

**Revue bibliographique sur les écoulements de
Poiseuille-Rayleigh-Bénard : écoulements de convection
mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées
par le bas**

**Bibliographical review on the
Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed
convection flows in horizontal rectangular ducts
heated from below**

Xavier NICOLAS

Laboratoire d'Etude des Transferts d'Energie et de Matière,
Université de Marne la Vallée, Bâtiment Lavoisier, 5 Boulevard Descartes,
77462 MARNE-LA-VALLÉE Cedex 2, France

Tél. : 01 60 95 73 14 – Fax : 01 60 95 72 94 – E-mail : nicolas@univ-mlv.fr

(Maître de conférences)

Résumé

Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas

Nous présentons une revue bibliographique exhaustive des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) : les écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées uniformément par le bas. Cette revue couvre la période 1920-2001 et comporte 154 références. La gamme des paramètres concernés est : $0 < Pr \leq 1000$, $0 \leq Re \leq 1000$ et $0 \leq Ra \leq 10^6$. Les enjeux de ces écoulements dans le monde industriel sont présentés pour l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (CVD) et pour le refroidissement des composants électroniques. Après avoir fait une synthèse des études de stabilité linéaire temporelle ou spatiale réalisées dans la zone d'entrée thermique et dans la zone thermoconvective pleinement développée, on s'intéresse aux analyses de stabilité spatio-temporelle, linéaires et faiblement non-linéaires, qui prennent en compte les notions d'instabilités convectives et absolues et qui sont plus appropriées pour traduire la dynamique des écoulements de PRB. Tous les résultats de stabilité sont systématiquement confrontés aux résultats expérimentaux et numériques. On fait une synthèse des formules de corrélation théoriques et expérimentales donnant les variations, en fonction de Ra , Re , Pr et $B=l/h$, du nombre de Nusselt, de la longueur d'établissement, de la longueur d'onde, de la fréquence et de la vitesse des rouleaux thermoconvectifs transversaux (R_{\perp}) et/ou longitudinaux ($R_{//}$). L'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie sur le développement spatial et temporel des R_{\perp} dans les simulations numériques et dans les expériences est aussi analysée. On fait

la synthèse de la stabilité des structures thermoconvectives complexes (superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$, structures périodiques et apériodiques, rouleaux sinueux et obliques) mises en évidence très récemment. On termine par un bilan des aspects encore mal connus ou mal compris des écoulements de PRB et on propose de nouvelles perspectives de recherche.

Mots clés : Poiseuille-Rayleigh-Bénard / conduites rectangulaires / convection mixte / instabilités thermoconvectives / instabilités convective et absolue / entrée thermique / longueur d'établissement / transferts thermiques / conditions aux limites / CVD / Refroidissement électronique

Abstract

Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below

An exhaustive bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) flows, the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts uniformly heated from below, is presented. This review covers the period 1920-2001 and counts 154 references. The concerned parameter range is $0 < Pr \leq 1000$, $0 \leq Re \leq 1000$ and $0 \leq Ra \leq 10^6$. The interest of these flows in the industrial world is presented for the chemical vapor deposition studies (CVD) and for the cooling of the electronic equipments. After having done a synthesis of the temporal or spatial linear stability studies in the thermal

entrance zone and in the fully-developed thermoconvective zone, we consider the linear or weakly non-linear spatio-temporal stability analyses, which take into account the concepts of convective and absolute instabilities and which are more appropriate to represent the dynamics of the PRB flows. All the stability results are systematically compared with the experimental and numerical results. The theoretical or experimental correlation formulae giving the variations of the Nusselt number, of the wave length, of the frequency and of the velocity of the transversal (R_{\perp}) and/or longitudinal rolls ($R_{//}$), as a function of Re , Ra , Pr and $B=l/h$, are collected. The influence of the inlet and of the outlet boundary conditions on the space and time development of the R_{\perp} in the experiments and in the numerical simulations is also analysed. A synthesis of the very recently discovered complex thermoconvective patterns (superposition of R_{\perp} and $R_{//}$, periodic and aperiodic patterns, wavy or oblique rolls) is presented. To end, the badly known or badly understood aspects of the PRB flows are summed up and subjects for future investigations are proposed.

Key words : Poiseuille-Rayleigh-Bénard / rectangular duct / mixed convection / thermoconvective instabilities / convective and absolute instabilities / thermal entrance / growth length / heat transfer / boundary conditions / CVD / electronic cooling

Table des matières

Nomenclature

1. Introduction

1.1 Présentation générale des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard

1.2 Objectifs de l'étude et plan de l'exposé

2 Les simulations numériques directes dans les applications

industrielles (1983-2001)

2.1 L'étude des dépôts de vapeurs chimiques (la CVD)

2.1.1 Présentation générale de la CVD

2.1.2 Quelles structures thermoconvectives privilégier en CVD ?

2.1.3 Quels modèles numériques choisir en CVD ?

2.2 Le refroidissement des composants électroniques

3 Les expériences pionnières (1920-1951)

4 Les analyses de stabilité linéaire temporelle ou spatiale et les vérifications expérimentales (1962-1984, 2000)

4.1 Généralités

4.2 Cas des écoulements thermoconvectifs pleinement établis

4.2.1 Les $R_{//}$ de première et de deuxième espèce

4.2.2 Seuil d'apparition des R_{\perp} en conduite d'extension latérale infinie et vérification expérimentale de l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re

4.2.3 Paramètres critiques Ra_{\perp}^* , $Ra_{//}^*$ et Re^* en conduite d'extension latérale finie

4.2.4 Critique des résultats obtenus par analyse de stabilité linéaire temporelle

4.3 Cas des écoulements dans la zone d'entrée thermique

- 5 Stabilités convective et absolue des rouleaux transversaux et des rouleaux longitudinaux (1989-2001)**
 - 5.1 A propos des instabilités convectives et absolues**
 - 5.2 A propos des équations d'amplitude et de l'équation de Ginzburg-Landau**
 - 5.3 Instabilités convectives et absolues des R_{\perp} et des $R_{//}$**
 - 5.4 Influence d'un bruit blanc sur des écoulements de R_{\perp} convectivement instables**

- 6 Transferts thermiques et longueurs d'établissement des structures thermoconvectives (1966-2001)**
 - 6.1 Transferts thermiques dans la zone d'entrée**
 - 6.2 Transferts thermiques dans les écoulements de PRB pleinement établis**
 - 6.3 Longueurs d'apparition et d'établissement des $R_{//}$ et des R_{\perp}**
 - 6.3.1 Cas des $R_{//}$
 - 6.3.2 Cas des R_{\perp}

- 7 Evolution spatiale et temporelle des rouleaux transversaux (1989-2001)**
 - 7.1 Choix et influence des conditions aux limites de sortie dans les simulations numériques directes**
 - 7.2 Influence des conditions aux limites d'entrée et blocage des R_{\perp} à petit débit**
 - 7.3 Fréquence f des R_{\perp}**
 - 7.4 Longueur d'onde λ des R_{\perp}**
 - 7.5 Rapport V_r/U^0 de la vitesse des R_{\perp} sur la vitesse moyenne de l'écoulement**

8 Analyse et stabilité des structures thermoconvectives complexes (1991-2001)

8.1 Analyse comparée des diagrammes de stabilité établis expérimentalement

8.1.1 Présentation générale de ces diagrammes et des travaux récents de T. F. Lin et al.

8.1.2 Fusions et divisions des $R_{//}$; effets d'hystérésis ; superposition des R_{\perp} et des $R_{//}$

8.2 Analyses théoriques utilisant deux équations d'amplitude couplées

8.3 Transitions des $R_{//}$ vers des structures périodiques et chaotiques

8.3.1 Transitions des $R_{//}$ vers des structures périodiques en temps et en espace

8.3.2 Effets non-Boussinesq et route vers le chaos

9 Conclusion

Remerciements

Références

Annexe A : Formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle

A.1 Cas des écoulements de PRB entre deux plaques infinies

A.1.1 $k_x=0, k_y \neq 0$: formation de $R_{//}$

A.1.2 $k_x \neq 0, k_y=0$: formation de R_{\perp}

A.1.3 $k_x \neq 0, k_y \neq 0$: formation de structures quelconques et transformation de Squire

A.2 Cas des écoulements de PRB en conduites d'extension latérale finie

A.2.1 $k_x=0$: formation de $R_{//}$

A.2.2 $k_x \neq 0$: formation de structures 3D

Résumé en anglais

Nomenclature

Lettres latines

- A allongement axial de la conduite, L/h .
- $A(x, t)$ modulations spatiale et temporelle de l'amplitude des perturbations dont l'évolution est donnée par la théorie des équations d'amplitude.
- B allongement transversal de la conduite, l/h .
- c_0, c_1, c_2 coefficients de l'équation de Ginzburg-Landau.
- c_x, c_y coefficients d'amplification spatiale des perturbations dans les directions longitudinales et transversales ($c_x, c_y \in \mathbb{R}$).
- D_h diamètre hydraulique, (m).
- f fréquence des R_{\perp} , (s^{-1}).
- f variable scalaire ou vectorielle remplaçant un ensemble de variables vérifiant la même relation mathématique.
- g accélération de la pesanteur, ($m \cdot s^{-2}$).
- h hauteur de la conduite, (m).
- i** vecteur unitaire horizontal dirigé dans le sens de l'écoulement moyen. **j** vecteur unitaire horizontal tel que $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$. **k** vecteur unitaire vertical ascendant.
- k_x, k_y nombres d'ondes adimensionnels des perturbations dans les directions longitudinales et transversales ($k_x, k_y \in \mathbb{R}$).
- l largeur de la conduite, (m).
- l_e longueur d'établissement adimensionnelle des R_{\perp} définie par $W_{\max}(l_e) = W_s/2$.
- L longueur de la conduite, (m).
- L_e longueur d'établissement réduite, $\sqrt{\mu} l_e / \xi_0$
- p pression thermodynamique.
- P pression motrice, $p + \rho g z$.

q	densité surfacique de flux de chaleur, ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$).
$R_{//}$	rouleaux longitudinaux.
R_{\perp}	rouleaux transversaux.
$R_{\perp-//}$	superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$.
r_T	température réduite, $(T_c - T_f)/T_f$.
t	temps adimensionnel.
T	température adimensionnelle du fluide.
T_c, T_f	températures de la paroi chaude inférieure et de la paroi froide supérieure, (K).
ΔT	différence de température entre les parois chaude et froide, $T_c - T_f$ (K).
U, V, W	composantes dimensionnelles ou adimensionnelles de la vitesse dans les directions axiale (x), transversale (y) et verticale (z).
U°	vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite, ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).
\mathbf{V}	vecteur vitesse dimensionnelle ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) ou adimensionnelle, (U, V, W).
v_g	vitesse de groupe dans l'équation de Ginzburg-Landau ; $v_g = (\partial\sigma_i / \partial k_x)^*$.
V_g	vitesse de groupe réduite, $v_g \tau_0 / (\mu \xi_0^2 (1 + c_1^2))^{1/2}$.
V_r	vitesse des R_{\perp} .
W_{\max}	enveloppe stationnaire de la composante de vitesse verticale maximale le long de l'axe de la conduite (fonction de x), ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).
W_s	amplitude de saturation de W : valeur de $W_{\max}(x)$ pour $x \in [x_e, x_s]$, ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).
x_e, x_s	coordonnées axiales indiquant respectivement la fin de la zone d'entrée et le début de la zone perturbée par les conditions aux limites à la sortie de la conduite.
x, y, z	coordonnées axiale, transversale et verticale (adimensionnelles en général).

Paramètres adimensionnels

Nu	selon le contexte, nombre de Nusselt local ou moyen en espace et/ou en temps calculé sur les parois horizontales de la conduite.
Gr	nombre de Grashof, $Ra/Pr=g\beta(T_c-T_f)h^3/\nu^2$.
Pe	nombre de Péclet, $RePr=U^\circ h/\alpha$.
Pr	nombre de Prandtl, ν/α .
Ra	nombre de Rayleigh, $g\beta(T_c-T_f)h^3/(\nu\alpha)$.
Ra'	nombre de Rayleigh modifié basé sur la densité de flux de chaleur q imposée sur la paroi chauffée, $g\beta qh^4/(\kappa\nu\alpha)$.
Ra*	$\min(Ra_\perp^*, Ra_{//}^*)$.
Ra* ₀	nombre de Rayleigh critique à $Re=0$; $Ra^*_0=1708$ quand $A\rightarrow\infty$ et $B\rightarrow\infty$.
Ra _⊥ *	nombre de Rayleigh critique déterminé par analyse de stabilité linéaire temporelle entre écoulements de Poiseuille et R_\perp convectivement instables (Ra_\perp^* croît avec Re).
Ra _{//} *	comme Ra_\perp^* mais pour les $R_{//}$ ($Ra_{//}^*$ est indépendant de Re).
Ra _{//} * ^{II}	nombre de Rayleigh critique déterminé par analyse de stabilité linéaire temporelle entre les écoulements de $R_{//}$ stationnaires et périodiques.
Ra _⊥ ^{conv}	nombre de Rayleigh critique déterminé par analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle entre les régions d'instabilité convective et absolue pour les R_\perp .
Ra _{//} ^{conv}	comme Ra_\perp^{conv} mais pour les $R_{//}$.
Re	nombre de Reynolds, $U^\circ h/\nu$.
Re'	nombre de Reynolds, $U^{\text{max}}h/\nu$.
Re*	nombre de Reynolds critique, déterminé par analyse de stabilité linéaire temporelle, marquant la transition entre écoulement de Poiseuille, R_\perp et $R_{//}$ (pour $Ra=Ra_\perp^*=Ra_{//}^*$).

$Re^*_{\perp//}$ nombre de Reynolds critique, déterminé expérimentalement ou par simulations numériques, marquant la transition entre R_{\perp} et $R_{//}$ dans le domaine non-linéaire (pour $Ra > Ra_{\perp}^*$ et $Ra > Ra_{//}^*$).

Re^{**} nombre de Reynolds critique indiquant le seuil de blocage des R_{\perp} , pour les petits débits : marque la transition entre les R_{\perp} stationnaires et les R_{\perp} en déplacement.

Lettres grecques

α diffusivité thermique, ($m^2 \cdot s^{-1}$).

β coefficient de dilatation thermique, (K^{-1}).

γ coefficient de l'équation de Ginzburg-Landau.

ε $= (Ra - 1708) / 1708$, écart relatif au nombre de Rayleigh critique $Ra^*_0 = 1708$.

ε_{\perp}^* $= (Ra_{\perp}^* - 1708) / 1708$.

$\varepsilon_{//}^*$ $= (Ra_{//}^* - 1708) / 1708$.

$\varepsilon_{\perp}^{conv}$ $= (Ra_{\perp}^{conv} - 1708) / 1708$.

$\varepsilon_{//}^{conv}$ $= (Ra_{//}^{conv} - 1708) / 1708$.

κ conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$).

λ longueur d'onde adimensionnelle des R_{\perp} (h est la longueur de référence).

μ $= (Ra - Ra_{\perp}^*) / Ra_{\perp}^*$, écart relatif au nombre de Rayleigh critique $Ra_{\perp}^*(Re)$.

ν viscosité cinématique, ($m^2 \cdot s^{-1}$).

ξ_0^2 coefficient de l'équation de Ginzburg-Landau.

ρ masse volumique, ($kg \cdot m^{-3}$).

σ taux de croissance temporelle adimensionnel des perturbations, $\sigma_r + i\sigma_i$.

σ_i pulsation temporelle adimensionnelle des perturbations.

τ_0 coefficient de l'équation de Ginzburg-Landau.

ψ fonction de courant, telle que $U = -\partial\psi/\partial z$ et $W = \partial\psi/\partial x$.

Ω vorticité, $\partial U/\partial z - \partial W/\partial x = -\nabla^2 \psi$.

Abréviations et symboles

CVD Chemical Vapor Deposition (Dépôts de Vapeurs Chimiques).

IBC Inlet Boundary Condition (Condition aux Limites d'Entrée).

LDA Laser Doppler Anemometry (Anémométrie Laser Doppler).

OBC Open or Outlet Boundary Condition (Condition aux Limites Ouvertes ou de Sortie).

PBC Periodic Boundary Condition (Condition aux Limites Périodique).

PRB Poiseuille-Rayleigh-Bénard.

∇ opérateur nabla, vecteur $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ en coordonnées cartésiennes.

Exposants et symboles supérieurs

° état de référence ou valeur moyenne.

conv désigne des paramètres ou des grandeurs physiques à la transition entre les régions d'instabilités convective et absolue.

max, min désignent respectivement un maximum et un minimum.

* désigne des paramètres ou des grandeurs physiques à la transition entre les régions linéairement stable et convectivement instable. De manière générale, désigne une valeur critique.

— état de base des études de stabilité linéaire.

' perturbation infinitésimale.

^ amplitude des perturbations lorsqu'elles sont écrites sous la forme de modes normaux.

Indices et symboles inférieurs

i, r partie imaginaire et partie réelle d'un nombre complexe.

$\perp, //$ désignent des grandeurs se rapportant respectivement aux R_{\perp} et aux $R_{//}$.

1. Introduction

1.1 Présentation générale des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard

Les écoulements de Poiseuille-Bénard ou de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) sont des écoulements laminaires de convection mixte en conduite rectangulaire horizontale chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut. Ils résultent de la superposition de deux sources convectives : un gradient de pression horizontal entraîne le fluide dans la conduite et un gradient de température vertical est à l'origine de la formation de structures thermoconvectives. Lorsque le fluide est isotherme ou que le transfert de chaleur au sein du fluide est purement conductif, c'est à dire lorsque le nombre de Rayleigh (Ra) est inférieur à une valeur critique Ra^* , on a affaire à un écoulement de Poiseuille (cf. *figure 1*). Lorsque le nombre de Rayleigh est suffisamment élevé ($Ra > Ra^*$), plusieurs types d'écoulements thermoconvectifs peuvent apparaître : si le nombre de Reynolds (Re) est nul, on a affaire à un écoulement de Rayleigh-Bénard ; si Re est non nul et inférieur à une valeur critique Re^* , il apparaît des rouleaux thermoconvectifs d'axes transversaux à l'axe de la conduite et formant une chaîne de cylindres contrarotatifs emportés par l'écoulement moyen. Une représentation schématique de ces rouleaux, ainsi que des photos obtenues en faisant des plans de lumière dans des écoulements d'air avec de la fumée sont présentées *figure 2*. Ces structures sont quasi bidimensionnelles : la composante transversale de la vitesse est nulle, excepté près des bords latéraux. Dorénavant, dans tout ce document, on appellera cette configuration thermoconvective les "**rouleaux transversaux**" et on les notera R_{\perp} . L'autre configuration qui peut apparaître quand $Ra > Ra^*$ et $Re > Re^*$ est constituée de rouleaux thermoconvectifs hélicoïdaux, contrarotatifs, stationnaires et d'axes parallèles à celui de la conduite. Ils sont présentés *figure 3*. Ici, les trois composantes de vitesse sont non nulles. Dans toute la suite, on appellera cette

configuration les **"rouleaux longitudinaux"** et on les notera $R_{//}$. On gardera en mémoire qu'il ne sera question dans cet exposé que de problèmes de convection mixte à faibles nombres de Reynolds, où l'instabilité est d'origine thermique. Nous ne traiterons pas des écoulements à grands nombres de Reynolds ($Re > 7000$) pour lesquels les instabilités d'origine visqueuse donnent naissance à des ondes de Tollmien-Schlichting.

De nombreuses études ont analysé la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de base présenté à la *figure 1* vis à vis des R_{\perp} et des $R_{//}$. **Dans le cas d'un écoulement entre deux plaques infinies** (cf. *figure 4*), c'est à dire dans le cas où l'allongement transversal $B=l/h \rightarrow \infty$, ces études montrent que les $R_{//}$ sont toujours plus instables que les R_{\perp} : le nombre de Rayleigh critique $Ra_{//}^*$ pour l'apparition des $R_{//}$ est toujours inférieur à Ra_{\perp}^* , le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des R_{\perp} . A nombre de Reynolds nul, pour la convection naturelle, il n'y a pas de direction privilégiée dans l'écoulement. On ne peut pas différencier les $R_{//}$ des R_{\perp} . Le nombre de Rayleigh critique est donc 1708 dans les deux cas. Par contre, pour $Re \neq 0$, $Ra_{//}^*$ est indépendant de Re alors que Ra_{\perp}^* est une fonction croissante de Re .

Dans le cas des conduites d'extension latérale finie (cf. *figure 5*), le confinement a deux effets. Il stabilise l'écoulement de base puisque, quand B décroît, $Ra^* = \min(Ra_{\perp}^*, Ra_{//}^*)$ croît. De plus, lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à la **valeur critique Re^*** , les parois verticales favorisent l'apparition des R_{\perp} . Par contre, quand $Re > Re^*$, l'écoulement moyen favorise les $R_{//}$. On notera que, non seulement, Ra_{\perp}^* est une fonction de Re et de B , mais qu'il est aussi fonction du nombre de Prandtl Pr : quand Pr croît, Ra_{\perp}^* croît (cf. *figure 5*). Or, comme $Ra_{//}^*$ ne varie pas quand Pr varie, Re^* diminue si Pr augmente. Re^* est donc une fonction de Pr et de B .

La description des écoulements de PRB qui vient d'être faite est issue d'analyses de stabilité linéaire temporelle datant du début des années 80. Cette

description est qualitativement correcte mais elle est très simplifiée. Nous verrons que les analyses de stabilité linéaire spatio-temporelle (datant du début des années 90), qui font intervenir les notions d'instabilités convective et absolue, sont plus appropriées pour ce type d'écoulement. D'autre part, des études récentes, expérimentales, théoriques et numériques, menées dans des domaines non-linéaires, ont mis en évidence d'autres structures thermoconvectives, tridimensionnelles, instationnaires et de formes plus complexes que les R_{\perp} et les $R_{//}$. L'objectif principal de cet article est de faire une synthèse de ces études de stabilité et de la dynamique connue de ces structures complexes.

1.2 Objectifs de l'étude et plan de l'exposé

Kelly (1977, 1994) [1, 2] a proposé une étude bibliographique des travaux qui, jusqu'en 1993, ont étudié la naissance, le développement et la stabilité de la convection thermique dans des écoulements cisailés. Il présente les concepts de base et les résultats principaux, mais son propos n'est pas de faire une revue exhaustive. L'analyse porte à la fois sur les écoulements dans des canaux horizontaux ou inclinés, droits ou courbés, chauffés uniformément ou non, dont l'écoulement de base peut avoir un profil de Poiseuille ou de Couette. Les écoulements de PRB sont donc un cas particulier dans cette étude. En ce qui les concerne, Kelly présente les études de stabilité linéaire, convective et absolue, de l'écoulement de base vis à vis des R_{\perp} et des $R_{//}$, en donnant la formulation mathématique des différents problèmes de stabilité. Les travaux expérimentaux qui étayaient les résultats de stabilité sont cités, mais très peu de données quantitatives relatives à la description ou à la stabilité des différentes structures thermoconvectives sont fournies. L'objectif de cet article est de compléter la revue de Kelly (1977, 1994) [1, 2] (nous analysons plus de 90 nouvelles références sur le sujet, dont 50 postérieures à 1993) afin de fournir une revue bibliographique aussi exhaustive

que possible et une synthèse des données qualitatives et quantitatives décrivant les écoulements de PRB.

Le plan de l'exposé comprend, en plus de cette introduction (§1.), sept grandes parties (§2 à §8) et une annexe. Dans le §2, nous présentons les applications industrielles dont les enjeux nécessitent une connaissance approfondie de la structure et de la stabilité des écoulements de PRB. En l'occurrence, il s'agit des études sur les dépôts de vapeurs chimiques (chemical vapor deposition ou CVD en anglais) ou sur le refroidissement des composants électroniques. Aux §3 et §4, nous présentons rapidement les résultats des travaux sur les écoulements de PRB réalisés avant le début des années 80. Au §3, nous rappelons les expériences de visualisation d'avant 1940, qui ont permis d'avoir une compréhension qualitative du comportement des R_{\perp} et des $R_{//}$, et dont Sir David Brunt [3] a rédigé une synthèse en 1951. Au §4, nous rappelons les principaux résultats des analyses de stabilité linéaire, temporelle *ou* spatiale, des écoulements de PRB dans la zone d'entrée thermique et dans la zone pleinement développée. Nous rappelons également les expériences qui ont permis de vérifier les résultats de ces modèles théoriques. Le §5 est consacré aux notions fondamentales d'instabilités convectives et absolues dans le cas des R_{\perp} et des $R_{//}$. Nous présentons les analyses de stabilité spatiale *et* temporelle qui, ces dix dernières années, ont permis d'avoir une compréhension plus juste de la dynamique linéaire et faiblement non-linéaire de ces structures thermoconvectives. Au §6, nous nous intéressons au comportement global des écoulements de PRB : nous faisons une synthèse des résultats obtenus sur la variation des nombres de Nusselt pariétaux dans la zone d'entrée thermique et dans la zone thermoconvective pleinement développée, ainsi que sur la variation des longueurs d'établissement des R_{\perp} et des $R_{//}$ en fonction de Ra et de Re . Le §7 est consacré à l'analyse fine des R_{\perp} : analyse de leur structure spatiale (longueur d'onde) et de leur comportement temporel (fréquence et vitesse de déplacement). Nous

nous intéressons en particulier à l'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie sur les R_{\perp} dans les simulations numériques directes et dans les expériences. Dans la dernière partie (§8), nous analysons les études très récentes, expérimentales, numériques et théoriques, qui ont mis en évidence des structures thermoconvectives complexes dans les écoulements de PRB : superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$, structures intermittentes périodiques ou apériodiques, rouleaux sinueux ou obliques, etc. Malgré la grande disparité des résultats obtenus, nous essayons de faire une synthèse de la stabilité de ces différentes structures. En guise de conclusion (§9), nous faisons un bilan des aspects encore mal connus ou mal compris dans les écoulements de PRB et nous proposons des pistes pour de nouvelles perspectives de recherche. L'annexe A présente la formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de Poiseuille purement conducteur pour des écoulements de PRB entre deux plaques infinies et dans des conduites d'extension latérale finie.

Dans la suite, on retiendra que les dates proposées pour chacune des parties sont des repères approximatifs visant à situer à peu près les périodes concernées.

2 Les simulations numériques directes dans les applications industrielles (1983-2001)

Ces vingt dernières années, de nombreux travaux motivés par une application industrielle se sont intéressés à la configuration des écoulements de PRB. Ces applications concernent soit l'étude des dépôts de vapeurs chimiques (Chemical Vapor Deposition: CVD) (§2.1), soit le refroidissement des composants électroniques dans les circuits imprimés (§2.2). Notre objectif n'est pas de faire ici une revue exhaustive de ces travaux qui, bien souvent, par leur complexité, nous éloigneraient trop de la configuration académique initiale. Nous nous concentrerons sur les modélisations

numériques simplifiées de ces problèmes qui nous permettront de mettre en exergue les enjeux industriels et les principaux résultats pratiques trouvés, ainsi que les méthodologies numériques utilisées en ce qui concerne la CVD. Les résultats détaillés concernant par exemple les transferts thermiques, les longueurs d'établissement des régimes convectifs ou la stabilité des différentes structures thermoconvectives seront analysés dans les parties suivantes (§5 à 8). En ce qui concerne la CVD, pour avoir une revue complète, on se référera à Jensen et al. (1991) [4] et Ingle et Mountziaris (1994) [5].

2.1 L'étude des dépôts de vapeurs chimiques (la CVD)

2.1.1 Présentation générale de la CVD

La CVD est un procédé utilisé pour la fabrication de films minces de matière inorganique. Dans un réacteur, on fait circuler un mélange de gaz inertes et réactifs qui, par pyrolyse au contact d'un substrat chauffé, va créer une fine couche de dépôts solides. Ce procédé intervient par exemple lors de la fabrication des circuits microélectroniques pour obtenir des couches minces de semi-conducteurs, ou lors de la conception de supports d'enregistrements magnétiques ou optiques. L'enjeu dans cette technologie est de pouvoir contrôler le taux de dépôt des vapeurs chimiques (c'est à dire la variation de l'épaisseur du dépôt par unité de temps qui s'exprime en général en Å/min), de manière à obtenir les couches les plus uniformes possibles à l'épaisseur souhaitée.

La géométrie du réacteur peut varier mais la plus répandue est une conduite horizontale de section rectangulaire, où le substrat chauffé est placé sur la paroi du bas (cf. Jensen et al. (1991) [4]). On retrouve donc exactement la configuration de l'écoulement de PRB. Evans et Greif (1989, 1991) [6, 7] donnent l'ordre de grandeur

des dimensions des réacteurs et des paramètres des écoulements rencontrés typiquement en CVD (voir aussi le *tableau I*): $L \sim 100$ cm, $l \sim 10$ cm, h de l'ordre de quelques centimètres, la température du substrat $T_c \sim 1000$ à 1300 K, $Ra \sim 700$ à 50000 , $Re \sim 1$ à 100 et $Pr \sim 0,7$. Pour éviter la formation de dépôt sur les parois latérales et supérieure, celles-ci sont refroidies avec de l'eau ($T_f \sim 300$ K). Vu les gradients de température mis en jeu, les écoulements dans les réacteurs CVD sont donc des écoulements thermoconvectifs. L'étude de leur structure est un point très important car elle va conditionner la forme et donc la qualité des dépôts.

2.1.2 Quelles structures thermoconvectives privilégier en CVD?

Les études de Moffat et Jensen (1986, 1988) [8, 9], Ouazzani et Rosenberger (1990) [10] et Kleijn et Hoogendoorn (1991) [11] montrent que les dépôts de vapeurs chimiques (Gallium Arsenide ou Silicium) ne sont pas uniformes, ni axialement, ni transversalement, lorsque la structure de l'écoulement prend la forme de $R_{//}$ dans des réacteurs de section rectangulaire constante. Les dépôts sont toujours plus importants à l'entrée que vers l'aval et ils prennent la forme de stries parallèles à l'axe du canal. Pour remédier à la non-uniformité axiale, nombreux sont ceux qui proposent d'incliner légèrement le substrat chauffé (l'angle d'inclinaison variant de 2 à 10 degrés en général) de façon à créer un canal convergent et, par conséquent, provoquer une accélération de l'écoulement et une augmentation des transferts de chaleur et de masse dans la direction axiale (cf. Ouazzani et Rosenberger (1991) [10], Karki et al. (1993) [12], Park et Pak (1993) [13] et Chiu et al. (2000) [14]). D'autres, comme Hosokawa et al. (1993) [15], proposent de jouer sur le gradient de température horizontal. Cependant, comme le montrent Park et Pak (2000) [13], la non-uniformité transversale du dépôt persiste, d'autant plus que Re est petit. Evans et Greif (1989, 1991) [6, 7] proposent d'opérer à très petits nombres de Reynolds, de façon à faire apparaître des R_{\perp}

dans les réacteurs. En effet, le déplacement de ces rouleaux dans le sens de l'écoulement moyen permet d'obtenir des couches plus uniformes transversalement qu'avec les $R_{//}$.

