit b_a qui dépendent de a et qui se comportent tout à fait comme b pour $a = 1$. Ainsi, nous écrirons $1_a + 7_a = 8_a$ et $7_a - 1_a = 6_a$: notre but est de suivre pas à pas l'approche adoptée pour l'équation de Catalan pour laquelle $a = 1$. Nous avons bien entendu $1_a = a_1$ et $0_a = 0$. L'équation devient donc $Y^p = X^q + 1_a$. Posons donc avec p, q, X, Y tous des entiers strictement supérieurs à 1_a .

$$c = \frac{X^p - 1_a}{Y^{\frac{p}{2}}}, \quad c' = \frac{7_a - X^p}{Y^{\frac{p}{2}}}$$

Et

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = X^p - 1_a + 7_a - X^p = 6_a \Rightarrow Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6_a}{c + c'}$$

Soit

$$X^p = cY^{\frac{p}{2}} + 1_a = \frac{6_a c}{c + c'} + 1_a = \frac{7_a c + 1_a c'}{c + c'}$$

Donc

$$X^q = Y^p - 1_a = \frac{36_a 1_a - 1_a (c + c')^2}{(c + c')^2}$$

Mais aussi

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6_a > 0$$

Ainsi $c + c' > 0$. Et aussi

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1_a > 0$$

Soit $c > 0$. Or $X^p \geq 4_a$, donc

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1_a \geq 7_a - X^p = c'Y^{\frac{p}{2}}$$

Et $c \geq c'$

$$7_a - X^p = 7_a - \frac{7_a c + 1_a c'}{c + c'} = \frac{6_a c'}{c + c'}$$

Si

$$c' > 0$$

Alors $X^p < 7_a$ et nous aurions un nombre fini de solutions, nous supposons donc $c' < 0$, avec

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6_a > 0$$

$$(c + c')X^p = 7_a c + 1_a c' > 0$$

avec $c + c' > 0$. Et

$$Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6_a}{c + c'} \geq 3_a \Rightarrow c + c' \leq 2 < 2_a$$

Résultats importants Retenons que

1) $c' < 0$

2) $0 < c + c' < 2_a$

3) $0 < 7_a c + 1_a c'$

Et nous discuterons deux cas

I) $c^2 < 1_a$

II) $c^2 \geq 1_a$

Il est bien évident aussi que nous sommes désormais dans les cas $X_p - 1_a > 0$ et $7_a - X^p < 0$.

cas $c^2 < 1_a$ Prenons

$$\begin{aligned} 2_a X^q - X^{2p} &= \frac{72_a 1_a 1_a - 2_a 1_a (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{72_a 1_a 1_a - 1_a (49_a + 2_a) c^2 - 1_a (1_a + 2_a) c'^2 - 2_a (7_a + 2_a) c c'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{19_a 1_a 1_a + 51_a 1_a (1_a - c^2) + 2_a 1_a (1_a - c^2) - (2_a 1_a + 1_a 1_a) c' (c + c') - 16_a 1_a c c'}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Numérotons ce résultat (que nous avons un peu forcé, car nous avons pris $70 > 49c^2$) et de toute façon $2_a X^q - X^{2p} > 0$ que nous retenons

$$2_a X^q > X^{2p} \quad (7)$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36_a 1_a c^2 - 1_a c^2 (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(6_a c - 7_a c - 1_a c')(6_a + 7_a + 1_a c') - 1_a c^2 (c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-1_a (c + c')(13_a c + 1_a c') - 1_a c^2 (c + c')^2}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Soit

$$c^2 X^q < X^{2p} \quad (8)$$

Or

$$X^{2p-q-1} < \frac{2}{X} \leq 1$$

D'où

$$2p \leq q + 1$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} 2c^2 X^{2p-1} - X^{2p} &= \frac{2c^2(7ac + 1ac')^2 - X(7ac + 1ac')^2}{X(c + c')^2} \\ &< \frac{2a(7ac + 1ac')^2 - X(7ac + 1ac')^2}{X(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit $2c^2 < X$. Posons

$$X^p < u_n c^{2p}$$

Avec $u_0 > 0$ et $u_n > 2^p$, nous avons

$$X^p - 2^p c^{2p} = \frac{2^p}{u_n} X^p - 2^p c^{2p} + \left(1 - \frac{2^p}{u_n}\right) X^p < \frac{u_n - 2^p}{u_n} X^p$$

Et

$$X^p - u_n c^{2p} = X^p - 2^p c^{2p} + (2^p - u_n) c^{2p} < 0$$

Donc

$$X^p - 2^p c^{2p} < (u_n - 2^p) c^{2p}$$

En additionnant

$$\begin{aligned} 2X^p - (u_n + 2^p) c^{2p} &< 2X^p - 2^{p+1} c^{2p} > (u_n - 2^p) \left(\frac{X^p}{u_n} + c^{2p}\right) \\ &= (u_n - 2^p) \left(c^{2p} - \frac{X^p}{u_n}\right) + 2(u_n - 2^p) \frac{X^p}{u_n} < \left(2 - \frac{2^{p+1}}{u_n}\right) X^p \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{2^{p+1}}{u_n} X^p < (u_n + 2^p) c^{2p}$$

