



**HAL**  
open science

# Distributions de séries d'Eisenstein presque holomorphes sur un corps totalement réel

Julien Puydt

► **To cite this version:**

Julien Puydt. Distributions de séries d'Eisenstein presque holomorphes sur un corps totalement réel. 2012. hal-00694754

**HAL Id: hal-00694754**

**<https://hal.science/hal-00694754>**

Preprint submitted on 6 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Distributions de séries d'Eisenstein presque holomorphes sur un corps totalement réel

Julien Puydt  
Institut Joseph Fourier UMR5582  
Grenoble, France  
E-mail: julien.puydt@ujf-grenoble.fr

7 mai 2012

## Résumé

On définit d'abord un type de séries d'Eisenstein, sous forme de distributions fournissant des formes automorphes presque-holomorphes sur un corps de nombre totalement réel, en donnant différentes expressions (intégrale, sommatoire) ; on montre ensuite qu'elles vérifient bien les propriétés attendues, puis on calcule les coefficients de Fourier explicitement. On termine par un calcul explicite dans le cas le plus simple, qui fait apparaître que les objets abstraits considérés ici généralisent bien les objets classiques.

## 1 Introduction

### 1.1 Résumé

Ma thèse de doctorat [11] portait sur la détermination de congruences sur les valeurs spéciales des fonctions  $L$  de certaines formes modulaires, connaissant des congruences sur leurs coefficients de Fourier. Les résultats étaient établis dans un cadre semi-adélique sur le corps des nombres rationnels.

Le principe de base est d'utiliser la méthode de Rankin-Selberg pour obtenir des congruences sur les valeurs spéciales à partir de congruences sur les coefficients de Fourier. Cette méthode nécessite de construire des séries d'Eisenstein adaptées au cadre dans lequel on souhaite travailler. Le but du présent travail est donc la construction d'une variante des séries d'Eisenstein pour généraliser le travail de ma thèse au cas de corps de nombres totalement réels.

La construction présentée ici possède la combinaison suivante de caractéristiques :

- elle se présente sous forme de distributions, car la liberté de choisir de bonnes fonctions-tests donne plus de souplesse pour les applications ;
- le cadre est adélique (ou semi-adélique), car on peut alors faire intervenir des caractères de conducteur relativement arbitraire ;

- on considère des formes automorphes, pour se rapprocher de la théorie des représentations ;
- une régularité moins restrictive que l’holomorphie, mais sans trop s’en éloigner pour garder une structure rationnelle : la presque-holomorphie.

On termine le travail par un exemple extrêmement concret qui montre que les séries les plus classiques sont un sous-cas, obtenu en faisant des choix de paramètres et de fonction-test simples.

## 1.2 Rapide historique

La littérature regorge d’exemples de séries d’Eisenstein, possédant diverses combinaisons de bonnes propriétés (en plus de celles qui « caractérisent » ce type d’objets) ; passons quelques exemples en revue.

Shimura, dans son article [17], travaille sur un corps de nombres totalement réel (et par moments une extension totalement imaginaire de ce dernier), mais avec des formes modulaires classiques (pas dans un cadre de représentations), sur des groupes symplectiques et unitaires. Enfin, les séries d’Eisenstein considérées ne prennent pas la forme de distributions.

Hida, dans son article [5], utilise une série d’Eisenstein comme une mesure (bornée), mais le cadre est limité à  $\mathbb{Q}$ , et il applique des opérateurs différentiels de Shimura pour obtenir des formes modulaires presque-holomorphes (bien qu’il ne les appelle pas ainsi), auxquelles il applique ensuite un opérateur de projection holomorphe.

Dans le livre [9] de Panchishkin, en section 4.1, on trouve présentée une série d’Eisenstein dans le cadre des formes modulaires de Hilbert, dont le développement en série de Fourier est explicité en proposition 4.2. Le travail est bien sur un corps totalement réel et des distributions sont construites comme définies sur un groupe de Galois. L’approche n’est pas celle de la théorie des représentations.

Dans son article [13], Scholl, en section 4.3, page 433, présente une construction sous forme de distributions dans un cadre de formes automorphes adéliques, mais limitée aux adèles sur  $\mathbb{Q}$ , et à des formes modulaires holomorphes.

Finalement, dans ma thèse [11], les séries d’Eisenstein étaient des distributions adéliques et fournissait des formes automorphes presque-holomorphes, mais le corps de base était  $\mathbb{Q}$ .

## 1.3 Résultats

Pour une fonction de Schwartz-Bruhat  $\varphi$ , on définit (en 3.1) la série d’Eisenstein associée par la formule :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi) : g \longmapsto |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(g/t)d^\times t$$

où :

$$\Theta(\varphi) : g \longmapsto \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} (g\varphi)(v)$$

dont on montre la convergence sous réserve que la partie réelle de  $s$  soit assez élevée en 3.2.

On montre en 4.2 que cette définition se prolonge de façon méromorphe en  $s$ , avec d'éventuels pôles simples en 1 et 0, avec une ébauche d'équation fonctionnelle ; qui est ensuite affinée en l'équation fonctionnelle suivante en 4.3 :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) = E_{\bar{\omega},1-s}^{\text{ana}}(\hat{\varphi})(g^{\sharp})$$

où  $\hat{\varphi}$  est la transformée de Fourier (symplectique) de  $\varphi$  et  $g^{\sharp} = \frac{1}{\det g}g$  (deux involutions).

Ces bonnes propriétés analytiques établies, on prouve alors que la fonction  $g \mapsto E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g)$  a de bonnes propriétés d'automorphie :

- elle est  $\text{GL}_2(F)$ -invariante à gauche (5.1) ;
- $\omega$  est un caractère central (5.2) ;
- de bons choix pour les parties archimédiennes donnent une notion de poids au sens des formes automorphes (5.3) :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g\rho) = \left( \prod_{\iota \in I} e^{ik_{\iota}\theta_{\iota}} \right) E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g)$$

où :

$$\rho = \left( \left( \begin{array}{cc} \cos(\theta_{\iota}) & \sin(\theta_{\iota}) \\ -\sin(\theta_{\iota}) & \cos(\theta_{\iota}) \end{array} \right) \right)_{\iota \in I}$$

- il existe un sous-groupe de  $\text{GL}_2(\hat{\mathcal{O}})$  d'indice fini pour lequel elle est invariante à droite (5.4) ;
- la croissance est modérée (5.5).

On calcule très explicitement la fonction de Whittaker de la forme automorphe, et on prouve la formule suivante (en page 21) :

$$a_1(g) = |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A} \times \mathbb{A}^{\times}} \omega(t) |t|^{2s} (g\varphi) \left( t \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(u) du d^{\times}t$$

Cette formule ouvre la porte à deux types de considération :

- d'une part, elle montre que si  $\varphi$  se factorise suivant les différentes places, alors la fonction de Whittaker se factorise de même ;
- d'autre part, elle permet d'étudier plus finement la régularité en les places infinies ; on montre alors en 7.6 que pour le choix  $s = \frac{k}{2} - r$  avec  $r \in \mathbb{N}$ , on obtient une forme automorphe presque-holomorphe au sens de 2.6.

## 1.4 Applications

La motivation principale à cette nouvelle construction est l'étude de congruences pour les valeurs spéciales des fonctions  $L$  des formes modulaires, pour généraliser les résultats obtenus dans ma thèse [11] sur un corps totalement réel.

À partir de congruences sur les coefficients de Fourier, la méthode de Rankin-Selberg permet d'obtenir des congruences sur les valeurs spéciales. Cette notion de congruence nécessite en préliminaire que les objets considérés vérifient des propriétés d'algébricité, et que les espaces admettent des structures rationnelles.

De tels résultats sont déjà connus dans des cadres proches. Par exemple, dans le cas des formes modulaires de Hilbert sur un corps totalement réel, Shimura [15] a montré l'algébricité des valeurs spéciales. On peut aussi citer le livre [9] de Panchishkin, qui montre des congruences entre valeurs spéciales, mais utilise la méthode de la projection holomorphe, qui introduit des complications.

On sait que l'on peut contourner ces difficultés via la méthode de la projection canonique, qui a déjà été utilisée pour obtenir de bonnes congruences dans divers cadres ([10] et [11]). Il reste à l'étendre au cas des formes automorphes sur un corps totalement réel qui nous intéresse.