Visser et al. (1989) [16] montrent expérimentalement et numériquement que lorsqu'un écoulement circulant sur une plaque froide arrive brusquement sur une zone chauffée, il est possible qu'il y ait formation d'une cellule transversale stationnaire située au-dessus de la zone de transition de température (cf. *figure 6*). Cette cellule n'a rien à voir avec les R_{\perp} contrarotatifs emportés par l'écoulement moyen de la *figure 2*. C'est une cellule unique qui résulte du fort gradient négatif de pression causé par la variation brutale de la température: l'écoulement accélère près de la plaque inférieure et si Ra est suffisamment grand, un R_{\perp} unique et fixe se maintient sur l'entrée thermique (il est noté "R $_{\perp}$ fixe" dans le *tableau I*). Pour une meilleure compréhension de ce phénomène, on peut se référer à l'explication théorique et numérique de Makhviladze et Martjushenko (1998) [17]. La présence de cet écoulement de retour est à bannir de l'entrée des réacteurs chimiques car elle est à l'origine d'un taux de dépôt très élevé à l'entrée et plus faible vers l'aval (cf. Kleijn et Hoogendoorn (1991) [11]). De plus, comme lorsqu'on fabrique des composants électroniques ayant plusieurs couches successives de différents semi-conducteurs, on désire que l'interface entre chaque couche de dépôt soit bien nette, les structures transversales (R_{\perp} et R_{\perp} fixe) doivent être éliminées du processus de fabrication. Sinon, lorsqu'on fait circuler les uns à la suite des autres des gaz réactifs de différentes natures, ils peuvent se mélanger et détruire la qualité de l'interface entre chaque couche de semi-conducteur. Ingle et Mountziaris (1994) [5], en accord avec les expériences de Visser et al. (1989) [16], montrent que le R_{\perp} fixe sur l'entrée n'apparaît pas si $Gr/Re < 100$ pour $10^{-3} < Re \leq 4$ et si $Gr/Re^2 < 25$ pour $4 \leq Re < 100$.

On pourra se référer à Chiu et al. (2000) [14] pour avoir des visualisations expérimentales et la mesure des transferts thermiques associés aux différentes configurations thermoconvectives citées ci-dessus (R_{\perp} , $R_{//}$, R_{\perp} fixe, ainsi que $R_{//}$ sinueux) dans des écoulements d'air à $9,5 \leq Re \leq 40$ et $3 \times 10^5 \leq Ra' \leq 4,5 \times 10^6$, dans des réacteurs chimiques de rapport d'allongement transversal $B=5$, avec un substrat horizontal ou incliné à 8° . Une carte des différents régimes d'écoulements et des corrélations sur les longueurs d'établissement et les nombres de Nusselt sont proposées.

Les régimes de R_{\perp} et de $R_{//}$ ne permettant pas d'obtenir la qualité requise pour les dépôts de vapeurs chimiques, Hosokawa et al. (1993) [15], suivis par Spall (1996) [18, 19], proposent pour satisfaire cette exigence de se placer plutôt dans des conditions d'écoulements instationnaires apériodiques voire chaotiques, c'est à dire à grands nombres de Rayleigh et à petits nombres de Reynolds. Ils montrent que dans ce cas la moyenne temporelle des transferts de chaleur et des taux de dépôts devient quasi uniforme dans la direction transversale. Pour favoriser ce types d'écoulements instationnaires, Koizumi et Hosokawa (1993) [20] imposent dans leurs expériences des conditions aux limites thermiques non uniformes sur les parois latérales du canal, alors que Spall (1996) [19] perturbe l'écoulement en inclinant le canal de 2 degrés autour de son axe pendant 1 seconde. Evans et Greif (1993) [21] obtiennent aussi à hauts Ra, dans des conditions proches de celles de la CVD, des écoulements de PRB instationnaires, se présentant comme la superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$.

2.1.3 Quels modèles numériques choisir en CVD ?

Les écoulements dans les conditions de la CVD prennent souvent la forme de $R_{//}$. Leur simulation numérique nécessite donc, a priori, des modèles 3D. D'autre part, vu les gradients de température mis en jeu, l'approximation de Boussinesq ne peut pas

être employée. Enfin, dans de nombreux cas, il faut ajouter au modèle classique (équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) la résolution de l'équation de conservation des espèces puisque au moins deux gaz sont présents dans le réacteur : le gaz "porteur" (H_2 , N_2 , He, Ar, etc.) et le gaz réactif (TMGa, AsH_3 , SiH_4 , etc.). L'équation de concentration peut être négligée si la concentration en gaz réactif est très faible et si on ne s'intéresse qu'à la dynamique de l'écoulement. Quoiqu'il en soit, les modèles utilisés en CVD sont relativement complexes. Leur résolution numérique est extrêmement coûteuse en temps de calcul si des hypothèses simplificatrices ne sont pas envisagées. Ainsi, dans quelques études (cf. *tableau I*), la diffusion axiale de la chaleur et de la quantité de mouvement est négligée afin que le système d'équations devienne parabolique et puisse être résolu par une technique de marche en espace, économique en temps de calculs et en place mémoire (la solution est calculée, dans le sens de l'écoulement, sur une succession de plans 2D). Comme, les $R_{//}$ sont des structures stationnaires, il est aussi possible de résoudre les équations de conservation stationnaires. Notons que ces deux hypothèses (modèle parabolique ou stationnaire) ne permettent pas de simuler les R_{\perp} en déplacement. Le *tableau I* résume les différents modèles utilisés par les études numériques en CVD et il donne les différents types de structures convectives observées à chaque fois. Les études de Ouazzani et Rosenberger (1990) [10] et de Nyce et al. (1992) [22] permettent de comparer les résultats obtenus avec des codes paraboliques et elliptiques.

2.2 Le refroidissement des composants électroniques

La miniaturisation des composants et des équipements électroniques a permis de réduire de manière considérable la taille des ordinateurs. Cependant, parallèlement, la quantité de chaleur volumique dissipée par les circuits intégrés a considérablement

augmenté. Ceci étant un facteur limitant pour le bon rendement des ordinateurs, l'étude des transferts thermiques entre les plaques de circuits intégrés et le fluide réfrigérant circulant entre ces plaques est devenue une nécessité. La circulation de ce fluide entre deux plaques superposées de circuits intégrés peut être modélisée par un écoulement dans un canal plan. Les composants électroniques placés sur chacune des plaques, qui dissipent chacun une certaine quantité de chaleur, peuvent être représentés par des zones de chauffage ponctuelles. Ainsi, la géométrie utilisée pour traiter un problème de refroidissement de composants électroniques est celle de l'écoulement de PRB, mis à part le chauffage des plaques qui est périodique en général, et qui peut avoir lieu indifféremment sur la paroi du bas, sur la paroi du haut ou sur les deux plaques en même temps.

Les premiers articles dans le domaine du refroidissement des composants électroniques sont ceux de Kennedy et Zebib (1983) [23] et de Braaten et Patankar (1985) [24]. Kennedy et Zebib étudient expérimentalement et par simulation numérique les transferts thermiques au sein d'un écoulement d'air dans un canal plan dans lequel sont placées une ou deux sources de chaleur de petite taille sur la plaque du bas, sur la plaque du haut ou sur les deux plaques simultanément. Le transfert thermique maximal est obtenu lorsque le composant (la zone chauffée) est placée en bas plutôt qu'en haut. Ce résultat est confirmé par simulation numérique directe par Braaten et Patankar (1985) [24] qui montrent de plus que les transferts de chaleur sont augmentés lorsque le nombre de Prandtl du fluide réfrigérant est élevé (le fréon ($Pr=3,5$) est plus recommandé que l'air ($Pr=0,7$)) ou lorsque les parois de la conduite sont parfaitement conductrices de la chaleur plutôt qu'adiabatiques.

Plus récemment, Hasnaoui et al. (1991) [25] et Bilgen et al. (1995) [26] ont effectué des calculs numériques 2D d'écoulements dans un canal horizontal où la taille du ou des éléments chauffants placés sur la paroi du bas peut varier. Dans [26], pour

$5 \times 10^3 \leq Ra \leq 2 \times 10^4$ et $0,1 \leq Pe \leq 2,5$, les auteurs comparent des simulations effectuées avec des conditions aux limites périodiques dans un domaine d'allongement $A=L/h=2$ comportant un seul élément chauffant, avec des simulations effectuées avec des conditions aux limites ouvertes à l'entrée et à la sortie d'un domaine d'allongement $A=8$ comportant 4 éléments chauffants placés périodiquement. Ils montrent que les nombres de Nusselt pariétaux sont les mêmes dans les deux configurations de calcul. Dans [25], le problème est simulé en utilisant des conditions aux limites périodiques dans un domaine d'allongement $A=L/h=2$ pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, $Re \leq 6$ et $Pr=0,7$ (quelques résultats sont donnés à $Pr=0,1$ et 7). A $Re=0$, deux R_{\perp} symétriques et stationnaires sont observés de part et d'autre de l'élément chauffant. Ils deviennent dissymétriques, mais restent attachés à l'élément chauffant, pour $Re \neq 0$ et inférieur à une certaine valeur critique. Au-dessus de cette valeur critique, les cellules thermoconvectives se détachent et sont emportées par l'écoulement qui devient périodique en temps. La variation de ce nombre de Reynolds critique en fonction de Ra et de la taille de l'élément chauffant est déterminée. Tangborn (1992) [27] et Zhang et Tangborn (1994) [28], avec la même méthodologie (simulations numériques 2D et conditions aux limites périodiques), déterminent aussi la transition en fonction de Re et de Ra entre les structures transversales attachées à l'élément chauffant et celles qui se déplacent. Cependant, ils considèrent le cas plus réaliste où la température maximum de l'élément chauffant est atteinte, non pas par pallier, mais avec un accroissement sinusoïdal. Le problème est étudié pour $Pr=1$, $Re \leq 100$ et $Ra \leq 80000$. Tangborn et al. (1995) [29] et Zhang et Tangborn (1995) [30] étendent leur étude à des configurations 3D périodiques dans les deux directions horizontales, en effectuant des simulations numériques à l'aide d'un code spectral. Alors que deux régimes d'écoulements sont observés dans le cas 2D (un régime stationnaire 2D et un régime 2D instationnaire périodique), dans le cas 3D, un régime supplémentaire stationnaire 3D est observé avant l'apparition du régime

instationnaire périodique 3D. A $Ra=20000$, $Re=20$ et $Pr=1$, Zhang et Tangborn (1995) [30] montrent que les calculs 2D, qui prédisent un régime instationnaire, sous-estiment de 12 à 13% le nombre de Nusselt moyen sur les parois horizontales par rapport aux calculs 3D, qui eux prédisent un régime 3D stationnaire.

Lorsque la taille de l'élément chauffant est aussi grande que le domaine de calcul, Hasnaoui et al. (1991) [25] retrouvent la configuration classique des écoulements de PRB (chauffage uniforme sur toute la plaque du bas). Dans cette situation, dès que $Re \neq 0$, les R_{\perp} se déplacent. Les auteurs montrent, comme l'avaient déjà montré Ouazzani et al. (1989, 1990) [31, 32], que le rapport V_r/U° de la vitesse des R_{\perp} sur la vitesse moyenne de l'écoulement est une fonction linéaire décroissante de Ra et indépendante de Re . Nous reviendrons sur ce résultat au §7.5 dans le *tableau VIII* et les *figures 22 et 23*.

3 Les expériences pionnières (1920-1951)

Les premières recherches systématiques sur la convection naturelle sont les expériences de Henri Bénard (1900) [33] et le premier théoricien de la convection naturelle fut Lord Rayleigh (1916) [34]. La première étude sur le problème de Rayleigh-Bénard avec écoulement est attribuée à Paul Idrac (1920, 1921) [35, 36]. On trouve dans son travail expérimental la première description des $R_{//}$, seule structure convective observée par cet auteur dans les écoulements de PRB.

A cette époque, la motivation principale de toutes les études est la compréhension de certains phénomènes météorologiques tels que l'alignement des bandes nuageuses sous l'action du vent. Aussi, dans les expériences de laboratoire, les écoulements ne sont pas de type Poiseuille mais de type Couette. En effet, pour reproduire l'entraînement cisailé dû au vent, les écoulements d'air sont réalisés par le

déplacement horizontal de la plaque supérieure du canal d'essai (procédé utilisé par Graham (1933) [37], Chandra (1938) [38], Brunt (1951) [3]) ou bien par la mise en place d'un tapis roulant chauffé en guise de plaque inférieure (procédé utilisé par Bénard et Avsec (1938) [39]). Toutes ces études expérimentales présentent un grand nombre de photographies. Elles permettent de comprendre qualitativement l'influence de l'écoulement sur l'agencement et la forme des structures convectives mais ces observations sont rarement confrontées à la théorie. De plus, toutes ces études se rapportent à des situations physiques mal définies quantitativement. Aucune donnée permet de calculer précisément les nombres de Rayleigh mais il est très probable que les observations sont faites pour des nombres de Rayleigh très supercritiques, c'est à dire pour des écoulements sortant du cadre de la théorie linéaire et de l'approximation de Boussinesq.

Parallèlement à Idrac [35, 36], les $R_{//}$ ont été étudiés de manière plus systématique par Terada et al. (1928) [40] et par Terada et Tamano (1929) [41] qui ont réalisé de belles photos de ces structures dans des écoulements d'alcool, dont la surface se refroidit par simple évaporation, ou d'eau, chauffée par en dessous. La première observation des rouleaux transversaux, pour des écoulements cisailés à petits nombres de Reynolds, est due aux météorologistes et physiciens anglais A. C. Philips et Sir G. T. Walker (1932) [42]. L'existence des R_{\perp} sera confirmée l'année suivante par Graham (1933) [37].

En France, sous l'égide de la "Commission de Turbulence Atmosphérique" à laquelle participe H. Bénard, des études systématiques de tous les problèmes qui touchent à la "turbulence atmosphérique" sont entreprises. Ainsi, Avsec (1936-1938) [43-47], dans une série de notes au C.R.A.S., expose les résultats de ses expériences dans lesquelles il reproduit toutes les structures convectives observées antérieurement et il en observe de nouvelles (des $R_{//}$ sinueux notamment [46, 48]). Le souci d'Avsec

était de pouvoir modéliser au mieux les phénomènes thermoconvectifs se passant dans l'atmosphère. Or, le rapport d'échelle entre la dimension de l'atmosphère et la taille des couches fluides utilisées habituellement dans les expériences de laboratoire (généralement inférieure à 1 cm) étant très important, il s'est intéressé à la "production de tourbillons thermoconvectifs dans une couche d'air ayant une épaisseur de plusieurs centimètres". En fait, tous les résultats qu'il présente sont toujours obtenus avec des couches d'air d'épaisseur inférieure à 8 cm. Lorsque la vitesse d'écoulement de l'air est supérieure à 2 cm/s environ, Avsec reproduit aisément les $R_{//}$; lorsque la vitesse est inférieure, il reproduit les R_{\perp} . Conformément à la théorie de Rayleigh pour la convection libre, Avsec observe l'existence d'un régime préconvectif stable avant la naissance des R_{\perp} ou des $R_{//}$. La naissance de la thermoconvection se situe entre $Ra^*_0=27\pi^4/4=657,5$ (valeur critique obtenue par Rayleigh dans le cas où la couche fluide est comprise entre deux plaques rigides, parfaitement conductrices mais "*sans frottement*") et $Ra^*_0\approx 1709,5$ (valeur obtenue par Jeffreys (1928) [49] dans le cas plus réaliste où les mêmes plaques sont "*avec frottement*" ; la valeur "exacte" bien connue dans ce cas est en fait $Ra^*_0=1707,762$). Avsec justifie son résultat par le fait que la plaque de verre supérieure utilisée dans l'expérience est mauvaise conductrice de la chaleur.

Tous les résultats précédents obtenus par Avsec sont rapportés dans l'article de Bénard et Avsec (1938) [39]. Pour avoir une synthèse et une bibliographie complète de l'ensemble des résultats de cette époque tentant d'expliquer l'apparition des structures thermoconvectives dans l'atmosphère, on se référera à Brunt (1951) [3]. Les résultats des expériences de Chandra (1938) [38] pour visualiser les cellules convectives dans les problèmes de Bénard et Couette-Bénard y sont notamment rapportés. Quatre catégories de rouleaux sont observés en fonction de la vitesse de l'écoulement: des

cellules polygonales, présentes à vitesse nulle et dont l'existence est probablement liée à des effets non-Boussinesq (variation de la viscosité avec la température), prennent la forme de fers à cheval dès que le débit devient non nul; si on augmente encore la vitesse, il apparaît les R_{\perp} puis les $R_{//}$. En suivant la classification de l'*International Cloud Atlas* de cette époque, Brunt donne la liste des nuages qui correspondent selon lui à chacune des quatre catégories. On constate donc qu'un grand nombre d'études de cette époque ont cherché à comprendre la formation des structures thermoconvectives de grande échelle présentes dans les écoulements turbulents de l'atmosphère, à partir d'expériences de laboratoire faisant intervenir des écoulements laminaires.

4 Les analyses de stabilité linéaire temporelle ou spatiale et les vérifications expérimentales (1962-1984, 2000)

4.1 Généralités

Après une longue période très peu productive, les recherches sur les écoulements de PRB repartent vers 1960. On effectue principalement des analyses de stabilité linéaire, complétées par des expériences permettant de vérifier les résultats des modèles théoriques. Des travaux se concentrent sur l'analyse des écoulements thermoconvectifs pleinement établis (cf. §4.2); d'autres étudient la zone d'entrée thermique, c'est-à-dire le début de la zone chauffée, là où les rouleaux convectifs se développent (cf. §4.3). L'ensemble des analyses de la stabilité linéaire temporelle ou spatiale des écoulements de PRB, dans la zone d'entrée ou dans la zone pleinement développée, est rassemblé dans le *tableau II*, dans le cas où l'écoulement de base est l'écoulement de Poiseuille purement conducteur. Nous donnons la gamme des paramètres balayés, la forme des modes normaux et les critères de stabilité marginale, ainsi que le type de structures thermoconvectives observées au-dessus du seuil de

transition. L'analyse de la stabilité linéaire temporelle dans le cas où l'écoulement de base est l'écoulement de $R_{//}$ pleinement établis sera traité au §8.3.1.

La formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle du *tableau II* pour des écoulements de PRB entre deux plaques infinies et en conduite d'extension transversale finie est développée dans l'*annexe A*. Nous rappelons ici uniquement les points principaux. Toutes les études se placent dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. En ce qui concerne la zone pleinement développée, que l'allongement transversal B soit fini ou infini, le problème aux valeurs propres résultant de l'analyse de la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de base vis à vis des $R_{//}$ est indépendant du nombre de Reynolds, c'est à dire que l'analyse se ramène au cas du problème de Rayleigh-Bénard 2D. De plus, l'analyse de la stabilité linéaire temporelle dans le cas où l'écoulement de base est soumis à des perturbations 3D ($k_x \neq 0$; $k_y \neq 0$) dans une conduite d'allongement transversal infini se ramène, en utilisant la transformation de Squire [50], au cas de l'écoulement de PRB 2D soumis à des perturbations 2D ($k_x \neq 0$; $k_y = 0$) (cf. Platten et Legros (1984) [51]). Par contre, pour le problème complet (B fini, $k_x \neq 0$; $k_y \neq 0$) traité par Luijkx (1983) [52], Nicolas et al. (2000) [53] et Kato et Fujimura (2000) [54] aucune simplification n'est envisageable.

4.2 Cas des écoulements thermoconvectifs pleinement établis

4.2.1 Les $R_{//}$ de première et de deuxième espèce

Les premières études théoriques sur l'écoulement de PRB sont sans doute celles de Velte (1962) [55] et de Sani (1964) [56]. Mori et Uchida (1966) [57] réalisent une étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de base vis à vis des deux espèces de $R_{//}$ qui sont représentées à la *figure 7*. La deuxième espèce est décrite comme étant la deuxième harmonique des $R_{//}$ classiques présentés sur la *figure 3*. Alors que pour ces

derniers, le nombre de Rayleigh critique $Ra_{//1}^*=1708$ quel que soit Re et que le nombre d'onde critique correspondant est $k_{y1}^*=3,13$, pour la deuxième espèce, $Ra_{//2}^*=18352$ quel que soit Re et $k_{y2}^*=6,26$. Mori et Uchida [57] effectuent aussi des mesures expérimentales dans des écoulements d'air à $Re=300$. Les $R_{//}$ de deuxième espèce ne sont pas visualisés expérimentalement mais les auteurs font remarquer, sans plus de précision, que lorsque l'on se rapproche de $Ra_{//2}^*$, le mouvement des $R_{//}$ de première espèce devient irrégulier et instable. Ostrach et Kamotani (1975) [58] réalisent aussi des mesures expérimentales dans l'air pour $100 \leq Ra \leq 13500$ et $10 \leq Re \leq 100$. Vu la gamme de Re , seuls des $R_{//}$ sont observés. Cependant, à partir de $Ra=8000$, le profil transversal de température, normalement sinusoïdal, devient distordu et, pour Ra encore plus grand, les $R_{//}$ deviennent instables. Les auteurs expliquent ce phénomène par l'apparition des $R_{//}$ de deuxième espèce, bien que ceux-ci ne soient pas visualisés dans l'expérience. En réalité, ce type de rouleaux n'a jamais été observé expérimentalement. Cependant, comme nous le verrons au §8.3, lorsque Ra augmente à Re modéré, les $R_{//}$ stationnaires deviennent sinueux, périodiques en temps et en espace, puis apériodiques et chaotiques.

A propos des $R_{//}$, nous mentionnons dans le *tableau II* l'analyse linéaire de Nakayama et al. (1970) [59]. Cette étude originale, suivie par les expériences d'Akiyama et al. (1971) [60], s'est intéressée à la naissance des $R_{//}$ dans un écoulement de PRB où un écart de température ΔT constant est maintenu entre les deux plaques horizontales, mais où le gradient axial de température est non nul ($\nabla T \cdot \mathbf{i} \neq 0$). Les cas $\Delta T > 0$, $\Delta T < 0$, $\nabla T \cdot \mathbf{i} > 0$ et $\nabla T \cdot \mathbf{i} < 0$ sont analysés. Les résultats montrent que $|Ra_{//}^*|$ diminue lorsque $\|\nabla T \cdot \mathbf{i}\|$ augmente et que l'écoulement de Poiseuille est moins stable lorsque Pr est petit. Les courbes expérimentales et théoriques $|Ra_{//}^*|=f(\|\nabla T \cdot \mathbf{i}\|)$ coïncident assez bien.

4.2.2 Seuil d'apparition des R_{\perp} en conduite d'extension latérale infinie et vérification expérimentale de l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re

L'analyse de stabilité linéaire de Gage et Reid (1968) [61] pour $B \rightarrow \infty$ se limite à $Pr=1$ lorsque $Ra > 0$ et s'étend de $Re=0$ à 10^6 . Elle autorise des perturbations donnant naissance à des $R_{//}$, à des R_{\perp} ou à des cellules thermoconvectives 3D quelconques (par exemple, des cellules d'axes obliques à la direction de l'écoulement de base). Pour ces structures obliques, le nombre de Rayleigh critique est une fonction croissante de Re et se situe entre $Ra_{//}^*=1708$ et Ra_{\perp}^* . Pour $Re \geq 7200$, les instabilités d'origine visqueuse donnent naissance à des ondes transverses de type Tollmien-Schlichting. Platten (1971) [62], en considérant des perturbations 2D ne permettant la naissance que des R_{\perp} , et Tveitereid (1974) [63], en considérant la naissance d'instabilités sous la forme de R_{\perp} , de $R_{//}$, et d'ondes de Tollmien-Schlichting, vérifient, pour tous les nombres de Prandtl, les résultats obtenus par Gage et Reid (1968) [61] à $Pr=1$ (cf. *tableau II*).

Les premiers qui se soient intéressés expérimentalement à l'action de la vitesse de l'écoulement sur le nombre de Rayleigh critique Ra^* , en particulier sur l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re , sont Platten et Lefebvre (1971) [64]. En montant une expérience de type Schmidt-Milverton (1935) [65] avec de l'eau dans une conduite d'allongements $A=L/h \approx 150$ et $B=l/h \approx 80$, ils montrent que Ra^* croît de 1708 à 2063 lorsque l'on passe de $Re=0$ à $Re=28$. Ils en déduisent que la preuve expérimentale de l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re , montrée théoriquement par Platten (1971) [62], est apportée. Cependant, comme nous le verrons au *tableau III* du §4.2.4, dans le cas d'un écoulement d'eau ($Pr=6,4$), dans une conduite de si grand allongement transversal ($B=80$), pour un nombre de Reynolds si "élevé" ($Re=28$), les structures thermoconvectives ne sont pas des R_{\perp} mais des $R_{//}$ pour lesquels $Ra_{//}^*$ ne varie pas avec

Re. Donc, la variation de Ra^* dans l'expérience de Platten et Lefebvre [64] est due à autre chose. Plusieurs explications à ce problème ont été données. Platten et Legros (1984) [51] (au chapitre VIII, pages 545 à 556) recherchent théoriquement si une structure résiduelle, se superposant à l'écoulement de $R_{//}$ et ayant une périodicité dans la direction longitudinale, ne pourrait pas provoquer l'augmentation de Ra^* . La structure qui résulterait de cette superposition pourrait avoir l'apparence de $R_{//}$ obliques ou de rouleaux sinueux (voir le §8.3 à ce sujet). Platten et Legros (1984) [51] vérifient leur hypothèse expérimentalement en plaçant une sonde de température très sensible en un point fixe au milieu d'un écoulement de $R_{//}$ dans l'eau. Ils enregistrent un signal sinusoïdal témoignant de la présence effective d'une périodicité longitudinale résiduelle dans l'écoulement. Cependant, ces observations sont faites à $Re \approx 1,5$; elles ne concordent pas avec des photos prises à des nombres de Reynolds plus élevés ($Re=28$) montrant des $R_{//}$ parfaitement réguliers et ne laissant apparaître ni inclinaison ni sinuosité. Platten et Legros font alors une deuxième proposition: ils montrent qu'à $Re=28$ l'intervalle de temps pendant lequel un volume d'eau élémentaire passe sur la plaque chauffée dans l'expérience de Platten et Lefebvre (1971) [64] est environ égal au double du temps caractéristique nécessaire pour atteindre l'état thermoconvectif stationnaire du problème de convection naturelle équivalent ($Re=0$). Il est donc très probable que les $R_{//}$ ne soient pas complètement établis dans cette expérience. En effet, comme on va le voir au §4.3 (voir la *figure 13*), lorsqu'on se trouve dans la zone d'entrée thermique, Ra^* est plus élevé que dans la zone où l'écoulement est pleinement établi et il décroît lorsque x augmente. La mise en évidence de l'augmentation de Ra_{\perp}^* avec Re a en fait été réalisée par Luijckx et al. (1981) [66] grâce à une expérience de visualisation dans de l'huile de silicone. Cette expérience a montré que les R_{\perp} disparaissent de plus en plus de la conduite quand Re augmente (cet élément visuel faisait défaut dans la première expérience de Platten et Lefebvre (1971) [64]). Le canal

utilisé est très long ($A=L/h \approx 100$) et plus de 90 R_{\perp} peuvent s'y développer. Lorsque le débit est suffisamment élevé, les R_{\perp} disparaissent de la zone d'entrée du canal et, plus Re augmente, plus les R_{\perp} sont rejetés vers l'aval, jusqu'à disparaître complètement. Les auteurs supposent alors la présence des $R_{//}$, bien que ceux-ci n'aient pas pu être observés par la méthode de visualisation utilisée.

En prémices à une analyse de la stabilité faiblement non-linéaire des écoulements 2D de R_{\perp} (cf. §5.3), Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] analysent la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB 2D. En recherchant la solution des équations de perturbation linéarisées sous la forme $f(x, z, t) = \hat{f}(z).e^{i(k_x x + \sigma t)}$, ils montrent, par des développements en puissance du nombre de Reynolds, que le nombre de Rayleigh, la pulsation temporelle et le nombre d'onde critiques pour les R_{\perp} s'écrivent :

$$Ra_{\perp}^*(Re, Pr) = 1707,762 + \frac{0,02156 + 0,02378 Pr + 2,194 Pr^2 + 0,3636 Pr^3 + 0,42 Pr^4}{(0,5117 + Pr)^2} Re^2 + O(Re^4) \quad (1)$$

$$\sigma_i^*(Re, Pr) = Pr \frac{1,409 + 4,105 Pr}{0,5117 + Pr} Re + O(Re^3) \quad (2)$$

$$k_x^*(Re, Pr) = 3,116 - \frac{1,930 + 71,03 Pr - 946,3 Pr^2 - 182,8 Pr^3 - 226,9 Pr^4 + 565,6 Pr^5 - 194,9 Pr^6}{(0,5117 + Pr)^4} 10^{-6} Re^2 + O(Re^4) \quad (3)$$

D'après Müller (1990) [67], ces formules analytiques sont précises à 1% près tant que $Pe < 26$. Elles sont aussi en bon accord avec les résultats de l'étude récente de Carrière et Monkewitz (1999) [69] sur la stabilité convective et absolue des R_{\perp} et des $R_{//}$ dans des conduites d'extension latérale infinie (cf. §5.3).

4.2.3 Paramètres critiques Ra_{\perp}^* , $Ra_{//}^*$ et Re^* en conduite d'extension latérale finie

Pour avoir une analyse qualitativement exacte de l'influence de Re , de B et de Pr sur les nombres de Rayleigh critiques d'apparition des R_{\perp} et des $R_{//}$ (Ra_{\perp}^* et $Ra_{//}^*$),

dans le cas d'une conduite d'extension latérale finie, il faut attendre la parution de l'article de Luijkx et al. (1981) [66]. Cette analyse a déjà été présentée dans le chapitre introductif au §1.1. Elle peut se résumer graphiquement par le diagramme de stabilité de la *figure 5*. On rappelle brièvement les résultats principaux de cette analyse:

- $Ra_{//}^* = Ra_{//}^*(B)$ - $Ra_{//}^*$ est indépendant de Re et de Pr ;
- $Ra_{\perp}^* = Ra_{\perp}^*(Re, Pr, B)$ - Ra_{\perp}^* augmente si Re , Pr ou $1/B$ augmentent ;
- pour $0 \leq Re < Re^*$, $Ra_{\perp}^* \leq Ra_{//}^*$: il apparaît des R_{\perp} au seuil de transition ;
- pour $Re > Re^*$, $Ra_{\perp}^* \leq Ra_{//}^*$: il apparaît des $R_{//}$ au seuil de transition ;
- $Re^* = Re^*(Pr, B)$ - Re^* diminue si Pr augmente à B fixé.

