



**HAL**  
open science

# Une démonstration du théorème de Catalan-Mihailescu et généralisation à la conjecture de Pillai.

Jamel Ghannouchi

► **To cite this version:**

Jamel Ghannouchi. Une démonstration du théorème de Catalan-Mihailescu et généralisation à la conjecture de Pillai.. 2012. hal-00695280v1

**HAL Id: hal-00695280**

**<https://hal.science/hal-00695280v1>**

Preprint submitted on 7 May 2012 (v1), last revised 31 Jan 2013 (v22)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une démonstration du théorème de Catalan-Mihailescu et généralisation à la conjecture de Pillai

Jamel Ghanouchi

jamel.ghanouchi@topnet.tn

## Résumé

(MSC=11D04) Plus d'un siècle après sa formulation par le mathématicien Belge Eugene Catalan, Preda Mihailescu a résolu le problème demeure jusque-là ouvert. Mais, est-ce tout ? On est en droit de se poser la question parce que la solution de Mihailescu utilise abondamment le calcul sur machines. Quoique l'on pense sur l'aide apportée par les machines au travail humain, la question qui se pose reste celle de l'existence d'une preuve totalement algébrique. En fait, nous proposons dans ce travail une telle démonstration qui en plus simplifie largement la question et la met sur une autre orbite, celle des théorèmes les plus fameux de la théorie des nombres. Notre preuve est élémentaire et répond à une quête inscrite sciemment dans nos travaux de recherche. Car le problème de Catalan, même s'il est résolument moderne, plonge ses racines dans le moyen-âge d'il y a mille ans. C'est à cette époque-là en effet que l'énigme est née avec Levy Ben Gershom. Si le présent travail s'avère concluant, on pourra en effet dire que l'énigme aurait pu être résolue dès le XII<sup>ème</sup> siècle. Telle est la gageure et le but de ce mémoire : présenter une solution assez élémentaire pour qu'elle eut pu être trouvée il y a environ mille ans. Car cette énigme, au-delà de son intérêt mathématique intrinsèque est l'une des plus anciennes et des plus captivantes de l'humanité. Cependant, aussi intéressant que soit ce résultat, il ne suffit pas car nous avons généralisé l'approche aux équations de Pillai et démontré qu'elles ont un nombre fini de solutions. (Keywords : Equations diophantiennes ; équation de Pillai ; équation de Catalan ; Résolution Algébrique)

## L'approche

L'équation de Catalan est  $Y^p = X^q + 1$  et se formule par y a-t-il deux puissances pures consécutives ? Posons donc avec  $p, q, X, Y$  tous des entiers strictement supérieurs à 1.

$$c = \frac{X^p - 1}{Y^{\frac{p}{2}}}, \quad c' = \frac{7 - X^p}{Y^{\frac{p}{2}}}$$

Et également

$$d = X^p - Y^{\frac{p}{2}}, \quad d' = X^p + Y^{\frac{p}{2}}$$

Nous avons donc

$$Y^{\frac{p}{2}} = X^p - d = d' - X^p = \frac{d' - d}{2}$$

Ou encore

$$X^p = \frac{d' + d}{2}$$

Et

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = X^p - 1 + 7 - X^p = 6 \Rightarrow Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6}{c + c'} = \frac{d' - d}{2}$$

Soit

$$X^p = cY^{\frac{p}{2}} + 1 = \frac{6c}{c + c'} + 1 = \frac{7c + c'}{c + c'} = \frac{d' + d}{2}$$

Nous calculons une expression de  $d$  et  $d'$  en fonction de  $c$  et  $c'$ . Dans ce qui va suivre, nous allons formuler  $X$  et  $Y$  en fonction de  $c$  et  $c'$ .

$$d = \frac{7c + c' - 6}{c + c'}, \quad d' = \frac{7c + c' + 6}{c + c'}$$

Donc

$$X^q = Y^p - 1 = \frac{36 - (c + c')^2}{(c + c')^2}$$

Mais aussi

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6 > 0$$

Ainsi  $c + c' > 0$ . Et aussi

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1 > 0$$

Soit  $c > 0$ . Or  $X^p \geq 4$ , donc

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1 \geq 7 - X^p = c'Y^{\frac{p}{2}}$$

Et  $c \geq c'$

$$7 - X^p = 7 - \frac{7c + c'}{c + c'} = \frac{6c'}{c + c'}$$

Si

$$c' > 0$$

Alors  $X^p < 7$  et nous aurions  $X^p = 4$ , nous supposons donc  $c' < 0$ , avec

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6 > 0$$

$$(c + c')X^p = 7c + c' > 0$$

avec  $c + c' > 0$ . Et

$$Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6}{c + c'} \geq 3 \Rightarrow c + c' \leq 2$$