Dans un second temps, on peut penser que l'obtention de telles congruences pour des fonctions  $L$  complexes permettra d'obtenir des renseignements sur des fonctions  $L$   $p$ -adiques ; par exemple en utilisant des méthodes similaires au travail de Manin [8], ou celui de Dabrowski [2].

Enfin, comme le calcul des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein développées ici est assez explicite, il pourra être intéressant d'en étudier plus finement les dénominateurs pour les contrôler, en s'approchant de résultats d'intégralité, par exemple dans le cas de séries d'Eisenstein-Klingen (l'algébricité a déjà été étudiée par Michael Harris durant les années 1980).

## 1.5 Plan du travail

Après cette introduction, on trouvera quelques préliminaires 2, pour fixer les notations d'abord, pour rappeler rapidement quelques résultats classiques d'analyse harmonique sur les adèles, puis pour présenter une fonction confluyente hypergéométrique et deux calculs d'intégrales. Ces préliminaires se terminent par une assez longue discussion de la notion de presque-holomorphie 7, qui permet de définir une structure rationnelle sur les formes automorphes en 2.6.4.

On définit alors les distributions proprement dites, d'abord via une expression intégrale en 3.1, dont on montre d'abord la convergence en 3.2, avant d'en donner une expression sommatoire en 3.3.

On étudie ensuite le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle en 4, avant de prouver une par une les différentes propriétés d'automorphie en 5.

Après, en section 6, on discute des coefficients de Fourier. On obtient une expression explicite de la fonction de Whittaker en 6.2, qui permet de conclure par la section 7, dans laquelle on établit la presque-holomorphie des séries d'Eisenstein considérées sous certaines hypothèses en 7.6 ; avec des coefficients dont l'algébricité est assez bien contrôlée.

Finalement, en section 8, on montre que si l'on fait certains choix simples, la construction permet de retrouver les séries d'Eisenstein classiques.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Corps de base et données afférentes

$F$  est un corps de nombres totalement réel, et  $I$  l'ensemble de ses plongements réels.

On note  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\mathbb{A}$  l'anneau des adèles de  $F$ ; on note  $\mathbb{A}_\infty$  la partie archimédienne des adèles, identifiée à  $\mathbb{R}^I$ , et  $\mathbb{A}_f$  la partie non-archimédienne; de façon plus générale, si  $x$  est un objet adélique, on notera  $x_f$  sa partie non-archimédienne et  $x_\infty$  sa partie archimédienne, et pour chaque place  $v$  de  $F$ , on notera  $x_v$  sa composante le long de  $v$ ; la complétion étant notée  $F_v$ . On écrira en particulier  $x_\iota$  pour désigner la partie archimédienne de l'objet  $x$  pour le plongement  $\iota \in I$ . Dans  $\mathbb{A}_f$ , on notera  $\hat{\mathcal{O}}$  l'anneau des entiers complétés; on sait que  $\mathbb{A}_f = \hat{\mathcal{O}} \otimes F$ .

On notera  $\mathbb{A}_1^\times$  les idèles de norme 1, et de façon similaire  $\mathbb{A}_{<1}^\times$  (respectivement  $\mathbb{A}_{>1}^\times$ ) les idèles de normes strictement plus petite (respectivement strictement plus grande) que 1.

### 2.2 Notations matricielles

Pour tout anneau  $R$ ,  $\mathcal{M}_2(R)$  est l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  à coefficients dans  $R$ , et  $\mathrm{GL}_2(R)$  est son sous-groupe des matrices inversibles; de manière générale, si  $m$  est une telle matrice, on notera :

$$m = \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix}$$

Dans ce sous-groupe, on considèrera :

- $B(R)$  les matrices boréliennes, telles que  $c_m = 0$ ;
- $U(R)$  les matrices de translation, qui sont boréliennes avec  $a_m = c_m = 1$ ;
- $T(R)$  les matrices diagonales, telles que  $b_m = c_m = 0$ ;
- $Z(R) \subset T(R)$  le centre, telles que  $a_m = d_m$ ;
- si  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $R$ , on notera  $B(\mathfrak{n})$  les matrices  $m$  inversibles telles que  $c_m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}}$ ;
- dans les mêmes conditions,  $\Gamma(\mathfrak{n}) = B(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{SL}_2(R)$ .

Ces dernières notations seront en particulier utile dans  $\hat{\mathcal{O}}$  – l'anneau sera alors implicite.

### 2.3 Analyse harmonique sur les adèles

La référence usuelle pour cette section est bien évidemment la thèse de Tate [19]; elle est aussi présentée (avec une bibliographie assez riche) dans l'article de survol de Kudla [7]. Le livre de Ramakrishnan et Valenza [12] est une bonne introduction (plus long). Bien sûr, Weil [20] couvre tout en détail.

L'espace vectoriel des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur  $\mathbb{A}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sera noté  $\mathcal{S}(\mathbb{A}^2)$ .

Toutes ne s'écrivent pas sous la forme  $x \mapsto \varphi_f(x_f)\varphi_\infty(x_\infty)$ , où  $\varphi_f$  est localement constante à support compact et  $\varphi_\infty$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, mais les fonctions de ce type engendrent vectoriellement l'espace ; on pourra donc souvent s'y ramener.

On fixe le caractère additif  $\Psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$  usuel et on choisit les normalisations usuelles des mesures de Haar pour que les formules d'inversion de la transformée de Fourier fonctionnent. En particulier, ce caractère additif est défini par produit sur les places ; avec sur les places finies  $v|p$  une expression  $x \mapsto \exp(-2i\pi \text{Tr}_{F_v/\mathbb{Q}_p}(x))$ , et en les places infinies une expression  $x \mapsto \exp(2i\pi x)$  (on rappelle que toutes les places infinies sont réelles).

On définit la transformée de Fourier (symplectique) d'une fonction de Schwartz-Bruhat  $\varphi$  par la formule :

$$\hat{\varphi} : (x_1, x_2) \mapsto \int_{\mathbb{A}^2} \varphi(y_1, y_2) \Psi(x_1 y_2 - x_2 y_1) dy_1 dy_2$$

Cette opération définit une bijection sur  $\mathcal{S}(\mathbb{A}^2)$ , pour laquelle on dispose du résultat suivant, conséquence de la formule de Poisson :

$$\forall t \in \mathbb{A}^\times, \sum_{v \in F^2} \varphi(tv) = |t|^{-2} \sum_{v \in F^2} \hat{\varphi}(v/t)$$

Le résultat suivant, classique, est énoncé et prouvé par exemple dans la thèse de Tate [19] (page 337), et dans le livre de Ramakrishnan et Valenza [12] (page 283) :

**Lemme 1.**

$$\text{Vol}(\mathbb{A}_1^\times / F^\times) = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h_F R_F}{w_F \sqrt{|d_F|}} (= -\text{Res}_1 \zeta_F)$$

où  $r_1$  est le nombre de plongements réels du corps,  $r_2$  est le nombre de plongements complexes à conjugaison près (dans cet article : 0),  $h_F$  est le nombre de classes,  $R_F$  est le régulateur,  $d_F$  le discriminant,  $w_F$  le cardinal du groupe des racines de l'unité de  $F$  et  $\zeta_F$  la fonction  $\zeta$  de Dedekind du corps  $F$ .