On notera que ces résultats *qualitatifs* sont le fruit d'une étude de stabilité linéaire temporelle pour un écoulement de base 3D et des perturbations 3D, dont les résultats *quantitatifs* auraient dû être publiés dans la référence [9] ("to be published") de Luijkx et al. (1981) [66]. Cette publication n'ayant jamais paru, la théorie et la totalité des résultats quantitatifs se trouvent dans la thèse de Luijkx (1983) [52] et dans l'article de Nicolas et al. (2000) [53]. Le développement complet de l'analyse théorique lorsque $B \rightarrow \infty$, et la trame lorsque $B \neq \infty$ se trouvent aussi au chapitre VIII du livre de Platten et Legros (1984) [51] et en *annexe A* du présent article. Kato et Fujimura (2000) [54] viennent aussi de publier une analyse théorique 3D qui, dans sa première partie, est comparable à celles que nous venons de citer (analyse linéaire temporelle en conduites d'extension latérale finie). Par contre, dans sa deuxième partie, elle va bien au-delà puisqu'elle étudie à partir de deux équations d'amplitudes couplées l'interaction faiblement non-linéaire entre les R_{\perp} et les $R_{//}$ au voisinage du point triple en $Re = Re^*$ et $Ra = Ra_{\perp}^* = Ra_{//}^*$ (cf. *figure 5*), dans des conduites d'extension latérale finie avec des conditions aux limites thermiques adiabatiques et parfaitement conductrices sur les parois latérales. La stabilité de l'écoulement de Poiseuille conductif, des R_{\perp} , des $R_{//}$ et

d'une structure mixte se présentant comme la superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$ est étudiée au voisinage de ce point triple. Plus de détails sur cette étude sont donnés au §8.2.

On trouvera des graphes et des tableaux de valeurs numériques, issus des analyses de stabilité linéaire temporelle 3D, donnant les variations de Ra_{\perp}^* , $Ra_{//}^*$, Re^* , k_x^* , σ_i^* et $(V_r/U^o)^*$ (rapport entre la vitesse V_r des R_{\perp} et la vitesse moyenne U^o de l'écoulement dans le canal) pour une large gamme des paramètres Re , Pr et B dans les références [53, 54, 66]. On reproduit les graphes $Ra_{//}^*=f(B)$ et $Ra_{\perp}^*=f(Re, B)$ à $Pr=10$ dans les *figures 8 et 9*.

4.2.4 Critique des résultats obtenus par analyse de stabilité linéaire temporelle

Comme le montre la *figure 8* ou les travaux de Kurtzweg (1965) [70] et de Luijkx et Platten (1981) [71], l'analyse de la stabilité linéaire temporelle prédit la formation d'un nombre pair ou impair de $R_{//}$ stationnaires au-dessus du seuil de transition en fonction de la valeur du rapport de forme B . Ce résultat est vérifié expérimentalement et numériquement en convection naturelle. Cependant, en convection mixte, il est en contradiction avec toutes les expériences et les simulations numériques directes qui prévoient un nombre pair de $R_{//}$ quel que soit $B>1,1$ et $Re>0$ (voir, par exemple, Narusawa (1993) [72], Yu et al. (1997) [73], Chang et al. (1997) [74] et Chang et Lin (1998) [75]). Shahda et Narusawa (1997) [76] ont donné une explication théorique à cette contradiction. Après avoir calculé une expression analytique du profil de vitesse axiale $U(t)$ pour les écoulements de $R_{//}$, en comparant les taux de croissance initiaux de ces profils (dU/dt à $t=0$) pour un nombre pair et un nombre impair de $R_{//}$, ils montrent effectivement qu'un seul $R_{//}$ apparaît lorsque $B\leq 1,1$ et qu'un nombre pair de $R_{//}$ est sélectionné lorsque $1,1<B\leq 10$. En appliquant le second principe de la thermodynamique, Narusawa (2001) [77] montre également par une

analyse théorique et des simulations numériques que le passage d'une paire à deux paires de $R_{//}$ pleinement établis est caractérisé par une variation brutale et discontinue des taux de production d'entropie liés aux dissipations thermiques et aux dissipations visqueuses.

Nicolas et al. (2000) [53] comparent les courbes de transition $Ra_{//}^*$ et Ra_{\perp}^* déterminées par l'analyse linéaire temporelle pour B fini aux courbes de transition déterminées expérimentalement ou par simulations numériques directes entre écoulement de Poiseuille et $R_{//}$ d'une part, et entre écoulement de Poiseuille et R_{\perp} d'autre part. Ces comparaisons, effectuées pour $(Pr ; B)=(0,7 ; 2)$, $(6,4 ; 3,6)$ et $(453 ; 5,25)$, montrent que les résultats théoriques, expérimentaux et numériques coïncident quantitativement en ce qui concerne $Ra_{//}^*$ (voir le *tableau III* et la *figure 10*). Par contre, les courbes $Ra_{\perp}^*(Re)$ dans le plan $Ra-Re$ sont toujours nettement en dessous des courbes de transition expérimentales (cf. *figure 10*) et numériques entre écoulement de Poiseuille et R_{\perp} . Ce décalage se répercute sur la valeur du nombre de Reynolds critique : la valeur de Re^* déterminée par la théorie linéaire est toujours très supérieure à la valeur de $Re^*_{\perp-//}$ déterminée expérimentalement ou par simulations numériques (cf. *figure 10* et *tableau III*). On notera que Re^* est obtenu pour $Ra=Ra_{\perp}^*=Ra_{//}^*$, c'est à dire qu'il se rapporte à des perturbations infinitésimales. Par contre, comme expérimentalement on ne peut mesurer que des perturbations finies, $Re^*_{\perp-//}$ est déterminé en général pour des valeurs supercritiques du nombre de Rayleigh (c'est à dire pour $Ra>Ra_{\perp}^*$ et $Ra>Ra_{//}^*$). Ainsi, dans la plupart des cas du *tableau III*, les valeurs de $Re^*_{\perp-//}$ correspondent à une transition entre R_{\perp} et $R_{//}$ plutôt qu'à un point triple entre écoulement de Poiseuille, R_{\perp} et $R_{//}$. Quoiqu'il en soit, on vient de voir que la théorie de la stabilité linéaire temporelle n'est pas capable de retrouver quantitativement la valeur du nombre de Rayleigh critique expérimental entre

l'écoulement de Poiseuille et les R_{\perp} . Nous verrons au §5.1 que pour cela il faut prendre en compte la croissance temporelle et spatiale des perturbations et, donc, étudier la stabilité linéaire convective/absolue des écoulements de PRB. D'ores et déjà, on peut voir sur la *figure 10*, que la courbe Ra_{\perp}^{conv} obtenue par une théorie spatio-temporelle développée par Müller et al. (1989, 1992) [78, 68] à partir d'une équation de Ginzburg-Landau (cf. §5) pour des écoulements de R_{\perp} 2D permet de traduire de manière très satisfaisante la transition observée expérimentalement dans une conduite d'allongement $B=3,6$.

4.3 Cas des écoulements dans la zone d'entrée thermique

A partir de l'abscisse $x=0$ où le gradient vertical de température est imposé, un écoulement pleinement développé hydrodynamiquement a besoin d'une certaine distance pour s'établir thermoconvectivement. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette zone et ont essayé d'y déterminer les conditions marquant la naissance des instabilités. Parmi les premiers à avoir étudié le cas de l'écoulement de PRB, on trouve Hwang et Cheng (1973) [79]. Ils réalisent une étude de stabilité linéaire pour un écoulement entre deux plaques infinies. Les modes normaux introduits dans les équations de perturbations linéarisées se rapportent uniquement aux $R_{//}$ stationnaires; ils sont de la forme $f(x, y, z) = \hat{f}(z)e^{c_x x} e^{ik_y y}$ (cf. *tableau II*). La stabilité marginale est obtenue lorsque le coefficient d'amplification spatiale dans la direction longitudinale c_x s'annule. Le profil thermique de l'écoulement de base est tel qu'en $x=0$ (là où commence le chauffage) la température du fluide est uniforme et égale à la température de la plaque supérieure froide; c'est à dire que la conduction axiale de la chaleur vers l'amont est négligée dans l'écoulement de base. Pour un nombre de Prandtl $Pr \geq 0,7$ et à grand nombre de Péclet, il est montré que l'écoulement de base est plus stable dans la zone

d'entrée que vers l'aval; le résultat est inverse pour $Pr \leq 0,2$. Dans les deux cas, lorsqu'on s'éloigne de l'entrée, on retrouve que Ra^* tend vers 1708.

L'étude précédente est généralisée par Cheng et Wu (1976) [80] qui introduisent deux modifications importantes: (i) les perturbations sont 3D avec des modes normaux de la forme $f(x, y, z) = \hat{f}(z) e^{c_x x} e^{i(k_x x + k_y y)}$ (les R_{\perp} ne sont donc pas écartés); (ii) la conduction de la chaleur vers l'amont est rendue possible en considérant un canal allant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ et en prenant des conditions aux limites adéquates. L'étude montre que, pour $Pe < 25$, l'hypothèse de fluide à température uniforme en $x=0$ est erronée et que la conduction axiale de la chaleur ne peut pas être négligée. A faible nombre de Péclet, la courbe $Ra_{//}^* = f(x)$ est nettement en dessous de celle obtenue par Hwang et Cheng (1973) [79] car le problème est elliptique et les perturbations remontent vers l'amont de l'écoulement. D'autre part, les R_{\perp} sont plus stables que les $R_{//}$ pour $Pe \leq 0,5$ et $Pr \geq 1$ (c'est à dire à petit nombre de Reynolds), et ils se développent uniquement en amont et juste en aval de $x=0$ (cf. *figure 11*). Plus loin en aval, on retrouve les $R_{//}$ puisque la conduite est d'extension latérale infinie. De telles configurations d'écoulements avec un R_{\perp} fixe juste à l'entrée sur la plaque chauffée, suivi par un écoulement de $R_{//}$ vers l'aval, ont été observées récemment dans les simulations numériques 3D de Nobile et Onesti (1996) [81] et Spall (1996) [18, 19] et dans les expériences de Lir et Lin (2000) [82] et dans une moindre mesure dans celles de Lir et al. (2001) [83].

Sans avoir connaissance du travail de Cheng et Wu (1976) [80], Kamotani et Ostrach (1976) [84] puis Kamotani et al. (1979) [85] étudient expérimentalement la zone d'entrée thermique dans des écoulements d'air. Les deux études concernent les gammes d'écoulements suivants: $1000 \leq Ra \leq 31000$ et $30 \leq Re \leq 1100$ pour la première, $2,2 \times 10^4 \leq Ra \leq 2,1 \times 10^5$ et $50 \leq Re \leq 300$ pour la seconde. Les auteurs constatent que la

longueur d'entrée thermique décroît lorsque Ra croît ou lorsque Re^2/Gr décroît. Dans les expériences de Kamotani et al. (1979) [85], Ra^* est déterminé lorsqu'on peut détecter une petite déviation dans le profil transversal de température en un x donné. Bien que l'on retrouve que Ra^* décroisse avec x , les valeurs expérimentales de Ra^* dans la zone d'entrée sont nettement supérieures aux valeurs théoriques: à la même position axiale $x=0,01$, $Ra^*\approx 30000$ pour l'expérience alors que $Ra^*\approx 3000$ pour la théorie. Ce résultat sera confirmé peu après par une expérience de même type réalisée par Hwang et Liu (1976) [86]. L'explication donnée est qu'en théorie les perturbations caractérisant Ra^* sont infinitésimales alors qu'expérimentalement les appareils de mesure n'enregistrent que des perturbations finies. Cependant, nous allons voir ci-dessous qu'un critère de stabilité neutre, basé sur la recherche du point où l'amplification temporelle des perturbations est nulle, permet de retrouver à peu de chose près la courbe critique expérimentale.

En effet, une étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de PRB dans la zone d'entrée thermique a été effectuée plus récemment par Lee et Hwang (1991) [87, 88]. Dans le premier article [87], ils poursuivent le travail de Hwang et Cheng (1973) [79] (étonnamment, ils laissent quasiment sous silence le travail de Cheng et Wu (1976) [80]). Ils considèrent que l'écoulement de base a un profil de température uniforme en $x=0$ et les perturbations 3D sont écrites sous la forme $f(x, y, z, t)=\hat{f}(x, z, t)e^{iky}$ (seuls les $R_{//}$ sont envisagés). L'originalité de cette étude est le critère utilisé pour déterminer la stabilité neutre: " $\partial f/\partial t=0$ et $\partial f/\partial x\neq 0$ ". Dans les deux études théoriques précédentes [61, 80] (cf. *tableau II*), le problème est stationnaire et le critère utilisé est $c_x=0$ ce que Lee et Hwang traduisent par " $\partial f/\partial x=0$ à t fixé". La *figure 12* compare les deux critères: " $\partial f/\partial t=0$ et $\partial f/\partial x\neq 0$ " permet de déterminer, pour un nombre de Rayleigh fixé, le point noté x_c sur l'axe, en amont duquel les perturbations s'amortissent et en aval duquel elles

s'amplifient dans le temps; " $\partial f/\partial x=0$ à t fixé" détermine la position critique d'apparition de la perturbation, qui se trouve toujours en amont de x_c . Ainsi, comme le montrent les graphes de la *figure 13*, le nombre de Rayleigh critique obtenu par Lee et Hwang (1991) [87] est supérieur à celui des analyses linéaires précédentes et il permet même d'approcher très correctement les résultats expérimentaux. Cette figure montre aussi que Ra^* décroît en s'éloignant de la zone d'entrée, quel que soit le nombre de Prandtl (à la différence de Hwang et Cheng (1973) [79]). On notera qu'une étude similaire à celle de Lee et Hwang mais valable à petits Pe , c'est à dire une étude prenant en compte la diffusion axiale de la chaleur et la naissance des instabilités sous la forme de R_{\perp} , n'a pas encore été menée à ce jour.

5 Stabilités convective et absolue des rouleaux transversaux et des rouleaux longitudinaux (1989-2001)

Dans cette partie, nous commençons par rappeler les notions générales sur les instabilités convectives et absolues (§5.1) ainsi que sur les équations de Ginzburg-Landau (§5.2), ce modèle 1D ayant été très souvent utilisé ces dernières années pour étudier la dynamique linéaire et faiblement non-linéaire des écoulements de PRB. Au §5.3, nous nous intéressons aux études qui ont déterminé le nombre de Rayleigh critique Ra_{\perp}^{conv} entre les zones d'instabilité convective et absolue pour les R_{\perp} et qui ont montré que les $R_{//}$ ne sont jamais absolument instables dans des écoulements de PRB entre deux plaques infinies. Dans le cas des conduites d'extension latérale finie, nous montrons que des études complémentaires, théoriques et numériques, seraient nécessaires pour expliquer certains phénomènes. Au §5.4, nous exposons des résultats concernant l'influence d'un bruit blanc, imposé en entrée de conduite, sur des écoulements de R_{\perp} convectivement instables.

5.1 A propos des instabilités convectives et absolues

Les analyses de stabilité linéaire des écoulements de PRB pleinement établis qui sont présentées au §4.2 s'intéressent uniquement à la *croissance temporelle* de perturbations infinitésimales. Dans ces études, un écoulement est dit " linéairement stable " si, quelle que soit la perturbation infinitésimale à laquelle il est soumis, l'amplitude de cette perturbation décroît dans le temps. Il est dit " linéairement instable " s'il existe au moins une perturbation dont l'amplitude croît dans le temps. Ce critère est suffisant pour déterminer l'*instabilité absolue* des écoulements dans le cas de systèmes fermés, c'est-à-dire pour les systèmes dans lesquels aucun fluide n'entre ou ne sort du domaine : les écoulements de Rayleigh-Bénard ou de Taylor-Couette par exemple. Il est insuffisant dans le cas des systèmes ouverts avec un écoulement moyen non nul : les écoulements de Poiseuille, les écoulements cisailés des couches de mélange, ou encore, comme nous l'avons vu au §4.2.4, les écoulements de PRB. Pour étudier la stabilité de tels écoulements, la *croissance temporelle et spatiale* des perturbations doit être prise en compte, ce qui fait apparaître les concepts d'*instabilités convective et absolue*. Ces concepts, définis dans le cadre de la physique des plasmas, ont été introduits par Huerre et Monkewitz (1985) [89] dans le cadre des instabilités hydrodynamiques, pour des écoulements de couche de mélange. Le principe de base qui permet de définir l'instabilité absolue ou l'instabilité convective consiste à étudier la réponse d'un écoulement soumis à une perturbation impulsionnelle unique. Mathématiquement, cela consiste à introduire une fonction de Dirac dans les termes de source des équations de perturbations linéarisées, à calculer la fonction de Green et à regarder son comportement aux temps longs. On trouvera la formulation mathématique, ainsi que la définition des critères de transition entre les zones de

stabilité, d'instabilité convective et d'instabilité absolue dans Huerre et Monkewitz (1990) [90].

Sans perdre en généralité, nous représentons sur la *figure 14* les réponses possibles des écoulements de PRB 2D perturbés par une impulsion. Le graphe donne les courbes de transition, dans le plan $Ra-Re$, entre les zones où l'écoulement de Poiseuille est linéairement stable et celles où il apparaît des R_{\perp} convectivement ou absolument instables. Pour chacune des zones, on montre l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation impulsionnelle localisée en $x=x_0$ à l'instant $t=t_0$. L'écoulement est *linéairement stable* pour $Ra < Ra_{\perp}^*(Re)$: l'amplitude de la perturbation tend à s'annuler partout dans la conduite pour des temps suffisamment longs. Pour $Ra > Ra_{\perp}^*(Re)$, l'écoulement est linéairement instable. Il est *convectivement instable* pour $Ra_{\perp}^*(Re) < Ra < Ra_{\perp}^{conv}(Re)$: quel que soit t , les fronts amont et aval de la perturbation se propagent dans le sens de l'écoulement moyen, dirigé ici selon les x croissants. Il existe un système de référence en mouvement, attaché au déplacement de la perturbation, dans lequel l'amplitude de cette dernière ne cesse de croître dans le temps. Par contre, pour des temps suffisamment longs, l'amplitude de la perturbation décroît pour tout x donné. La perturbation est évacuée de la conduite et l'écoulement retourne à sa position d'équilibre. Pour $Ra > Ra_{\perp}^{conv}(Re)$, l'écoulement est absolument instable: les fronts de la perturbation se propagent vers l'amont et vers l'aval. A cause des non-linéarités, l'amplitude croît jusqu'à saturation en toute position x de la conduite, lorsque t tend vers l'infini.

Les écoulements absolument et convectivement instables présentent des comportements très différents lorsqu'ils sont soumis à des perturbations extérieures. Dans le cas des écoulements absolument instables, une perturbation unique suffit à produire asymptotiquement une structure cohérente (l'apparition des R_{\perp} par exemple). Seules certaines fréquences, les modes "naturels" de l'écoulement, sont amplifiées. Ces

écoulements sont très peu sensibles à un forçage extérieur. Dans le cas où l'écoulement de PRB prend la forme de R_{\perp} , Müller et al. (1992) [68, 91] montrent numériquement que les modes naturellement amplifiés sont très peu perturbés par la présence d'un bruit blanc à l'entrée (cf. §5.4). Dans le cas des écoulements convectivement instables, une perturbation unique ne suffit pas pour déstabiliser l'écoulement de base. Pour voir apparaître un motif convectif, il faut perturber en permanence l'écoulement. Par exemple, le bruit inhérent aux manipulations expérimentales peut suffire si le canal est assez long pour permettre une amplification suffisante des perturbations. Les écoulements convectivement instables sont très sensibles à un forçage extérieur car ce sont des amplificateurs de bruit. A priori, n'importe quel mode de la perturbation est susceptible d'être amplifié. L'écoulement résultant du forçage peut être vu comme la somme d'ondes de différentes fréquences, spatialement amplifiées et évoluant dans le sens de l'écoulement. Chomaz et al. (1988) [92] expliquent que pour ces écoulements le spectre de fréquence est en général un "spectre bande" car les phénomènes d'auto-entretien des oscillations ou de résonance n'y sont pas possibles. Deissler (1987, 1989) [93, 94] montre aussi ce résultat en utilisant une équation de Ginzburg-Landau comme modèle d'écoulement convectivement instable (à condition de se placer suffisamment loin en aval de la source des perturbations localisées). Cependant, dès qu'un écoulement convectivement instable subit un forçage extérieur cohérent (présence d'un obstacle dans l'écoulement, influence des conditions aux limites aux frontières ouvertes lors de simulations numériques), des fréquences particulières sont amplifiées. Ce phénomène a principalement été étudié dans le cas du développement des instabilités de Kelvin-Helmholtz (cf. Chomaz et al. (1988) [92], Astruc (1993) [95] et Buell et Huerre (1988) [96]).

5.2 A propos des équations d'amplitude et de l'équation de Ginzburg-Landau

Les équations qui décrivent les systèmes physiques peuvent être très compliquées et difficiles à étudier (l'équation de Navier-Stokes par exemple). Grâce à des approximations adéquates, il est souvent possible de se ramener à un jeu d'équations simplifiées conservant les propriétés essentielles des phénomènes que l'on souhaite étudier. Les équations d'amplitude constituent de telles équations réduites. Ce sont des équations *monodimensionnelles* qui traduisent la dynamique *linéaire ou faiblement non-linéaire* de systèmes physiques. C'est-à-dire que ce sont des modèles simples qui permettent d'étudier l'évolution d'une instabilité au voisinage du point de bifurcation déterminé par la stabilité linéaire.

Lors de la présentation des études de stabilité linéaire au §4, nous avons vu qu'une perturbation infinitésimale de l'état de base dans l'écoulement de PRB 2D peut s'écrire sous la forme $f(x, z, t) = \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma t)}$ (où $f=U, W, P$ ou T). Au-delà du seuil d'instabilité, mais dans son voisinage, l'influence des non-linéarités reste faible. En supposant que les variations temporelles et éventuellement spatiales des variables $f(x, z, t)$ sont lentes, la solution du problème faiblement non-linéaire peut alors être recherchée sous la forme:

$$f(x, z, t) = A(x, t) \hat{f}(z) \cdot e^{i(k_x x + \sigma t)} \quad (4)$$

où $A(x, t)$ désigne une amplitude lentement modulée en espace et en temps et où $\hat{f}(z)$ est la fonction propre, associée à la valeur propre du mode le plus instable déterminé par la théorie linéaire. Les équations d'amplitude se proposent précisément de décrire les modulations spatio-temporelles de $A(x, t)$. On trouvera une description complète de la méthode permettant d'établir ces équations dans Thual (1987) [97] ou dans Barthelet

(1995) [98]. Newel et al. (1993) [99] proposent, quant à eux, une revue complète des différentes équations d'amplitude et de leur champ d'application.

L'équation de Ginzburg-Landau est un type particulier d'équation d'amplitude.

C'est une équation aux dérivées partielles qui s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} = aA + b \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - c|A|^2 A \quad (5)$$

Dans le cas général, l'amplitude $A=A(x, t)$ est une fonction complexe et a , b et c sont des coefficients complexes, où la partie réelle b_r de b est positive. $v_g=(\partial\sigma_i/\partial k_x)^*$ est la vitesse de groupe du mode le plus instable au point de bifurcation déterminé par la stabilité linéaire temporelle. $a=a_r+ia_i$ est le taux de croissance temporelle de A considérée comme une fonction de t uniquement. Le terme en dérivée seconde de x permet de traduire, par exemple, la modulation de l'amplitude causée par l'influence des conditions aux limites dans le système étudié. Le terme non-linéaire cubique permet quant à lui de prendre en compte la saturation de l'amplitude. L'équation (5) est donc un modèle très simple qui permet d'analyser la dynamique faiblement non-linéaire des écoulements dans de très nombreux problèmes (cf. Huerre et Monkewitz (1990) [90] et Newel et al. (1983) [99]). Huerre et Monkewitz (1990) [90] signalent que l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée (sans le terme cubique) est le modèle le plus simple permettant de donner naissance à des instabilités absolues et convectives. Deissler (1987) [93] traduit ces critères d'instabilité pour l'équation (5) linéarisée. Il montre que l'écoulement de base ($A=0$) est :

- absolument stable si $a_r < 0$ (6)

- absolument instable si $a_r - v_g^2 b_r / (4|b|^2) > 0$ (7)

- et convectivement instable si $0 < a_r < v_g^2 b_r / (4|b|^2)$ (8)

5.3 Instabilités convectives et absolues des R_{\perp} et des $R_{//}$

Les premiers à avoir étudié la stabilité convective et absolue des R_{\perp} 2D sont Müller et al. (1989) [78] à partir d'une équation de Ginzburg-Landau établie rigoureusement en partant des équations de conservation complètes. Parallèlement, afin de valider et de comparer les résultats de leur équation-modèle 1D, Müller et al. ont effectué des simulations numériques directes 2D. Tous les résultats sont obtenus à $Pr=1$, $Re<7$, et pour $Ra<2500$ afin de rester dans le domaine faiblement non-linéaire. L'ensemble de cette étude se trouve dans la thèse de Müller (1990) [67] et est publié dans sa quasi-intégralité dans Müller et al. (1992) [68]. L'article de Müller et al. (1989) [78] résume plus particulièrement les résultats obtenus à partir de l'équation de Ginzburg-Landau et Müller et al. (1992) [91] insistent davantage sur les simulations numériques directes 2D. L'équation de Ginzburg-Landau établie par Müller et al. s'écrit :

$$\tau^0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \nabla = \left[\text{tr}(I + i c^0) + \xi_0^0 (I + i c^1) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \lambda (I + i c^2) \right] \nabla \psi \quad (9)$$

où $\mu=(Ra-Ra_{\perp}^*)/Ra_{\perp}^*$ est la distance réduite entre le nombre de Rayleigh courant Ra et le nombre de Rayleigh critique au seuil $Ra_{\perp}^*(Re, Pr)$. Tous les autres paramètres de l'équation (9) sont aussi fonction de Pr et de Re . Pour chacun d'eux, Müller calcule des développements en puissances de Re . τ_0 , ξ_0^2 et γ s'écrivent par des développements en puissances paires de Re , et v_g , c_0 , c_1 et c_2 par des développements en puissances impaires de Re . Pour Re suffisamment petit, les termes d'ordre élevé peuvent être négligés. Les expressions de ces coefficients pour $Pr=1$, $5,8$ et $6,4$ sont données dans le *tableau IV*.

En se servant des critères d'instabilités convective et absolue de Deissler (1987) [93] (cf. équations (6-8)), Müller et al. (1989, 1992) [78, 68] montrent que la

courbe de séparation entre les régions de R_{\perp} absolument et convectivement instables

est définie par $\mu = \frac{v_g^2 \tau_0^2}{4\xi_0^2(1+c_1^2)} = \mu_{\perp}^{\text{conv}}$, ce qui se traduit en terme de nombre de

Rayleigh par :

$$Ra_{\perp}^{\text{conv}} = Ra_{\perp} * (1 + \mu_{\perp}^{\text{conv}}) \quad (10)$$

Cette courbe est dessinée pour $Pr=6,4$ sur la *figure 10*. Comme nous l'avions déjà observé, elle se compare favorablement avec les résultats expérimentaux de Ouazzani et al. (1990, 1993) [32, 100]. Pour la suite, on retiendra que l'équation (10) et tous les résultats issus de l'équation (9) ne sont précis qu'à petits nombres de Rayleigh et de Péclet (pour $Ra < 2500$ et $Pe < 6$ environ).

Récemment, Carrière et Monkewitz (1999) [69] ont aussi mené une étude des instabilités convectives et absolues dans les écoulements de PRB en analysant, à partir du calcul de la fonction de Green, la réponse linéaire aux temps longs de l'écoulement de PRB circulant entre deux plaques d'extensions infinies et soumis à une perturbation impulsionnelle. Autrement dit, ils se sont intéressés à l'évolution asymptotique du paquet d'onde provoqué par la perturbation. Dans cette analyse, aucune restriction sur la direction de propagation des ondes, sur l'orientation des rouleaux ($R_{//}$, R_{\perp} , R_{obliques}) et sur la valeur des paramètres de l'écoulement (notamment Re) n'est introduite. Pour $Pr=0,71$, $6,4$, 7 et 450 , ils tracent dans le plan $Ra-Re$ les courbes de transition $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ issues de leur analyse. Ils montrent que leur courbe $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re)$ à $Pr=6,4$ se situe légèrement en dessous de la courbe équivalente calculée à partir de l'équation (10) et des coefficients du *tableau IV* (et ce d'autant plus que Re augmente), mais qu'elle coïncide parfaitement avec les résultats de simulations numériques directes 2D de Nicolas et al. (1997) [101].

Ces derniers calculent le développement des écoulements de R_{\perp} dans des conduites 2D de longueur finie (allongement $A=10$ ou 20), sans qu'aucun forçage ne

soit imposé à l'écoulement. Un profil de Poiseuille purement conductif est imposé à l'entrée du domaine de calcul et une condition de sortie de type Orlandi (cf. §7.1) est utilisée à la sortie. En fonction des valeurs de Ra et de Re , les solutions obtenues sont soit des écoulements de Poiseuille, soit des écoulements de R_{\perp} . La limite entre la zone où naissent des structures thermoconvectives auto-excitées (les R_{\perp}) et la zone où il n'y en a pas (écoulement de Poiseuille) donne avec une bonne précision la limite Ra_{\perp}^{conv} entre les zones d'instabilités convectives et absolues pour les R_{\perp} . Cependant, la méthode la plus précise pour déterminer la courbe de transition $Ra_{\perp}^{conv}(Re)$ dans de telles simulations numériques directes consiste à calculer les couples (Ra, Re) pour lesquels la longueur d'établissement l_e des R_{\perp} diverge. Cette méthode sera décrite au §6.3.2. On notera que lorsqu'on simule les écoulements de PRB en utilisant des conditions aux limites périodiques, il n'est plus possible de retrouver la courbe $Ra_{\perp}^{conv}(Re)$ puisque toutes les perturbations qui sortent du domaine de calcul sont immédiatement réinjectées à l'entrée. En accord avec ce qui a été dit au §5.1 au sujet du comportement des écoulements convectivement instables perturbés en permanence, Nicolas (1997) [102] vérifie qu'avec des conditions aux limites périodiques, la courbe de transition entre écoulements de Poiseuille et R_{\perp} correspond exactement à la courbe théorique Ra_{\perp}^* .