**Résultats importants** Retenons que

1)  $c' < 0$

2)  $0 < c + c' < 2$

3)  $0 < 7c + c'$

Et nous discuterons deux cas

I)  $c^2 < 1$

II)  $c^2 \geq 1$

**cas**  $c^2 < 1$   $c < 1$  signifie que  $(c - 1)Y^{\frac{p}{2}} = d - 1 < 0$ , d'où nous tirons

$$(c' + 1)Y^{\frac{p}{2}} = 7 - d > 0$$

Ou encore  $c' > -1$ . Voici maintenant un résultat en passant pour donner une idée des inégalités que nous allons établir

$$3X^p(c + c') - 4Y^{\frac{p}{2}}(c + c') = 3(7c + c') - 24 = 21(c - 1) + 3(c' - 1) < 0$$

Prenons

$$\begin{aligned} 2X^q - X^{2p} &= \frac{72 - 2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{72 - 51c^2 - 3c'^2 - 18cc'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{51(1 - c^2) - 3c'(c + c') - 15cc' + 21}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Numérotons ce résultat

$$2X^q > X^{2p} \quad (1)$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36c^2 - c^2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{36c^2 - c^4 - c^2c'^2 - 2c^3c' - 49c^2 - c'^2 - 14cc'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-13c(c + c') - c'c(1 + (c' + 2c)c) - c^4 - c'^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{c(-13c - 14c' - 2c^2c' - cc'^2 - c^3) - c'^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{c(-13c - 13c' - c'c(c + c') - c^2(c' + c)) - c'(c + c')}{(c + c')^2} \\ &< \frac{c(-12c - 12c') - (c + c')^2 - c(c + c')^2}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Soit

$$c^2 X^q < X^{2p} \quad (2)$$

Essayons encore

$$\begin{aligned} 100c^2 X^q - 99X^{2p} &= \frac{3600c^2 - 100c^2(c + c')^2 - 99(7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(60c - \sqrt{99}(7c + c'))(60c + \sqrt{99}(7c + c')) - 100c^2(c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(-9.64c - 9.94c')(129.64c + 9.94c') - 100c^2(c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &< \frac{-1249.73c^2 - 98.8c'^2 - 1384.24cc'}{(c + c')^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-67.26c'(c + 1.1c') - 1249.73c(c + c') - 24.81c'(c' + 2.44c)}{(c + c')^2} \\
&= \frac{c'(-127.91c - 98.8c') - 9.77c(127.91c + 98.8c') - 29.11cc'}{(c + c')^2} \\
&= \frac{-(127.91c + 98.8c')(9.77c + c') - 29.11cc'}{(c + c')^2} < 0
\end{aligned}$$

Parce que

$$\begin{aligned}
127.91c + 98.8c' &> -29.11c' > 0 \\
9.77c + c' &> c > 0
\end{aligned}$$

Nous avons réussi à trouver l'encadrement suivant

$$\frac{c^2}{2}X^{2p} < c^2X^q < X^{2p} \quad (3)$$

Mais aussi

$$c^2X^q < \frac{99}{100}X^{2p} \quad (4)$$

Or

$$X^{2p-q-1} < 2X^{-1} \leq 1$$

D'où évidemment

$$2p \leq q + 1$$

Nous avançons deux preuves. La première : comme  $c^2 - 1 < 0$  et  $Y^p \geq 9$ , soit

$$9(c^2 - 1) = 9X^p(X^p - 2) - 9c^2X^q \geq (c^2 - 1)Y^p = X^p(X^p - 2) - X^q$$

Ou

$$8X^p(X^p - 2) \geq (9c^2 - 1)X^q$$

Premier cas :  $9c^2 - 1 \geq 2$

$$8X^p(X^p - 2) \geq 2X^q$$

Et

$$4X^{2p-q} \geq 1 + 8X^{p-q} > 1$$

Soit

$$4X^{2p-q+1} > X \geq 4$$

En conséquence :

$$q + 1 \geq 2p \geq q$$

Comme  $p$  et  $q$  n'ont pas la même parité, nous avons  $q + 1 = 2p$ . C'est un premier résultat important. Continuons : cela veut dire

$$4X^q = 4X^{2p-1} \geq 4X^p(X^p - 2) \geq X^q = X^{2p-1}$$

Ou

$$1 \geq X - 2X^{1-p}$$

Et

$$X - 1 \leq 2X^{1-p} \leq 1$$

Enfin, cela donne  $X = 2$ , or

$$Y^p - 1 = (Y^{\frac{p}{2}} - 1)(Y^{\frac{p}{2}} + 1) = 2^q$$

Si  $Y^{\frac{p}{2}} = 2v + 1$

$$4v(v + 1) = 2^q \geq 2^3$$

C'est possible si  $v = 1$ , d'où  $Y = 3$  and  $p = 2$  and  $q = 3$  or  $X = 2$ . Deuxième cas  $3c^2 < 1$

$$0 > c^2 - 1 = X^{2p} - 2X^p - c^2X^q > X^{2p} - 2X^p - \frac{99}{100}X^{2p} = \frac{1}{100}X^p(X^p - 200) > 0$$