De là, on déduit le résultat suivant :

**Lemme 2.** Si  $\omega$  est un caractère de Hecke unitaire et  $s \in \mathbb{C}$  est de partie réelle strictement positive, alors :

$$\int_{\mathbb{A}_{<1}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^s d^\times t = \frac{\delta(\omega)}{s}$$

où :

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ est ramifié} \\ \text{Vol}(\mathbb{A}_1^\times / F^\times) & \text{si } \omega \text{ n'est pas ramifié} \end{cases}$$

*Démonstration.* Il suffit essentiellement d'utiliser l'isomorphisme :

$$\mathbb{A}_{<1}^\times / F^\times \simeq \mathbb{A}_1^\times / F^\times \times ]0; 1[$$

Comme on a supposé  $\omega$  unitaire, il n'a pas de contribution sur la seconde composante ; comme par ailleurs  $|\cdot|$  est trivial sur la première, l'intégrale se factorise :

$$\int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^s d^\times t = \left( \int_{\mathbb{A}_1^\times/F^\times} \omega(t) d^\times t \right) \left( \int_0^1 t^s d^\times t \right)$$

d'où l'expression du résultat final.  $\square$

On fait agir à gauche une matrice  $g$  de  $GL_2(\mathbb{A})$  sur une fonction de Schwartz-Bruhat  $\varphi$  via :

$$(g\varphi) : x \mapsto \varphi(g^{-1}x)$$

On prendra soin de ne pas confondre cette action matricielle avec le produit extérieur par un scalaire, pour lequel on dispose de la même notation. En cas de doute, choisir l'interprétation qui donne un bon résultat.

## 2.4 Fonction confluente hypergéométrique

La référence est ici l'article [16] de Shimura, qui généralise des énoncés donnés dans [14], qui crédite Siegel pour le cas particulier qui nous intéresse.

L'article définit une fonction  $\omega : (z, \alpha, \beta) \mapsto \omega(z, \alpha, \beta)$  (en fait,  $\omega_m$ , mais seul le cas  $m = 1$  nous intéresse ici), sur  $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{C}^2$ , où  $\mathbb{H}^1$  est le demi-plan  $\Re(\cdot) > 0$ , dont l'expression générale nous importe assez peu ; le théorème 3.1, page 281, affirme que cette fonction est holomorphe sur son domaine de définition, avec :

$$\forall (z, \alpha, \beta) \in \mathbb{H}^1 \times \mathbb{C}^2, \omega(z, 1 - \beta, 1 - \alpha) = \omega(z, \alpha, \beta)$$

La proposition 3.2, page 285 affirme que cette fonction a un développement de type polynomial pour certaines valeurs des paramètres, et l'article donne, en (3.17) et (3.18) (pour  $n > 0$ , le cas  $n = 0$  se calcule directement) un développement explicite qui mérite d'être énoncé à part :

**Proposition 1.** *Pour  $(z, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$  avec  $\Re(z) > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :*

$$\begin{aligned} \omega(z, n + 1, \beta) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta(\beta + 1) \dots (\beta + k - 1) z^{-k} \\ \omega(z, \alpha, -n) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - \alpha)(2 - \alpha) \dots (k - \alpha) z^{-k} \end{aligned}$$

## 2.5 Deux intégrales archimédiennes

Le calcul de l'intégrale suivante, dont la preuve fait intervenir un simple changement de variable, pour forcer l'apparition de la fonction  $\Gamma$  d'Euler, mérite d'être écrit :

**Lemme 3.** Pour  $a > 0$  réel et  $u$  complexe de partie réelle strictement supérieure à  $-1$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} t^u \exp(-at^2) d^\times t = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)}{a^{\frac{u}{2}}}$$

Par ailleurs, le lemme suivant explique comment la fonction confluyente hypergéométrique entre en jeu dans ce travail :

**Lemme 4.** Pour  $y > 0$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tels que le premier membre converge, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (x + iy)^{-\alpha} (x - iy)^{-\beta} \exp(-2i\pi x) dx \\ &= \exp(-2\pi y) i^{\beta-\alpha} \Gamma(\alpha)^{-1} (2\pi)^{\alpha+\beta} (4\pi y)^{-\beta} \omega(4\pi y, \alpha, \beta) \end{aligned}$$

*Remarque 1.* Plus loin, on va montrer le prolongement analytique des séries d'Eisenstein (et leur équation fonctionnelle) via la formule de Poisson ; le résultat précédent permettrait de montrer aussi ce résultat en prolongeant les coefficients de Fourier eux-mêmes. C'est la raison pour laquelle on n'insiste pas sur les conditions pour lesquelles l'intégrale converge : il suffit de commencer le calcul dans un domaine où elle converge, et le second membre permet alors de généraliser le résultat et s'affranchir des limitations.

## 2.6 Presque-holomorphie

### 2.6.1 Opérateurs différentiels

On se contente ici de rappeler très rapidement ce dont on a besoin, sans entrer dans les détails ; on en trouvera un peu plus dans Bump [1].

Étant donnée une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ , on sait que l'on peut faire agir sur  $f$  les éléments de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  comme des opérateurs différentiels invariants à gauche, via l'interprétation :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$$

Cette action se prolonge en une action de  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ , ce qui permet de définir l'opérateur :

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

Si on paramètre  $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$  par la décomposition d'Iwasawa :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \\ (u, x, y, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors  $L$  est l'opérateur :

$$e^{-2i\theta} \left( -iy \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

### 2.6.2 Presque-holomorphie sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Les opérateurs de base étant définis, on les utilise maintenant pour définir la notion de presque-holomorphie, suivant Shimura [18]. On sait que le noyau de l'opérateur  $L$  défini précédemment est constitué des fonctions holomorphes. On juge une condition d'holomorphie trop restrictive pour les applications ; on cherche donc une condition un peu moins contraignante.

On dit qu'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  est presque-holomorphe en degré  $e \in \mathbb{N}$  lorsque  $L^{e+1}f = 0$ . En particulier, on retrouve les fonctions holomorphes comme étant presque-holomorphes en degré zéro.

Il reste à étendre cette définition à des fonctions de la forme qui nous intéresse. Pour chaque  $\iota \in I$ , on notera  $L_\iota$  l'opérateur  $L$  agissant sur la variable  $\iota$ . On dit que  $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  est presque holomorphe en degré  $e \in \mathbb{N}$  lorsque l'on a  $L_{\iota_1} \dots L_{\iota_{e+1}} f = 0$  pour tout  $(\iota_1, \dots, \iota_{e+1}) \in I^{e+1}$ .

On sait d'après le lemme 13.3 de [18] que les fonctions presque-holomorphes sont polynomiales en les  $y_\iota^{-1}$ , à coefficients holomorphes, et que les espaces de fonctions automorphes presque-holomorphes sont encore de dimension finie (c'est le lemme 14.3 de [18]). Par ailleurs, si  $F \neq \mathbb{Q}$ , alors le principe de Koecher permet de ne pas devoir donner de condition de presque-holomorphie aux pointes, car une telle condition est automatiquement réalisée ; c'est le résultat discuté dans le paragraphe 14.15 de [18] (où le nom n'est pas rappelé).

### 2.6.3 Presque-holomorphie sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$

Les fonctions que l'on considère dans cet article sont définies sur  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$  ; la théorie précédente ne s'applique donc pas directement, mais nécessite de petites adaptations.

Étant donnée  $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ , on peut pour chaque place  $\iota \in I$  la considérer comme une fonction définie sur  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ , en fixant toutes les autres composantes. Cela permet d'une part de définir la notion de classe  $\mathcal{C}^\infty$  pour  $f$ , et d'autre part de faire agir  $L$  (que l'on notera alors  $L_\iota$  pour bien marquer qu'il s'agit de  $L$  le long de la composante  $\iota$ ).

On dira que  $f$  est presque-holomorphe en degré  $e \in \mathbb{N}$  lorsque pour tout choix de  $(e + 1)$ -uplet de  $I$ , disons  $(\iota_1, \dots, \iota_{e+1})$ , on a  $L^{\iota_1} \dots L^{\iota_{e+1}} f = 0$ . En particulier, en degré zéro,  $f$  est holomorphe le long de chaque place infinie.

La presque-holomorphie se traduit au niveau des coefficients par le fait suivant : si  $\iota \in I$  est une place infinie le long de laquelle on veut prouver la propriété, alors sur  $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ , si  $g$  correspond à un point  $\tau$  du demi-plan de Poincaré, alors  $a_1(g)$  est, du point de vue de  $\tau$ , de la forme  $y^{-\nu} p(y) \exp(2i\pi\tau)$ , avec  $\nu \in \mathbb{N}$  et  $p$  un polynôme ; le cas holomorphe étant bien sûr celui où  $\nu = 0$  et  $p$  une constante. Cette caractérisation est la plus aisée pour le cas qui nous intéresse.