Le résultat original et important obtenu par Carrière et Monkewitz (1999) [69] concerne les $R_{//}$. Ils montrent en effet que les $R_{//}$ ne sont jamais absolument instables lorsque $Re > 0$. Autrement dit, dans des écoulements de PRB en conduite d'allongement transversal infini, le seul mode absolument instable correspond aux R_{\perp} . Ce résultat est en contradiction avec les travaux de Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104], Tveitereid et Müller (1994) [105] et Li et al. (1997) [106] qui utilisent des modèles basés sur deux équations d'amplitude couplées, l'une traduisant le

développement des R_{\perp} et l'autre celui des $R_{//}$. En effet, ces études prédisent une transition convective-absolue à la fois pour les R_{\perp} et pour les $R_{//}$. Carrière et Monkewitz (1999) [69] montrent que les résultats de ces auteurs concernant l'instabilité absolue des $R_{//}$ sont erronés à cause d'une utilisation des équations d'amplitude en dehors de leur domaine de validité (hypothèse de variation lente de l'amplitude des rouleaux non vérifiée ; cf. §5.2). Le deuxième résultat important obtenu par Carrière et Monkewitz (1999) [69] avec la même analyse est qu'aux temps longs, pour $Ra_{//}^* = 1708 < Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$, le mode le plus amplifié se situant au centre du paquet d'ondes correspond à l'apparition de $R_{//}$. Ainsi, tant que l'écoulement est convectivement instable et que l'allongement transversal de la conduite est suffisamment grand, en supposant que le niveau de bruit en entrée de conduite soit suffisamment élevé (ce qui doit être le cas dans les expériences de laboratoire), on devrait observer des $R_{//}$ plus ou moins loin en aval de l'entrée. Ce résultat, obtenu avec une théorie linéaire, nécessiterait d'être confirmé expérimentalement dans des conduites de grandes extensions longitudinale et transversale. Seules les expériences de Fukui et al. (1983) [107] dans l'air, réalisées avec une conduite d'allongement $B=19,5$, pour une gamme de Ra et de Re où l'instabilité est convective selon Carrière et Monkewitz, semblent abonder en ce sens.

Pour résumer, nous avons vu jusqu'ici, dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies, que les théories linéaires permettent de déterminer $Ra_{\perp}^*(Re, Pr)$ (cf. équation (1)), $Ra_{//}^* (=1708)$ et $Ra_{\perp}^{\text{conv}}(Re, Pr)$ (cf. équation (10)) et que $Ra_{//}^{\text{conv}}$ n'existe pas. Dans le cas de conduites d'allongement transversal fini, elles permettent d'obtenir $Ra_{//}^*(B)$ (cf. *figure 8*) et $Ra_{\perp}^*(Re, Pr, B)$ (cf. *figure 9*). Par contre, aucune théorie n'a encore été développée dans ce cas pour calculer Ra_{\perp}^{conv} et

éventuellement $Ra_{//}^{\text{conv}}$. Cela paraît pourtant nécessaire puisque Ra_{\perp}^* ne traduit pas les observations expérimentales pour $B < \infty$ dès lors que l'écoulement n'est pas perturbé par un bruit permanent. D'autre part, il est étonnant de constater (cf. *tableau III*) que le seuil théorique $Ra_{//}^*(B)$ s'accorde bien avec les seuils de transition déterminés par les expériences de laboratoire et les simulations numériques, alors qu'aucune perturbation particulière, semble-t-il, n'est introduite dans ces écoulements. Cela nous amène à poser la question suivante : quel mécanisme peut expliquer, dans ces expériences, l'apparition de $R_{//}$ non loin de la zone d'entrée et pour Ra proche de $Ra_{//}^*$ si on considère, comme dans le cas des écoulements entre deux plaques infinies, que les $R_{//}$ sont uniquement convectivement instables ? Des analyses théoriques et expérimentales complémentaires seraient nécessaires pour répondre. Nous proposons malgré tout quelques hypothèses. La première est issue des constatations bibliographiques suivantes. Dans de nombreuses études récentes, numériques [12, 13, 18, 19, 81] (cf. *tableau I*) et expérimentales [82, 83], mais aussi dans l'analyse linéaire de Cheng et Wu (1976) [80] (cf. §4.3 et *figure 11*), il ressort que, dans la zone d'entrée sur la plaque chauffée, les R_{\perp} sont plus instables que les $R_{//}$ et qu'il peut exister un ou plusieurs R_{\perp} fixes ou en mouvement en amont d'un écoulement de $R_{//}$ pleinement établi. Il se peut donc que les structures transversales présentes à l'entrée soient la cause des perturbations qui provoquent la formation des $R_{//}$ en aval. Autrement dit, les R_{\perp} seraient localement absolument instables à l'entrée et convectivement instables vers l'aval. Cependant, comme d'après Carrière et Monkewitz (1999) [69], le mode le plus amplifié aux temps longs correspond aux $R_{//}$, les R_{\perp} qui apparaissent à l'entrée laisseraient la place aux $R_{//}$ convectivement instables dès lors que $Ra_{//}^* < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$. La deuxième hypothèse est issue de la constatation que, dans les expériences et dans les simulations numériques en canal confiné, les $R_{//}$ naissent toujours par paires à partir des

parois verticales et envahissent progressivement le canal vers l'aval (cf. références [72-75, 81] et §4.2.4). Il se pourrait que la présence des parois verticales modifie la nature de l'instabilité (que les $R_{//}$ deviennent absolument instables dans ce cas) ou bien favorise l'apparition de perturbations entretenues provoquant la naissance de $R_{//}$ convectivement instables (par exemple, par l'apparition d'un bruit thermique causé par la présence de gradients horizontaux résiduels entre les plaques horizontales et verticales).

5.4 Influence d'un bruit blanc sur des écoulements de R_{\perp} convectivement instables

Les conditions d'entrée et de sortie utilisées généralement dans les simulations numériques directes d'écoulements de PRB 2D sont de type "profils de vitesse et de température constants" ou "gradients de vitesse et de température constants". Elles empêchent donc l'entrée de toute perturbation dans le domaine de calcul. D'après ce qui a été dit au §5.1, et qui est vérifié numériquement par Müller et al. (1992) [68, 91] et Nicolas et al. (1997) [101], la formation des R_{\perp} n'est donc pas possible dès que l'on pénètre dans la région d'instabilité convective : $Ra_{\perp}*(Re) < Ra < Ra_{\perp}^{conv}(Re)$ pour Re donné. Pour étudier l'influence des perturbations dans cette région, Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68, 91] superposent un bruit blanc (une vitesse verticale fluctuante) au profil de Poiseuille purement conductif imposé à l'entrée du domaine de calcul, en utilisant une suite de nombres aléatoires non-corrélés de moyenne nulle. Pour Ra et Re fixés, trois simulations sont effectuées, telles que l'amplitude du bruit blanc à l'entrée soit égale à 1%, 10% et 100% de l'amplitude de saturation W_s de l'écoulement aval. Dans le cas où les simulations numériques directes sont effectuées dans la région absolument instable, Müller montre

que les écoulements de R_{\perp} sont à peine perturbés par le bruit blanc: seules, des petites variations dans l'enveloppe $W_{\max}(x)$ de la composante de vitesse verticale maximale en reflètent la présence sur une courte distance à l'entrée de la conduite. Plus loin en aval, les R_{\perp} se comportent comme dans le cas non perturbé. Par contre, lorsqu'on se trouve dans la région convectivement instable, la réponse de l'écoulement est très différente. La *figure 15* reproduit le résultat de simulations numériques pour un écoulement convectivement instable. Elle montre l'évolution axiale de $W(x, z=0,5)$ pour les trois intensités de bruit à l'entrée. Après une phase d'amplification linéaire pendant laquelle seuls certains modes sont sélectionnés, la phase d'amplification non-linéaire de ces modes permet la formation de R_{\perp} qui se propagent vers l'aval (cf. Deissler (1987) [93]). Cependant, Müller observe que les enveloppes $W_{\max}(x)$ des R_{\perp} ne sont plus stationnaires mais fluctuent légèrement autour d'un profil moyen. La moyenne temporelle de la longueur d'établissement l_e des R_{\perp} décroît de manière monotone lorsque l'intensité du bruit augmente. Si la source des perturbations est arrêtée, les cellules convectives disparaissent : elles sont évacuées du domaine de calcul.

Müller retrouve la même dynamique des écoulements soumis à un bruit blanc avec son équation d'amplitude. Dans la région près de l'entrée, dans la phase d'amplification linéaire des perturbations, l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée permet de démontrer que l'amplitude du mode le plus amplifié est égale à $A_0 e^{\kappa x}$, où A_0 est l'amplitude du bruit blanc à l'entrée, et où κ est le taux de croissance spatial maximum qui est constant pour Ra et Re fixés. On retrouve ce résultat avec les simulations numériques de la *figure 15*: la ligne droite en pointillés relie les positions axiales où la vitesse verticale a une même (petite) amplitude qui résulte d'un bruit dont l'intensité A_0 croît linéairement sur une échelle logarithmique lorsqu'on passe du

graphe (a) au graphe (c). La longueur de la zone d'amplification linéaire décroît linéairement en fonction de $\text{Log}(A_0)$.

Très récemment, de nombreux auteurs ont analysé, par des approches théoriques, l'influence de diverses sources de perturbations sur différentes configurations d'écoulements convectivement instables. Ces études ont pour ambition d'essayer de comprendre si c'est le bruit thermique interne à l'ensemble du système qui déclenche et entretient les structures thermoconvectives observées expérimentalement dans les régimes d'écoulements convectivement instables ou si c'est une autre source de perturbations, d'origine externe au système, qui pourraient, par exemple, être advectées dans le système depuis l'entrée. Les théories développées pour ces analyses étant relativement complexes (utilisant notamment l'équation de Ginzburg-Landau stochastique), nous renvoyons à Lücke et Szprynger (1997) [108] et à Jung et al. (2001) [109] pour avoir plus de détails sur ces analyses et une bibliographie plus complète sur le sujet. Notons que ces deux articles traitent de la configuration des écoulements de PRB.

6 Transferts thermiques et longueurs d'établissement des structures thermoconvectives (1966-2001)

6.1 Transferts thermiques dans la zone d'entrée

Nous faisons tout d'abord quelques remarques qui seront valables tant que rien d'autre n'aura été mentionné explicitement. Les travaux cités dans ce paragraphe concernent la variation axiale du nombre de Nusselt dans la zone d'entrée thermique d'écoulements thermoconvectifs laminaires de type PRB. L'écoulement qui arrive sur la plaque chauffée est supposé dynamiquement établi. La plupart des travaux se situent à grands nombres de Reynolds ($50 < \text{Re} < 1000$) et donc en phase de $R_{//}$. Parmi ces

études, celles qui utilisent la simulation numérique directe négligent la diffusion axiale et résolvent des équations paraboliques. Tous les résultats présentés se rapportent à des nombres de Nusselt moyennés dans la direction transversale du canal et ils sont calculés sur la plaque inférieure chauffée à flux constant. Enfin, signalons que, dans les travaux expérimentaux, la mesure du nombre de Nusselt n'est pas aisée: elle nécessite beaucoup de précautions pour évaluer correctement les flux de chaleur échangés par conduction, convection et rayonnement dans le système. Nous renvoyons le lecteur aux articles d'Ostrach et Kamotani (1975) [58], de Maughan et Incropera (1987) [110] et de Lin et Lin (1996) [111] pour plus de précisions.

Les premiers à avoir mesuré expérimentalement les transferts thermiques dans la zone d'entrée des écoulements de PRB sont Kamotani et Ostrach (1976) [84] et Kamotani et al. (1979) [85] pour des écoulements d'air (cf. §4.3). Les mesures de Nu sont relativement imprécises puisque les auteurs signalent des incertitudes de l'ordre de 12%. Plus récemment, un travail intensif sur le sujet a été effectué par Incropera et ses coauteurs [110, 112-115] pour des conduites d'allongement transversal $2 \leq B \leq 20$, dans le cas où les parois, autres que la plaque chauffée du bas, sont adiabatiques. Incropera et al. (1987) [112], expérimentalement, et Mahaney et al. (1987, 1988) [113, 114], par simulations numériques 3D, étudient le cas d'écoulements d'eau, alors que Maughan et Incropera (1987, 1990) [110, 115], expérimentalement et par simulations numériques 2D, étudient le cas d'écoulements d'air. Nonino et Del Giudice (1991) [116] calculent numériquement la variation axiale des nombres de Nusselt pariétaux pour un canal d'allongement $B=2$, pour $Pr=6,5$ et pour plusieurs combinaisons de conditions aux limites thermiques (conditions de température ou de flux imposés, de conduction ou de convection sur les quatre parois du canal). Narusawa (1993) [72] propose une étude numérique 3D à $B=10$ et $Pr=0,71$ dont le but est de retrouver, à partir de l'évolution axiale de Nu et en jouant sur le type de conditions aux limites thermiques, les

différentes longueurs d'établissement déterminées par anémométrie laser-Doppler par Chiu et Rosenberger (1987) [117] dans des écoulements de PRB dans l'azote (cf. §6.3.1). Narusawa (1998) [118] reprend cette étude numérique pour étudier l'influence du rapport d'allongement transversal B sur Nu et sur les longueurs d'établissement des $R_{//}$ lorsque $2 \leq B \leq 6$. Très récemment, Lin et Lin (1996) [111, 119], Gau et al. (1999) [120] et Tseng et al. (2000) [121] ont effectué des mesures expérimentales de Nu dans l'air. Lin et Lin (1996) [111, 119] ont étudié les écoulements dans une conduite rectangulaire d'allongement $B=4$, d'axe horizontal ou incliné par rapport à l'horizontale, dans le cas où se développent des $R_{//}$ stationnaires, périodiques, voire chaotiques (cf. §8.3). En vue d'applications possibles en CVD, Gau et al. (1999) [120] et Tseng et al. (2000) [121] ont étudié le cas d'écoulements dans des conduites horizontales à plans parallèles ou très légèrement convergents. Notons que toutes les études expérimentales citées ci-dessus et postérieures à 1987 (Incropera et al. (1987) [112] inclus) proposent, parallèlement à la mesure de $Nu=f(x)$, des visualisations par plans lumineux des structures thermoconvectives qui se développent dans la zone d'entrée.

Le résultat qualitatif principal, commun à l'ensemble de ces travaux, est résumé à la *figure 16*. Il donne l'évolution de Nu en fonction de $x/(PeD_h)$. Dans ce graphe, la courbe en trait discontinu correspondant au cas de l'écoulement forcé, on peut distinguer trois régions lors de l'apparition du régime thermoconvectif : (1) la région d'écoulement forcé, (2) celle où la convection mixte se développe (la courbe $Nu=f(x)$ continue à diminuer, puis augmente brutalement, l'augmentation étant éventuellement suivie d'oscillations amorties) et (3) celle où le régime thermoconvectif est parfaitement établi ($Nu=f(x)$ garde une valeur constante). Toutes les études citées ci-dessus montrent que la longueur de la région (1) augmente lorsque Re augmente ou

Gr diminue. Dans la région (2), les oscillations qui suivent la brutale augmentation de Nu ont une amplitude et un taux de décroissance qui varient d'une étude à l'autre. Ces oscillations sont en général de grandes amplitudes et relativement peu amorties dans le cas de petits rapports de forme ($B \leq 4$) et de nombres de Rayleigh élevés ($Ra > 8000$) (voir, par exemple, Narusawa (1998) [118], Lin et Lin (1996) [111] et Maughan et Incropera (1990) [115] où la valeur maximale de Nu dans la zone (2) est supérieure d'environ 25 % à la valeur de Nu de la zone (3)). Parfois, dans les cas contraires, aucune oscillation n'est observée (cf. Kamotani et Ostrach (1976) [84], Kamotani et al. (1979) [85] et Narusawa (1993) [72]). Il est singulier de constater qu'aucune visualisation expérimentale ou numérique du développement des instabilités dans la zone d'entrée permette d'expliquer le comportement oscillatoire du transfert thermique. Maughan et Incropera (1990) [115] et Lin et Lin (1996) [111] proposent des lois de corrélation, en fonction de Pe et du nombre de Rayleigh modifié Ra' (cf. nomenclature), pour la position x_1 de la fin de la zone (1) (ou du début de la zone (2)) :

$$Ra' = 1620 (x_1/Pe)^{-1,34} [115]$$

(11)

$$Ra' = 1330 (x_1/Pe)^{-1,34} [111] \tag{12}$$

et pour la position x_2 de la valeur maximale de Nu dans la zone (2) :

$$Ra' = 1950 (x_2/Pe)^{-1,95} [115]$$

(13)

Narusawa (2001) [77] réalise une analyse théorique utilisant le second principe de la thermodynamique et des simulations numériques 3D d'écoulements de $R_{//}$ dans l'azote, à $Re \approx 50$, $2500 \leq Ra \leq 5000$ et $2,2 \leq B \leq 3,5$. Il montre que la courbe donnant la variation en fonction de $x/(PeD_h)$ du taux de production d'entropie volumique lié aux dissipations thermiques ($\kappa/T^2((\partial T/\partial x)^2 + (\partial T/\partial y)^2 + (\partial T/\partial z)^2)$) et

intégré sur la section transversale du canal est semblable à la courbe donnant Nu en fonction de $x/(PeD_h)$. Ajoutons que ces deux courbes ont un comportement concordant avec la *figure 16*. Narusawa (2001) [77] montre aussi théoriquement que, dans le cas d'écoulements de $R_{//}$ parfaitement établis, le taux de production d'entropie introduit ci-dessus est proportionnel au nombre de Nusselt.

Il semble que seuls Evans et Greif (1989, 1991) [6, 7] (cf. *tableau I*) aient publié des résultats sur les variations axiales et transversales de Nu dans la zone d'entrée thermique lorsque Re est très petit et qu'il apparaît des R_{\perp} . Dans leurs simulations numériques 2D et 3D, ils s'intéressent à un écoulement de Poiseuille purement conductif qui pénètre dans un canal chauffé uniformément par le bas et refroidi uniformément par le haut. Ils montrent que l'écoulement reste parallèle ($Nu=1$) sur une distance qui s'allonge si Ra diminue ou si Re augmente. A l'apparition des R_{\perp} , le nombre de Nusselt oscille sinusoïdalement et augmente en moyenne. Lorsque l'écoulement de R_{\perp} est complètement établi, le nombre de Nusselt moyen en temps reste constant.

Evans et Greif (1991, 1993) [7, 21] déterminent aussi les variations spatiales de Nu lorsque l'écoulement de PRB est en phase de $R_{//}$ ou lorsque des structures plus complexes apparaissent (superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$). D'une manière générale, de nombreux travaux numériques 3D récents, ont mis en évidence de telles structures complexes dans l'entrée des conduites chauffées. Dans de nombreux cas, pour visualiser ces structures, des nappes 3D donnant la valeur du nombre de Nusselt local en chaque point des parois horizontales sont dessinées. Cette technique est notamment utilisée par Mahaney et al. (1987) [113], Evans et Greif (1993) [21], et par T. F. Lin et de ses coauteurs : Huang et Lin (1994, 1995, 1996) [122-124], Lin et al. (1996) [125], Lin et Lin (1997) [126], Chang et al. (1997) [127], Yu et al. (1997) [73, 128], Yu et Lin

(1997) [129]. Nous reviendrons sur toutes ces études et sur l'analyse des structures thermoconvectives complexes aux §8.

6.2 Transferts thermiques dans les écoulements de PRB pleinement établis

Presque tous les travaux théoriques (Mori et Uchida (1966) [57]) expérimentaux (Mori et Uchida (1966) [57], Ostrach et Kamotani (1975) [58], Fukui et al. (1983) [107]) et numériques (Hwang et Cheng (1971) [130], Fukui et al. (1983) [107], Ouazzani et al. (1989) [31], Hasnaoui et al. (1991) [25], Narusawa (1993, 1998) [72, 118], Chen et Lavine (1996) [131]) dans lesquels on calcule le nombre de Nusselt moyen en espace et en temps pour des écoulements de PRB pleinement établis s'accordent à dire que Nu ne dépend pas de Re et qu'il croît avec Ra . Cela vaut aussi bien pour les écoulements de $R_{//}$ [57, 58, 72, 107, 118, 130, 131] que pour les écoulements de R_{\perp} [25, 31, 131]. Autrement dit, selon toutes ces études, dans une conduite rectangulaire chauffée par le bas, le nombre de Nusselt reste le même qu'il y ait un écoulement (convection mixte) ou qu'il n'y en ait pas (convection naturelle). Nous allons voir ci-dessous que ce résultat est vrai à tous nombres de Reynolds pour les écoulements de $R_{//}$ mais qu'il n'est valable qu'à petits nombres de Reynolds pour les écoulements de R_{\perp} .

Dans le *tableau V*, on présente les différentes formules de corrélation donnant Nu en fonction de Ra extraites des travaux qui viennent d'être cités. On précise la gamme de nombres de Rayleigh et le fluide (nombre de Prandtl) pour lequel la formule a été calculée. L'extension latérale B de la conduite est supérieure à 10 dans tous les cas. On ajoute deux résultats de convection naturelle : le premier a été calculé théoriquement par Schlüter et al. (1965) [132] dans le domaine linéaire ; le second a été obtenu par Platten et Legros (1984) [51] en corrélant de très nombreux résultats théoriques, numériques et expérimentaux du domaine non-linéaire. On donne aussi

l'expression de Nu calculée par Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] à partir de leur équation de Ginzburg-Landau, dans le cas des R_{\perp} . Dans cette expression, γ est le coefficient qui intervient dans l'équation d'amplitude en facteur du terme de saturation cubique (A^3). Son expression en fonction de Re à Pr=1 et 6,4 est donnée dans le *tableau IV*.

On peut noter que l'expression de Nu donnée par Müller et al. (1992) [68] n'est rien d'autre que l'expression de Schlüter et al. (1965) [132] dans laquelle $Ra^*_0=1708$ est remplacé par $Ra_{\perp}^*(Re)$. Comme Nu-1 est proportionnel à Ra- Ra_{\perp}^* , et que $Ra_{\perp}^*(Re)$ augmente lorsque Re augmente, le nombre de Nusselt pour les écoulements de R_{\perp} pleinement établis décroît lorsque Re augmente. Il atteint la valeur Nu=1 lorsque $Ra=Ra_{\perp}^*(Re)$. Cette décroissance de Nu en fonction de Re est confirmée par les simulations numériques directes 2D de R_{\perp} réalisées sur une large gamme de nombres de Reynolds par Nicolas et al. (1997) [101] et par Nicolas (1997) [102] (voir la figure VI-18 et les commentaires de cette référence). Dans une moindre mesure, les simulations numériques 3D de Chen et Lavine (1996) [131] montrent aussi ce comportement. Dans les travaux de Ouazzani et al. (1989) [31] et de Hasnaoui et al. (1991) [25], la variation de Nu en fonction de Re a pu être négligée car seuls des petits nombres de Reynolds ont été considérés. (Nu-1) étant proportionnel à (Ra- Ra_{\perp}^*) pour les écoulements de R_{\perp} , on peut supposer que (Nu-1) est proportionnel à (Ra- $Ra_{//}^*$) pour les écoulements de $R_{//}$. Donc, quand Re augmente à Ra fixé, Nu décroît dans le cas des R_{\perp} alors qu'il reste constant dans le cas des $R_{//}$ (puisque $Ra_{//}^*$ ne dépend pas de Re). Ainsi, lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, le passage de la configuration de R_{\perp} à celle de $R_{//}$ permet de maintenir un transfert de chaleur maximum à travers la conduite.

Parmi toutes les études citées, les seuls auteurs à avoir calculé le nombre de Nusselt dans des conduites de petit allongement transversal sont Chen et Lavine (1996) [131] à $B=2$ et Narusawa (1998) [118] pour $2 \leq B \leq 6$. Ils ont effectué des simulations numériques directes de $R_{//}$ à $Pr=0,7$. Chen et Lavine (1996) [131] montrent que les transferts thermiques sont supérieurs de 10% aux estimations les plus élevées obtenues aux mêmes valeurs de Ra lorsque B est grand (en l'occurrence, ces estimations sont celles de Ouazzani et al. (1989) [31] avec $B=19,5$). Par contre, Narusawa (1998) [118] a obtenu des résultats inverses : il trouve que Nu augmente lorsque B augmente de $B=2$ à $B=6$ pour Ra fixé avec $3790 \leq Ra \leq 8300$. Narusawa (1993) [72] montre aussi qu'avec $B=10$ le nombre de Nusselt moyen est inférieur de 8 à 10% au résultat de Fukui et al. (1983) [107] obtenu avec $B=20$ (cf. *tableau V*).

Dans le cadre de la CVD, à partir de mesures expérimentales dans l'air couvrant plusieurs configurations thermoconvectives (R_{\perp} , $R_{//}$, $R_{//}$ sinueux), Chiu et al. (2000) [14] proposent deux corrélations en fonction de Re et $Gr'=Ra'/Pr$ sur les nombres de Nusselt moyens dans des écoulements à $9,5 \leq Re \leq 40$, $4,3 \times 10^5 \leq Gr' \leq 4,3 \times 10^6$, $B=5$ et avec un substrat horizontal ou incliné à 8° . Fung et al. (1987) [133] proposent quant à eux une étude originale où ils calculent des écoulements pleinement développés et stationnaires de $R_{//}$ par simulations numériques 2D, en formulation (Ω, Ψ) , dans le plan (y, z) , pour des conduites dont l'extension latérale B varie entre 4 et 16 et pour $Pr=0,73$. Dans cette étude, les parois sont chauffées à flux constant dans la moitié inférieure de la conduite et sont isolées dans la moitié supérieure. Pour $1000 \leq Gr \leq 25000$, jusqu'à quatre solutions stables (correspondant chacune à un nombre pair mais différent de $R_{//}$) sont obtenues pour une valeur de B fixée. La multiplicité des solutions augmente lorsque B augmente. Un graphe présente

à Gr fixé l'évolution du nombre de Nusselt pariétal moyen en fonction de B et du nombre de $R_{//}$ dans la conduite.

6.3 Longueurs d'apparition et d'établissement des $R_{//}$ et des R_{\perp}

6.3.1 Cas des $R_{//}$

A partir de mesures d'anémométrie laser-Doppler dans des écoulements de $R_{//}$ dans l'azote, Chiu et Rosenberger (1987) [117] ont déterminé la longueur L_1 d'apparition des instabilités au début de la zone chauffée et la longueur L_2 d'établissement complet des $R_{//}$. Précisément, L_1 correspond à la position où il apparaît à la côte $z=0,2$ des modulations de plus de 3% de la composante axiale U de la vitesse par rapport au profil de Poiseuille ; L_2 correspond à la position où l'amplitude de U atteint 95% de son amplitude finale en $z=0,5$. Les auteurs donnent pour L_1 et L_2 les deux formules suivantes, fonction de h, Re et $\varepsilon=(Ra-1708)/1708$, corrélant leurs résultats expérimentaux pour $1300 < Ra < 8300$ et $15 < Re < 170$:

$$L_1 \approx 0,65h\varepsilon^{-0,44}Re^{0,76} \quad (14)$$

$$L_2 \approx 0,68h\varepsilon^{-0,69}Re^{0,96} \quad (15)$$

Les expériences de Chiu et Rosenberger (1987) [117] sont reproduites numériquement par Narusawa (1993) [72] avec un très bon accord. Les simulations numériques mettent en évidence que la longueur L_1 correspond assez bien à la position de Nu^{\min} dans la zone d'entrée (cf. §6.1 et *figure 16*) alors que la longueur L_2 correspond à la position où Nu atteint 95% de sa valeur pleinement développée. Narusawa étudie aussi l'influence de la températures du fluide à l'entrée [72], des conditions aux limites thermiques adiabatiques et isothermes sur les parois verticales [72] et du rapport de forme B pour $2 \leq B \leq 6$ [118] sur les longueurs d'établissement des $R_{//}$ et sur le nombre de Nusselt à l'entrée. A partir de leurs simulations numériques

directes 3D de $R_{//}$ à $Pr=0,71$, Yu et al. (1997) [73] localisent la naissance des instabilités comme étant la position x_3 où le nombre de Nusselt moyen dans la direction transverse augmente de 3% par rapport au cas de l'écoulement forcé. Cette position est donnée par une formule de corrélation semblable aux formules donnant x_1 et x_2 au §6.1 ; elle est établie pour $20 \leq Re \leq 50$ et $6000 \leq Ra \leq 31000$ et s'écrit

$$Ra = 1672 (x_3/Pe)^{-1,1} \quad [73] \quad (16)$$

Dans le cas de conduites d'allongement transversal suffisamment grand (disons $B \geq 6$), il est bien connu que les $R_{//}$ apparaissent progressivement dans la conduite : ils naissent près des parois verticales et se propagent de manière symétrique vers l'intérieure de la conduite plus on va vers l'aval (voir les expériences de Chiu et Rosenberger (1987) [117] et de Chang et al. (1997) [74] et les simulations numériques de Mahaney et al. (1987) [113], Narusawa (1993) [72], Nobile et Onesti (1996) [81] et Yu et al. (1997) [73]). Chang et al. (1997) [74], pour $B=12$ et $Pr \approx 0,7$ (air), proposent des formules de corrélation fonction de Re et Ra donnant les positions d'apparition de la paire de $R_{//}$ en contact avec les parois, puis de la paire suivante, ainsi que la position où les $R_{//}$ occupent toute la largeur de la conduite.

6.3.2 Cas des R_{\perp}

Müller (1990) [67], Müller et al. (1989, 1992) [78, 68], Ouazzani (1991) [134], Ouazzani et al. (1995) [135], Nicolas (1997) [102] et Nicolas et al. (1997) [101] ont déterminé la longueur d'établissement l_e des R_{\perp} à partir de l'enveloppe stationnaire $W_{max}(x)$ de la composante de vitesse verticale maximale le long de l'axe de la conduite. L'évolution de W_{max} en fonction de x est présentée à la *figure 17* à $Pr=6,4$, pour $Ra=1836$ à plusieurs Re et pour $Re=0,31$ à plusieurs Ra . A partir de l'entrée, W_{max} croît avec x jusqu'au seuil de saturation W_s , sur une distance qui augmente

lorsque Re augmente ou lorsque Ra diminue. C'est à dire que les R_{\perp} sont poussés de plus en plus vers l'aval du canal lorsque le débit augmente ou lorsque le gradient de température diminue. Ce résultat a été montré expérimentalement pour la première fois par Luijckx et al. (1981) [66] et nous l'avons déjà rencontré avec Evans et Greif (1989) [6] au §6.1. Dans les références [67, 68, 78, 101, 102, 134, 135], la longueur d'établissement l_e pour les R_{\perp} , est définie par $W_{\max}(l_e) = W_s/2$. Celle-ci est représentée par une double flèche à la *figure 17* pour $Ra=1836$ et $Re=0,09$.