$X^p$  peut être considérée supérieure a 100 car il y a peu de puissances pures  $X^p$  telles que l'équation de Catalan est vérifiée. Cela veut dire  $0 \leq c^2 - 1 \leq 0$ , soit  $c^2 = 1$  et donc

$$X^p - 2 = X^{q-p} \geq 2$$

$X^{p-1} - X^{q-p-1} = \frac{2}{X}$  est un entier, on en déduit  $X = 2$ . Et

$$2^{p-1} = 1 + 2^{q-p-1}$$

Un pair d'un côté, un impair de l'autre, c'est possible si  $q = p + 1$ , d'où  $2^{p-1} = 2$ , et  $p = 2$  donc  $Y = \pm 3$ . Voici une seconde preuve : Nous avons  $1 + \frac{1}{99} < X^\epsilon = \frac{X^{2p-q}}{c^2} < \frac{X}{c^2}$

$$-\epsilon \log(X) > (2p - q - \epsilon) \log(X) = 2 \log(c)$$

$$\epsilon \log(X) = (2p - q) \log(X) - 2 \log(c) = \log\left(\frac{X^{2p-q}}{c^2}\right) > 1$$

D'où  $X^\epsilon > 1$ . Maintenant, nous allons établir une inégalité que nous devons justifier :

$$2 > 2p - q + 1 = \frac{\log(c^2)}{\log(X)} + 1 > 0$$

Car

$$\frac{\log(c^2)}{\log(X)} > -1$$

ou

$$c^2 > X^{-1}$$

Soit

$$c^2 - 1 > X^{-1} - 1 > \frac{1 - X}{X}$$

Et

$$(c^2 - 1)X > 1 - X$$

ou encore

$$(c^2 - 1)X = X(X^{2p} - 2X^p - c^2X^q) > 1 - X$$

Et

$$X(X^{2p} - 2X^p - c^2X^q) > 1 - X$$

Mais aussi

$$X(X^p - 1)^2 - c^2X^{q+1} > 1$$

Avec  $X^\epsilon > 1$

$$X(X^p - 1)^2 - c^2 X^{q+1} = X(X^p - 1)^2 - X^{2p-\epsilon+1} = X(X^{2p} - X^{2p-\epsilon} - 2X^p + 1) > 1$$

Car nous avons vu que

$$X^p \geq 2X^{p-\epsilon}$$

Et

$$X^\epsilon > 1 + \frac{1}{99}$$

Et

$$X^p > 200$$

Mais aussi

$$\frac{99X^p}{100} = X^{p-\epsilon}$$
$$\frac{X^p}{100} > 2$$

Nous avons donc toujours

$$q \leq 2p \leq q + 1$$

Et comme  $p$  et  $q$  n'ont pas la même parité :

$$q + 1 \leq 2p \leq q + 1$$

Soit  $2p = q + 1$ . Mais

$$0 \geq (c^2 - 1)Y^p = X^{2p} - 2X^p - X^q = X^{2p} - 2X^p - X^{2p-1} = X^p(X^{p-1}(X-1) - 2) \geq 0$$

Et  $c^2 = 1$

$$X^p - X^{p-1} = 2$$
$$X^{p-1} - X^{p-2} = \frac{2}{X}$$

Cette expression est entière, nous en tirons  $X = 2$  et

$$2^{p-1} = 1 + 2^{p-2}$$

qui n'est possible que si  $p = 2$ , donc  $q = 2p - 1 = 3$ . Nous n'étions pas obligés de donner deux preuves, mais devant le caractère élémentaire de la démonstration, nous préférons l'étayer par des assertions bien prouvées ! Attaquons-nous au deuxième cas maintenant !

**Cas  $c \geq 1$**  Nous devons retenir ici

1)  $c^2 > 1$

2)  $c + c' < 2$

3)  $c' < 0$

Nous avons, dans le même esprit que précédemment :

$$2c^2 X^q - X^{2p} = \frac{72c^2 - 2c^2(c+c')^2 - (7c+c')^2}{(c+c')^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{72c^2 - 49c^2 - c'^2 - 14cc' - 2c^2(c^2 + c'^2 + 2cc')}{(c + c')^2} \\
&= \frac{c^2(23 - 2(c + c')^2) - c'(c + c') - 13cc'}{(c + c')^2} \\
&> \frac{15c^2 - c'(c + c') - 13cc'}{(c + c')^2} > 0
\end{aligned}$$