### 2.6.4 Structure rationnelle

On dit qu'une forme modulaire est à coefficients dans un sous-anneau  $R$  de  $\mathbb{C}$  lorsque les expressions discutées précédemment font intervenir des polynômes à coefficients dans  $R$  ; on obtient ainsi une structure rationnelle sur les formes

modulaires presque-holomorphes : si  $R_1 \subset R_2$ , alors les formes à coefficients dans  $R_1$  forment un sous- $R_1$ -module des formes à coefficients dans  $R_2$ .

Cette notion généralise la notion usuelle de structure rationnelle sur les formes modulaires, où on dit qu'une forme est à coefficients dans  $R$  lorsqu'elle provient d'un élément de  $R[[q]]$  via l'évaluation  $q = \exp(2i\pi\tau)$ .

On trouvera dans [6], une discussion similaire de *deux* structures rationnelles sur un espace de formes modulaires. On a choisi d'utiliser ici la seconde, qu'il note d'un  $\mathfrak{m}$  page 142, plutôt que la première, qu'il note d'un  $\mathfrak{M}$  page 141, car c'est celle qui permet de faire porter la condition uniquement sur la fonction de Whittaker.

### 3 Définition analytique

#### 3.1 Expression intégrale

On fixe d'ores et déjà un choix de caractère de Hecke unitaire  $\omega$ , appelé à être le caractère central des fonctions automorphes considérées et  $s \in \mathbb{C}$  un paramètre complexe, qui servira à obtenir les convergences et les prolongements analytiques.

On se donne  $\varphi$  une fonction de Schwartz-Bruhat, à partir de laquelle on définit tout d'abord une nouvelle fonction, dite fonction thêta :

$$\Theta(\varphi) : g \mapsto \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} (g\varphi)(v)$$

*Remarque 2.* Dans les livres de Bump [1] et de Garrett [3], une fonction très similaire est définie via une sommation sans la condition de vecteur non nul ; les calculs qui suivent font donc intervenir  $\Theta - 1$ . On préfère ici plutôt l'idée de Godement [4], où la sommation est faite sur un groupe, qui évite donc de faire apparaître un terme correctif.

On définit alors la série d'Eisenstein (version analytique) par :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi) : g \mapsto |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \Theta(\varphi)(g/t) d^\times t$$

Les résultats suivants, obtenus par simple jeu d'écriture permettent souvent de simplifier les calculs :

**Lemme 5.**

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi)(g) &= \Theta(g\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) \\ E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) &= |\det g|^{-s} E_{\omega,s}^{\text{ana}}(g\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) \end{aligned}$$

#### 3.2 Convergence

Montrer la convergence de  $E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g)$  pour toute fonction-test  $\varphi$  et toute matrice  $g$  équivaut à montrer la convergence de  $E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})})$  pour toute fonction-test, ce qui constitue une première réduction.

Par ailleurs, on sait que l'on a  $\mathbb{A}^\times/F^\times \simeq \mathbb{A}_1^\times/F^\times \times ]0; +\infty[$ , où l'on sait que le premier facteur est compact, ce qui constitue une seconde réduction.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) &= \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \omega(t) |t|^{2s} \varphi(tv) d^\times t \\ &= \int_{\mathbb{A}_1^\times/F^\times} \int_0^{+\infty} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \omega(kt) |kt|^{2s} \varphi(ktv) d^\times k d^\times t \\ &= \int_{\mathbb{A}_1^\times/F^\times} \int_0^{+\infty} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \omega(kt) |t|^{2s} \varphi(ktv) d^\times k d^\times t \end{aligned}$$

Comme  $\omega$  est unitaire, il suffit par domination de discuter de la double intégrabilité et de la sommabilité de  $(k, t, v) \mapsto |t|^{2\Re(s)} |\varphi(ktv)|$ . L'intégration sur un espace compact ne pose aucun problème ; elle consiste simplement à tordre la fonction-test sans en changer les propriétés. La partie non-archimédienne d'une fonction-test est à support compact, donc limite les dénominateurs dans la somme. La partie archimédienne décroît très rapidement, donc la somme converge ; pour la même raison l'intégrale impropre converge en  $+\infty$ . Finalement, il ne reste qu'à vérifier la convergence de cette intégrale impropre sur la borne 0 ; mais c'est une intégrale de Riemann, donc sa convergence est acquise dès lors que  $s$  est de partie réelle strictement positive.

Enfin, cette étude montre que la convergence est uniforme en  $s$  dans toutes les bandes verticales de la forme  $m \leq \Re(s) \leq M$  où  $0 < m \leq M$  ; on obtient donc une fonction holomorphe sur le domaine  $\Re(s) > 0$ .

Il reste à discuter de la convergence de la série  $\Theta(\varphi)(g)$ . Elle équivaut comme précédemment à la convergence de la série  $\Theta(\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})})$ . Mais cette dernière est évidente, puisque l'on somme une fonction,  $\varphi$ , à décroissance rapide, sur un réseau.

*Remarque 3.* Il faut noter que l'on utilise la mesure multiplicative ; c'est la raison pour laquelle la condition de convergence pour les intégrales de Riemann est pour  $2\Re(s) > 0$  et pas  $2\Re(s) > -1$  comme on aurait pu s'y attendre.

### 3.3 Expression sommatoire

Une telle expression est cruciale pour utiliser la technique du déroulement dans les intégrales de Rankin et faire le lien entre produit scalaire de Petersson et fonctions  $L$  via les séries d'Eisenstein.

On définit :

$$\zeta_{\omega,s}(\varphi)(g) = |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times} |t|^{2s} \omega(t)(g\varphi) \left( \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t$$

et on peut alors écrire :

**Lemme 6.**

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) = \sum_{\gamma \in B(F) \backslash \text{GL}_2(F)} \zeta_{\omega,s}(\varphi)(\gamma g)$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que la convergence n'est pas évidente. Le calcul se déroule de façon plus agréable en allant de la somme sur le quotient de groupes vers les séries d'Eisenstein, et c'est la raison pour laquelle on a choisi de présenter le calcul dans ce sens. Mais c'est la convergence de l'expression finale (qui plus est absolue) que l'on a justifié précédemment. La convergence de l'expression initiale se justifie donc en constatant que les différentes étapes respectent la convergence au fur et à mesure.

On commence par substituer la définition intégrale de  $\zeta_{\omega,s}$  dans la somme, puis on interprète le facteur  $|t|^{2s}$  comme le déterminant de l'homothétie de rapport  $t$ , ce qui permet en faisant passer le quotient à un scalaire près de la somme à l'intégrale, puis en permutant, de se ramener à l'intégrale d'une somme, ce qui amène déjà très près du résultat final :

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in B(F) \backslash \text{GL}_2(F)} \zeta_{\omega,s}(\varphi)(\gamma g) \\ &= \sum_{\gamma \in B(F) \backslash \text{GL}_2(F)} |\det(\gamma g)|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times} |t|^{2s} \omega(t) \varphi \left( g^{-1} \gamma^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\ &= \sum_{\gamma \in B(F) \backslash \text{GL}_2(F)} \int_{\mathbb{A}^\times} \left| \det \left( \frac{1}{t} \gamma g \right) \right|^{-s} \omega(t) \varphi \left( g^{-1} \left( \frac{1}{t} \gamma \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\ &= \sum_{\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \backslash \text{GL}_2(F)} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \left| \det \left( \frac{1}{t} \gamma g \right) \right|^{-s} \omega(t) \varphi \left( g^{-1} \left( \frac{1}{t} \gamma \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\ &= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \sum_{\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \backslash \text{GL}_2(F)} \varphi \left( g^{-1} \left( \frac{1}{t} \gamma \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\ &= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \sum_{\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \backslash \text{GL}_2(F)} \varphi \left( g^{-1} \gamma^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t \end{aligned}$$

Il reste pour conclure à faire le lien entre la sommation qui apparaît dans cette dernière expression et celle qui définit  $\Theta$  ; ce point est éclairci par la bijec-

tion explicite suivante :

$$\begin{aligned}
F^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \setminus \mathrm{GL}_2(F) \\
g^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\longleftarrow g \\
(v_1, v_2) &\longmapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1/v_1 & 0 \\ -v_2 & v_1 \end{pmatrix} & (v_1 \neq 0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{pmatrix} & (v_1 = 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut maintenant terminer le calcul précédemment entamé :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma \in B(F) \setminus \mathrm{GL}_2(F)} \zeta_{\omega, s}(\varphi)(\gamma g) \\
&= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \sum_{\gamma \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \setminus \mathrm{GL}_2(F)} \varphi \left( g^{-1} \gamma^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\
&= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \sum_{(v_1, v_2) \in F^2 \setminus \{0\}} \varphi \left( g^{-1} \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\
&= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \Theta(\varphi)(g/t) d^\times t \\
&= E_{\omega, s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(g)
\end{aligned}$$

□

## 4 Prolongement analytique et équation fonctionnelle

### 4.1 Lemme de symétrie

À nouveau, la relation  $E_{\omega, s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(g) = |\det g|^{-s} E_{\omega, s}^{\mathrm{ana}}(g\varphi)(1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})})$  permet de ramener la discussion à l'étude de  $s \mapsto E_{\omega, s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})})$ .