On rappelle que Müller et al. (1989, 1992) [78, 68] étudient les écoulements de R_{\perp} à partir d'une équation de Ginzburg-Landau (cf. §5.3). A condition que Ra et Re restent suffisamment petits, ces auteurs montrent que toutes les courbes $l_e=f(Re)$ à Ra fixé, ou $l_e=f(Ra)$ à Re fixé, peuvent être " unifiées " en une seule courbe $L_e=f(V_g)$, où $L_e = \sqrt{\mu} l_e / \xi_0$ est la longueur d'établissement réduite et où $V_g = v_g \tau_0 / (\mu \xi_0^2 (1 + c_1^2))^{1/2}$ est la vitesse de groupe réduite. Dans ces deux expressions, v_g , μ , ξ_0 , τ_0 et c_1 sont les paramètres qui interviennent dans l'équation de Ginzburg-Landau (voir le *tableau IV* pour avoir leurs valeurs à $Pr=1, 5,8$ et $6,4$). Pour $Pr=1$, $Re \leq 4$ et $Ra \leq 2420$, ils montrent que la courbe théorique $L_e=f(V_g)$ concorde parfaitement avec leurs simulations numériques directes 2D des écoulements de R_{\perp} (voir la figure 6 de Müller et al. (1992) [68]). De plus, ils démontrent que la courbe $L_e=f(V_g)$ est *universelle*, dans le sens où elle est valable quel que soit le nombre de Prandtl. La *figure 18* compare la courbe théorique $L_e=f(V_g)$ établie par Müller et al. avec des résultats de simulation numérique directe 2D obtenus par Nicolas (1997) [102] pour des écoulements de R_{\perp} à $Pr=6,4$. Les courbes numériques et théorique concordent effectivement tant que Re et Ra " ne sont pas trop grands " : à $Pr=6,4$, cela correspond à $Ra < 2500$ et $Re < 0,5$.

La courbe théorique $L_e=f(V_g)$ diverge en $V_g=2$ (cf. *figure 18*). Cela correspond au passage de la zone de R_\perp absolument instables ($V_g<2$) à la zone de R_\perp convectivement instables ($V_g>2$). On peut en effet vérifier en comparant les *figures 10 et 17* que l_e augmente lorsqu'on se rapproche de la région convectivement instable et qu'elle diverge en $(Ra ; Re)=(1836 ; 0,44)$ et $(1765 ; 0,31)$, c'est à dire exactement sur la courbe de transition Ra_\perp^{conv} (cf. *figure 10*). A Pr fixé, pour un écoulement non perturbé par un bruit extérieur, les valeurs de Ra et Re pour lesquelles l_e diverge permettent donc de définir très précisément la courbe de transition $Ra_\perp^{\text{conv}}(Re)$ (cf. Nicolas et al. (1997) [101]).

7 Evolution spatiale et temporelle des rouleaux transversaux (1989-2001)

Dans cette partie, nous proposons une analyse fine de la structure spatiale et du comportement temporel des R_\perp . Nous nous intéressons à l'influence des conditions aux limites de sortie (§7.1) et d'entrée (§7.2) sur le développement spatial des R_\perp dans les simulations numériques directes et dans les expériences. Au §7.2, il sera notamment question du blocage des R_\perp provoqué par les conditions d'entrée pour des valeurs petites mais non nulles de Re. Aux §7.3, 7.4 et 7.5, on s'intéressera respectivement à la fréquence f des R_\perp , à leur longueur d'onde λ et au rapport V_T/U° de la vitesse des R_\perp sur la vitesse débitante, en fonction des paramètres de l'écoulement : Ra, Re, Pr et/ou B.

7.1 Choix et influence des conditions aux limites de sortie dans les simulations numériques directes

Lors du minisymposium sur les conditions aux limites ouvertes qui s'est tenu à Swansea en juillet 1989, et dont le résumé a été publié par Sani et Gresho (1994) [136], ces auteurs ont proposé d'utiliser, entre autres, l'écoulement de PRB 2D comme configuration de référence pour étudier l'influence des conditions aux limites de sortie lors de la simulation numérique d'écoulements instationnaires avec recirculations et frontières ouvertes. Le cas test qui a été choisi est l'écoulement absolument instable de R_{\perp} qui apparaît à $Pr=2/3$, $Ra=10000$ et $Re=10$. Une solution précise pour cet écoulement a été calculée par Evans et Paolucci (1990) [137]. Quatre études (les deux plus anciennes font partie des contributions au minisymposium) ont utilisé ce cas test pour comparer différents types de conditions aux limites ouvertes sur la frontière de sortie : Bottaro (1990) [138], Kobayashi et al. (1993) [139] et Nicolas et al. (1997) [140] ont utilisé des codes basés sur une formulation en variables primitives (U, W, P) avec une méthode de volumes finis et des algorithmes de résolution de type SIMPLER, SIMPLE et Lagrangien augmenté, respectivement. Comini et al. (1997) [141] ont utilisé un code basé sur une formulation de type fonction de courant-rotationnel (ψ, Ω) avec une méthode d'éléments finis.

Sur l'ensemble de ces travaux, onze conditions aux limites de sortie différentes ont été testées. Parmi celles-ci, on trouve des profils imposés de vitesse et de température, des dérivées normales de vitesse et de température nulles, des conditions de type Fourier (c'est à dire des conditions mixtes entre les conditions de Dirichlet et de Neumann), des extrapolations de vitesse et de température utilisant les deux ou trois points en amont de la frontière et l'imposition de la conservation de la masse obtenue en discrétisant l'équation de continuité. Enfin, les quatre études ont testé des conditions aux limites de type Orlanski (cf. Orlanski (1976) [142]). Cette condition à la limite est la seule parmi toutes celles testées qui varie au cours du temps. Elle consiste à écrire en

sortie de conduite une équation de transport dans la direction axiale x pour les grandeurs $f=(U, W, T, \Omega)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U^{\circ} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

où la vitesse de transport $U^{\circ}=\text{cste}$ est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite. La condition de type Orlandi pour ψ est plus compliquée. Elle dérive de l'équation (17) et des expressions de U et de Ω en fonction de ψ (cf. Comini et al. (1997) [141]).

Sans contestation possible, il ressort de ces quatre études que la condition de sortie de type Orlandi (équation (17)) est celle qui perturbe le moins l'écoulement. Nicolas et al. (1997) [140] montrent que c'est la seule qui permette un écoulement rentrant, lorsqu'un R_{\perp} est à cheval sur la frontière de sortie. Ils déterminent l'amplitude de la perturbation et la longueur de la zone perturbée en amont de la frontière de sortie, en comparant les enveloppes des composantes de vitesses minimales et maximales (du type de celles présentées à la *figure 17*). A Ra et Re fixés, ils montrent que la condition de type Orlandi permet de réduire de manière très importante l'amplitude de la perturbation mais que la longueur de la zone perturbée reste approximativement la même quelle que soit la condition à la limite testée. Ils montrent que la longueur de la zone perturbée augmente quand Ra ou Re diminuent, et que cette longueur peut atteindre cinq à six fois la hauteur de la conduite à l'approche de Ra_{\perp}^* . Enfin, en accord avec les propriétés des écoulements absolument instables soumis à un forçage extérieur (cf. §5.1), ils montrent que les caractéristiques (λ, f, Nu) des écoulements de R_{\perp} pour $Ra > Ra_{\perp}^{\text{conv}}$ ne varient pas d'une condition de sortie à l'autre, lorsque ces caractéristiques sont mesurées en dehors de la zone perturbée localement par les conditions de sortie.

7.2 Influence des conditions aux limites d'entrée et blocage des R_{\perp} à petit débit

Sur l'ensemble des études qui ont traité de l'influence des conditions d'entrée, la même condition pour U est toujours appliquée : c'est soit un profil carré soit un profil de Poiseuille. Par contre, deux grandes classes de conditions d'entrée sont étudiées pour W et T . La première classe concerne des conditions de type Neumann : on impose des gradients nuls pour W et/ou T , et donc un extremum local à l'écoulement. La phase des R_{\perp} étant fixée à l'entrée, les anglo-saxons nomment ce type de conditions par "phase-fixing" ou "phase-pinning boundary conditions". La deuxième classe concerne des conditions de type Dirichlet imposant des profils constants ou non de vitesse et de température, et donc une amplitude nulle pour les R_{\perp} .

Roth et al. (1996) [143] ont proposé une étude de l'influence des conditions aux limites d'entrée et de sortie sur des écoulements de R_{\perp} 2D absolument instables. Deux conditions sur W ($W=0$ ou $\partial W/\partial x=0$) et trois conditions sur T ($T=1-z$, $T=1/2$ ou $\partial T/\partial x=0$) sont testées en $x=0$ et en $x=A=L/h=50$. Pour U , un profil de Poiseuille est imposé en $x=0$ et en $x=A$. L'étude confirme que les conditions aux limites de sortie n'ont qu'une influence locale (dans le voisinage de $x=A$) sur la longueur d'onde λ et sur l'amplitude de U , W et T . Leur influence sur l'écoulement de R_{\perp} pleinement établi est négligeable. Par contre, l_e , λ et f varient selon le type de conditions en $x=0$. Roth et al. (1996) [143] expliquent la différence d'influence des conditions d'entrée par rapport aux conditions de sortie par un taux d'amplification des perturbations différent pour les x croissants (sens de l'écoulement) et pour les x décroissants (sens inverse de l'écoulement). Ils montrent, par exemple, qu'un changement des conditions d'entrée induit des variations de la fréquence des R_{\perp} 10^3 à 10^5 fois plus grandes qu'avec un changement des conditions de sortie.

Roth et al. (1996) [143] montrent qu'en imposant des conditions de Dirichlet à l'entrée, la longueur d'onde λ reste constante tout le long de la conduite, tandis qu'avec des conditions de type Neumann, λ est élevée à l'entrée et diminue exponentiellement le long de la conduite pour tendre, loin en aval, vers la valeur de λ obtenue avec des conditions de Dirichlet. D'autre part, les conditions de Neumann sélectionnent des R_{\perp} de fréquence f plus petite qu'avec des conditions de Dirichlet. Cependant, lorsqu'on se rapproche de la courbe de transition Ra_{\perp}^{conv} , i.e. lorsque la longueur d'établissement l_e tend vers l'infini (cf. §6.3.2), l'influence des conditions d'entrée sur la fréquence des R_{\perp} devient négligeable car ces derniers se forment très loin en aval. Seule la relation de dispersion qui lie la pulsation σ_i au nombre d'onde k_x des R_{\perp} ne varie pas lorsqu'on change les conditions aux limites ouvertes. Roth et al. (1996) [143] montrent numériquement et théoriquement à partir d'une équation de Ginzburg-Landau que cette relation s'écrit :

$$\sigma_i - \sigma_i^* = v_g(k_x - k_x^*) \quad (18)$$

où σ_i^* , k_x^* sont données par les formules (2) et (3) du §4.2.2 et où v_g est donné dans le *tableau IV*.

Müller et al. (1992) [68, 91] ont étudié les conditions aux limites ouvertes suivantes: $\partial W/\partial x = \partial T/\partial x = 0$ en $x=0$ et en $x=A=L/h$. Ce choix a été motivé par les expériences de visualisation de Pocheau et al. (1987) [144] qui se sont intéressés à l'écoulement de PRB dans un espace annulaire d'axe vertical, de section rectangulaire, dans lequel l'entrée et la sortie du fluide se font par deux ouvertures diamétralement opposées (cf. *figure 19*). Le fluide circule symétriquement dans les deux moitiés de l'anneau et l'écoulement thermoconvectif obtenu forme une chaîne de R_{\perp} , d'axes radiaux. Ce système permet d'imposer la phase des structures convectives au niveau des ouvertures de l'anneau, à l'entrée et à la sortie du fluide. Dans cette situation, des R_{\perp}

stationnaires, de longueur d'onde uniforme, sont observés à $Re=0$. Pour $Re \neq 0$ et suffisamment petit (en fait, si Re est inférieur à une certaine valeur critique Re^{**}), les R_{\perp} restent stationnaires, mais ils se déforment: leur longueur d'onde λ augmente à l'entrée et diminue à la sortie de l'anneau. Dans la suite, nous appellerons “ blocage des R_{\perp} ” ce phénomène. Enfin, si $Re > Re^{**}$, une instabilité d'Eckhaus, localisée près des ouvertures de l'anneau, apparaît. Elle provoque soit la génération d'un rouleau à l'entrée, soit la disparition d'un rouleau à la sortie. Cela est à l'origine de la mise en mouvement des R_{\perp} . Müller et al. (1992) [68, 91] retrouvent ce comportement de l'écoulement, d'une part, grâce aux simulations numériques 2D utilisant les conditions aux limites décrites un peu plus haut et, d'autre part, grâce à une équation de diffusion de phase établie rigoureusement à partir de leur équation de Ginzburg-Landau. Ce modèle leur permet d'obtenir une estimation (majorée) du nombre de Reynolds critique Re^{**} entre les rouleaux stationnaires déformés et les rouleaux en déplacement. Ils trouvent la valeur suivante:

$$Re^{**} \approx \frac{2,126 \sqrt{\varepsilon}}{(Pr + 0,3432) A} \quad (19)$$

où ε est l'écart relatif entre Ra et $Ra^*_0=1708$ et où A est l'allongement de la conduite (cf. nomenclature).

Müller et al. (1992) [68, 91] et Roth et al. (1996) [143] expliquent le blocage des R_{\perp} comme étant une conséquence directe des conditions de Neumann utilisées à l'entrée de la conduite. En fixant la phase, le premier rouleau qui se forme à l'entrée reste bloqué tant que le débit est suffisamment faible. Il s'allonge quand Re augmente. Pour $Re > Re^{**}$, il se “ détache ” de l'entrée et entraîne avec lui l'ensemble des R_{\perp} aval qui se mettent alors en mouvement. Pourtant, deux études ont aussi observé un phénomène de blocage des R_{\perp} en utilisant des conditions de Dirichlet. Tout d'abord, Schröder et Bühler (1995) [145] ont mené une étude expérimentale des écoulements de

PRB avec de l'huile de silicone dans un canal rectangulaire dont l'entrée et la sortie sont constituées par deux petites briques poreuses très conductrices de la chaleur. Ils ont aussi reproduit leurs expériences avec des simulations numériques 3D, en imposant un profil de vitesse carré et un profil de température linéaire comme conditions d'entrée et de sortie du domaine de calcul. Dans les deux études (expérimentale et numérique), le blocage des R_{\perp} à petit débit est très nettement mis en évidence. De plus, comme dans la formule (19), il est montré que le seuil de blocage Re^{**} augmente quand Ra augmente ou quand A diminue. Nicolas et al. (1997) [101] ont mené quant à eux une étude des R_{\perp} par simulation numérique 2D en imposant un profil de Poiseuille purement conductif à l'entrée et des conditions d'Orlanski à la sortie du domaine de calcul. La *figure 20* illustre le blocage des R_{\perp} observé dans ces simulations effectuées à $Pr=6,4$ et pour $A=L/h=10$. Elle montre que la fréquence f de passage des R_{\perp} s'annule pour des valeurs non nulles de Re , et ce d'autant plus que Ra est grand. Au *tableau VI*, nous comparons les valeurs de Re^{**} obtenues par la formule théorique (19), qui s'écrit $Re^{**} \approx 0,03153\varepsilon^{1/2}$ à $Pr=6,4$ et $A=10$, à celles déduites des droites d'interpolation linéaire présentées à la *figure 20*. Il est très étonnant de constater que la formule théorique, qui a priori n'est valable que pour des conditions de type Neumann et des nombres de Rayleigh modérés, concorde aussi bien avec les simulations numériques. L'origine du blocage des R_{\perp} avec des conditions d'entrée de type Dirichlet n'ayant pas été clairement identifiée, ce problème mérite encore des approfondissements.

7.3 Fréquence f des R_{\perp}

Müller et al. (1989, 1992) [78, 68], Roth et al. (1996) [143] et Nicolas (1997) [102] s'accordent à dire que pour un ensemble donné de paramètres (Ra , Re , Pr) correspondant à un écoulement 2D de R_{\perp} absolument instables, une et une seule structure thermoconvective est sélectionnée. Autrement dit, la fréquence f et la

longueur d'onde λ des R_{\perp} ne dépendent pas des conditions initiales, de l'histoire de l'écoulement et de la longueur de la conduite, à condition que cette dernière soit suffisamment longue pour permettre l'apparition de R_{\perp} pleinement développés.

En négligeant le décalage causé par le blocage des R_{\perp} pour les très petites valeurs de Re (cf. §7.2), on peut considérer que f varie quasi linéairement en fonction de Re pour Ra et Pr fixés (cf. Ouazzani (1991) [134], Schröder et Bühler (1995) [145], Nicolas et al. (1997) [101] et la *figure 20*). L'influence du nombre de Rayleigh sur f est beaucoup moins nette. Par exemple, pour Re et Pr fixés, Schröder et Bühler (1995) [145] observent que f décroît légèrement lorsque Ra augmente alors que Nicolas et al. (1997) [101] observent le contraire dès que Re est suffisamment grand (cf. *figure 20*). Nous pensons que cela est lié aux valeurs très différentes de Pr et B entre ces deux études : $Pr=530$ et $B=4,1$ pour Schröder et Bühler alors que $Pr=6,4$ et $B \rightarrow \infty$ pour Nicolas et al. (calculs 2D). En effet, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, les variations de la longueur d'onde moyenne, et donc de la fréquence, sont très différentes selon les valeurs de Pr et de B .

7.4 Longueur d'onde λ des R_{\perp}

Dans les écoulements de PRB, pour mesurer précisément la longueur d'onde, il est nécessaire d'utiliser des conduites de grand allongement, ce qui est la cause de coûts élevés en calcul numérique et de difficultés expérimentales telles que le maintien tout le long de la conduite de températures uniformes sur les parois horizontales et d'un écartement constant entre ces parois. A cause de cela, il existe peu d'information sur l'évolution de λ en fonction des paramètres Re , Ra , Pr et B , et les quelques résultats disponibles sont difficiles à relier les uns aux autres car ils sont obtenus pour des valeurs très différentes de Pr et de B (cf. *tableau VII*).

Dans le domaine non-linéaire, Il semble admis qu'à Ra, Pr et B fixés, la longueur d'onde λ des R_{\perp} décroît lorsque Re augmente, à condition que Re ne soit pas trop petit. Ce résultat est clairement mis en évidence par les simulations numériques 2D de Müller et al. (1989, 1992) [78, 68] à Pr=1 et par les expériences de Luijkx et al. (1981) [66] à Pr=450 (huile aux silicones) et B=5,25. Nos propres calculs 2D à Pr=6,4 (cf. *figure 21*) et les simulations numériques 3D de Schröder et Bülher (1995) [145] à Pr=530 et B=4,1 (cf. *tableau VII*) confirment ce résultat, sauf pour les très petites valeurs de Re pour lesquelles il y a un léger allongement des R_{\perp} si Re augmente (l'influence des conditions d'entrée sur la forme des R_{\perp} n'est probablement plus négligeable (cf. §7.2)). On notera, à la *figure 21*, pour Ra=4700, que la décroissance de λ quand Re augmente est valable quel que soit le type de condition d'entrée. Dans le cas de la condition de Neumann $\partial T/\partial x=0$, la longueur d'onde diminuant le long de l'axe de la conduite (cf. §7.2), la valeur de λ est une moyenne obtenue sur les 7 ou 8 premiers R_{\perp} pleinement établis apparaissant en aval de l'entrée. Pour corroborer ce qui a déjà été dit au §7.2 à propos de l'influence des conditions d'entrée sur la fréquence, on remarque que lorsque Re est suffisamment grand (Re=2 pour Ra=4700 sur la *figure 21*), la valeur de λ devient indépendante du type de condition d'entrée, celles-ci n'agissant plus sur la structure des rouleaux qui naissent loin en aval.

Dans le cas de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard, Platten et Legros (1984) [51] (page 448) constatent que, d'une manière générale, dans les expériences, la longueur d'onde λ des R_{\perp} augmente lorsque Ra augmente, alors que dans les simulations numériques 2D c'est le contraire. Au *tableau VII*, la comparaison de λ avec la valeur critique λ^* (obtenue pour Ra=Ra $_{\perp}^*$) montre aussi ce comportement dans les écoulements de PRB, sauf à Pr=450 à grand nombre de Rayleigh. On constate que $\lambda > \lambda^*$, i.e. que λ augmente avec Ra, à la fois pour les grands nombres de Prandtl et les

petits allongements transversaux. On notera qu'il aurait été plus judicieux d'effectuer les comparaisons avec λ^{conv} la valeur de λ obtenue pour $Ra=Ra_{\perp}^{\text{conv}}$. Malheureusement, λ^{conv} n'est pas donnée explicitement dans la littérature. Il apparaît aussi au *tableau VII* que λ augmente lorsque B diminue ou lorsque Pr augmente. Cependant, il est difficile de savoir lequel des deux paramètres à l'influence prépondérante. Quoi qu'il en soit, l'influence précise de Ra, de B et de Pr sur λ est un problème difficile à éclaircir avec les données actuelles, et il mérite des approfondissements.

7.5 Rapport V_r/U° de la vitesse des R_{\perp} sur la vitesse moyenne de l'écoulement

Une caractéristique importante des écoulements de PRB est le rapport adimensionnel entre la vitesse de phase des R_{\perp} , $V_r=\sigma_i/k_x$, et la vitesse moyenne de l'écoulement dans la direction axiale U° . Müller (1990) [67] et Müller et al. (1992) [68] montrent à partir de l'équation de Ginzburg-Landau que:

$$\frac{V_r}{U^\circ} = \frac{\sigma_i^* + v_g q + \xi_0^2 q^2 (c_1 - c_2) / \tau_0 - \mu (c_0 - c_2) / \tau_0}{(k_x^* + q) \text{Pr Re}} \quad (20)$$

où $q=k_x-k_x^*$ et où les autres paramètres ont déjà été donnés aux §4.2.2 et §5.3 et au *tableau IV*. Nous avons vu que σ_i^* , v_g , c_0 , c_1 et c_2 sont proportionnels à Re à l'ordre le plus bas, alors que k_x^* , τ_0 et ξ_0^2 sont constants. Ainsi, si Re reste suffisamment petit, Re n'apparaît plus explicitement dans (20). Comme, de plus, près du seuil, $k_x \approx k_x^*$ et donc $q \approx 0$, l'équation (20) montre que le rapport V_r/U° décroît linéairement avec l'écart relatif au seuil $\mu=(Ra-Ra_{\perp}^*(Re))/Ra_{\perp}^*(Re)$. C'est à dire qu'à Re fixé, V_r/U° décroît linéairement avec Ra. V_r/U° devient même indépendant de Re si on considère que Re reste suffisamment petit, car alors $\mu \approx \varepsilon=(Ra-1708)/1708$. La dépendance linéaire de

V_r/U° en fonction de Ra a été très largement vérifiée dans la littérature. Nous faisons un récapitulatif de toutes les lois obtenues au *tableau VIII*. Nous donnons notamment à $Pr=1$ et $6,4$ les expressions de V_r/U° calculées à partir de l'équation (20) simplifiée et des coefficients du *tableau IV*. Tous les résultats obtenus par simulations numériques l'ont été en utilisant des conditions aux limites périodiques (PBC), sauf dans un cas (noté OBC dans le *tableau VIII*) où Nicolas et al. (1997) [101] ont utilisé des conditions de Dirichlet à l'entrée et des conditions aux limites ouvertes en sortie. Nicolas et al. (1997) [101] ont aussi effectué des calculs de V_r/U° en utilisant des conditions aux limites périodiques et en se plaçant dans un "repère mobile" se déplaçant à la même vitesse que les R_\perp afin de rendre l'écoulement stationnaire.

Les résultats du *tableau VIII* sont très dispersés. Pour mieux les visualiser, nous présentons aux *figures 22 et 23* les courbes $V_r/U^\circ=f(Ra)$, respectivement pour $B \rightarrow \infty$ (simulations numériques 2D) et pour B fini (simulations numériques 3D et expériences). Au *tableau VIII*, on constate qu'à Pr fixé (cf. $Pr=0,7$ et $6,4$), la pente des droites lorsqu'il y a confinement latéral est toujours plus importante que lorsque $B \rightarrow \infty$ (voir à ce sujet la discussion dans Nicolas et al. (1997) [101]). On remarque que Yu et al. (1997) [128] proposent, à partir de leurs expériences dans l'air, une relation logarithmique fonction de Re et de Ra . A la *figure 23*, nous avons tracé cette relation pour $Re=2$ et $Re=10$ ($Re=10$ correspond approximativement au nombre de Reynolds critique $Re^*_{\perp//}$ dans le cas d'écoulements d'air). Compte tenu des autres résultats, la très légère concavité des deux courbes est acceptable. Dans une moindre mesure, Nicolas (1997) [102] obtient aussi ce comportement dans ses simulations numériques 2D avec des conditions aux limites périodiques. Par contre, la variation en fonction de Re de ces courbes logarithmiques est en désaccord avec les autres études.

Lorsque $B \rightarrow \infty$, la *figure 22* montre que V_r/U° augmente quand le nombre de Prandtl augmente. Ce comportement rejoint celui de λ (cf. §7.4) qui est proportionnelle

à Vr/U° . Lorsque B est fini (cf. *figure 23*), comme pour λ , les variations de Vr/U° en fonction de Pr ou de B sont moins nettes. Certains noteront que nous n'avons pas donné dans cette revue les équations des droites $Vr/U^\circ=f(Ra)$ obtenues par simulations numériques 2D à Pr=0,71, 2, 4 et 6,4 par Ouazzani et al. (1989) [31] et Ouazzani (1991) [134]. En effet, ces droites diffèrent sensiblement des résultats des autres auteurs aux mêmes valeurs de Pr et de B et elles nous paraissent peu fiables (voir à ce sujet Nicolas (1997) [102]).

8 Analyse et stabilité des structures thermoconvectives complexes (1991-2001)

Ces dix dernières années, grâce aux méthodologies sophistiquées qui ont été employées, le couplage entre les R_\perp et les $R_{//}$ a pu être étudié dans les écoulements de PRB. Des structures thermoconvectives complexes (superposition de R_\perp et de $R_{//}$, structures intermittentes, $R_{//}$ sinueux, $R_{//}$ obliques, etc.) ont pu être identifiées, aussi bien à petits qu'à grands nombres de Rayleigh. Des cartes de stabilité de ces différentes structures ont été établies. Au §8.1, nous analysons les diagrammes de transition qui ont été obtenus expérimentalement à partir de mesures d'anémométrie laser-Doppler (LDA) dans l'eau et de visualisations par plans laser dans l'air, en les comparant aux autres résultats de la littérature. Au §8.2, nous nous intéressons aux modèles à deux équations d'amplitude couplées qui ont étudié l'interaction entre les R_\perp et les $R_{//}$ dans les domaines linéaire et faiblement non-linéaire. Au §8.3, nous rapportons les études sur la stabilité des $R_{//}$ stationnaires vis à vis de $R_{//}$ sinueux ou inclinés, périodiques en temps et en espace, ainsi que les études à hauts nombres de Rayleigh décrivant la route vers le chaos et les effets non-Boussinesq.

8.1 Analyse comparée des diagrammes de stabilité établis expérimentalement

8.1.1 Présentation générale de ces diagrammes et des travaux récents de T. F. Lin et al.

Les mesures par anémométrie laser-Doppler permettent l'acquisition de données très précises sur les champs de vitesse dans les écoulements de PRB. Avec cette technique, Ouazzani (1991) [134] et Ouazzani et al. (1990, 1993, 1995) [32, 100, 135] effectuent des mesures dans l'eau à $Pr=6,4$, dans une conduite d'allongement transversal $B=3,63$, à partir desquelles ils dressent une carte complète de la stabilité des différentes structures thermoconvectives observées (cf. *figure 24*). Auparavant, Ouazzani et al. (1989) [31] avaient réalisé des expériences de visualisation par plans laser dans l'air à $Pr\approx 0,7$ et avec $B=17,4$, et Ouazzani (1991) [134] avait effectué des mesures par interférométrie différentielle dans l'eau à $Pr=8,3$ et $B=3,63$. Toutes ces expériences ont permis de déterminer la courbe de transition entre les R_{\perp} et les $R_{//}$ présentée à la *figure 25*. Cette figure montre que les R_{\perp} sont d'autant plus stables vis à vis des $R_{//}$ que Pr est petit. On rappelle que les courbes $Ra_{\perp}*(Re)$ calculées par analyse de la stabilité linéaire temporelle (cf. *figure 5* et Nicolas et al. (2000) [53]), même si elles évoluent qualitativement comme les courbes de la *figure 25*, n'ont rien à voir puisqu'elles prévoient la transition entre l'écoulement de Poiseuille et les R_{\perp} , et non entre les R_{\perp} et les $R_{//}$ comme c'est le cas à la *figure 25*. Plus récemment, à partir de visualisations par plans laser, Chang et Lin (1996) [146] et Yu et al. (1997) [128] (équipe de T. F. Lin et al.) ont établi la carte de stabilité des écoulements d'air ($Pr\approx 0,7$) dans une conduite d'allongement $B=12$ qui est présentée à la *figure 26*. Nous allons analyser dans le détail ces diagrammes de transitions au §8.1.2. Nous verrons apparaître trois configurations thermoconvectives particulières en fonction de Ra , Re et B : (1) des effets d'hystérésis entre R_{\perp} et $R_{//}$, (2) la superposition des R_{\perp} et des $R_{//}$ et (3) des $R_{//}$ qui fusionnent ou se scindent en deux au cours de l'écoulement.

Avant d'analyser ces diagrammes, il nous paraît utile de faire une présentation générale des travaux récents de l'équipe taiwanaise de T. F. Lin et de ses collaborateurs. En effet, depuis 1994, cette équipe a publié une série de seize articles sur des résultats de visualisations par plans laser et de simulations numériques directes 3D des écoulements de PRB dans l'air, pour des conduites d'extension latérale $2 \leq B \leq 16$. Ces articles sont : Huang et Lin (1994, 1995, 1996) [122-124], Lin et al. (1996) [125], Lin et Lin (1996, 1997) [111, 119, 126], Chang et Lin (1996, 1998) [146, 75], Chang et al. (1997) [74, 127], Yu et al. (1997) [73, 128], Yu et Lin (1997) [129], Tseng et al. (2000) [121] et Lir et al. (2001) [83], avec en plus un article soumis : Lir et Lin (2000) [82]. Les articles de 1994 à 1996 (excepté [146]) concernent la mesure des transferts thermiques (cf. §6.1) et la visualisation des écoulements de $R_{//}$ stationnaires, périodiques et chaotiques (cf. §8.3), à $35 \leq Re \leq 1000$, dans des conduites horizontales d'allongement transversal $B=2$ ou 4 , sauf Huang et Lin (1996) [124] et Lin et Lin (1996, 1997) [119, 126] qui considèrent le cas d'écoulements à $35 \leq Re \leq 186$ dans des conduites légèrement inclinées. L'article de 1996 [146], les cinq autres articles de 1997 et l'article de 1998 présentent des très belles visualisations expérimentales et numériques des $R_{//}$, des R_{\perp} et d'autres structures plus complexes ou intermittentes sur lesquelles nous allons revenir aux §8.1.2 et 8.3.1. Ces articles-ci concernent des écoulements à plus petit Re ($2,5 \leq Re \leq 50$) pour des conduites d'allongement $B=12$, sauf pour Yu et Lin (1997) [129] et Chang et Lin (1998) [75] qui font varier B entre 2 et 12 afin d'étudier l'influence du confinement sur les structures thermoconvectives. L'article de Tseng et al. (2000) [121] concerne des conduites horizontales très légèrement convergentes (cf. §6.1). Les articles de Lir et al. (2001) [83] et l'article soumis [82] se concentrent sur les très petits nombres de Reynolds ($1 \leq Re \leq 5$), avec $1200 \leq Ra \leq 4000$, dans des conduites d'allongement $B=16$. Ils montrent des

visualisations expérimentales de régimes thermoconvectifs complexes. En particulier, il y est observé des structures en forme de U (la base du U se situant à l'entrée) ou bien des structures transverses à l'entrée, stationnaires ou non, suivies en aval par des $R_{//}$ occupant toute la largeur du canal ou se situant uniquement près des parois verticales.