Que nous numérotons comme suit

$$2c^2 X^Q > X^{2p} \quad (5)$$

Mais aussi

$$\begin{aligned}
c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36c^2 - c^2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\
&= \frac{36c^2 - 50c^2 - 2c'^2 - 16cc' + (1 - c^2)(c + c')^2}{(c + c')^2} \\
&= \frac{-2(7c + c')(c + c') + (c + c')^2(1 - c^2)}{(c + c')^2} < 0
\end{aligned}$$

D'où l'encadrement suivant

$$\frac{1}{2}X^{2p} < c^2 X^q < X^{2p} < c^2 X^{2p} \quad (6)$$

Or

$$X^{2p-q} > c^2 > 1$$

Nous avons donc ici

$$2p \geq q + 1$$

Ici, il y a encore deux sous-cas à discuter :

I)  $c'^2 < 1$

II)  $c'^2 > 1$

**Cas  $c'^2 < 1$**  Nous pouvons écrire, avec  $u = q - p$

$$\frac{X^{2p} - 7X^p + 49}{X^q + X^p} < c'^2 = \frac{(X^p - 7)^2}{X^q + 1} < 1 = \frac{X^p}{X^{q-u}}$$

$u = q - p$ , Soit

$$X^{2p+q-u} - 14X^{p+q-u} + 49X^{q-u} \leq X^{p+q} + X^{2p}$$

$$X^{2p} - 14X^p + 49 \leq X^{p+u} + X^{2p-q+u}$$

$$X^{2p} - X^{p+u} - X^{2p-q+u} \leq 14X^p - 49$$

$$X^p - X^u - X^{p+u-q} \leq 14 - 49X^{-p}$$

$$X^p - X^u - 14 \leq X^{p+u-q} - 49X^{-p} = -48 + 49 - 49X^{-p} < -48 + 49 = 1$$

$$0 < X^p - X^{p-1} < X^p - X^{q-p} \leq 15$$

Il y a six possibilités :  $2k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$  avec l'équation suivante :  $X^{p-1} - X^{q-p-1} = \frac{2k}{X}$ . Cette expression est celle d'un entier, nous en tirons  $X = 2m \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$$(2m)^{p-1} = 2v + 1 + (2m)^{q-p-1}$$

ou  $m \in 2, 6, 10, 12, 14$  avec d'un côté un pair, de l'autre un impair, cela veut dire que  $q = p + 1$  qui conduit a

$$X^{p-1} = 2 \Rightarrow (X, p) = (2, 2)$$

et

$$(2m)^{p-2} = \frac{2v}{X} + (2m)^{q-p-2}$$

Si  $q \geq p + 2$ , alors  $X = 2v \in 2, 4$  qui est impossible impossible ! Donc  $X = 2$  et  $(p, q) = (2, 3)$  et  $Y = \pm 3$

**Cas  $c'^2 > 1$**  Dans ce cas

$$X^q = \frac{36 - (c + c')^2}{(c + c')^2} > \frac{36 - 4}{(c + c')^2} = \frac{32}{36} \left( \frac{36}{(c + c')^2} \right) = \frac{8}{9} Y^p > \frac{8}{9} X^p$$

Plus généralement, nous avons

$$9(c^2 - 1) = 9X^{2p} - 18X^p - 9c^2 X^q \leq (c^2 - 1)Y^p = X^{2p} - 2X^p - X^q$$

$$8X^{2p} - 16X^p = 8c^2 Y^p - 8 < (9c^2 - 1)X^q$$

$$X^q > \frac{8c^2 Y^p - 8}{9c^2 - 1} \quad (6)$$

Nous avons aussi

$$18X^{2p} - 36c^2 X^p - 9c^2 X^q = 18c^2 Y^p - 18 - 9c^2 X^q = 9c^2 X^q + 18(c^2 - 1) > 2X^{2p} - 4X^p - X^q = (2c^2 - 1)X^q + 2(c^2 - 1)$$

Ou

$$(9c^2 - 1)X^q < 16c^2 Y^p - 16$$

Mais aussi, ne l'oublions pas de (5) et (6)

$$X^{2p} < 2c^2 X^q < 2 \frac{n+1}{n} X^q$$

$\forall n > 0$  particulièrement pour  $n$  vérifiant

$$X^{q-2p} > \frac{(8c^2 Y^p - 8)n}{2X^q(n+1)(9c^2 - 1)} = \frac{1}{4}$$

Ou

$$\frac{1}{2} X^q(n+1)(9c^2 - 1) = (8c^2 Y^p - 8)n$$

Soit

$$1 < \frac{n+1}{n} = \frac{16c^2 Y^p - 16}{X^q(9c^2 - 1)}$$

$n$  existe toujours. Nous en déduisons

$$X^{q+2-2p} > \frac{X^2}{4} \geq 1$$

Ou

$$q + 1 \geq 2p \geq q + 1$$

Soit le résultat suivant que nous allons exploiter tout de suite de deux façons : la première est que nous avons