Ceci étant dit, on écrit :

$$\begin{aligned}
E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) &= \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t \\
&\quad + \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t \\
&\quad + \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t
\end{aligned}$$

On se concentre sur la seconde intégrale, dans laquelle on applique d'abord la formule de Poisson :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \varphi(tv) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \left( \sum_{v \in F^2} \varphi(tv) - \varphi(0) \right) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \sum_{v \in F^2} \varphi(tv) d^\times t \\
&\quad - \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \varphi(0) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \sum_{v \in F^2} |t|^{-2} \hat{\varphi}(v/t) d^\times t \\
&\quad - \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \varphi(0) d^\times t
\end{aligned}$$

on inverse alors la variable :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t &= \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} |t|^{-2}\hat{\varphi}(v/t)d^\times t \\
&+ \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}|t|^{-2}\hat{\varphi}(0)d^\times t \\
&- \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\varphi(0)d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \bar{\omega}(t)|t|^{2-2s} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \hat{\varphi}(tv)d^\times t \\
&+ \hat{\varphi}(0) \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2(s-1)}d^\times t \\
&- \varphi(0) \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \bar{\omega}(t)|t|^{2-2s}\Theta(\hat{\varphi})(1/t)d^\times t \\
&+ \hat{\varphi}(0) \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2(s-1)}d^\times t \\
&- \varphi(0) \int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}d^\times t
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à appliquer le lemme 2 pour contrôler complètement cette deuxième intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}_{<1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t &= \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \bar{\omega}(t)|t|^{2-2s}\Theta(\hat{\varphi})(1/t)d^\times t \\
&+ \frac{\delta(\omega)\hat{\varphi}(0)}{2(s-1)} - \frac{\delta(\omega)\varphi(0)}{2s}
\end{aligned}$$

On a finalement prouvé :

**Lemme 7.**

$$\begin{aligned}
E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) &= \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \omega(t)|t|^{2s}\Theta(\varphi)(1/t)d^\times t \\
&+ \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times/F^\times} \bar{\omega}(t)|t|^{2-2s}\Theta(\hat{\varphi})(1/t)d^\times t \\
&+ \frac{\delta(\omega)}{2} \left( \frac{\hat{\varphi}(0)}{s-1} - \frac{\varphi(0)}{s} \right)
\end{aligned}$$

## 4.2 Prolongement analytique

Comme  $\delta(\omega) = \delta(\bar{\omega})$ , la relation précédente exprime que la série d'Eisenstein admet un prolongement méromorphe au plan complexe, avec d'éventuels pôles

simples en  $s = 0$  et  $s = 1$ , avec l'équation fonctionnelle restreinte :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) = E_{\bar{\omega},1-s}^{\text{ana}}(\hat{\varphi})(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})})$$

### 4.3 Équation fonctionnelle

On souhaite obtenir une équation fonctionnelle plus générale. Pour cela, on fixe une matrice  $g \in \text{GL}_2(\mathbb{A})$ , et on montre, pour  $(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2$ , via un simple changement de variable dans l'intégrale :

$$\widehat{g\varphi} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = |\det g| (g^\sharp \hat{\varphi}) \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

où on a défini :  $g^\sharp = \frac{1}{\det g} g$ .

À partir de cette expression, on déduit aisément :

$$\forall g \in \text{GL}_2(\mathbb{A}), E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) = E_{\bar{\omega},1-s}^{\text{ana}}(\hat{\varphi})(g^\sharp)$$

## 5 Propriétés d'automorphie

### 5.1 $\text{GL}_2(F)$ -invariance à gauche

Si on a  $\gamma \in \text{GL}_2(F)$ , alors comme  $\gamma^{-1}$  induit une bijection de  $F^2 \setminus \{0\}$  (sur lui même), on peut calculer :

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi)(\gamma g) &= \Theta(g\varphi)(\gamma) \\ &= \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} (g\varphi)(\gamma^{-1}v) \\ &= \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} (g\varphi)(v) \\ &= \Theta(\varphi)(g) \end{aligned}$$

Comme de plus  $|\det \gamma g| = |\det g|$ , il vient :

$$\forall \gamma \in \text{GL}_2(F), E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(\gamma g) = E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g)$$

### 5.2 Action du centre

On calcule, pour  $z \in \mathbb{A}^\times$ , via un simple changement de variable  $t = zu$  dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(zg) &= |\det(zg)|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \Theta(\varphi)(zg/t) d^\times t \\ &= |\det g|^{-s} |z|^{-2s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(zu) |zu|^{2s} \Theta(\varphi)(g/u) d^\times u \\ &= \omega(z) E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) \end{aligned}$$

D'où la seconde propriété d'automorphie :

$$\forall z \in \mathbb{A}^\times, E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(zg) = \omega(z)E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g)$$

### 5.3 Choix des poids

En théorie des représentations, il est d'usage de demander que les fonctions soient  $K$ -finies à droite, pour un choix de sous-groupe compact  $K$  défini par produit sur les places. Pour les places infinies réelles, le choix usuel est de considérer  $SO_2(\mathbb{R})$ . Or, une fonction  $SO_2(\mathbb{R})$ -finie à droite s'écrit comme somme finie de fonctions propres pour les caractères de ce groupe ; comme il s'identifie à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , son dual de Pontryagin s'identifie à  $\mathbb{Z}$  : tout caractère s'écrit donc  $\theta \mapsto e^{ik\theta}$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Ce paramètre  $k$  est un poids, que l'on voudra positif, et on va donc s'arranger pour qu'en chaque place infinie on puisse le choisir commodément.

Pour cela, on prescrit la partie archimédienne de la fonction-test de la façon suivante ; pour chaque  $\iota \in I$ , on fixe  $k_\iota \in \mathbb{N}$  et on définit :

$$\varphi_\iota : (v_1, v_2) \mapsto \exp(-\pi(v_1^2 + v_2^2)) (v_1 + iv_2)^{k_\iota}$$

et on suppose  $\varphi$  de la forme  $\varphi_f \times \prod_{\iota \in I} \varphi_\iota$ .

Si on fixe maintenant des angles  $(\theta_\iota)_{\iota \in I}$ , et une matrice adélique dont la partie non-archimédienne est l'identité :

$$\rho = \left( \left( \begin{array}{cc} \cos(\theta_\iota) & \sin(\theta_\iota) \\ -\sin(\theta_\iota) & \cos(\theta_\iota) \end{array} \right) \right)_{\iota \in I}$$

On a tout d'abord, par un calcul assez élémentaire :

$$\begin{aligned} & \rho_\iota \varphi_\iota \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \varphi_\iota \left( \begin{pmatrix} \cos(\theta_\iota) & -\sin(\theta_\iota) \\ \sin(\theta_\iota) & \cos(\theta_\iota) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \exp(-\pi(v_1^2 + v_2^2)) (\cos(\theta_\iota)v_1 i \sin(\theta_\iota)v_2 + i \sin(\theta_\iota)v_1 + i \cos(\theta_\iota)v_2)^{k_\iota} \\ &= e^{ik_\iota \theta_\iota} \varphi_\iota \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et donc, plus globalement, on a alors :

$$\begin{aligned} E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g\rho) &= |\det g|^{-s} E_{\omega,s}^{\text{ana}}(g\rho\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) \\ &= \left( \prod_{\iota \in I} e^{ik_\iota \theta_\iota} \right) E_{\omega,s}^{\text{ana}}(g\varphi)(1_{\text{GL}_2(\mathbb{A})}) \\ &= \left( \prod_{\iota \in I} e^{ik_\iota \theta_\iota} \right) E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) \end{aligned}$$