8.1.2 Fusions et divisions des $R_{//}$; effets d'hystérésis ; superposition des R_{\perp} et des $R_{//}$

La carte de stabilité dans le plan Ra-Re établie par Ouazzani et al. (1990, 1993) [32, 100] à $Pr=6,4$ et $B=3,63$ (*figure 24*) permet d'identifier quatre configurations thermoconvectives (zones II à V) lorsque Ra est suffisamment grand, alors que celle de Yu et al. (1997) [128] à $Pr\approx 0,7$ et $B=12$ (*figure 26*) permet d'en identifier 6 (types 1 à 6). Dans les deux études, pour les petites valeurs de Ra, l'écoulement de Poiseuille purement conductif est stable. Les rouleaux de la zone II et de type 5, pour Re petit et Ra modéré ($Ra < 7000$), sont des R_{\perp} qui restent stables vis à vis de diverses perturbations. Les rouleaux de la zone III et de type 1, pour les valeurs de Re les plus élevées et Ra modéré, sont des $R_{//}$ stationnaires. Les rouleaux de type 2 sont des $R_{//}$ instables qui peuvent se diviser ou fusionner plusieurs fois lorsqu'on suit l'écoulement. Cela provoque des oscillations transverses et aperiodiques des $R_{//}$. Ce phénomène a été étudié par Huang et Lin (1995) [123], Chang et al. (1997) [74] et Chang et Lin (1998) [75]. Il est présent principalement dans les conduites de grand allongement ($B \geq 8$) et il s'estompe suffisamment loin en aval de l'entrée, c'est à dire que le nombre de $R_{//}$ présents dans la conduite finit par se stabiliser vers l'aval. Ces deux raisons expliquent sans doute pourquoi ce phénomène n'est pas observé à la *figure 24*.

Dans la zone IV, Ouazzani et al. (1990, 1993) [32, 100] observent soit des R_{\perp} , soit des $R_{//}$, en fonction des conditions initiales. Ce type de comportement n'est pas observé dans la *figure 26* et, à notre connaissance, de tels effets d'hystérésis ne sont relatés dans la littérature que dans le cas de conduite de faible extension B. C'est le cas pour les expériences de Schröder et Bühler (1995) [145] avec de l'huile de silicone ($Pr=530$), dans une conduite d'allongement $B=4,1$. Chen et Lavine (1996) [131] observent aussi ces effets lors de simulations numériques 3D avec $B=2$ et $Pr=0,7$. Cependant, dans ce cas, ce comportement semble lié à un artifice numérique: le choix du pas de temps Δt . En utilisant un modèle théorique très simple basé sur deux équations d'amplitudes couplées de type Landau, Brand et al. (1991) [103] arrivent aussi à reproduire des effets d'hystérésis dans le cas d'écoulements de PRB à $Pr \approx 7$ et $B \approx 2$. Cependant, ce modèle phénoménologique est très critiqué (cf. §8.2).

Dans la petite zone V de la *figure 24*, la structure de l'écoulement montre un caractère intermittent qui ne correspond ni aux R_{\perp} , ni aux $R_{//}$, mais plutôt à la superposition des deux. La *figure 27* reproduit, pour cette zone, un enregistrement de la composante verticale de la vitesse W en un point se situant à mi-hauteur de la conduite sur l'axe. Alors que pour les R_{\perp} le signal $W(t)$ en ce point est sinusoïdal de moyenne nulle et que pour les $R_{//}$ il est constant et de moyenne non nulle, à la *figure 27*, $W(t)$ oscille autour d'une moyenne non nulle, avec une modulation périodique de l'enveloppe des oscillations. Ce signal peut se maintenir plusieurs jours (cf. *figure 27(a)*), et la *figure 27(b)* montre que le déplacement de la sonde de mesure dans la direction y au temps t^* provoque le changement de signe de la valeur moyenne de W (comme dans le cas des $R_{//}$). Ces structures n'ont jamais été visualisées (par plans laser par exemple) par Ouazzani et al. (1990, 1993) [32, 100]. Cependant, certains résultats récents de la littérature, accompagnés de visualisations, semblent retrouver de tels signaux. Par exemple, pour une valeur de B similaire ($B=4,1$), mais pour des valeurs de Ra et de Pr

très différentes ($Ra=14600$, $Pr=530$), Schröder et Bühler (1995) [145] présentent des nappes de la composante verticale de la vitesse dont il est possible d'extraire un signal sinusoïdal de moyenne non nulle qui ressemble à celui de la *figure 27*. Dans le cas d'écoulements d'air ($Pr=0,71$) à $Re=10$ et pour $4000 \leq Ra \leq 5000$, Chang et Lin (1996) [146], Chang et al. (1997) [127] et Yu et al. (1997) [128] (pour $B=12$), Yu et Lin (1997) [129] (pour $B=4, 5, 6, 7, 8, 9$ et 12) et Nobile et Onesti (1996) [81] (pour $B=10$) visualisent expérimentalement ou numériquement, *dans la zone d'entrée thermique*, une structure mixte où coexistent des $R_{//}$, situés le long des bords latéraux de la conduite, et des R_{\perp} , situés au centre de la conduite, qui disparaissent au profit des $R_{//}$ vers l'aval (cf. *figure 28*). Les structures de la *figure 28(b)* correspondent aux structures de type 3 dans la *figure 26* (les R_{\perp} sont à peine présents et ils sont intermittents). Les structures du type 4 sont semblables à celles du type 3, cependant les R_{\perp} sont mieux formés au centre de la conduite (cf. *figure 28(a)*). Il est tentant de supposer que les structures de type 3 donnent un signal similaire à celui de la *figure 27*, d'autant plus qu'une analyse approfondie de la thèse de Ouazzani (1991) [134] semble confirmer que ce signal a été enregistré aussi dans la zone d'entrée thermique. A la *figure 26*, la zone de type 3-4 est beaucoup plus étendue que la zone V de la *figure 24*. Cela peut sans doute s'expliquer par le fait que les observations de Yu et al. (1997) [128] (voir aussi Chang et Lin (1996) [146]) sont faites à l'entrée de la conduite (leur domaine d'étude a un allongement axial $A=15$), tandis que les mesures de Ouazzani et al. (1990, 1993) [32, 100] sont effectuées au-delà de $x=15$ dans une conduite d'allongement $A=28$: dans ce cas, au point de mesure, les R_{\perp} au centre de la conduite ont laissé la place aux $R_{//}$ sauf lorsque Ra est petit. Nous verrons au §8.2 que les modèles basés sur deux équations d'amplitude couplées mettent aussi en évidence l'existence de zones où les R_{\perp} et les $R_{//}$ se superposent (cf. Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104] et Kato et Fujimura (2000) [54]). Pour terminer en ce qui concerne la *figure 26*, les

structures thermoconvectives de type 6 observées à hauts nombres de Rayleigh et bas nombres de Reynolds sont des structures irrégulières et chaotiques (nous y reviendrons au §8.3.2).

Chiu et al. (1987) [147] ont analysé par LDA les champs de vitesse dans les $R_{//}$ stationnaires qui apparaissent pour $Re > 20$ dans des écoulements d'azote ($Pr \approx 0,7$) dans une conduite d'allongement $B=10$. Suite à cette étude, Chiu et Rosenberger (1987) [117] observent que ces $R_{//}$ stationnaires deviennent instationnaires et sinueux ("snaking") aux petites valeurs de Re ($Re < 20$) à cause, selon l'hypothèse des auteurs, de la superposition des R_{\perp} . A partir de ces observations, Chiu et Rosenberger (1987) [117] dessinent dans le plan $Ra-Re$ une courbe de transition entre les $R_{//}$ instationnaires et les $R_{//}$ stationnaires. Cette courbe se situe assez nettement en dessous de la courbe à $Pr=0,7$ de la *figure 25* et de la courbe (b) de la *figure 26*, puisqu'elle passe par les points $(Ra ; Re) \approx (2000 ; 5)$ et $(8000, 40)$.

8.2 Analyses théoriques utilisant deux équations d'amplitude couplées

Nous avons vu au §5.3, suite à l'analyse de Carrière et Monkewitz (1999) [69], que les résultats sur l'instabilité absolue des $R_{//}$ obtenus à partir de modèles à deux équations d'amplitude couplées par Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104] et Tveitereid et Müller (1994) [105], dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies, sont erronés à cause d'une utilisation de ces équations en dehors de leur domaine de validité. Malgré cela, nous allons nous intéresser au travail de Müller et al. (1993) [104] car : (1) leurs équations de Ginzburg-Landau sont dérivées de manière rigoureuse à partir des équations de Navier-Stokes ; (2) leur modèle fournit de manière simple une bonne idée des interactions possibles entre les R_{\perp} et les $R_{//}$; (3) on peut supposer que dans le domaine où les $R_{//}$ sont convectivement instables selon cette

théorie, les comportements observés demeurent valables. Par contre, nous ne développerons pas le travail de Brand et al. (1991) [103]. En effet, ils ont utilisé un modèle phénoménologique de type Landau dans lequel il apparaît que les paramètres de couplage entre les deux équations d'amplitudes ont été choisis de manière inappropriée (cf. Müller et al. (1993) [104]). Nous reviendrons sur l'étude de Tveitereid et Müller (1994) [105] un peu plus loin.

Les équations de Ginzburg-Landau établies rigoureusement par Müller et al. (1993) [104] s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[X^{\parallel} + \xi^{\parallel} \frac{\partial X^{\parallel}}{\partial y} + \lambda^{\parallel} \frac{\partial X^{\parallel}}{\partial z} - \gamma^{\parallel} \frac{\partial X^{\parallel}}{\partial t} - |\mathbf{V}^{\parallel}|_y - \varrho^{\parallel} |\mathbf{V}^{\top}|_y \right] \mathbf{V}^{\parallel} \\ \varepsilon^{\parallel 0} \left(\frac{\partial t}{\partial y} + \lambda^{\parallel} \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{V}^{\parallel} = \\ \left[X^{\top} (1 + i c^0) + \xi^{\top} (1 + i c^1) \frac{\partial X^{\parallel}}{\partial y} - (1 + i c^2) |\mathbf{V}^{\top}|_y - \varrho^{\top} (1 + i c^3) |\mathbf{V}^{\parallel}|_y \right] \mathbf{V}^{\top} \\ \varepsilon^{\top 0} \left(\frac{\partial t}{\partial y} + \lambda^{\top} \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{V}^{\top} = \end{array} \right. \quad (21)$$

où $A_{\perp}(x,t)$ et $A_{\parallel}(x,t)$ représentent respectivement les amplitudes des R_{\perp} et des R_{\parallel} et où le dernier terme de chaque équation représente le couplage entre R_{\perp} et R_{\parallel} . Le système (21) modélise l'interaction entre les R_{\perp} et les R_{\parallel} dans une conduite où il n'y a pas d'adhérence sur les parois latérales verticales. Ce cas correspond aussi à une conduite infinie dans les deux directions horizontales. On a donc $Re^*=0$. Pour éviter cela et se rapprocher des conditions expérimentales, Müller et al. (1993) [104] imposent artificiellement dans les équations (21) des seuils de stabilité linéaire Ra_{\perp}^* et Ra_{\parallel}^* qui se coupent en $Re^* \approx 0,5$ (Ra_{\perp}^* et Ra_{\parallel}^* interviennent dans χ_{\perp} et χ_{\parallel} : on a $\chi_{\perp} = Ra - Ra_{\perp}^*$ et $\chi_{\parallel} = Ra - Ra_{\parallel}^*$). Plus précisément, ils imposent $\varepsilon_{\perp}^* = 0,07 Re^2$ et $\varepsilon_{\parallel}^* = 0,02$ (soit $Ra_{\parallel}^* = 1742$). De cette manière, ils se placent quasiment dans les conditions expérimentales de Ouazzani et al. (1990, 1993) [32, 100] puisque, dans ses expériences, $Re^* \approx 0,5$ et $Ra_{\parallel}^* = 1840$. De plus, les coefficients des équations

d'amplitude sont calculés pour $Pr=5,8$ (cf. *tableau IV*), au lieu de $Pr=6,4$ dans les expériences.

Le diagramme de stabilité résultant du modèle (21) est reproduit à la *figure 29* (on gardera en mémoire les critiques de Carrière et Monkewitz (1999) [69] mentionnées plus haut). Ce diagramme donne les courbes de stabilité dans le plan (ε, Re) . Lorsque $\varepsilon_{\perp}^* < \varepsilon < \varepsilon_{\perp}^{conv}$ (respectivement, $\varepsilon_{//}^* < \varepsilon < \varepsilon_{//}^{conv}$), l'écoulement de Poiseuille conductif devient convectivement instable vis à vis des R_{\perp} (respectivement, des $R_{//}$). Lorsque $\varepsilon > \varepsilon_{\perp}^{conv}$ (respectivement, $\varepsilon > \varepsilon_{//}^{conv}$), l'écoulement de Poiseuille devient absolument instable vis à vis des R_{\perp} (respectivement, des $R_{//}$). Enfin, pour $\varepsilon < \varepsilon_{\perp}^{//}$, un écoulement de $R_{//}$ stationnaires devient instable vis à vis des R_{\perp} , et pour $\varepsilon < \varepsilon_{//}^{\perp}$, un écoulement de R_{\perp} uniformes devient instable vis à vis des $R_{//}$ (nous renvoyons à l'article pour savoir comment ces dernières transitions ont été déterminées). On constate que la courbe $\varepsilon_{//}^{\perp}$ se compare favorablement à la transition entre les zones III et IV de la *figure 24*. Cependant, à la différence de Brand et al. (1991) [103], Müller et al. (1993) [104] n'observent jamais d'effet d'hystérésis. Pour $\varepsilon > \varepsilon_{\perp}^{//}$ et $\varepsilon > \varepsilon_{//}^{\perp}$, ils montrent qu'il peut y avoir un régime transitoire où coexistent en différents endroits de la conduite des R_{\perp} et des $R_{//}$ (cf. *figure 30(a)*). Un tel régime transitoire est photographiés dans des écoulements d'air avec de la fumée par Lir et al. (2001) [83] et un autre, ne présentant qu'un seul front, est photographié par Chang et al. (1997) [127]. Comme on peut le voir à la *figure 30(b)*, en imposant un forçage à l'entrée de la conduite de manière à ce que les structures de nature convective puissent se développer, une structure mixte assimilable aux superpositions de R_{\perp} et de $R_{//}$ décrites au §8.1.2 est observée localement dans l'entrée, pour des paramètres de l'écoulement proches de $\varepsilon_{//}^{\perp}$.

Tveitereid et Müller (1994) [105] ont quant à eux étudié la stabilité convective et absolue des R_{\perp} et des $R_{//}$ à l'aide des équations (21) linéarisées. Ils restent dans le cas d'écoulements de PRB entre deux plaques infinies (i. e. $Re^*=0$). Ils montrent cependant qu'il existe un deuxième nombre de Reynolds critique Re^+ , correspondant à l'intersection des courbes de transition $\varepsilon_{\perp}^{conv}$ et $\varepsilon_{//}^{conv}$. Ce résultat étant vraisemblablement erroné (cf. Carrière et Monkewitz (1999) [69]), nous ne le développerons pas ici.

Les études de stabilité linéaire temporelles en conduites d'extension latérale finies [52, 53, 54] prédisent que l'écoulement de base devient instable vis à vis soit des R_{\perp} , soit des $R_{//}$ (cf. §4.2.3 et annexe A.2). Cependant, au voisinage du point triple $(Ra, Re)=(Ra_{//}^*, Re^*)$ où coexistent R_{\perp} et $R_{//}$ (cf. *figure 5*), la théorie linéaire n'est plus capable de prédire le type de structure qui apparaît au-dessus du seuil de transition car l'interaction non-linéaire entre les deux modes joue un rôle significatif dans le processus de sélection de la structure thermoconvective. Les expériences montrent en effet que cette interaction peut produire des structures mixtes avec superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$ (cf. §8.1.2). Dans ce cadre là, afin d'étudier l'interaction faiblement non-linéaire temporelle (et non spatio-temporelle) entre R_{\perp} et $R_{//}$, Kato et Fujimura (2000) [54] dérivent deux équations d'amplitudes couplées (une pour les R_{\perp} , l'autre pour les $R_{//}$) autour du point triple $(Ra, Re)=(Ra_{//}^*, Re^*)$. Ces équations sont établies après avoir déterminé les paramètres critiques $Ra_{//}^*$, Ra_{\perp}^* et Re^* par analyse de stabilité linéaire temporelle 3D et sans introduire de modèle pour prendre en compte l'effet des parois latérales (contrairement à Brand et al. (1991) [103] et Müller et al. (1993) [104]). L'étude est menée pour une large gamme de nombres de Prandtl ($0,001 \leq Pr \leq 1000$), pour $B=1, 2, 3$ et 4 , et prend en compte des parois latérales

adiabatiques ou parfaitement conductrices. A l'ordre le plus bas (termes cubiques), ces deux équations d'amplitude s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{q_f}{q_{\nabla^T}} + \left[-\rho^0 + \rho^1 \nabla^T_{\delta} + \rho^2 \nabla^{\parallel}_{\delta} \right] \nabla^T = 0 \\ \frac{q_f}{q_{\nabla^{\parallel}}} + \left[-\sigma^0 + \sigma^1 \nabla^{\parallel}_{\delta} + \sigma^2 \nabla^T_{\delta} \right] \nabla^{\parallel} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

où $A_{//}(t)$ et $A_{\perp}(t)$ représentent respectivement les amplitudes réelles des perturbations de température pour les modes longitudinaux et transversaux. Les coefficients réels a_i et b_i ($i=0, 1, 2$) sont calculés numériquement pour différentes valeurs de B et de Pr (cf. [54]). Le système d'équations (22) a quatre solutions d'équilibre (indépendantes du temps) : (i) la solution triviale $A_{//}=A_{\perp}=0$ qui représente l'écoulement de Poiseuille purement conducteur ; (ii) les $R_{//}$: $A_{//}=\sqrt{a_0/a_1}$ et $A_{\perp}=0$; (iii) les R_{\perp} : $A_{//}=0$ et $A_{\perp}=\sqrt{b_0/b_1}$; et (iv) les structures mixtes : $A_{//}=\sqrt{D_a/D}$ et $A_{\perp}=\sqrt{D_b/D}$, où $D_a=a_2b_0-a_0b_1$, $D_b=a_0b_2-a_1b_0$ et $D=a_2b_2-a_1b_1$. On reproduit sur la *figure 31*, dans des plans horizontaux à mi-hauteur du canal, les trois configurations non triviales obtenues par cette analyse. A cause des effets d'adhérence aux parois latérales, et comme cela a déjà été montré dans les références [52, 53], les R_{\perp} se courbent et prennent la forme de fer à cheval. La structure mixte qui est représentée pour $B=2$ ressemble aux $R_{//}$ oscillants en opposition de phase dont il sera question au §8.3.1. Dans la dernière partie de leur article, Kato et Fujimura (2000) [54] analysent, en fonction de Pr et de B , la stabilité des quatre configurations d'équilibre possible autour du point triple. De manière simplifiée (nous renvoyons à l'article pour avoir l'ensemble des résultats), les auteurs montrent que, pour $0,71 \leq Pr \leq 1000$ et $1 \leq B \leq 4$, les seules configurations thermoconvectives stables autour du point triple sont les $R_{//}$ et les R_{\perp} , et que les R_{\perp} peuvent être stables dans un domaine sous-critique : pour $Re \leq Re^*$ et $Ra \leq Ra_{//}^*$. Ils montrent aussi que les structures mixtes sont stables uniquement pour $Pr \leq 0,1$ et $B \approx 1$.

Signalons pour terminer que l'interaction non-linéaire entre des structures convectives transverses et longitudinales a aussi été étudiée à partir d'équations d'amplitudes couplées par Fujimura et Kelly (1993) [148] dans des conduites d'axe incliné par rapport à l'horizontale, et par Fujimura et Kelly (1995) [149] dans des écoulements de type PRB à grand nombre de Reynolds (interaction des ondes de Tollmien-Schlichting et des $R_{//}$). Li et al. (1997) [106], quant à eux, ont analysé à l'aide d'une seule équation d'amplitude le développement des structures sinueuses oscillant à haute ou à basse fréquence dans les écoulements de PRB cisailés par le déplacement transversal oscillatoire de la plaque du bas.

8.3 Transitions des $R_{//}$ vers des structures périodiques et chaotiques

8.3.1 Transitions des $R_{//}$ vers des structures périodiques en temps et en espace

On vient de voir au §8.1 que les structures d'écoulement avec superposition de R_{\perp} et de $R_{//}$, ou avec fusion et division des $R_{//}$, ne sont présentes qu'au début de la zone chauffée et donc que l'on retrouve des $R_{//}$ stationnaires parfaitement établis plus loin vers l'aval. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux structures secondaires qui apparaissent lorsque les $R_{//}$ parfaitement établis sont déstabilisés. Une analyse théorique et numérique de la stabilité linéaire temporelle de ces $R_{//}$ stationnaires, pris comme écoulement de base et soumis à des perturbations 3D, est effectuée par Clever et Busse (1991) [150] dans le cas d'un écoulement entre deux plaques infinies sous l'hypothèse de Boussinesq. Des diagrammes de stabilité de cet écoulement de base vis à vis de différents types d'instabilités secondaires sont établis pour $Pr=0,025$, $0,1$, $0,7$, $2,5$ et 7 (cf. *figure 32* pour $Pr=0,7$). Pour $Pr=7$, les $R_{//}$ stationnaires deviennent instables vis à vis d'une instabilité dite "knot instability" (cf. Busse et Clever (1979) [151]) pour un nombre de Rayleigh critique secondaire $Ra_{//}^{*II}(Re')$ compris entre 20000 et

30000, quel que soit $0 < Re' \leq 1000$ (où Re' est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximale). Pour $Pr \leq 2,5$ et Ra suffisamment grand, Clever et Busse (1991) [150] trouvent que les $R_{//}$ deviennent instables vis à vis de structures longitudinales oscillant en phase, appelées “wavy instability”. Un exemple en est donné à la *figure 33*. Les diagrammes de stabilité entre les $R_{//}$ stationnaires et les $R_{//}$ ondulés ont toujours une allure similaire à celle de la *figure 32*, quel que soit $Pr \leq 2,5$. Notamment, les valeurs du nombre de Rayleigh critique $Ra_{//}^{*II}(Re', Pr)$ pour $Re' \lesssim Re'^{*II} \approx 100$ sont très supérieures à celles pour $Re' \gtrsim Re'^{*II}$. Cependant, alors que la valeur de Re'^{*II} varie très peu en fonction de Pr (quel que soit $Pr \leq 2,5$), la valeur critique ($Ra_{//}^{*II} - 1708$) varie beaucoup car elle est proportionnelle à Pr . Bien que l'analyse de la stabilité linéaire temporelle de Clever et Busse (1991) [150] ne prennent en compte que le caractère convectif de l'instabilité secondaire, et pas le caractère absolu, nous allons confronter le diagramme de stabilité de la *figure 32* aux résultats numériques et expérimentaux de la littérature qui s'en rapprochent.

A notre connaissance, il n'existe pas de résultat expérimental ou numérique permettant de confirmer le résultat théorique de Clever et Busse (1991) [150] à $Pr \approx 7$. Par contre, pour les écoulements à $Pr \approx 0,7$ (air, azote, etc.), de nombreux travaux décrivent des structures longitudinales “instables”, “instationnaires” ou “sinueuses” (“snaking”) ou des instabilités secondaires périodiques en temps et en espace, pour $Ra > 5000$ et $Re < 100$ (c'est à dire pour le quart supérieur gauche de la *figure 32*). Cependant, bien souvent, ces structures ne ressemblent pas à celles de la *figure 33*, ou bien, elles ne sont pas décrites de manière suffisamment précise. Par exemple, Ostrach et Kamotani (1975) [58] observent des “ $R_{//}$ instables et irréguliers” pour $Ra > 8000$, $10 < Re < 100$ et $13 \leq B \leq 30$; Nyce et al. (1992) [22], à partir de mesures de vitesse par LDA dans l'azote, décrivent “deux $R_{//}$ asymétriques et instationnaires” pour

$Ra=22000$, $Re=18,75$ et $B=2$; Avsec (1937) [46] et Avsec et Luntz (1937) [48] ont bien photographié des rouleaux de forme ondulée du type de ceux de la *figure 33*, mais leur dispositif expérimental n'étant pas décrit précisément et les paramètres de l'écoulement n'étant pas fournis, il n'est pas possible d'effectuer de comparaison avec Clever et Busse (1991) [150].

Dans plusieurs autres études, on observe des $R_{//}$ sinueux oscillant *en opposition de phase*, de manière symétrique par rapport à l'axe de la conduite, et ayant une section qui varie périodiquement en temps et en espace. C'est le cas dans les simulations numériques effectuées dans le cadre de l'approximation de Boussinesq par Yu et Lin (1997) [129] à $Re=10$, $5000 \leq Ra \leq 7000$ et $B=5$ (cf. *figure 34*) et par Nobile et Onesti (1996) [81] à $Re=10$, $Ra=5300$ et $B=10$. Spall (1996) [18] (cf. §2.1.2 et *tableau D*), à $Ra=130700$, $Re=25$ et $B=4$, observe un R_{\perp} stationnaire à l'entrée sur la plaque chauffée suivi par quatre $R_{//}$ stationnaires parfaitement établis vers l'aval ; mais, à $Re=10$, il présente une séquence de huit images prises à des instants différents montrant que les quatre $R_{//}$ sont devenus instationnaires périodiques et qu'ils oscillent en opposition de phase dans le plan horizontal, de manière symétrique par rapport à l'axe de la conduite. Chang et Lin (1998) [75] montrent aussi des photographies de ce type d'écoulements à partir de visualisation par plans laser dans l'air pour des conduites de petits rapports de forme ($B \leq 6$). Pour $B=2$ et 4, ils établissent les diagrammes de la *figure 35* donnant la transition entre les $R_{//}$ stationnaires et ces rouleaux sinueux périodiques en temps. Pour $B \geq 8$, Chang et Lin (1998) [75] décrivent des écoulements dont la stabilité suit le diagramme de la *figure 26*, c'est à dire, notamment, que les $R_{//}$ sont beaucoup plus instables (présence de fusions et de divisions) que lorsque $B \leq 6$. Les structures instationnaires périodiques dont il est question à la *figure 35* pourraient être assimilées à la superposition des R_{\perp} et des $R_{//}$ de type 3 et 4 de la *figure 26*. Cependant,

les structures intermittentes de la *figure 35* se maintiennent tout le long de la zone chauffée alors qu'à la *figure 26* elles disparaissent vers l'aval au profit des seuls $R_{//}$ stationnaires. On constate aussi que les $R_{//}$ stationnaires de la *figure 35* deviennent instables dans un domaine beaucoup plus réduit que celui du diagramme de Clever et Busse à la *figure 32* : le nombre de Rayleigh critique ($Ra_{//}^{*II} \approx 5000$) est du même ordre de grandeur pour $Re < 10$ mais, dans les expériences de Chang et Lin, $Ra_{//}^{*II}$ augmente très rapidement avec Re pour $10 < Re < 20$. Deux raisons peuvent expliquer cette différence : tout d'abord, en comparant avec les domaines de stabilité convective et absolue de l'écoulement de Poiseuille vis à vis des R_{\perp} (cf. §5.1 et *figures 10 et 14*), il est clair qu'une étude de l'instabilité absolue des $R_{//}$ secondaires aurait permis d'obtenir une zone de $R_{//}$ stationnaires stables plus étendue. D'autre part, comme c'est le cas à la *figure 35* pour $B=2$ ou 4 et pour $Re > 20$, la présence des parois verticales latérales stabilise les $R_{//}$ stationnaires et donc retarde l'apparition de l'instabilité secondaire sinueuse.

Hormis Avsec (1937) [46] et Avsec et Luntz (1937) [48] déjà cités plus haut, seuls Nobile et Onesti (1996) [81] visualisent, à partir de simulations numériques directes à $Pr=0,71$, $Re=10$, $Ra=10650$ et $B=2$, des structures sinueuses oscillant en phase dans le plan horizontal, comme celles de Clever et Busse (1991) [150] (cf. *figure 33*). Des structures de ce type sont aussi observées numériquement et expérimentalement, mais dans le cas de conduite légèrement inclinées par rapport à l'horizontale ($\theta \leq 20^\circ$), la direction de l'écoulement pointant vers le bas. En effet, dans ce cas, l'écoulement de retour ascendant lié à la flottabilité s'oppose à l'écoulement de $R_{//}$ dirigé vers l'aval et rend les $R_{//}$ instationnaires et sinueux. De très belles images numériques et expérimentales de ce type d'écoulements sont proposées par Lin et Lin

(1997) [126] pour des écoulements d'air à $Re=35$, $Ra=108000$ et 137000 , $B=4$ et $\theta=20^\circ$. Des $R_{//}$ oscillants sont aussi mentionnés dans les expériences dans l'air de Chiu et al. (2000) [14], pour $Re=30$, $Ra'=3 \times 10^6$ et $B=5$, dans un canal convergent dont le plan du bas est incliné à $\theta=8^\circ$. En ce qui concerne les effets de l'inclinaison de la conduite sur les $R_{//}$, on pourra se référer entre autres aux articles de Nyce et al. (1992) [22], de Huang et Lin (1996) [124] et de Lin et Lin (1996)[119].

Deux autres types de structures périodiques sont mises en évidence par Yu et al. (1997) [73] grâce à des simulations numériques 3D, faites sous l'hypothèse de Boussinesq, d'écoulements dans des conduites d'allongement transversal $B=12$, pour $Pr=0,71$, $9000 \leq Ra \leq 31000$ et $20 \leq Re \leq 50$. Ces structures périodiques en temps et en espace prennent la forme de $R_{//}$ inclinés par rapport à l'axe de la conduite : la *figure 36(a)* montre le cas où les $R_{//}$ vont d'un bord à l'autre de la conduite, et la *figure 36(b)* montre le cas où les $R_{//}$ forment des V. La stabilité de ces structures, qui n'ont jamais été observées dans les expériences (en particulier, elles n'apparaissent pas dans le diagramme de stabilité de la *figure 26*), n'est pas étudiée par les auteurs. Pour être plus précis, à $Re=50$, Yu et al. (1997) [73] observent des $R_{//}$ stationnaires pour $Ra \leq 9000$, des $R_{//}$ inclinés en V pour $Ra=10000$, des $R_{//}$ inclinés d'un bord à l'autre du canal pour $12000 \leq Ra \leq 31000$ et une structure quasi périodique pour $Ra > 31000$. A $Ra=9000$, ils observent des $R_{//}$ stationnaires pour $Re=50$, des $R_{//}$ inclinés en V pour $20 \leq Re \leq 40$ et un écoulement non-périodique pour $Re=10$.