$$q + 1 = 2p = 4w$$

$$Y^p - 1 = (Y^{\frac{q+1}{4}} - 1)(Y^{\frac{q+1}{4}} + 1) = 2^q(2u + 1)^q$$

Si  $Y^{\frac{q+1}{4}} = 2v + 1$

$$4v(v + 1) = 2^q(2u + 1)^q \geq 2^3(2u + 1)^3$$

C'est possible si  $v = 1$ , donc  $Y = 3$  et  $p = 2, q = 3, X = 2$ . Deuxième possibilités : Posons

$$\frac{3}{4} < \alpha = \frac{3p}{2q} < 1$$

Soit  $\beta \geq 1, \beta' > 1, n > 4\beta + \beta'$  Ici :  $\alpha \leq 1$ , donc

$$4\alpha - 3 \leq (n - \beta')\alpha + \beta + \beta' - n \leq \beta\alpha \leq \beta$$

$$\Rightarrow (n - \beta' - 4)\alpha + \beta + \beta' - n + 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \geq \frac{n - 3 - \beta - \beta'}{n - \beta' - 4} = 1 - \frac{\beta - 1}{n - \beta' - 4}$$

Mais

$$n > 4\beta + \beta' \Rightarrow \frac{\beta - 1}{n - \beta' - 4} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \alpha \geq \frac{n - 3 - \beta - \beta'}{n - \beta' - 4} > \frac{3}{4}$$

$\forall n > 4\beta + \beta'$ , particulièrement à l'infini

$$1 \geq \alpha \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n - 3 - \beta - \beta'}{n - \beta' - 4} \right) = 1$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{3p}{2q} = 1$$

Et

$$2q = 3p = 4p - 2 \Rightarrow (p, q) = (2, 3)$$

D'ou  $X$  et  $Y$

### Généralisation à l'équation de Pillai

L'équation de Pillai est  $Y^p = X^q + a$  et se formule par : y a-t-il un nombre fini de couples de puissances pures séparées par un nombre entier  $a$ ? Nous allons

définir les nombres de Pilai : ce sont des nombres que nous notons comme suit  $b_a$  qui dépendent de  $a$  et qui se comportent tout à fait comme  $b$  pour  $a = 1$ . Ainsi, nous écrirons  $1_a + 7_a = 8_a$  et  $7_a - 1_a = 6_a$  : notre but est de suivre pas à pas l'approche adoptée pour l'équation de Catalan pour laquelle  $a = 1$ . Nous avons bien entendu  $1_a = a_1$  et  $0_a = 0$ . L'équation devient donc  $Y^p = X^q + 1_a$ . Posons donc avec  $p, q, X, Y$  tous des entiers strictement supérieurs à  $1_a$ .

$$c = \frac{X^p - 1_a}{Y^{\frac{p}{2}}}, \quad c' = \frac{7_a - 1_a X^p}{Y^{\frac{p}{2}}}$$

Et également

$$d = X^p - Y^{\frac{p}{2}}, \quad d' = X^p + Y^{\frac{p}{2}}$$

Nous avons donc

$$Y^{\frac{p}{2}} = X^p - d = d' - X^p = \frac{d' - d}{2}$$

Ou encore

$$X^p = \frac{d' + d}{2}$$

Et

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = X^p - 1_a + 7_a - X^p = 6_a \Rightarrow Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6_a}{c + c'} = \frac{d' - d}{2}$$

Soit

$$X^p = cY^{\frac{p}{2}} + 1_a = \frac{6_a c}{c + c'} + 1_a = \frac{7_a c + 1_a c'}{c + c'} = \frac{d' + d}{2}$$

Nous calculons une expression de  $d$  et  $d'$  en fonction de  $c$  et  $c'$ . Dans ce qui va suivre, nous allons formuler  $X$  et  $Y$  en fonction de  $c$  et  $c'$ .

$$d = \frac{7_a c + 1_a c' - 6_a}{c + c'}, \quad d' = \frac{7_a c + 1_a c' + 6_a}{c + c'}$$

Donc

$$X^q = Y^p - 1_a = \frac{36_a 1_a - 1_a (c + c')^2}{(c + c')^2}$$

Mais aussi

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6_a > 0$$

Ainsi  $c + c' > 0$ . Et aussi

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1_a > 0$$

Soit  $c > 0$ . Or  $X^p \geq 4_a$ , donc

$$cY^{\frac{p}{2}} = X^p - 1_a \geq 7_a - X^p = c'Y^{\frac{p}{2}}$$

Et  $c \geq c'$

$$7_a - X^p = 7_a - \frac{7_a c + 1_a c'}{c + c'} = \frac{6_a c'}{c + c'}$$

Si

$$c' > 0$$

Alors  $X^p < 7_a$  et nous aurions un nombre fini de solutions, nous supposons donc  $c' < 0$ , avec

$$(c + c')Y^{\frac{p}{2}} = 6_a > 0$$

$$(c + c')X^p = 7_a c + 1_a c' > 0$$

avec  $c + c' > 0$ . Et

$$Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6_a}{c + c'} \geq 3_a \Rightarrow c + c' \leq 2_a$$