Ce qui fournit la troisième propriété d'automorphie :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g\rho) = \left( \prod_{\iota \in I} e^{ik_\iota \theta_\iota} \right) E_{\omega,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g)$$

## 5.4 Niveau

Étant donnée une fonction-test  $\varphi$ , on sait qu'il existe un sous-groupe d'indice fini  $K \subset \mathrm{GL}_2(\hat{\mathcal{O}})$  tel que :

$$\forall h \in K, \varphi(gh) = \varphi(g)$$

(où l'on identifie  $h$  qui n'est qu'adélique finie avec une matrice adélique en décidant que les composantes infinies sont l'identité)

On peut alors calculer, pour  $h \in K$  :

$$\begin{aligned} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(gh) &= |\det gh|^{-s} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(gh\varphi)(1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}) \\ &= |\det g|^{-s} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(g\varphi)(1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})}) \\ &= E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(g) \end{aligned}$$

Ce qui fournit la quatrième propriété d'automorphie :

$$E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(gh) = E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(g)$$

## 5.5 Croissance modérée

La notion de croissance modérée pour une fonction  $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  est la suivante : pour tout compact  $C \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ , il existe  $M > 0$  et  $\sigma > 0$  tels que :

$$\forall (g_1, g_2) \in C^2, \forall y \in \mathbb{A}^\times, \left| f \left( g_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2 \right) \right| \leq M (|y|^\sigma + |y|^{-\sigma})$$

On souhaite prouver une telle domination pour les séries d'Eisenstein étudiées ici, avec de plus un contrôle localement uniforme en le paramètre  $s$  (mieux : localement uniforme en sa partie réelle).

On sait que l'on a pour tout  $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$  (c'est la relation du lemme 7, page 15) :

$$\begin{aligned} |\det g|^s E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(g) &= \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \Theta(g\varphi)(1/t) d^\times t \\ &\quad + \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} \bar{\omega}(t) |t|^{2-2s} \Theta(\widehat{g\varphi})(1/t) d^\times t \\ &\quad + \frac{\delta(\omega)}{2} \left( \frac{\widehat{g\varphi}(0)}{1-s} - \frac{(g\varphi)(0)}{s} \right) \end{aligned}$$

Dans cette expression, les deux termes intégraux sont de même nature, et les termes restants vérifient clairement la condition de croissance uniforme voulue ; on va donc se concentrer sur la croissance modérée (et localement uniforme en  $\Re(s)$ ) de :

$$g \longmapsto \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \Theta(g\varphi)(1/t) d^\times t$$

On se donne donc un compact  $C \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ ,  $(g_1, g_2) \in C^2$  et  $y \in \mathbb{A}^\times$ ; et on domine brutalement :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \Theta \left( g_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2 \varphi \right) (1/t) d^\times t \right| \\
& \leq \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} |t|^{2\Re(s)} \left| \Theta \left( g_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2 \varphi \right) (1/t) \right| d^\times t \\
& \leq \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} |t|^{2\Re(s)} \left| \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \left( g_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2 \varphi \right) (tv) \right| d^\times t \\
& \leq \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} |t|^{2\Re(s)} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \left| \left( g_1 \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_2 \varphi \right) (tv) \right| d^\times t \\
& \leq \int_{\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times} |t|^{2\Re(s)} \sum_{v \in F^2 \setminus \{0\}} \left| \varphi \left( g_2^{-1} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_1^{-1} tv \right) \right| d^\times t
\end{aligned}$$

Dans cette expression, on sait que l'on a un isomorphisme :

$$\mathbb{A}_{>1}^\times / F^\times \simeq ]1; +\infty[ \times \mathbb{A}_1^\times / F^\times$$

où le second facteur est compact; la seule source de croissance dans l'intégrale est donc le premier facteur.

La partie non-archimédienne de  $\varphi$  est à support compact; la perturbation par le couple  $(g_1, g_2)$  balayant un compact, on peut dominer par l'indicatrice d'un compact invariant par  $C$  à gauche et à droite. Cette indicatrice restreint la somme sur  $v$  à une somme sur un réseau.

Par ailleurs, comme  $\varphi$  a une partie archimédienne à décroissance rapide, on sait que l'on peut dominer par l'inverse d'une puissance arbitrairement grande de la norme, suffisamment grande pour compenser l'intégrale et la sommation sur le réseau, et ce de façon localement uniforme en  $\Re(s)$ .

On sait que pour les séries d'Eisenstein, une telle notion de croissance est ce que l'on peut en général espérer de mieux; normalement, on demande aux formes automorphes de vérifier une condition de type « carré intégrable », mais les séries d'Eisenstein ne rentrent pas directement dans ce cadre (voir à ce sujet la discussion en page 347 de Bump [1]).

## 5.6 Conditions de compatibilité

On se place dans l'hypothèse où  $\varphi$  est choisie pour obtenir une notion de poids, et on souhaite mettre en évidence qu'un tel choix doit être cohérent avec le choix du caractère central  $\omega$ . Si on définit  $z \in \mathbb{A}$  par 1 sur toutes les places, sauf  $-1$  sur une place archimédienne  $\iota \in I$ , alors en comparant l'action de la matrice  $\begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix}$  vue comme élément du centre et comme matrice de rotation, il vient :

$$\omega_\iota(-1) = (-1)^{k_\iota}$$

## 6 Coefficients automorphes

### 6.1 Forme générale du développement

Si on fixe  $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ , la fonction :

$$x \longmapsto E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right)$$

est définie sur  $\mathbb{A}$  et  $F$ -périodique ; par dualité de Pontryagin, on peut donc écrire :

$$E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) = \sum_{\xi \in F} a_{\xi}(g) \Psi(\xi x)$$

où l'on a :

$$a_{\xi}(g) = \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-\xi u) du$$

En pratique, on sait que tous les coefficients pour  $\xi \neq 0$  peuvent s'exprimer en termes de  $a_1$ , qui est appelée la fonction de Whittaker de la forme automorphe ; en effet, pour  $\xi \neq 0$ , on peut écrire, en utilisant successivement un changement de variable puis la  $\mathrm{GL}_2(F)$ -invariance :

$$\begin{aligned} a_1 \left( \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) &= \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-u) du \\ &= \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-u) du \\ &= \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} \xi & \xi v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-\xi v) |\xi| dv \\ &= \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-\xi v) dv \\ &= \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-\xi v) dv \\ &= a_{\xi}(g) \end{aligned}$$

### 6.2 Calcul de la fonction de Whittaker

On écrit :

$$\begin{aligned} a_1(g) &= \int_{\mathbb{A}/F} E_{\omega,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi) \left( \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-u) du \\ &= \int_{\mathbb{A}/F} |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}} \omega(t) |t|^{2s} \Theta(g\varphi) \left( \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) d^{\times} t \Psi(-u) du \\ &= \int_{\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}} |\det g|^{-s} \omega(t) |t|^{2s} \int_{\mathbb{A}/F} \Theta(g\varphi) \left( \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du d^{\times} t \end{aligned}$$

Ce qui amène naturellement à calculer cette intégrale sur  $\Theta$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{A}/F} \Theta(g\varphi) \left( \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du \\ &= \int_{\mathbb{A}/F} \sum_{(v_1, v_2) \in F^2 \setminus \{0\}} (g\varphi) \left( t \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du \end{aligned}$$