8.3.2 Effets non-Boussinesq et route vers le chaos

A de très nombreuses reprises dans ce document, nous avons signalé dans des écoulements de PRB l'existence de régimes d'écoulements apériodiques, voire chaotiques. En général de tels régimes étaient observés à hauts Ra et à petits Re . Le but

de ce paragraphe est de compléter les observations déjà faites. Ainsi, comme on peut le voir à la *figure 34* pour $Re=10$ et $B=5$, Yu et Lin (1997) [129] observent que les structures périodiques en temps et symétriques par rapport à l'axe de la conduite deviennent asymétriques à partir de $Ra=8000$. De leur côté, Nobile et Onesti (1996) [81] observent à $Re=10$ et $B=10$ des structures longitudinales chaotiques à $Ra=7100$ alors qu'elles sont périodiques à $Ra=5300$. Dans ces simulations numériques, les auteurs se placent sous l'hypothèse de Boussinesq et, par conséquent, les structures thermoconvectives se déstabilisent (deviennent asymétriques, quasi périodiques ou chaotiques) pour des valeurs de Ra (ou de Gr/Re^2) beaucoup plus petites que lorsque les propriétés thermophysiques du fluide varient avec la température. En effet, en notant $r_T=(T_c-T_f)/T_f$ l'écart de température relatif entre la plaque chaude et la plaque froide, Evans et Greif (1993) (cf. *tableau I*) observent un écoulement instationnaire, agité par une superposition complexe de R_{\perp} et de $R_{//}$ à $Pr=2/3$, $Re=100$, $Ra=83000$ et $B=2$ lorsque $r_T=0,01$ (c'est à dire lorsque les propriétés du fluide sont quasi constantes), alors que lorsque $r_T=2,33$, un écoulement stable composé de deux $R_{//}$ stationnaires apparaît.

La route vers le chaos suivie par les $R_{//}$ lorsque Ra augmente (i.e. le passage des $R_{//}$ stationnaires, aux rouleaux périodiques, quasi périodiques et chaotiques) est décrite par Huang et Lin (1994) [122] à partir de leurs simulations numériques à $Pr=0,72$, $B=2$, $Re=500$ et $Ra \leq 7 \times 10^6$, et par Lin et Lin (1996) [111] à partir de leurs expériences dans l'air avec $B=4$, $9 \leq Re \leq 186$ et $Ra \leq 3,5 \times 10^6$. Ils montrent que des structures longitudinales périodiques existent jusqu'à des nombres de Rayleigh de l'ordre de 4×10^5 à $Re=50$, 6×10^5 à $Re=100$ et 3×10^6 à $Re=500$. Cheng et Shi (1994) [152] proposent de très nombreuses photos montrant l'évolution des $R_{//}$ dans la zone

d'entrée thermique d'une conduite d'allongement transversal $B=2$ pour des régimes d'écoulements stationnaires à chaotiques. Ces photos sont réalisées dans des écoulements d'air avec de la fumée pour $157 \leq Re \leq 788$ et $46700 \leq Ra \leq 151000$. Signalons enfin l'étude expérimentale dans l'air avec $B=7,7$ de Fukui et al. (1991) [153] qui met en évidence dans des écoulements de PRB fortement turbulents ($Ra=3,5 \times 10^6$, $Re=3800$ ou 6700) l'existence de structures cohérentes de grande échelle prenant la forme de six $R_{//}$ de taille $1,3 \times h$.

9 Conclusion

Nous avons présenté une revue complète et détaillée des très nombreux travaux consacrés aux écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Nous avons montré que cette configuration d'écoulements a non seulement un intérêt fondamental (l'analyse de la stabilité des différentes structures thermoconvectives, par exemple), mais aussi un intérêt pratique, puisqu'elle intervient dans des applications industrielles à forts enjeux économiques : les dépôts de vapeurs chimiques (la CVD) et le refroidissement des composants électroniques. A de nombreuses reprises au cours de cette revue, nous avons relevé des aspects de ces écoulements encore mal connus ou mal compris. Nous nous proposons d'en faire ici le bilan.

Au §2.1, nous avons vu que les études sur la CVD tendent actuellement à se placer dans des configurations d'écoulements chaotiques ou turbulents afin d'obtenir des dépôts solides les plus uniformes possibles. Une perspective de recherche intéressante serait sans doute d'étudier les moyens de provoquer et de mieux contrôler ces régimes d'écoulements en conduites rectangulaires chauffées par le bas.

Au §4.3, il est apparu que les études de stabilité linéaire dans la zone d'entrée thermique ne s'accordent pas entre elles et, pour la plupart, avec les résultats

expérimentaux. Des études complémentaires à petits nombres de Reynolds (lorsque la diffusion axiale de la chaleur n'est plus négligeable et lorsqu'il est susceptible d'apparaître des R_{\perp}), mais aussi dans le cas de conduites d'extension transversale B finie, seraient nécessaires.

Au §5.3, nous avons vu qu'entre deux plaques infinies, les écoulements de $R_{//}$ sont toujours convectivement instables et que les écoulements de R_{\perp} le sont uniquement pour $Ra_{\perp}^* < Ra < Ra_{\perp}^{\text{conv}}$. Par contre, nous avons vu qu'aucune analyse théorique de la transition convective/absolue existe pour ces structures dans le cas de conduites dont le rapport d'allongement transversal est fini. Donc, pour expliquer pourquoi, en canal confiné, les $R_{//}$ naissent non loin de l'entrée thermique et pour Ra proche de $Ra_{//}^*$, nous avons dû émettre des hypothèses qu'il serait très intéressant de pouvoir vérifier : (i) les perturbations transverses dans l'entrée thermique ou (ii) la présence d'un bruit thermique au niveau des parois latérales doivent avoir une influence non négligeable sur la naissance des $R_{//}$. De manière générale, connaissant le comportement des écoulements convectivement instables soumis à des perturbations aléatoires (cf. §5.1 et §5.4), des expériences complémentaires (en laboratoire ou numériques), avec une source permanente de perturbations, seraient intéressantes à mener à la fois pour des conduites de grands allongements transversaux (afin de confirmer les résultats théoriques dans ce cas) que pour des conduites d'extension B finie. Il serait également intéressant d'étudier l'influence de sources de perturbations cohérentes, afin de mieux comprendre le mode de sélection opéré par l'écoulement, et de mieux maîtriser la naissance des structures thermoconvectives. On pourrait par exemple envisager l'étude des écoulements de PRB convectivement instables dans des canaux vibrant à amplitudes et fréquences données.

Au §6.2, nous avons vu que la quasi-totalité des études sur la variation du nombre de Nusselt pariétal en fonction de Re et de Ra concerne des conduites de grand allongement transversal, ou des conduites 2D dans le cas des études théoriques. L'influence du confinement latéral sur les transferts thermiques dans des écoulements de PRB pleinement développés a été très peu étudiée et certains résultats sont mêmes contradictoires.

Au §7.2, nous avons montré qu'à très petits débits, quel que soit le type de conditions d'entrée, il apparaît un effet de blocage des R_{\perp} , que ce soit expérimentalement ou par simulations numériques directes. Alors que ce phénomène est expliqué dans le cas de conditions d'entrée de type Neumann (flux nuls), il ne l'est pas dans le cas de conditions de Dirichlet (profils imposés).

Aux §7.3 à §7.5, nous avons montré que les variations de la longueur d'onde, de la fréquence et de la vitesse de phase des R_{\perp} , en fonction de Ra , de Re et de Pr , sont très bien connues dans le cas de problèmes 2D. Par contre, dans le cas où il y a confinement latéral, l'évolution de ces grandeurs en fonction de Pr et de B est très mal comprise et nécessiterait des approfondissements.

Dans la dernière partie (§8), nous avons montré qu'il existe, en plus des deux configurations thermoconvectives de base (les R_{\perp} et les $R_{//}$), une grande variété de structures plus complexes, intermittentes, périodiques ou non. Nous avons essayé de faire la synthèse des diagrammes de stabilité connus pour ces structures. Malgré cela, en raison de la disparité des paramètres (Ra , Re , Pr , B) choisis dans ces études, cette analyse reste imprécise. Des expériences complémentaires, notamment par simulations numériques directes 3D, seraient nécessaires pour confirmer ce qui a déjà été observé, mais aussi pour couvrir une gamme plus large de nombres de Prandtl et de rapports de forme B . Dans les simulations numériques, des modèles sortant du cadre de

l'approximation de Boussinesq devront être envisagés afin de mieux traduire les résultats expérimentaux à grands nombres de Rayleigh.

Au §8.3.1, l'analyse de la stabilité linéaire des $R_{//}$ dans un écoulement entre deux plaques infinies a montré que ces rouleaux se mettent à onduler en phase au-dessus d'un certain seuil. Ce résultat n'ayant jamais été confirmé, des expériences dans des conduites de grand allongement transversal pourraient être envisagées pour cela. A l'opposé, des études théoriques complémentaires devraient être menées dans des conduites confinées (B fini) pour essayer de comprendre ce qu'il advient de ces rouleaux sinueux ondulant en phase, puisque les expérimentations dans ce cas ne permettent pas de les observer et montrent au contraire des rouleaux sinueux ondulant en opposition de phase.

Remerciements

Cet article est le fruit de cinq années passées dans l'équipe du Professeur A. Mojtabi, à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR CNRS/INP-UPS 5502, et de plusieurs collaborations avec le Professeur J.-K. Platten de l'Université de Mons-Hainaut. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma très sincère gratitude pour m'avoir fait bénéficier de toute leur culture et de leur expérience sur le sujet. Je remercie également Monsieur S. A. Bories, éditeur associé de l'International Journal of Thermal Sciences, d'avoir initié et soutenu ce projet.

Références bibliographiques

- [1] R. E. Kelly, The onset and development of Rayleigh-Bénard convection in shear flows: a review, in: Physicochemical Hydrodynamics, D. B. Spaulding (Ed.), Advance Publication, London, 1977, pp. 65-79.
- [2] R. E. Kelly, The onset and development of thermal convection in fully developed shear flows, *Advances in Applied Mechanics*, 31 (1994) 35-112.
- [3] Sir D. Brunt, Experimental cloud formation, in : *Compendium of Meteorology*, American Meteorological Society, Boston, 1951, pp. 1255-1262.
- [4] K. F. Jensen, E. O. Einset, D. I. Fotiadis, Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23 (1991) 197-233.
- [5] N. K. Ingle, T. J. Mountziaris, The onset of transverse recirculations during flow of gases in horizontal ducts with differentially heated lower walls, *J. Fluid Mech.*, 277 (1994) 249-269.
- [6] G. Evans, R. Greif, A study of traveling wave instabilities in a horizontal channel flow with applications to chemical vapor deposition, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32 (1989) 895-911.
- [7] G. Evans, R. Greif, Unsteady three-dimensional mixed convection in a heated horizontal channel with applications to chemical vapor deposition, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34 (1991) 2039-2051.
- [8] H. K. Moffat, K. F. Jensen, Complex flow phenomena in MOCVD reactors -1. horizontal reactors, *J. Crystal Growth*, 77 (1986) 108-119.
- [9] H. K. Moffat, K. F. Jensen, Three-dimensional flow effects in silicon CVD in horizontal reactors, *J. Electrochemical Society*, 135 (1988) 459-470.
- [10] J. Ouazzani, F. Rosenberger, Three-dimensional modelling of horizontal chemical vapor deposition -1. MOCVD at atmospheric pressure, *J. Crystal Growth*, 100 (1990) 545-576.
- [11] C. R. Kleijn, C. J. Hoogendoorn, A study of 2-D and 3-D transport phenomena in horizontal chemical vapor deposition reactors, *Chemical Engineering Science*, 46 (1991) 321-334.

- [12] K. C. Karki, P. S. Sathyamurthy, S. V. Patankar, Three-dimensional mixed convection in a horizontal chemical vapor deposition reactor, *J. Heat Transfer*, 115 (1993) 803-806.
- [13] K. W. Park, H. Y. Pak, Characteristics of three-dimensional flow, heat and mass transfer in a chemical vapor deposition reactor, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37 (2000) 407-423.
- [14] W. K. S. Chiu, C. J. Richards, Y. Jaluria, Flow structure and heat transfer in a horizontal converging channel heated from below, *Physics of Fluids*, 12 (2000) 2128-2136.
- [15] I. Hosokawa, Y. Tanaka, K. Yamamoto, Mixed convective flow with mass transfer in a horizontal rectangular duct heated from below simulated by the conditional Fourier spectral analysis, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36 (1993) 3029-3042.
- [16] E. P. Visser, C. R. Kleijn, C. A. M. Govers, C. J. Hoogendoorn, L. J. Giling, Return flows in horizontal MOCVD reactors studied with the use of TiO₂ particle injection and numerical calculations, *J. Crystal Growth*, 94 (1989) 929-946, et errata, 96 (1989) 732-735.
- [17] T. M. Makhviladze et A. V. Martjushenko, Several aspects of the return flows formation in horizontal CVD reactors, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41 (1998) 2529-2536.
- [18] R. E. Spall, Unsteady mixed convection in horizontal ducts with applications to chemical vapor deposition processes, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 23 (1996) 115-122.
- [19] R. E. Spall, Observations of spanwise symmetry breaking for unsteady mixed convection in horizontal ducts, *J. Heat Transfer*, 118 (1996) 885-888.
- [20] H. Koizumi, I. Hosokawa, Unsteady behavior and mass transfer performance of the combined convective flow in a horizontal rectangular duct heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36 (1993) 3937-3947.
- [21] G. Evans, R. Greif, Thermally unstable convection with applications to chemical vapor deposition channel reactors, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36 (1993) 2769-2781.
- [22] T. A. Nyce, J. Ouazzani, A. Durand-Daubin, F. Rosenberger, Mixed convection in a horizontal rectangular channel - experimental and numerical velocity distributions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35 (1992) 1481-1494.

- [23] K. J. Kennedy, A. Zebib, Combined free and forced convection between horizontal parallel planes: some cases studies, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26 (1983) 471-474.
- [24] M. E. Braaten, S. V. Patankar, Analysis of laminar mixed convection in shrouded arrays of heated rectangular blocks, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28 (1985) 1699-1709.
- [25] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard, Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below, *Num. Heat Transfer, part A*, 20 (1991) 297-315.
- [26] E. Bilgen, X. Wang, P. Vasseur, F. Meng, L. Robillard, On the periodic conditions to simulate mixed convection heat transfer in horizontal channels, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 27 (1995) 461-472.
- [27] A. Tangborn, A two-dimensional instability in a mixed convection flow with spatially periodic temperature boundary conditions, *Physics Fluids A*, 4 (1992) 1583-1586.
- [28] S. Q. Zhang, A. V. Tangborn, Flow regimes in two-dimensional mixed convection with spatially periodic lower wall heating, *Phys. Fluids*, 6 (1994) 3285-3293.
- [29] A. V. Tangborn, S. Q. Zhang, V. Lakshminarayanan, A three-dimensional instability in mixed convection with streamwise periodic heating, *Phys. Fluids*, 7 (1995) 2648-2658.
- [30] S. Q. Zhang, A. V. Tangborn, Two- and three-dimensional heat transfer in mixed convection with streamwise periodic heating, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 28 (1995) 431-442.
- [31] M. T. Ouazzani, J. P. Caltagirone, G. Meyer, A. Mojtabi, Etude numerique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32 (1989) 261-269.
- [32] M. T. Ouazzani, J. K. Platten, A. Mojtabi, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes – 2, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33 (1990) 1417-1427.

- [33] H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 11 (1900) 1261-1271 et 1309-1328.
- [34] Lord Rayleigh, On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.*, 32 (1916) 529-546 ; se trouve aussi dans *Scientific Papers*, Cambridge University Press, 6 (1920) 432-446.
- [35] P. Idrac, Sur les courants de convection atmosphérique et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses, *C.R.A.S.*, 171 (1920) 42-44.
- [36] P. Idrac, Etudes expérimentales sur le vol à voile, Thèse de doctorat, Paris, 1921.
- [37] A. Graham, Shear patterns in an unstable layer of air, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 232 (1933) 285-296.
- [38] K. Chandra, Instability of fluids heated from below, *Proc. Roy. Soc. A*, 164 (1938) 231-242.
- [39] H. Bénard, D. Avsec, Travaux récents sur les tourbillons en bandes; applications à l'astrophysique et à la météorologie, *J. Phys. et le Radium*, 9 (1938) 468-500.
- [40] T. Terada and second year students of physics, Some experiments on periodic columnar formation of vortices caused by convection, *Report of the Aeronautical Research Institute Univ. of Tokyo*, 3 (1928) 1-52.
- [41] T. Terada and M. Tamano, Further researches on periodic columnar vortices produced by convection, *Report of the Aeronautical Research Institute Univ. of Tokyo*, 4 (1929) 447-470.
- [42] A. C. Philips, Sir G. T. Walker, The forms of stratified clouds, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 58 (1932) 23-30.
- [43] D. Avsec, Sur la formation des tourbillons de convection, dans une couche gazeuse, sous des épaisseurs de quelques centimètres, *C.R.A.S.*, 203 (1936) 532-534.
- [44] D. Avsec, Sur la vérification expérimentale du fait, prévu par la théorie de Lord Rayleigh, de l'existence du régime préconvectif stable et sur le mécanisme de l'apparition des courants convectifs dans une couche gazeuse chauffée par en dessous, *C.R.A.S.*, 203 (1936) 556-558.

- [45] D. Avsec, Sur le rapport λ/h des tourbillons en bandes longitudinales, C.R.A.S., 203 (1936) 1318-1320.
- [46] D. Avsec, Sur les formes ondulées des tourbillons en bandes longitudinales, CRAS, 204 (1937) 167-169.
- [47] D. Avsec, Tourbillons en bandes transversales dans une couche d'air chauffée par en dessous, CRAS, 206 (1938) 40-41.
- [48] D. Avsec, M. Luntz, Tourbillons thermoconvectifs et électroconvectifs, La météorologie, 31 (1937) 180-194.
- [49] H. Jeffreys, Some cases of instability in fluid motion, Proc. Roy. Soc. A, 118 (1928) 195-208.
- [50] H. B. Squire, On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls, Proc. Roy. Soc. A, 142 (1933) 621-628.
- [51] J. K. Platten, J. C. Legros, Convection in Liquids, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [52] J. M. Luijkx, Influence de la présence de parois latérales sur l'apparition de la convection libre, forcée et mixte. Thèse de doctorat, Université d'état de Mons, Belgique, 1983.
- [53] X. Nicolas, J. M. Luijkx, J. K. Platten, Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below, Int. J. Heat Mass Transfer, 43 (2000) 589-610.
- [54] Y. Kato, K. Fujimura, Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below, Physical Review E, 62 (2000) 601-611.
- [55] W. Velte, Zür Stabilität der Strömung in einem horizontalen Rohr bei ungleichmässig erwärter Wand, Z. Angew. Math. Phys., 13 (1962) 591-600.
- [56] R. Sani, Note on flow instabilities in heated ducts, Z. Angew. Math. Phys., 15 (1964) 381-387.

- [57] Y. Mori, Y. Uchida, Forced convective heat transfer between horizontal flat plates, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 9 (1966) 803-817.
- [58] S. Ostrach, Y. Kamotani, Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below, *J. Heat Transfer*, 97 (1975) 220-225.
- [59] W. Nakayama, G. J. Hwang, K. C. Cheng, Thermal instability in plane Poiseuille flow, *J. Heat Transfer*, series C, 92 (1970) 61-68.
- [60] M. Akiyama, G. J. Hwang, K. C. Cheng, Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates, *J. Heat Transfer*, series C, 93 (1971) 335-341.
- [61] K. S. Gage, W. H. Reid, The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 33 (1968) 21-32.
- [62] J. K. Platten, A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients, *Int. J. Engng. Sci.*, 9 (1971) 855-869.
- [63] M. Tveitereid, On the stability of thermally stratified plane Poiseuille flow, *Zeit. Für Angew. Math. Mech.*, 54 (1974) 533-540.
- [64] J. K. Platten, M. Lefebvre, A preliminary experimental investigation of the stability of flows with an imposed temperature gradient, *Physica*, 51 (1971) 330-332.
- [65] R. J. Schmidt, S. W. Milverton, On the instability of a fluid when heated from below, *Proc. Roy. Soc. A*, 152 (1935) 586-594.
- [66] J. M. Luijkx, J. K. Platten, J. C. Legros, On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24 (1981) 803-817.
- [67] H. W. Müller, Thermische Konvektion in horizontaler Scherströmung, Thèse de doctorat, Université de Saarlandes à Sarrebruck, Allemagne, 1990.
- [68] H. W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Transversal convection patterns in horizontal shear flow, *Physical Review A*, 45 (1992) 3714-3725.

- [69] P. Carrière, P. A. Monkewitz, Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection, *J. Fluid Mech.*, 384 (1999) 243-262.
- [70] U. H. Kurtzweg, Convective instability of a hydrodynamic fluid within a rectangular cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8 (1965) 35-41.
- [71] J. M. Luijkx, J. K. Platten, On the onset of free convection in a rectangular channel, *J. Non-Equilibrium Thermodyn.*, 6 (1981) 141-158.
- [72] U. Narusawa, Numerical analysis of mixed convection at the entrance region of a rectangular duct heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36 (1993) 2375-2384.
- [73] C. H. Yu, M. Y. Chang, C. C. Huang, T. F. Lin, Unsteady vortex roll structures in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: a numerical study, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997) 505-518.
- [74] M. Y. Chang, C. H. Yu, T. F. Lin, Changes of longitudinal vortex roll structure in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: an experimental study, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997) 347-363.
- [75] M. Y. Chang, T. F. Lin, Experimental study of aspect ratio effects on longitudinal vortex flow in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41 (1998) 719-733.
- [76] J. Shahda, U. Narusawa, On pattern selection in mixed convection in rectangular ducts, *Heat and Mass Transfer*, 32 (1997) 213-222.
- [77] U. Narusawa, The second law analysis of mixed convection in rectangular ducts, *Heat Mass Transfer*, 37 (2001) 197-203.
- [78] H. W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, Convective patterns in horizontal flow, *Europhysics Letters*, 10 (1989) 451-456.
- [79] G. J. Hwang, K. C. Cheng, Convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below, *J. Heat Transfer, series C*, 95 (1973) 72-77.

- [80] K. C. Cheng, R. S. Wu, Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane Poiseuille flows heated from below, *J. Heat Transfer*, 98 (1976) 564-569.
- [81] E. Nobile, L. Onesti, Numerical simulation of time-dependent mixed convection in horizontal rectangular channels, in : G. P. Celata, P. Di Marco, A. Mariani (Eds.), *Proceedings de la 2nd European Thermal Sciences et 14th UIT National Heat Transfer Conference*, Edizioni ETS, 1996, pp 787-794.
- [82] J. T. Lir, T. F. Lin, Stationary transverse rolls and U-rolls in limiting low Reynolds number mixed convective air flow near the convective threshold in a horizontal flat duct, *Soumis à l'Int. J. Heat Mass Transfer*, (2000).
- [83] J. T. Lir, M. Y. Chang, T. F. Lin, Vortex flow patterns near critical state for onset of convection in air flow through a bottom heated horizontal flat duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44 (2001) 705-719.
- [84] Y. Kamotani, S. Ostrach, Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow, *J. Heat Transfer*, 98 (1976) 62-66.
- [85] Y. Kamotani, S. Ostrach, H. Miao, Convective Heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability, *J. Heat Transfer*, 101 (1979) 222-226.
- [86] G. J. Hwang, C. L. Liu, An experimental study of convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel heated from below, *Canadian J. Chem Eng.*, 54 (1976) 521-525.
- [87] F. S. Lee, G. J. Hwang, Transient analysis on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel, *J. Heat Transfer*, 113 (1991) 363-370.
- [88] F. S. Lee, G. J. Hwang, The effect of asymmetric heating on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a parallel plate channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34 (1991) 2207-2218.

- [89] P. Huerre, P. A. Monkewitz, Absolute and convective instabilities in free shear layers, *J. Fluid Mech.*, 159 (1985) 151-168.
- [90] P. Huerre, P. A. Monkewitz, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 (1990) 473-537.
- [91] H. W. Müller, M. Lücke, M. Kamps, The effect of throughflow on Rayleigh-Bernard convective rolls, in : C. D. Andereck, F. Hayot (Eds.), *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow*, NATO ASI Series, B297, 1992, pp. 187-196.
- [92] J. M. Chomaz, P. Huerre, L. G. Redekopp, Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows, *Physical Review Letters*, 60 (1988) 25-28.
- [93] R. J. Deissler, Spatially growing waves, intermittency and convective chaos in an open-flow system, *Physica D*, 25 (1987) 233-260.
- [94] R. J. Deissler, External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems, *J. Statistical Physics*, 54 (1989) 1459-1488.
- [95] D. Astruc, Instabilité de Kelvin-Helmholtz en régime subsonique: développement spatial et conditions aux limites ouvertes, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1993.
- [96] J. C. Buell, P. Huerre, Inflow / outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers, Rapport CTR-S88 du Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program, Stanford University, 1988.
- [97] O. Thual, Generic instabilities and nonlinear dynamics, in : J.-P. Zahn et J. Zinn-Justin (Eds), *Dynamique des fluides astrophysiques*, Cours des Houches, session XLVII, Elsevier Science Publishers, 1987.
- [98] P. Barthelet, Dynamique non-linéaire des ondes interfaciales entre deux fluides cisailés, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1995.
- [99] A. C. Newel, T. Passot, J. Lega, Order parameter equations for patterns, *Annual Rev. Fluid Mech.*, 25 (1993) 399-453.

- [100] M. T. Ouazzani, J. K. Platten, A. Mojtabi, Intermittent patterns in mixed convection, *Applied Scientific Research*, 51 (1993) 677-685.
- [101] X. Nicolas, A. Mojtabi, J. K. Platten, Two dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below, *Physics of Fluids*, 9 (1997) 337-348.
- [102] X. Nicolas, Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III, France, 1997.
- [103] H. R. Brand, R. J. Deissler, G. Ahlers, Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold, *Physical Rev. A*, 43 (1991) 4262-4268.
- [104] H. W. Müller, M. Tveitereid, S. Trainoff, Rayleigh-Bénard problem with imposed weak through-flow: two coupled Ginzburg-Landau equations, *Physical Review E*, 48 (1993) 263-272.
- [105] M. Tveitered, H. W. Müller, Pattern selection at the onset of Rayleigh-Bénard convection in a horizontal shear flow, *Physical Review E*, 50 (1994) 1219-1226.
- [106] H. S. Li, R. E. Kelly, P. Hall, Absolute instability of Rayleigh-Bénard convection in a time periodic shear-flow, *Phys. Fluids*, 9 (1997) 1273-1276.
- [107] K. Fukui, M. Nakajima, H. Ueda, The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26 (1983) 109-120.
- [108] M. Lücke, A. Szprynger, Noise sustained pattern growth: bulk versus boundary effects, *Physical Review E*, 55 (1997) 5509-5521.
- [109] D. Jung, M. Lücke, A. Szprynger, Influence of inlet and bulk noise on Rayleigh-Bénard convection with lateral flow, *Physical Review E*, 63, no. 056301, (2001) 1-20.
- [110] J. R. Maughan, F. P. Incropera, Experiments on mixed convection heat transfer for airflow in a horizontal and inclined channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 (1987) 1307-1318.

- [111] W. L. Lin, T. F. Lin, Experimental study of unstable mixed convection of air in a bottom heated horizontal rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39 (1996) 1649-1663.
- [112] F. P. Incropera, A. L. Knox, J. R. Maughan, Mixed-convection flow and heat transfer in the entry region of a horizontal rectangular duct, *J. Heat Transfer*, 109 (1987) 434-439.
- [113] H. V. Mahaney, F. P. Incropera, S. Ramadhyani, Development of laminar mixed convection flow in a horizontal rectangular duct with uniform bottom heating, *Numerical Heat Transfer*, 12 (1987) 137-155.
- [114] H. V. Mahaney, F. P. Incropera, S. Ramadhyani, Effect of wall heating flux distribution on laminar mixed convection in the entrance region of a horizontal rectangular duct, *Numerical Heat Transfer*, 13 (1988) 427-450.
- [115] J. R. Maughan, F. P. Incropera, Regions of heat transfer enhancement for laminar mixed convection in a parallel plate channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33 (1990) 555-570.
- [116] C. Nonino, S. Del Giudice, Laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 13 (1991) 33-48.
- [117] K. C. Chiu, F. Rosenberger, Mixed convection between horizontal plates -1. Entrance effects, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 (1987) 1645-1654.
- [118] U. Narusawa, Mixed convection in a rectangular duct heated from below, *Int. J. Fluid Mechanics Research*, 25 (1998) 285-294.
- [119] W. L. Lin, T. F. Lin, Unstable aiding and opposing mixed convection of air in a bottom-heated rectangular duct slightly inclined from the horizontal, *J. Heat Transfer*, 118 (1996) 47-55.
- [120] C. Gau, C. W. Liu, T. M. Huang, Win Aung, Secondary flow and enhancement of heat transfer in horizontal parallel-plate and convergent channels heating from below., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 42 (1999) 2629-2647.

- [121] W. S. Tseng, W. L. Lin, C. P. Yin, C. L. Lin, T. F. Lin, Stabilization of buoyancy-driven unstable vortex flow in mixed convection of air in a rectangular duct by tapering its top plate, *J. Heat Transfer*, 122 (2000) 58-65.
- [122] C. C. Huang, T. F. Lin, Buoyancy induced flow transition in mixed convective flow of air through a bottom heated horizontal rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37 (1994) 1235-1255.
- [123] C. C. Huang, T. F. Lin, Vortex flow and thermal characteristics in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct: effects of the Reynolds and Grashof numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38 (1995) 1661-1674.
- [124] C. C. Huang, T. F. Lin, Numerical simulation of transitional aiding mixed convective air flow in a bottom heated inclined rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39 (1996) 1697-1710.
- [125] W. L. Lin, Y. T. Ker, T. F. Lin, Experimental observation and conjugated heat transfer analysis of vortex flow development in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39 (1996) 3667-3683.
- [126] W. L. Lin, T. F. Lin, Observation and computation of vortex and/or reverse flow development in mixed convection of air in a slightly inclined rectangular duct, *J. Heat Transfer*, 119 (1997) 691-699.
- [127] M. Y. Chang, C. H. Yu, T. F. Lin, Flow visualization and numerical simulation of transverse and mixed vortex roll formation in mixed convection of air in a horizontal flat duct, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997) 1907-1922.
- [128] C. H. Yu, M. Y. Chang, T. F. Lin, Structures of moving transverse and mixed rolls in mixed convection of air in a horizontal plane channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (1997) 333-346.