**Résultats importants** Retenons que

$$1) c' < 0$$

$$2) 0 < c + c' < 2_a$$

$$3) 0 < 7_a c + 1_a c'$$

Et nous discuterons deux cas

$$I) c^2 < 1_a$$

$$II) c^2 \geq 1_a$$

**cas**  $c^2 < 1_a$   $c < 1_a$  signifie que  $(c - 1_a)Y^{\frac{p}{2}} = d - 1_a < 0$ , d'où nous tirons

$$(c' + 1)Y^{\frac{p}{2}} = 7_a - d > 0$$

Ou encore  $c' > -1$ . Voici maintenant un résultat en passant pour donner une idée des inégalités que nous allons établir

$$3_a X^p (c + c') - 4_a Y^{\frac{p}{2}} (c + c') = 3_a (7_a c + 1_a c') - 24_a 1_a = 21_a 1_a (c - 1_a) + 3_a 1_a (c' - 1_a) < 0$$

Prenons

$$\begin{aligned} 2X^q - X^{2p} &= \frac{72_a 1_a - 2_a (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{72_a 1_a - 51_a 1_a c^2 - 1_a (1_a + 2) c'^2 - 2_a (7_a + 1) c c'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{51_a 1_a (1 - c^2) - (2_a + 1_a 1_a) c' (c + c') - 13_a 1_a c c'}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Numérotons ce résultat

$$2X^q > X^{2p} \quad (7)$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36_a 1_a c^2 - 1_a c^2 (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{36_a 1_a c^2 - 1_a c^4 - 1_a c^2 c'^2 - 2_a c^3 c' - 49_a 1_a c^2 - 1_a 1_a c'^2 - 14_a 1_a c c'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-13_a 1_a c (c + c') - 1_a c' c (1_a + (c' + 2c)c) - 1_a c^4 - 1_a 1_a c'^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{c(-13_a 1_a c - 14_a 1_a c' - 2_a c^2 c' - 1_a c c'^2 - 1_a c^3) - 1_a 1_a c'^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{c(-13_a 1_a c - 13_a 1_a c' - 1_a c' c (c + c') - 1_a c^2 (c' + c)) - 1_a 1_a c' (c + c')}{(c + c')^2} \end{aligned}$$

$$< \frac{c(-12_a 1_a c - 12_a 1_a c') - 1_a 1_a (c + c')^2 - 1_a c(c + c')^2}{(c + c')^2} < 0$$

Soit

$$c^2 X^q < X^{2p} \quad (8)$$

Essayons encore

$$\begin{aligned} 100_a c^2 X^q - 99 X^{2p} &= \frac{3600_a 1_a c^2 - 100_a c^2 (c + c')^2 - 99(7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(60_a c - \sqrt{99}(7_a c + 1_a c'))(60_a c + \sqrt{99}(7_a c + 1_a c') - 100_a c^2 (c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &= \frac{(-9.64_a c - 9.94_a c')(129.64_a c + 9.94_a c') - 100_a c^2 (c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &< \frac{-1249.73_a 1_a c^2 - 98.8_a 1_a c'^2 - 1384.24_a 1_a c c'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-67.26_a c'(1_a c + 1.1_a c') - 1249.73_a 1_a c(c + c') - 24.81_a c'(1_a c' + 2.44_a c)}{(c + c')^2} \\ &= \frac{1_a c'(-127.91_a c - 98.8_a c') - 9.77_a c(127.91_a c + 98.8_a c') - 29.11_a 1_a c c'}{(c + c')^2} \\ &= \frac{-(127.91_a c + 98.8_a c')(9.77_a c + 1_a c') - 29.11_a 1_a c c'}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Parce que

$$\begin{aligned} 127.91_a c + 98.8_a c' &> -29.11_a c' > 0 \\ 9.77_a c + 1_a c' &> 1_a c > 0 \end{aligned}$$

Nous avons réussi à trouver l'encadrement suivant

$$\frac{c^2}{2} X^{2p} < c^2 X^q < X^{2p} \quad (9)$$

Mais aussi

$$c^2 X^q < \frac{99}{100_a} X^{2p} \quad (10)$$

Or

$$X^{2p-q-1} < 2X^{-1} \leq 1$$

D'où évidemment

$$2p - q - 1 \leq 0$$

Nous avançons deux preuves. La première : comme  $c^2 - 1_a < 0$  et  $Y^p \geq 9_a$ , soit

$$9_a(c^2 - 1_a) = 9_a X^p (X^p - 2_a) - 9_a 1_a c^2 X^q \geq (c^2 - 1_a) Y^p = X^p (X^p - 2_a) - X^q$$