On scinde la sommation en d'une part une sommation sur  $v_1 \in F^\times, v_2 = 0$ , de couple  $(v_1, 0)$  et d'autre part une sommation sur  $(v_1, v_2) \in F \times F^\times$ , de couple  $(v_1 v_2, v_2)$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{A}/F} \Theta(g\varphi) \left( \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du \\ &= \sum_{v_1 \in F^\times} \int_{\mathbb{A}/F} (g\varphi) \left( t \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du \\ & \quad + \sum_{(v_1, v_2) \in F \times F^\times} \int_{\mathbb{A}/F} (g\varphi) \left( t \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du \\ &= \sum_{v_1 \in F^\times} (g\varphi) \left( t \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left( \int_{\mathbb{A}/F} \Psi(-u) du \right) \\ & \quad + \sum_{(v_1, v_2) \in F \times F^\times} \int_{\mathbb{A}/F} (g\varphi) \left( t v_2 \begin{pmatrix} v_1 - u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le premier terme est nul, et le second se déroule en une intégrale sur  $\mathbb{A}$ , car on sait  $\Psi(-u) = \Psi(v_1 - u)$  :

$$\int_{\mathbb{A}/F} \Theta(\varphi) \left( \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \Psi(-u) du = \sum_{v_2 \in F^\times} \int_{\mathbb{A}} (g\varphi) \left( t v_2 \begin{pmatrix} -u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du$$

Ce calcul permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} a_1(g) &= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \sum_{v_2 \in F^\times} \int_{\mathbb{A}} (g\varphi) \left( t v_2 \begin{pmatrix} -u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(-u) du d^\times t \\ &= |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \omega(t) |t|^{2s} \sum_{v_2 \in F^\times} \int_{\mathbb{A}} (g\varphi) \left( t v_2 \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(u) du d^\times t \end{aligned}$$

où l'on constate à nouveau que la somme et l'intégrale se combinent pour donner une seule intégrale, car on sait  $\omega(t) |t|^{2s} = \omega(t v_2) |t v_2|^{2s}$  ; d'où la formule finale :

$$a_1(g) = |\det g|^{-s} \int_{\mathbb{A} \times \mathbb{A}^\times} \omega(t) |t|^{2s} (g\varphi) \left( t \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Psi(u) du d^\times t \quad (1)$$

Cette expression intégrale montre que si  $\varphi$  est une fonction-test factorisable sur toutes les places (de telles fonctions sont parfois appelées « purs tenseurs »),

alors la fonction de Whittaker se factorise en produit d'intégrales locales. C'est du reste ainsi que l'on prouvera la presque-holomorphie : en se concentrant sur les intégrales locales en les places infinies.

*Remarque 4.* Cette formule est comparable à la formule donnée en page 434 par Scholl dans [13], pour  $B_\chi^*(g)$  : l'intégrale qu'il donne n'est que semi-adélique, et il a donc des facteurs à l'infini (une fonction  $\Gamma$  sous la forme d'une factorielle et des puissances de  $2i\pi$ ), qui sont ici encore cachés par la partie archimédienne des intégrales adéliques.

## 7 Presque-holomorphie

On va prouver que sous certaines hypothèses, les séries d'Eisenstein sont presque-holomorphes. Pour arriver à un tel résultat, on va procéder par réductions successives à des cas plus simples à traiter.

### 7.1 Réduction sur $\varphi$

Pour un choix de  $\varphi$  "élémentaire", c'est-à-dire se factorisant selon toutes les places (certains auteurs parlent de « pur tenseur »), et telle que la série d'Eisenstein est de poids  $(k_\iota)_{\iota \in I}$ , on va calculer explicitement la fonction de Whittaker, ce qui montrera la presque-holomorphie.

Les deux restrictions du paragraphe précédent ne sont pas trop limitatives, dans la mesure où toute fonction-test est une combinaison linéaire de telles fonctions, et où il faut bien s'être donné des poids pour contrôler la partie archimédienne.

### 7.2 Réduction à une place $\iota \in I$

On part de la formule intégrale 1, page 21, qui est entièrement factorisable ; on est donc ramené à étudier, pour  $\iota \in I$  :

$$a_{1,\iota} : g \longmapsto |\det(g)|^{-s} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times} \omega_\iota(t) |t|^{2s} (g\varphi_\iota) \left( t \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \exp(2i\pi u) \, du \, d^\times t$$

où comme on l'a dit :

$$\varphi_{\infty,\iota} : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + ix_2)^{k_\iota} \exp(-(x_1^2 + x_2^2))$$

### 7.3 Réduction à $GL_2^+(\mathbb{R})$

La  $GL_2(F)$  invariance a comme conséquence que :

$$E_{\omega,s}^{\text{ana}} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) = E_{\omega,s}^{\text{ana}}(g)$$

On peut donc supposer que l'on s'est arrangé pour que le calcul le long de la place  $\iota$  selon laquelle on souhaite prouver la presque-holomorphie se fasse dans la composante connexe de l'identité.

## 7.4 Réduction au demi-plan de Poincaré

Étant donnée  $g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ , on sait que l'on peut la décomposer sous la forme :

$$g = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où  $\delta > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

Un simple changement de variable en “ $t$ ” dans l’intégrale suffit à se ramener au cas où  $\delta = 1$ .

Il est aussi assez aisé de constater que :

$$a_{1,\iota}(g) = \exp(ik_\iota\theta) a_{1,\iota} \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \right)$$

On est donc ramené au cas d’une matrice de  $SL_2(\mathbb{R})$  représentant un élément du demi-plan de Poincaré ; notons-le (traditionnellement)  $\tau = x + iy$ .

## 7.5 Traitement du cas du demi-plan de Poincaré

On commence par déterminer l’action de  $\tau$  sur  $\varphi_\iota$  ; pour  $t \in \mathbb{R}^\times$  et  $u \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \varphi_{\infty,\iota} \right) \left( t \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (ty^{-1/2})^k ((u-x) + iy)^k \exp(-(ty^{-1/2})^2((u-x)^2 + y^2)) \end{aligned}$$

D’où, d’abord par une translation suivant  $u$ , puis en utilisant les conditions de compatibilité qui donnent  $\omega_\iota(t)t^k = |t|^k$  et permettent le passage d’une intégrale sur  $\mathbb{R}^\times$  à une intégrale sur  $\mathbb{R}_+^\times$  :

$$\begin{aligned} & a_{1,\iota} \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times} \omega_\iota(t) |t|^{2s} (ty^{-1/2})^k ((u-x) + iy)^k \\ & \quad \times \exp(-(ty^{-1/2})^2((u-x)^2 + y^2)) \exp(2i\pi u) \mathrm{d}u \mathrm{d}^\times t \\ &= 2 \exp(2i\pi x) y^{-k/2} \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\times} t^{k+2s} \exp(-t^2(u^2 + y^2)/y) \\ & \quad \times (u + iy)^k \exp(2i\pi u) \mathrm{d}u \mathrm{d}^\times t \end{aligned}$$

L’intégrale le long de  $t$  se calcule via le lemme 3 en page 8 ; on arrange ensuite

l'expression pour préparer l'étape suivante :

$$\begin{aligned}
& a_{1,\iota} \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&= 2 \exp(2i\pi x) y^{-k/2} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right)}{\left((u^2 + y^2)/y\right)^{s + \frac{k}{2}}} (u + iy)^k \exp(2i\pi u) du \\
&= \exp(2i\pi x) y^s \Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u^2 + y^2)^{s + \frac{k}{2}}} (u + iy)^k \exp(2i\pi u) du \\
&= \exp(2i\pi x) y^s \Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right) \\
&\quad \times (-1)^k \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u^2 + y^2)^{s + \frac{k}{2}}} (u - iy)^k \exp(-2i\pi u) du \\
&= \exp(2i\pi x) y^s \Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right) (-1)^k \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} (u + iy)^{-(s + \frac{k}{2})} (u - iy)^{-(s - \frac{k}{2})} \exp(-2i\pi u) du
\end{aligned}$$

On est alors en position d'appliquer le lemme 4 (page 8) :

$$\begin{aligned}
& a_{1,\iota} \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&= \exp(2i\pi x) y^s \Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right) (-1)^k \\
&\quad \times \exp(-2\pi y) i^k \Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right)^{-1} (2\pi)^{2s} (4\pi y)^{-(s - \frac{k}{2})} \omega\left(4\pi y, s + \frac{k}{2}, s - \frac{k}{2}\right) \\
&= \exp(2i\pi(x + iy)) (-i)^k y^s (2\pi)^{2s} (4\pi y)^{-(s - \frac{k}{2})} \omega\left(4\pi y, s + \frac{k}{2}, s - \frac{k}{2}\right)
\end{aligned}$$

## 7.6 Cas de presque-holomorphicité

Dans cette dernière égalité, si on fait le choix  $s = \frac{k}{2} - r$  avec  $r \in \mathbb{N}$ , on a finalement :

$$\begin{aligned}
& a_{1,\iota} \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \right) \\
&= \exp(2i\pi(x + iy)) (-i)^k y^{\frac{k}{2} - r} (2\pi)^{k - 2r} (4\pi y)^r \omega(4\pi y, k - r, -r)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression fait finalement apparaître la fonction confluyente hypergéométrique  $\omega$ , avec des arguments pour lesquels on sait qu'elle a un développement polynomial, que l'on sait expliciter ; c'est la proposition 1 de la page 7.