- [129] C. H. Yu, T. F. Lin, Effects of aspect ratio on vortex flow patterns in mixed convection of air through a bottom-heated horizontal rectangular duct, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 31 (1997) 745-764.
- [130] G. J. Hwang, K. C. Cheng, A boundary vorticity method for finite amplitude convection in plane Poiseuille flow, *Proceedings of the 12th Midwestern Mechanics Conference, Univ. of Notre Dame, Dev. Mech.*, 6 (1971) 207-220.
- [131] S. S. Chen, A. S. Lavine, Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39 (1996) 1-11.
- [132] A. Schlüter, D. Lortz, F. Busse, On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, 23, part 1 (1965) 129-144.
- [133] L. Fung, K. Nandakumar, J. H. Masliyah, Bifurcation phenomena and cellular-pattern evolution in mixed-convection heat transfer, *J. Fluid Mech.*, 177 (1987) 339-357.
- [134] M. T. Ouazzani, *Transferts thermiques et mécanique des écoulements de convection mixte*, Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, Belgique, 1991.
- [135] M. T. Ouazzani, J. K. Platten, H. W. Müller, M. Lücke, Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à des températures différentes – 3, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38 (1995) 875-886.
- [136] R. L. Sani, P. M. Gresho, Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 18 (1994) 983-1008.
- [137] G. Evans, S. Paolucci, The thermoconvective instability of a plane Poiseuille flow heated from below: a proposed benchmark solution for open boundary flows, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 11 (1990) 1001-1013.
- [138] A. Bottaro, Note on open boundary conditions for elliptic flows, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 18 (1990) 243-256.

- [139] M. H. Kobayashi, J. C. F. Pereira, J. M. M. Sousa, Comparison of several open boundary numerical treatments for laminar recirculating flows, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 16 (1993) 403-419.
- [140] X. Nicolas, P. Traore, A. Mojtabi, J. P. Caltagirone, Augmented Lagrangian method and open boundary conditions in 2D simulation of Poiseuille-Bénard channel flow, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 25 (1997) 265-283.
- [141] G. Comini, M. Manzan, G. Cortella, Open boundary conditions for the streamfunction-vorticity formulation of unsteady laminar convection, *Numerical Heat Transfer, part B*, 31 (1997) 217-234.
- [142] I. Orlanski, A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Comput. Phys.*, 21 (1976) 251-269.
- [143] D. Roth, P. Büchel, M. Lücke, H.W. Müller, M. Kamps, R. Schmitz, Influence of boundaries on pattern selection in through-flow, *Physica D*, 97 (1996) 253-263.
- [144] A. Pocheau, V. Croquette, P. Le Gal, C. Poitou, Convective pattern deformations under mean flow stress, *Europhysics Letters*, 3 (1987) 915-920.
- [145] E. Schröder, K. Bühler, Three-dimensional convection in rectangular domains with horizontal throughflow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38 (1995) 1249-1259.
- [146] M. Y. Chang, T. F. Lin, Vortex flow pattern selection and temporal-spatial structures of transverse and mixed vortex rolls in mixed convection of air in a horizontal flat duct, *Physical Review E*, 54 (1996) 5146-5160.
- [147] K. C. Chiu, J. Ouazzani, F. Rosenberger, Mixed convection between horizontal plates -2. Fully developed flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 (1987) 1655-1662.
- [148] K. Fujimura, R. E. Kelly, Mixed mode convection in an inclined slot, *J. Fluid Mech.*, 246 (1993) 545-568.
- [149] K. Fujimura, R. E. Kelly, Interaction between longitudinal convection rolls and transverse waves in unstably stratified plane Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, 7 (1995) 68-79.

- [150] R. M. Clever, F. H. Busse, Instabilities of longitudinal rolls in the presence of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 229 (1991) 517-529.
- [151] F. H. Busse, R. M. Clever, Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J. Fluid Mech.*, 91, part 2 (1979) 319-335.
- [152] K. C. Cheng, Lei Shi, Visualization of convective instability phenomena in the entrance region of a horizontal rectangular channel heated from below and/or cooled from above, *Experimental Heat Transfer*, 7 (1994) 235-248.
- [153] K. Fukui, M. Nakajima, H. Ueda, Coherent structure of turbulent longitudinal vortices in unstably-stratified turbulent flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34 (1991) 2373-2385.
- [154] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Clarendon Press, Oxford, 1961.

Annexe A : Formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle

Dans cette annexe, nous présentons la formulation mathématique des analyses de stabilité linéaire temporelle des écoulements de PRB entre deux plaques infinies (§A.1) et en conduites d'extension latérale finie (§A.2). La première partie (§A.1), relativement détaillée, permet de suivre sur un cas simple toutes les étapes de l'analyse. Pour un écoulement de PRB en canal confiné (§A.2), l'analyse suit la même démarche qu'au §A.1 mais les calculs étant plus compliqués, nous les présentons de manière synthétique. Pour plus de détails ou d'autres présentations, nous renvoyons à Kelly (1977, 1994) [1, 2], Platten et Legros (1984) [51], Nicolas (1997) [102], Nicolas et al. (2000) [53] et Kato et Fujimura (2000) [54]. On rappelle que ces analyses permettent d'étudier la croissance temporelle de perturbations infinitésimales mais qu'elles ne donnent aucune information sur l'évolution spatiale des perturbations, c'est à dire sur la manière dont elles sont convectées par l'écoulement moyen. Pour cela il est nécessaire d'analyser l'évolution spatio-temporelle des perturbations, ce qui fait appel aux notions d'instabilités convective et absolue (cf. §5).

On considère un fluide de Boussinesq, dans un canal horizontal, de section rectangulaire limitée par des parois horizontales rigides et isothermes en $z=\pm h/2$ et limitée, au §A.2, par des parois verticales rigides et adiabatiques en $y=\pm l/2$ ($l\rightarrow\infty$ au §A.1). Les parois du bas et du haut sont respectivement aux températures $T^\circ+\Delta T/2$ et $T^\circ-\Delta T/2$, où T° est la température moyenne de l'écoulement de base et ΔT est la différence de température entre les deux parois horizontales. Le fluide est entraîné dans la direction x infinie par un gradient de pression constant. Sous forme dimensionnelle, les champs de vitesse $\mathbf{V}(x,y,z,t)$, de température $T(x,y,z,t)$ et de pression motrice

$P(x,y,z,t)$ associés à ces écoulements satisfont les équations de Boussinesq suivantes (voir la nomenclature pour connaître les notations) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho^\circ} \nabla P + \nu^\circ \nabla^2 \mathbf{V} + \beta^\circ (T - T^\circ) \mathbf{g} \mathbf{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \alpha^\circ \nabla^2 T \end{cases} \quad (A1)$$

Dans la suite, nous noterons surmontés d'une barre les champs associés à l'écoulement de base dont nous souhaitons étudier la stabilité (ici, c'est l'écoulement de Poiseuille purement conducteur) : $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{U}(y, z), 0, 0)$, $\bar{T}(z)$ et $\bar{P}(x, z)$. Nous noterons avec un prime les perturbations infinitésimales autour de cet écoulement de base : $\mathbf{V}'(x,y,z,t)$, $T'(x,y,z,t)$ et $P'(x,y,z,t)$. Ainsi, en notant $\mathbf{f}=(\mathbf{V}, T, P)$ le vecteur des inconnues du système (A1), on a $\mathbf{f}=\bar{\mathbf{f}}+\mathbf{f}'$. D'autre part, dans tout ce qui suit, les grandeurs seront rendues adimensionnelles par les échelles de référence suivantes : la hauteur h pour x , y et z (sauf au §A.2 où y sera rendu adimensionnel par la largeur l), h^2/α° pour t , la vitesse moyenne U° de l'écoulement de base pour \bar{U} , α°/h pour U' , V' et W' (sauf au §A.2 où V' sera rendu adimensionnel par α°/l), ΔT pour $\bar{T}-T^\circ$ et $T'-T^\circ$, et $\alpha^\circ \nu^\circ \rho^\circ/h^2$ pour \bar{P} et P' . Les équations adimensionnelles seront fonction des paramètres suivants : $Re=U^\circ h/\nu^\circ$, $Ra=g\beta^\circ \Delta T h^3/(\nu^\circ \alpha^\circ)$, $Pr=\nu^\circ/\alpha^\circ$ et, au §A.2, $B=l/h$.

A.1 Cas des écoulements de PRB entre deux plaques infinies

Pour le problème de PRB entre deux plaques infinies, l'écoulement de base est un écoulement stationnaire, parallèle, uniforme dans les directions x et y . On a donc $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{U}(z), 0, 0)$, $\bar{T}=\bar{T}(z)$ et $\bar{P}=\bar{P}(x, z)$. La résolution de (A1) avec les conditions aux limites décrites ci-dessus, suivie de l'adimensionnalisation, donne:

$$\begin{cases} \bar{U}(z) = \frac{3}{2}(1 - 4z^2) \\ \bar{T}(z) = -z \\ \bar{P}(x, z) = -K_p x - \frac{Ra}{2} z^2 + cste \end{cases} \quad (A2)$$

où K_p est la valeur absolue du gradient de pression horizontal constant adimensionnel.

Les équations de perturbations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + Re \bar{U} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial x} + Re \bar{W}' \frac{d\bar{U}}{dz} \mathbf{i} = -\nabla P' + \nabla^2 \mathbf{V}' + Ra \bar{T}' \mathbf{k} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + Re Pr \bar{U} \frac{\partial T'}{\partial x} - \bar{W}' = \nabla^2 T' \end{cases} \quad (A3)$$

où \mathbf{V}' et T' vérifient les conditions aux limites suivantes : $\mathbf{V}' = \mathbf{0}$ et $T' = 0$ en $z = \pm 1/2$.

En recherchant les perturbations sous la forme de modes normaux, c'est à dire sous la forme $f'(x, y, z, t) = \hat{f}(z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{\sigma t}$, où k_x et k_y sont les nombres d'ondes dans les directions x et y et où $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ est le taux de croissance temporelle, on obtient à partir de (A3) un système de cinq équations où les inconnues sont les dépendances en z des amplitudes des perturbations : $\hat{f} = (\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{T}, \hat{P})$. En éliminant \hat{U}, \hat{V} et \hat{P} de ce système de cinq équations, on montre [51] que l'on peut se ramener au système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} k^2 Q \hat{W} - \frac{d}{dz} Q \frac{d\hat{W}}{dz} + i k_x Re \left(\frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} \hat{W} + \frac{d\bar{U}}{dz} \frac{d\hat{W}}{dz} \right) - Ra k^2 \hat{T} = 0 \\ \sigma \hat{T} + i k_x Re Pr \bar{U} \hat{T} + \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \hat{T} - \hat{W} = 0 \end{cases} \quad (A4)$$

où $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ et où l'opérateur $Q = \frac{\sigma}{Pr} + i k_x \text{Re} \bar{U} + k^2 - \frac{d^2}{dz^2}$. Les conditions aux

limites sur \hat{W} et \hat{T} sont : $\hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = \hat{T} = 0$ en $z = \pm 1/2$, où la deuxième condition

provient de la condition d'adhérence sur \hat{U} et \hat{V} et de l'équation de continuité.

Trois cas doivent être considérés : (i) le cas $k_x=0$ et $k_y \neq 0$ qui correspond à la formation de $R_{//}$ de longueur infinie (cf. §A.1.1), (ii) le cas $k_x \neq 0$ et $k_y=0$ qui correspond à la formation de R_{\perp} de longueur infinie (cf. §A.1.2) et (iii) le cas $k_x \neq 0$ et $k_y \neq 0$ qui correspond à l'apparition de perturbations quelconques (par exemple, des rouleaux sinueux ou des rouleaux parallèles, infinis et inclinés par rapport à la direction de l'écoulement [51, 102]). Nous verrons au §A.1.3 que le cas (iii) peut se ramener au cas (ii) grâce à la transformation de Squire [50].

A.1.1 $k_x=0, k_y \neq 0$: formation de $R_{//}$

Dans ce cas, le système (A4) se simplifie et s'écrit :

$$\begin{cases} \left(k_y^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(\frac{\sigma}{Pr} + k_y^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \hat{W} - Ra k_y^2 \hat{T} = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - k_y^2 - \sigma \right) \hat{T} + \hat{W} = 0 \end{cases} \quad (A5)$$

Ce système est indépendant du nombre de Reynolds. Par suite, le problème aux valeurs propres associé à (A5) et le nombre de Rayleigh critique résultant de sa résolution seront indépendants de Re . En fait, le système (A5) est identique au système d'équations obtenu lors de la résolution du problème de Rayleigh-Bénard entre deux plaques infinies (cf. chapitre II du livre de Chandrasekhar (1961) [154]). Le seuil d'instabilité correspondant à l'apparition de $R_{//}$ est donc caractérisé, quel que soit Re , par $Ra_{//}^* = 1707,762$, $k_y^* = 3,116$ et $\sigma_1^* = 0$ (on montre en effet que le principe d'échange

de stabilité est vérifié, c'est à dire que la partie imaginaire de la plus grande valeur propre σ_i^{\max} au point critique est toujours nulle).

A.1.2 $k_x \neq 0, k_y = 0$: formation de R_{\perp}

Dans ce cas, le système (A4) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x^2 Q \hat{W} - \frac{d}{dz} Q \frac{d\hat{W}}{dz} + i k_x \operatorname{Re} \left(\frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} \hat{W} + \frac{d\bar{U}}{dz} \frac{d\hat{W}}{dz} \right) - \operatorname{Ra} k_x^2 \hat{T} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \hat{T} + i k_x \operatorname{Re} \operatorname{Pr} \bar{U} \hat{T} + \left(k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \hat{T} - \hat{W} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A7})$$

où l'opérateur $Q = \frac{\sigma}{\operatorname{Pr}} + i k_x \operatorname{Re} \bar{U} + k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}$ et où \hat{W} et \hat{T} doivent satisfaire les

conditions aux limites : $\hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = \hat{T} = 0$ en $z = \pm 1/2$.

Ce système d'équations est identique au système que l'on aurait obtenu dans le cas de l'analyse de la stabilité linéaire des écoulements de PRB 2D dans le plan (x, z) soumis à des perturbations 2D. Pour sa résolution, on peut utiliser la méthode classique de Galerkin qui consiste à rechercher les inconnues $\hat{W}(z)$ et $\hat{T}(z)$ sous la forme de développements en série limités :

$$\hat{W}(z) = \sum_{i=1}^M a_i A_i(z) \quad \text{et} \quad \hat{T}(z) = \sum_{j=1}^N b_j B_j(z) \quad (\text{A8})$$

où $(A_i(z))_{i=1,M}$ et $(B_j(z))_{j=1,N}$ sont deux ensembles complets de fonctions de base linéairement indépendantes vérifiant les conditions aux limites. De plus, comme ici on s'intéresse à l'apparition de R_{\perp} , les fonctions de base doivent être paires en z . On pourra prendre par exemple : $A_i(z) = (z^2 - 1/2)^2 T_{2i-2}(z)$ et $B_j(z) = (z^2 - 1/2) T_{2j-2}(z)$, où les $T_n(z) = \cos(n \arccos(z))$ sont les polynômes de Chebyshev. Les coefficients a_i et b_j des relations (A8) sont calculés par la méthode des résidus pondérés. Elle consiste à écrire

que Res_M , le résidu d'ordre M de la relation (A6) (c'est à dire la relation (A6) dans laquelle on a substitué \hat{W} et \hat{T} par les expressions (A8) développées à l'ordre M), doit être orthogonal à chacune des fonctions de base $A_i(z)_{i=1,M}$ et que Res_N , le résidu d'ordre N de la relation (A7), doit être orthogonal à chacune des fonctions de base $B_j(z)_{j=1,N}$. Ainsi, les résidus doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \int_{z=-1/2}^{z=+1/2} \text{Res}_M A_i(z) dz &= 0 \quad \text{de } i = 1 \text{ à } M \\ \int_{z=-1/2}^{z=+1/2} \text{Res}_N B_j(z) dz &= 0 \quad \text{de } j = 1 \text{ à } N \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Les relations (A9) constituent un système algébrique linéaire homogène de $M+N$ équations permettant de calculer les $M+N$ coefficients a_i et b_j . Les éléments de la matrice de ce système contiennent des intégrales de produits de fonctions de base et sont fonction des cinq paramètres R_a , R_e , P_r , σ et k_x . Ce système algébrique peut s'écrire sous la forme du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{pmatrix} M + iR_e P - \sigma N \\ N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} N & M + iR_e N \\ N & P - \sigma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A10})$$

où M, N, P et I sont des matrices de taille $(M+N)^2$, I est la matrice unité et \mathbf{a} et \mathbf{b} sont les vecteurs $(a_i)_{i=1,M}$ et $(b_j)_{j=1,N}$. On est donc amené à rechercher les valeurs propres

σ de la matrice $\begin{pmatrix} M + iR_e P - \sigma N \\ N \end{pmatrix}$. En fait, il est suffisant de déterminer la valeur propre de plus grande partie réelle σ_r^{\max} (et le vecteur propre correspondant) car σ_r^{\max} est le taux d'amplification temporelle de la perturbation la plus déstabilisante et la stabilité neutre (ou marginale) est donnée par $\sigma_r^{\max}=0$. Pour déterminer le point critique $R_{a_l}^*$ à R_e et P_r fixés, il suffit de rechercher, en balayant toutes les longueurs d'onde k_x , la valeur minimale du nombre de Rayleigh pour lequel σ_r^{\max} s'annule. La solution de cette analyse est présentée qualitativement à la *figure 4* et pour $P_r=10$ à la *figure 9* : le

nombre de Rayleigh critique Ra_{\perp}^* d'apparition des R_{\perp} est égal à 1707,762 à $Re=0$ et il croît lorsque Re augmente. Nous renvoyons aux références du *tableau II* et à Nicolas (1997) [102] pour plus détails sur la méthodologie et les résultats de cette analyse.

A.1.3 $k_x \neq 0, k_y \neq 0$: formation de structures quelconques et transformation de Squire

Pour résoudre le système (A4) dans le cas d'une structure quelconque (par exemple, des rouleaux convectifs inclinés d'un angle θ par rapport à la direction moyenne de l'écoulement), on utilise une transformation semblable à la transformation de Squire [50]. Elle consiste à se placer dans un nouveau repère dont la base $(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}})$ a tourné de l'angle $\theta = \arctan(k_y/k_x)$ par rapport à la base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) , où \mathbf{i} indique la direction de l'écoulement moyen et où \mathbf{j} est la direction transversale (cf. *figure 37*). En notant \tilde{k}_x et \tilde{k}_y les nombres d'ondes dans les directions $\tilde{\mathbf{i}}$ et $\tilde{\mathbf{j}}$, et en notant \tilde{Re} le nombre de Reynolds basé sur la vitesse $\tilde{U} = \bar{U} \cos \theta$, la transformation de Squire consiste donc à faire le changement de variables suivant dans le système (A4) [51, 102] :

$$\begin{cases} k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \tilde{k}_x^2 & (\text{car } \tilde{k}_y = 0) \\ k_x Re = \tilde{k}_x \tilde{Re} \\ \sigma = \tilde{\sigma} \\ Pr = \tilde{Pr} \\ Ra = \tilde{Ra} \end{cases} \quad (A11)$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \tilde{k}_x^2 \tilde{Q} \hat{W} - \frac{d}{dz} \tilde{Q} \frac{d\hat{W}}{dz} + i \tilde{k}_x \tilde{Re} \left(\frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} \hat{W} + \frac{d\bar{U}}{dz} \frac{d\hat{W}}{dz} \right) - \tilde{Ra} \tilde{k}_x^2 \hat{T} = 0 \\ \tilde{\sigma} \hat{T} + i \tilde{k}_x \tilde{Re} \tilde{Pr} \bar{U} \hat{T} + \left(\tilde{k}_x^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \hat{T} - \hat{W} = 0 \end{cases} \quad (A12)$$

$$\text{où } \tilde{Q} = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{Pr}} + i \tilde{k}_x \tilde{Re} \bar{U} + \tilde{k}_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}.$$

Ce système étant identique au système (A6)-(A7) obtenu dans le cas de l'apparition de R_{\perp} au point critique, la *figure 38* montre la manière dont la courbe critique $Ra^*(Re)$ pour les structures quelconques ($k_x \neq 0, k_y \neq 0$) peut se déduire graphiquement de la courbe critique $\tilde{Ra}^*(\tilde{Re})$ pour les R_{\perp} . En effet, grâce à la transformation de Squire, on sait que la stabilité neutre (donnée par $\sigma_r^{\max} = \tilde{\sigma}_r^{\max} = 0$), lorsque $Pr = \tilde{Pr}$, est atteinte pour le même nombre de Rayleigh critique $Ra^* = \tilde{Ra}^*$ si le nombre de Reynolds pour les structures quelconques est $Re = \tilde{k}_x \tilde{Re} / k_x$. Or, comme $\tilde{k}_x > k_x$, on a $Re > \tilde{Re}$. De plus, pour \tilde{Re} fini, dans le cas limite où k_x tend vers 0, c'est à dire pour \tilde{k}_x tendant vers $k_y \neq 0$, la deuxième relation de (A11) montre que Re doit tendre vers l'infini : on retrouve la courbe $Ra_{//}^*$.

A.2 Cas des écoulements de PRB en conduites d'extension latérale finie

Pour le problème de PRB en conduites d'extension latérale finie, les profils de température $\bar{T}(z)$ et de pression $\bar{P}(x, z)$ de l'écoulement de base sont donnés par (A2). Par contre, le profil de vitesse est ici fonction de y et de z : $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{U}(y, z), 0, 0)$. On montre que [53] :

$$\bar{U}(y, z) = \frac{3}{2} (1 - 4z^2) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch}((2n+1)\pi By) \cos((2n+1)\pi z)$$

$$\text{avec } A_n = \frac{48(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3 \pi^3 \operatorname{ch}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi B\right)} \quad (\text{A13})$$

où $B=l/h$ est le rapport de forme transversal et où \bar{U} est rendue adimensionnelle par la vitesse moyenne U° de l'écoulement de base 2D.

Les équations de perturbations linéarisées adimensionnelles s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{V}' = 0 \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + \text{Re} \bar{U} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial x} + \left(\frac{\text{Re}}{\mathbf{B}^2} \mathbf{V}' \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \text{Re} \mathbf{W}' \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) \mathbf{i} = -\nabla P' + \nabla_{\mathbf{B}}^2 \mathbf{V}' + \text{Ra} \mathbf{T}' \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial t} + \text{Re} \text{Pr} \bar{U} \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial x} - \mathbf{W}' = \nabla^2 \mathbf{T}' \end{cases} \quad (\text{A14})$$

où $\nabla_{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\mathbf{B}^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ et $\nabla_{\mathbf{B}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\mathbf{B}^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, où \bar{U} est rendue

adimensionnelle par la vitesse moyenne U_{3D}° de l'écoulement de base 3D et où \mathbf{V}' et \mathbf{T}' vérifient les conditions aux limites : $\mathbf{V}'=0$ et $\partial \mathbf{T}' / \partial y=0$ en $y=\pm 1/2$ et $\mathbf{V}'=0$ et $\mathbf{T}'=0$ en $z=\pm 1/2$.

En raisonnant comme précédemment, les perturbations sont recherchées sous la forme des modes normaux suivants : $\mathbf{f}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{f}}(y, z) e^{ik_x x + \sigma t}$ et on obtient, à partir de (A14), un système de cinq équations où les inconnues sont les dépendances en y et z des amplitudes des perturbations : $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{T}$ et \hat{P} . A ce niveau deux cas doivent être considérés : (i) le cas $k_x=0$ qui correspond à la formation d'un nombre fini de $R_{//}$ de longueur infinie (cf. §A.2.1) et (ii) le cas $k_x \neq 0$ qui correspond à la formation de structures 3D quelconques (cf. §A.2.2).

A.2.1 $k_x=0$: formation de $R_{//}$

Dans ce cas, les équations fonction de $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{T}$ et \hat{P} s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{B^2} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\text{Pr}} \hat{U} + \frac{\text{Re}}{B^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \hat{V} + \text{Re} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \hat{W} = \nabla_2^2 \hat{U} \end{array} \right. \quad (\text{A16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\text{Pr}} \hat{V} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} + \nabla_2^2 \hat{V} \end{array} \right. \quad (\text{A17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\text{Pr}} \hat{W} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + \nabla_2^2 \hat{W} + \text{Ra} \hat{T} \end{array} \right. \quad (\text{A18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \hat{T} - \hat{W} = \nabla_2^2 \hat{T} \end{array} \right. \quad (\text{A19})$$

où $\nabla_2^2 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Dans ce système, l'équation (A16) pour \hat{U} peut être résolue

séparément une fois \hat{V} et \hat{W} connus et les quatre équations (A15), (A17)-(A19), indépendantes de Re , forment le même problème aux valeurs propres que pour le problème de Rayleigh-Bénard en canal confiné (déjà traité, par exemple, par Luijckx et Platten (1981) [71]). Comme on peut montrer que le principe d'échange de stabilité est vérifié dans ce cas ($\sigma_i^{\max} = 0$ au point critique), le nombre de Rayleigh critique $\text{Ra}_{//}^*$ issu de ce problème aux valeurs propres est indépendant de Re et de Pr et ne dépend que de B . Les résultats de cette analyse sont présentés à la *figure 8*.

A.2.2 $k_x \neq 0$: formation de structures 3D

En éliminant successivement \hat{U} et \hat{P} des cinq équations en amplitude de perturbations, on obtient le système de trois équations suivant [53] :

$$\left\{ \begin{array}{l}
Q\hat{V} - \frac{1}{k_x^2 B^2} \frac{\partial}{\partial y} Q \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \frac{i \operatorname{Re}}{k_x B^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \hat{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right) \\
- \frac{1}{k_x^2} \frac{\partial}{\partial y} Q \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} + \frac{i \operatorname{Re}}{k_x} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \hat{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial \hat{W}}{\partial y} \right) = 0 \\
Q\hat{W} - \frac{1}{k_x^2} \frac{\partial}{\partial z} Q \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} + \frac{i \operatorname{Re}}{k_x} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \hat{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} \right) \\
- \frac{1}{k_x^2 B^2} \frac{\partial}{\partial z} Q \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + \frac{i \operatorname{Re}}{k_x B^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \hat{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} \right) - \operatorname{Ra} \hat{T} = 0 \\
\sigma \hat{T} + i k_x \operatorname{Re} \operatorname{Pr} \bar{U} \hat{T} + (k_x^2 - \nabla_2^2 \hat{T}) \hat{T} - \hat{W} = 0
\end{array} \right. \quad (\text{A20})$$

où $Q = \frac{\sigma}{\operatorname{Pr}} + i k_x \operatorname{Re} \bar{U} + k_x^2 - \nabla_2^2$. De plus, \hat{V} , \hat{W} et \hat{T} vérifient les conditions aux

limites : $\hat{V} = \hat{W} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} = 0$ en $y = \pm 1/2$ et $\hat{V} = \hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} = \hat{T} = 0$ en $z = \pm 1/2$, où

la condition de Neuman sur \hat{V} et \hat{W} provient de l'équation de continuité et de la condition d'adhérence sur \hat{U} .

Le système (A20) avec les conditions aux limites associées peut être résolu par la méthode de Galerkin :

$$\begin{aligned}
\hat{V}(y, z) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} A_i(y) B_j(z) \\
\hat{W}(y, z) &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L b_{kl} C_k(y) D_l(z) \\
\hat{T}(y, z) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} E_m(y) F_n(z)
\end{aligned} \quad (\text{A21})$$

où $(A_i(y))_{i=1, I}$, $(B_j(z))_{j=1, J}$, ..., $(F_n(z))_{n=1, N}$ sont six ensembles complets de fonctions de base linéairement indépendantes vérifiant les conditions aux limites. Comme au §A.1.2, les coefficients a_{ij} , b_{kl} et c_{mn} sont calculés par la méthode des résidus pondérés

qui aboutit à la résolution d'un problème aux valeurs propres en σ et à la détermination des paramètres critiques au seuil de l'instabilité linéaire (cf. *figures 5 et 9* et §4.2.3).

On peut cependant montrer ici [53, 54] qu'à cause des symétries du problème (symétries de réflexion par rapport aux plans horizontal et vertical médians des équations (A20) et des conditions aux limites), on peut classer les solutions en quatre classes de différentes parités. Ces quatre classes sont présentées dans le *tableau IX*. On est donc amené en réalité à résoudre quatre problèmes aux valeurs propres, un pour chaque classe de solution. Dans le *tableau IX*, nous avons dessiné, dans le plan (y,z) , à partir des composantes \hat{V} et \hat{W} des amplitudes des perturbations de vitesse, les structures convectives correspondant à chaque classe. La structure complète est obtenue en prenant en compte $\hat{U}(y,z)$ et la dépendance en x des perturbations (de la forme $e^{ik_x x}$). On peut montrer que les structures des cas C et D n'apparaissent jamais au seuil de l'instabilité linéaire car les nombres de Rayleigh critiques pour ces deux cas sont toujours supérieurs à ceux des cas A et B. Les problèmes aux valeurs propres des cas A et B montrent que trois types de structures déjà observées expérimentalement sont susceptibles d'apparaître au seuil de l'instabilité linéaire : un nombre pair (cas A) ou impair (cas B) de $R_{//}$ lorsque $k_x^* \rightarrow 0$ et des R_{\perp} en forme de fer à cheval dans le cas A lorsque $k_x^* \approx 3$. Ces R_{\perp} incurvés par les conditions d'adhérence aux parois sont représentés aux figures 31(b) et 31(e) dans le cas où les parois latérales sont parfaitement conductrices. Lorsque $k_x > 0$ dans le cas B, la structure d'écoulement correspondante n'a jamais été observée expérimentalement. En effet, comme U' est impair en y , l'amplitude de U' s'annule dans le plan vertical médian $y=0$.

Dans cette partie, la démarche et les notations adoptées correspondent à l'article de Nicolas et al. (2000) [53], auquel nous renvoyons pour avoir plus de détails sur le calcul du profil de base $\bar{U}(y,z)$, sur la prise en compte de la parité des solutions,

sur le choix des fonctions de base et sur la détermination des paramètres critiques Ra_{\perp}^* , Re^* , k_x^* et σ_i^* . Nous renvoyons également à Kato et Fujimura (2000) [54] qui réalisent la même analyse de stabilité linéaire mais avec d'autres techniques de calculs leur permettant d'obtenir des ordres de précision élevés sur les paramètres critiques (profil de base $\bar{U}(y, z)$ développé en somme de polynôme de Chebyshev, ordres de troncature élevés dans (A21), problèmes aux valeurs propres résolus par la méthode QZ et solutions raffinées par des itérations de Newton-Raphson, ...).