Ou

$$(9_a - 1) X^p (X^p - 2_a) \geq (9_a 1_a c^2 - 1) X^q$$

Premier cas :  $9_a 1_a c^2 - 1 \geq 2$

$$(9_a - 1) X^p (X^p - 2_a) \geq 2X^q$$

Et

$$(9_a - 1)X^{2p-q} \geq 2 + 2_a(9_a - 1)X^{p-q} > 2$$

Soit

$$(9_a - 1)X^{2p-q+1} > 2X \geq 9_a$$

En conséquence : nous avons

$$X^{q+1-2p} = 1$$

C'est un premier résultat important. Continuons : cela veut dire

$$4X^q = 4X^{2p-1} \geq 4X^p(X^p - 2_a) \geq X^q = X^{2p-1}$$

Ou

$$1 \geq X - 2_aX^{1-p}$$

Et

$$X - 1 \leq 2_aX^{1-p} \leq 1$$

Enfin, cela donne un encadrement de  $X$  donc un nombre fini de solutions. Deuxième cas  $3_a1_a c^2 < 1$

$$0 > c^2 - 1_a = X^{2p} - 2_aX^p - c^2X^q > X^{2p} - 2_aX^p - \frac{99}{100_a}X^{2p} = \frac{100_a - 99}{100_a}X^p(X^p - \frac{200_a1_a}{100_a - 99}) > 0$$

$X^p$  peut être considérée supérieure au nombre fractionnel car il y a peu de puissances pures  $X^p$  telles que l'équation de Pillai est vérifiée et de toute façon il y aurait alors un nombre fini de solutions. Cela veut dire  $0 \leq c^2 - 1_a \leq 0$ , soit  $c^2 = 1_a$  et donc

$$X^p - 2_a = X^{q-p} \geq 2$$

$X^{p-1} - X^{q-p-1} = \frac{2+2_a}{X}$  est un entier, on en déduit qu'il y a un nombre fini de solutions. Nous avons donc toujours

$$X^{q+1} \leq X^{2p} \leq X^{q+1}$$

Soit

$$0 \geq (c^2 - 1_a)Y^p = X^{2p} - 2_aX^p - X^q = X^{2p} - 2_aX^p - X^{2p-1} = X^p(X^{p-1}(X-1_a) - 2_a) \geq 0$$

Et  $c^2 = 1_a$

$$X^p - X^{p-1} = 2_a$$

Et il y a un nombre fini de solutions ! Attaquons-nous au deuxième cas maintenant !

**Cas**  $c^2 \geq 1_a$  Nous devons retenir ici

- 1)  $c^2 > 1_a$
- 2)  $c + c' < 2_a$
- 3)  $c' < 0$

Nous avons, dans le même esprit que précédemment :

$$c^2X^q - X^{2p} = \frac{72_a1_a c^2 - 2_a c^2(c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{72_a 1_a c^2 - 49_a 1_a c^2 - 1_a 1_a c'^2 - 14_a 1_a c c' - 2_a c^2 (c^2 + c'^2 + 2c c')}{(c + c')^2} \\
&= \frac{c^2 (23_a 1_a - 2_a (c + c')^2) - 1_a 1_a c' (c + c') - 13_a 1_a c c'}{(c + c')^2} \\
&> \frac{15_a 1_a c^2 - 1_a 1_a c' (c + c') - 13_a 1_a c c'}{(c + c')^2} > 0
\end{aligned}$$

Que nous numérotions comme suit

$$c^2 X^q > X^{2p} \quad (11)$$

Mais aussi

$$\begin{aligned}
c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36_a 1_a c^2 - 1_a c^2 (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\
&< \frac{36_a 1_a c^2 - 50_a 1_a c^2 - 2_a 1_a c'^2 - 16_a 1_a c c' + (1_a 1_a - 1_a c^2)(c + c')^2}{(c + c')^2} \\
&= \frac{-21_a (7_a c + 1_a c')(c + c') + (c + c')^2 (1_a 1_a - 1_a c^2)}{(c + c')^2} < 0
\end{aligned}$$