Ou encore

$$X^p < \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} c^{2p} = u_{n+1} c^{2p}$$

Avec

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} > \frac{2^p(2^p + 2^p)}{2^{p+1}} = 2^p$$

Pour tout n y compris à l'infini, or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = L$$

Et L vérifie la relation de récurrence donc

$$L = \frac{L(L + 2^p)}{2^{p+1}} \Rightarrow L = 2^p$$

D'où

$$X^p < \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)c^{2p} = 2^p c^{2p}$$

Donc, nous avons simultanément

$$2c^2 > X > 2c^2$$

Soit $X = 2c^2$, mais

$$X^{q+1} = 2c^2 X^q < 2X^{2p}$$

Et $X^{q-2p} < \frac{2}{X} < 1$ Donc $2p = q + 1$

$$X = \frac{X^{2p}}{X^q} = 2c^2 = \frac{2X^{2p} - 4_a X^p + 2_a 1_a}{X^q + 1_a}$$

Et

$$1_a X - X^{q+1} + 4_a X^p = 2_a 1_a \Rightarrow 1_a - X^q + 4_a X^{p-1} = \frac{2_a 1_a}{X} \Rightarrow X = 2c^2 \leq 2_a 1_a$$

Et il y a un nombre fini de solutions! Deuxième preuve : $c^2 < 1_a$, $\exists m > 1_a$ pour lequel $c^2 = \frac{1_a m - 1_a}{m}$ soit $1_a - c^2 = \frac{1_a}{m} < \frac{1_a X - 1_a}{X}$ d'où $c^2 X > 1$ et

$$X^{2p+1} = \frac{(7_a c + 1_a c')^2 X}{(c + c')^2} > \frac{36_a 1_a c^2 X}{(c + c')^2} > \frac{36_a 1_a - (c + c')^2}{(c + c')^2} = X^q$$

Donc

$$X^{2pq} < c^{2q} X^{q(2p+1)}$$

On en déduit

$$X^{2p} < c^2 X^{2p+1}$$

Ou $c^2 X > 1$ Et

$$36_a 1_a X^{-1} - X^{-1}(c + c')^2 < 36_a 1_a c^2 < (7_a c + 1_a c')^2$$

Soit

$$X^{q-1} < X^{2p}$$

Nous avons alors

$$X^q \leq X^{2p} \leq X^{q+1}$$

Comme q n'est pas pair, il s'ensuit : $q + 1 = 2p$ Donc

$$0 > (c^2 - 1_a)Y^p = X^{2p} - 2_a X^p - X^q = X^{q+1} - 2_a X^p - X^q > 0$$

et $c^2 = 1_a$ et alors

$$X^p - 2_a = X^{q-p} \geq 2$$

$X^{p-1} - X^{q-p-1} = \frac{2_a}{X}$ est un entier, on en déduit qu'il y a un nombre fini de solutions.

Cas $c^2 \geq 1_a$ Nous devons retenir ici

1) $c^2 > 1_a$

2) $c + c' < 2_a$

3) $c' < 0$

Nous avons, dans le même esprit que précédemment :

$$\begin{aligned} 2c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{72_a 1_a c^2 - 2_a c^2 (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-1_a 1_a c' (14_a + 1_a c') + 1_a c^2 (23_a - 2(c + c')^2)}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Que nous numérotions comme suit

$$2c^2 X^q > X^{2p} \quad (11)$$

Mais aussi

$$2c^2 X^q > X^{2p} > 4X^p \Rightarrow c^2 X^q > 2X^p \quad (11')$$

Et

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36_a 1_a c^2 - 1_a c^2 (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &< \frac{36_a 1_a c^2 - 50_a 1_a c^2 - 2_a 1_a c'^2 - 16_a 1_a c c' + (1_a 1_a - 1_a c^2)(c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-2_a (7_a c + 1_a c')(c + c') + (c + c')^2 (1_a 1_a - 1_a c^2)}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

D'où l'encadrement suivant

$$\frac{1}{2} X^{2p} < c^2 X^q < X^{2p} < c^2 X^{2p} \quad (12)$$

Or

$$X^{2p-q} > c^2 > 1_a > 1$$

Nous avons donc ici

$$2p \geq q + 1$$

Nous avons vu : $2c^2 X^{2p-1} \geq 2c^2 X^q > X^{2p}$, on en déduit $2c^2 > X$. Posons

$$X^p > u_n c^{2p}$$

Avec $u_0 > 0$ et $u_n < 2^p$, nous avons

$$X^p - 2^p c^{2p} = \frac{2^p}{u_n} X^p - 2^p c^{2p} + \left(1 - \frac{2^p}{u_n}\right) X^p > \frac{u_n - 2^p}{u_n} X^p$$