## 8 Exemple explicite

Le but de cette section est d'écrire plus explicitement les calculs qui précèdent pour les éclairer. On va donc se placer sur le corps  $\mathbb{Q}$ , fixer un poids  $k \geq 2$  et  $s \in \mathbb{C}$  de partie réelle strictement positive, pour que la convergence soit assurée sans prolongement analytique.

On définit à partir de là une fonction  $\varphi$  de Schwartz-Bruhat en demandant en partie non-archimédienne l'indicatrice de  $\hat{\mathbb{Z}}^2$ , et en place infinie (unique vu le choix du corps) la fonction correspondant au choix du poids  $k$  ; enfin, on décide de considérer un caractère central trivial ( $\omega = 1$ ).

On fixe enfin  $x \in \mathbb{R}$  et  $y > 0$ , à partir desquels on définit  $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$  par l'identité en partie finie et  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$  en partie infinie, et  $z = x + iy$  dans le demi-plan de Poincaré.

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
E_{1,s}^{\mathrm{ana}}(\varphi)(g) &= |\det(g)|^{-s} \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} \Theta(\varphi) \left( \frac{g}{t} \right) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \varphi(tg^{-1}v) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \varphi_f(t_f v) \varphi_\infty \left( t_\infty \begin{pmatrix} y^{-1/2} & 0 \\ 0 & y^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \varphi_f(t_f v) \varphi_\infty \left( t_\infty y^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \varphi_f(t_f v) \varphi_\infty \left( t_\infty y^{-1/2} \begin{pmatrix} v_1 - v_2 x \\ v_2 y \end{pmatrix} \right) d^\times t \\
&= \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \varphi_f(t_f v) t_\infty^k y^{-k/2} (v_1 - v_2 \bar{z})^k \exp(-\pi t_\infty^2 y^{-1} |v_1 - v_2 \bar{z}|^2) d^\times t \\
&= y^{-k/2} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} |t|^{2s} t_\infty^k \mathbb{1}_{\hat{\mathbb{Z}}^2}(t_f v) (v_1 - v_2 \bar{z})^k \exp(-\pi t_\infty^2 y^{-1} |v_1 - v_2 \bar{z}|^2) d^\times t
\end{aligned}$$

On utilise alors l'isomorphisme entre  $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$  et  $\mathbb{A}_1^\times/\mathbb{Q}^\times \times ]0; +\infty[$  déjà utilisé

pour écrire :

$$E_{1,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) = y^{-k/2} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \left( \int_{\mathbb{A}_1^\times / \mathbb{Q}^\times} \mathbb{1}_{\hat{\mathbb{Z}}^2}(tv) d^\times t \right) (v_1 - v_2 \bar{z})^k \\ \times \left( \int_0^{+\infty} t^{k+2s} \exp(-\pi t^2 y^{-1} |v_1 - v_2 \bar{z}|^2) d^\times t \right)$$

d'où l'on déduit, en utilisant l'intégrale archimédienne du lemme 3 et l'intégrale non-archimédienne du lemme 1 :

$$E_{1,s}^{\text{ana}}(\varphi)(g) = y^{-k/2} \sum_{v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}} \mathbb{1}_{\hat{\mathbb{Z}}^2}(v) \text{Vol}(\mathbb{A}_1^\times / \mathbb{Q}^\times) (v_1 - v_2 \bar{z})^k \\ \times \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s + \frac{k}{2})}{(\pi y^{-1} |v_1 - v_2 \bar{z}|^2)^{s + \frac{k}{2}}} \\ = y^{-s} \frac{\Gamma(s + \frac{k}{2})}{\pi^{s + \frac{k}{2}}} \sum_{v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (v_1 - v_2 \bar{z})^k |v_1 - v_2 \bar{z}|^{-k-2s}$$

Notons que pour le choix  $s = \frac{k}{2}$ , qui correspond à l'exemple le plus classique, on obtient :

$$E_{1, \frac{k}{2}}^{\text{ana}}(\varphi)(g) = y^{-\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(k)}{\pi^k} \sum_{v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (v_1 + v_2 z)^{-k}$$

*Remarque 5.* La technique usuelle de prolongement analytique donne les fonctions usuelles avec le choix  $s = 0$  en général ; cependant, on a ici ramené l'équation fonctionnelle à une symétrie par rapport à 1 ; c'est donc bien avec le choix  $s = \frac{k}{2}$  qu'il est naturel de retrouver les séries les plus classiques.

## Références

- [1] D. BUMP : *Automorphic forms and representations*. Numéro 55 de Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge university press, 1997.
- [2] A. DABROWSKI :  $p$ -adic  $L$ -functions of Hilbert modular forms. *Annales de l'Institut Fourier*, 44(4):1025–1041, 1994.
- [3] P. B. GARRETT : *Holomorphic Hilbert modular forms*. Wadsworth, 1990.
- [4] R. GODEMENT : Analyse spectrale des formes modulaires. *Séminaire Bourbaki*, 1964-1966(278):15–40, 1966.
- [5] H. HIDA : A  $p$ -adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I. *Inventiones mathematicae*, 79, 1985.
- [6] H. HIDA : *Elementary theory of  $L$ -functions and Eisenstein series*. Numéro 26 de Student texts. London mathematical society, 1993.
- [7] S. S. KUDLA : Tate's thesis. In J. BERNSTEIN et S. S. GELBART, éditeurs : *Introduction to the Langlands program*, pages 109–132. Birkhäuser, 2003.

- [8] Y. I. MANIN : Non-archimedean integration and Jacquet-Langlands  $p$ -adic  $L$ -functions. *Russian mathematical surveys*, 31:5–57, 1976.
- [9] A. A. PANCHISHKIN : *Non-archimedean  $L$ -functions associated with Siegel and Hilbert modular forms*. Numéro 1471 de Lecture notes in mathematics. Springer, 1991.
- [10] A. A. PANCHISHKIN : A new method of constructing  $p$ -adic  $L$ -functions associated with modular forms. *Moscow mathematical journal*, 2(2), 2002.
- [11] J. PUYDT : *Valeurs spéciales de fonctions  $L$  de formes modulaires adéliques*. Thèse de doctorat, Institut Fourier, 2003.
- [12] D. RAMAKRISHNAN et R. J. VALENZA : *Fourier analysis on number fields*. Springer-Verlag, 1999.
- [13] A.J. SCHOLL : An introduction to Kato's Euler systems. In A.J. SCHOLL et R. L. TAYLOR, éditeurs : *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, pages 379–460. Cambridge university press, 1998.
- [14] G. SHIMURA : On the holomorphy of certain Dirichlet series. In *Proceedings of the London mathematical society*, pages 79–98, 1975.
- [15] G. SHIMURA : The special values of the Zeta functions associated with Hilbert modular forms. *Duke mathematical journal*, 45(3), 1978. Erratum page 697.
- [16] G. SHIMURA : Confluent hypergeometric functions on tube domains. *Mathematische Annalen*, 260:269–302, 1982.
- [17] G. SHIMURA : On Eisenstein series. *Duke mathematical journal*, 50(2):417–476, 1983.
- [18] G. SHIMURA : *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*. Numéro 82 de Mathematical surveys and monographs. American mathematical society, 2000.
- [19] J. T. TATE : Fourier analysis in number fields and Hecke's Zeta-functions. In J.W.S. CASSELS et A. FRÖHLICH, éditeurs : *Algebraic number theory*, pages 305–347. Academic press, 1965.
- [20] A. WEIL : *Basic number theory*. Springer, 1967.