D'où l'encadrement suivant

$$\frac{1}{2} X^{2p} < c^2 X^q < X^{2p} < c^2 X^{2p} \quad (12)$$

Or

$$X^{2p-q} > c^2 > 1$$

Nous avons donc ici

$$2p \geq q + 1$$

Ici, il y a encore deux sous-cas à discuter :

$$I) c'^2 < 1_a$$

$$II) c'^2 > 1_a$$

**Cas**  $c'^2 < 1_a$  Nous pouvons écrire, avec  $u = q - p$

$$\frac{X^{2p} - 7_a X^p + 49_a}{X^q + X^p} < c'^2 = \frac{(X^p - 7_a)^2}{X^q + 1_a} < 1_a = \frac{1_a X^p}{X^{q-u}}$$

$u = q - p$ , Soit

$$X^{2p+q-u} - 14_a X^{p+q-u} + 49_a X^{q-u} \leq 1_a X^{p+q} + 1_a X^{2p}$$

$$X^{2p} - 14_a X^p + 49_a \leq 1_a X^{p+u} + 1_a X^{2p-q+u}$$

$$X^{2p} - 1_a X^{p+u} - 1_a X^{2p-q+u} \leq 14_a X^p - 49_a$$

$$X^p - 1_a X^u - 1_a X^{p+u-q} \leq 14_a - 49_a X^{-p}$$

$$X^p - 1_a X^u - 14_a \leq 1_a X^{p+u-q} - 49_a X^{-p} = -48_a + 49_a - 49_a X^{-p} < -48_a + 49_a = 1_a$$

$$0 < X^p - 1_a X^{p-1} < X^p - 1_a X^{q-p} \leq 15_a$$

Et il y a un nombre fini de solutions !

**Cas**  $c'^2 > 1_a$  Dans ce cas

$$X^q = \frac{36_a 1_a - 1_a (c + c')^2}{(c + c')^2} > \frac{36_a 1_a - 4_a}{(c + c')^2} = \frac{36_a 1_a - 4_a}{36_a} \left( \frac{36_a}{(c + c')^2} \right) = \frac{36_a 1_a - 4_a}{36_a} Y^p > \frac{36_a 1_a - 4_a}{36_a} X^p$$

Plus généralement, nous avons

$$\begin{aligned} 9(c^2 - 1_a) &= 9X^{2p} - 18_a X^p - 9c^2 X^q \leq (c^2 - 1_a) Y^p = X^{2p} - 2_a X^p - X^q \\ 8X^{2p} - 16_a X^p &= 8c^2 Y^p - 8_a < (9c^2 - 1_a) X^q \\ X^q &> \frac{8c^2 Y^p - 8_a}{9c^2 - 1_a} \quad (6) \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} 18X^{2p} - 36_a c^2 X^p - 9c^2 X^q &= 18c^2 Y^p - 18_a - 9c^2 X^q = 9c^2 X^q + 18(c^2 - 1_a) \\ &> 2X^{2p} - 4_a X^p - X^q = (2c^2 - 1_a) X^q + 2(c^2 - 1_a) \end{aligned}$$

Ou

$$(9c^2 - 1_a) X^q < 16c^2 Y^p - 16_a$$

Mais aussi, ne l'oublions pas de (11) et (12)

$$X^{2p} < 2c^2 X^q < 2 \frac{n+1}{n} X^q$$

$\forall n > 0$  particulièrement pour  $n$  vérifiant

$$X^{q-2p} > \frac{(8c^2 Y^p - 8_a) n}{2X^q (n+1)(9c^2 - 1_a)} = \frac{1}{4}$$

Où

$$\frac{1}{2} X^q (n+1)(9c^2 - 1_a) = (8c^2 Y^p - 8_a) n$$

Soit

$$1 < \frac{n+1}{n} = \frac{16c^2 Y^p - 16_a}{X^q (9c^2 - 1_a)}$$

$n$  existe toujours. Nous en déduisons

$$X^{q+2-2p} > \frac{X^2}{4} \geq 1$$

Ou

$$q+1 \geq 2p \geq q+1$$

Et ceci nous amène à un nombre fini de solutions! Car nous avons le résultat suivant que nous allons exploiter tout de suite : c'est que nous avons

$$q+1 = 2p = 4w$$

$$Y^p - 1_a = (Y^{\frac{q+1}{4}} - 1_a)(Y^{\frac{q+1}{4}} + 1_a) = 2^q (2u+1)^q$$

Dans tous les cas, l'équation de Pilai, à l'instar de celle de Catalan qui n'en a qu'une seule, a un nombre fini de solutions!

### Conclusion

L'équation de Catalan est ainsi résolue, et une solution aussi originale qu'élémentaire est possible! Nous l'avons d'ailleurs généralisée à l'équation de Pilai et prouvé qu'elle a un nombre fini de solutions! Il semble que de nombreux problèmes de théorie des nombres peuvent d'ailleurs être ainsi résolus! Nous espérons avoir montré la voie!

## Références

- [1] P. MIHAILESCU A class number free criterion for catalan's conjecture, *Journal of Number theory* , **99** (2003).