Et

$$X^p - u_n c^{2p} = X^p - 2^p c^{2p} + (2^p - u_n) c^{2p} > 0$$

Donc

$$X^p - 2^p c^{2p} > (u_n - 2^p) c^{2p}$$

En additionnant

$$\begin{aligned} 2X^p - (u_n + 2^p)c^{2p} &> 2X^p - 2^{p+1}c^{2p} < (u_n - 2^p)\left(\frac{X^p}{u_n} + c^{2p}\right) \\ &= (u_n - 2^p)\left(c^{2p} - \frac{X^p}{u_n}\right) + 2(u_n - 2^p)\frac{X^p}{u_n} > \left(2 - \frac{2^{p+1}}{u_n}\right)X^p \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{2^{p+1}}{u_n}X^p > (u_n + 2^p)c^{2p}$$

Ou encore

$$X^p > \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}}c^{2p} = u_{n+1}c^{2p}$$

Avec

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 2^p)}{2^{p+1}} < \frac{2^p(2^p + 2^p)}{2^{p+1}} = 2^p$$

Pour tout n y compris à l'infini, or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = L$$

Et L vérifie la relation de récurrence donc

$$L = \frac{L(L + 2^p)}{2^{p+1}} \Rightarrow L = 2^p$$

D'où

$$X^p > \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)c^{2p} = 2^p c^{2p}$$

Donc, nous avons simultanément

$$2c^2 > X > 2c^2$$

Soit $X = 2c^2$ et

$$\begin{aligned} X &= \frac{X^{2p}}{X^q} = 2c^2 = \frac{2X^{2p} - 4_a X^p + 2_a 1_a}{X^q + 1_a} \\ \Rightarrow 1_a X - X^{q+1} + 4_a X^p &= 2_a 1_a \Rightarrow 1_a - X^q + 4_a X^{p-1} = \frac{2_a 1_a}{X} \end{aligned}$$

Et $X < 2_a 1_a$. Il y a un nombre fini de solutions. Autre preuve

$$Y^p = X^q + 1_a = X^{2p-1} + 1_a > X^{\frac{3p}{2}}$$

Donc

$$Y^2 > X^3$$

Posons

$$Y^2 = X^3 + u \geq X^3 + 1_a$$

Mais si l'on suppose p pair plus grand que 2, nous avons

$$1_a \leq u = Y^2 - X^3 = \frac{Y^p - X^{3p}}{Y^{p-2} + Y^{p-4}X^3 + \dots + Y^2X^{3p-6} + X^{3p-3}}$$

$$= \frac{X^{2p-1} + 1_a - X^{3p}}{Y^{p-2} + Y^{p-4}X^3 + \dots + Y^2X^{3p-6} + X^{3p-3}} < 0$$

Et c'est impossible, cela signifie que p n'est pas plus grand que 2 on en déduit $p = 2$ et $q = 2p - 1 = 3$ et donc $X = 2$ et $Y = \pm 3$. Et si l'on suppose p impair plus grand que 3, nous avons en posant $p = 2k + 1$

$$\begin{aligned} Y^{2k+1} - X^{3p} &= (Y^2 - X^3)(Y^{2k-1} + Y^{2k-3}X^3 + \dots + Y^3X^{3p-9} + YX^{3p-6}) + X^{3p-3}Y - X^{3p} \\ &= (Y^2 - X^3)(X^{3p-3} + Y^2X^{3p-6} + \dots + Y^{2k-2}X^3 + Y^{2k}) + Y^{2k+1} - Y^{2k+2} \\ &= \frac{1}{2}((Y^2 - X^3)(Y^{2k-1} + Y^{2k-3}X^3 + \dots + Y^3X^{3p-9} + YX^{3p-6}) + \\ &+ \frac{1}{2}((Y^2 - X^3)(X^{3p-3} + Y^2X^{3p-6} + \dots + Y^{2k-2}X^3 + Y^{2k}) + Y^{2k+1} - X^{3p} - Y^{2k+2} + X^{3p-3}Y) \end{aligned}$$

D'où

$$0 > Y^{2k+1} - X^3 = (Y^2 - X^3)(Y^{2k-1} + \dots + YX^{3p-6} + X^{3p-3} + \dots + Y^{2k}) + YX^{3p-3} - Y^{2k+2}$$

On en déduit

$$X^{3p-3} < Y^{2k+1} = X^{2p-1} + 1$$

Et c'est impossible, donc p n'est pas plus grand que 3 et $p = 3$ et $q = 2p - 1 = 5$, l'équation devient $Y^3 = X^5 + 1_a$ qui a un nombre fini de solutions ! Dans tous les cas, l'équation de Pillai, à l'instar de celle de Catalan qui n'en a qu'une seule, a un nombre fini de solutions !

Conclusion

L'équation de Catalan est ainsi résolue, et une solution aussi originale que élémentaire est possible ! Nous l'avons d'ailleurs généralisée à l'équation de Pillai et prouvé qu'elle a un nombre fini de solutions ! Il semble que de nombreux problèmes de théorie des nombres peuvent d'ailleurs être ainsi résolus ! Nous espérons avoir montré la voie !

Références

- [1] P. MIHAILESCU A class number free criterion for catalan's conjecture, *Journal of Number theory*, **99** (2003).