



HAL
open science

Condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Etude complémentaire-1

Richard Riedel

► **To cite this version:**

Richard Riedel. Condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Etude complémentaire-1. 2012. hal-00692564

HAL Id: hal-00692564

<https://hal.science/hal-00692564>

Submitted on 30 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE
DE COMPATIBILITÉ
D'UN SYSTÈME LINÉAIRE
DE n ÉQUATIONS À p INCONNUES**

- - -

ÉTUDE COMPLÉMENTAIRE - 1

Objet de la présente étude

K désigne un corps commutatif, en pratique celui des réels \mathbb{R} ou celui des complexes \mathbb{C} .

(S) désigne un système linéaire quelconque de n équations à p inconnues, à coefficients et inconnues dans K .

Une Étude initiale antérieure intitulée :

Condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Lien avec le Théorème de Rouché-Fontené - Démonstration nouvelle du Théorème de Rouché-Fontené.

Référence : HAL 00675237 - 29 février 2012 - (Réf interne : RR 7567/02-1)

a permis de définir un nouveau critère de compatibilité applicable à tout système (S).

La présente Étude complémentaire développe et complète les principales notions introduites dans l'Étude initiale, et plus particulièrement celle d'ensemble dérivé associé à tout système linéaire (S).

Elle établit en particulier que l'équivalence entre deux systèmes linéaires (selon la définition classique de ce terme) entraîne l'égalité des ensembles dérivés correspondants. Elle démontre aussi la réciproque de cette proposition : l'égalité des ensembles dérivés de deux systèmes linéaires donnés entraîne l'équivalence de ces deux systèmes.

Cette double implication est vraie que les systèmes concernés soient compatibles ou non compatibles.

Object of the present study

K designates a commutative field, in practice the field of the reals \mathbb{R} or the field of the complex numbers \mathbb{C} .

(S) designates any linear system of n equations and p unknowns, with coefficients and unknowns belonging to K .

An Initial Study previously released, entitled :

Necessary and sufficient condition of compatibility of a linear system of n equations and p unknowns - Link with the Rouché-Fontené Theorem - New demonstration of the Rouché-Fontené Theorem

Reference : HAL 00675237 - February 29, 2012 - (Internal Ref : RR 7567/02-1)

has allowed us to define a new Consistency Criterion applicable to any linear system (S).

The object of this paper (Complementary Study) is to develop and complete the main notions introduced in the Initial Study, and more specifically the notion of Derived Set associated with any linear system (S).

This paper demonstrates that the equivalence of two linear systems (in the classic definition of this term) implies the equality of the two corresponding Derived Sets. It also proves the converse of this proposal : the equality of the Derived Sets of two linear systems implies the equivalence of both systems.

This double implication is true whether the systems are consistent or not.

TABLE DES MATIERES

1. Introduction.....	7
2. Objectif de l'Étude complémentaire	8
3. Définitions et Théorèmes préalables.....	10
4. Étude de la Réciproque du Théorème 13.....	13
5. Étude des implications n° 3 et n° 3bis pour les systèmes compatibles et pour les systèmes incompatibles	16
5.1. Étude de l'implication n° 3 pour les systèmes compatibles.....	16
5.2. Étude de l'implication n° 3bis pour les systèmes compatibles.....	17
5.3. Étude des implications n° 3 et n° 3bis pour les systèmes incompatibles.....	18
6. Étude de l'implication n° 2bis pour les systèmes compatibles.....	20
7. Étude approfondie d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Définitions d'outils nouveaux.....	22
7.1. Espace vectoriel \mathcal{E}_p	22
7.2. Nouvelle définition de l'ensemble dérivé d'un système linéaire d'équations	23
7.3. Étude approfondie des systèmes d'équations compatibles - Système réduit compatible (SRC) - Système réduit compatible (SRC) associé à un système d'équations compatible.....	24
7.4. Étude approfondie des systèmes d'équations incompatibles - Système réduit incompatible (SRI) - Système réduit incompatible (SRI) associé à un système d'équations incompatible.....	36
8. « Passerelle » entre systèmes réduits compatibles et systèmes réduits incompatibles.....	54
9. Étude de l'implication n° 2bis pour les systèmes incompatibles.....	59
10. Conclusion	62
ANNEXE 1.....	63

1. Introduction

Ce document constitue la suite de l'étude précédemment publiée sous l'intitulé :

Condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Lien avec le Théorème de Rouché-Fontené - Démonstration nouvelle du Théorème de Rouché-Fontené.

Référence : HAL 00675237 - 29 février 2012 - (Réf interne : RR 7567/02-1).

Cette première étude sera référencée ci-après sous la dénomination d'« Étude initiale ».

Nous avons montré dans l'Étude initiale qu'il était possible d'associer à tout système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients et inconnues dans un corps commutatif K , un ensemble d'équations déduit de (S) , que nous avons dénommé ensemble dérivé de (S) et que nous avons noté $EQU(S)$.

Cet ensemble dérivé nous a permis de définir un nouveau critère de compatibilité (en abrégé CC dans l'Étude initiale) applicable à tout système linéaire.

La lecture du présent document implique la connaissance préalable de l'Étude initiale.

En effet :

- les références à l'Étude initiale y sont constantes,
- les notations adoptées ci-après sont celles utilisées dans l'Étude initiale,
- les Définitions et Théorèmes numérotés de 1 à 25, référencés ci-dessous, sont celles et ceux énoncés dans l'Étude initiale.

Par voie de conséquence, les Définitions et Théorèmes qui sont énoncés dans le cadre de cette Étude complémentaire porteront les numéros 26 et au-delà.

2. Objectif de l'Étude complémentaire

Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues.

S_a et S_b désignent respectivement l'ensemble (vide ou non) des solutions de (S_a) et l'ensemble (vide ou non) des solutions de (S_b) .

Nous nous sommes intéressés dans l'Étude initiale à la démonstration des implications suivantes (1) :

$$1. \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Rightarrow S_a = S_b \quad \text{Théorème 13 (Étude initiale).}$$

$$2. \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Théorème 20 (Étude initiale).}$$

Ces théorèmes étaient indispensables pour pouvoir définir le critère de compatibilité des systèmes linéaires d'équations, objet de l'Étude initiale.

Nous nous interrogerons dans le présent document sur la validité ou la non-validité des implications suivantes :

$$1\text{bis.} \quad S_a = S_b \quad \Rightarrow \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Réciproque du Théorème 13.}$$

$$2\text{bis.} \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Réciproque du Théorème 20.}$$

$$3. \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow S_a = S_b \quad \text{Nouvelle proposition à étudier.}$$

$$3\text{bis.} \quad S_a = S_b \quad \Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Réciproque de cette nouvelle proposition.}$$

Ceci revient à dire que la présente Étude complémentaire s'attachera à démontrer si les équivalences suivantes sont vraies partout ou non :

$$\begin{array}{ccc} (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) & \stackrel{1}{\Leftrightarrow} & S_a = S_b \\ & \underset{1\text{bis}}{\Leftrightarrow} & \\ & \underset{2 \updownarrow 2\text{bis}}{\Leftrightarrow} & \underset{3\text{bis} \updownarrow 3}{\Leftrightarrow} \\ & \text{EQU}(S_a) = & \text{EQU}(S_b) \end{array}$$

La Définition 12 de l'Étude initiale a introduit la notion d'équivalence entre deux systèmes linéaires (S_a) et (S_b) de n équations à p inconnues. Nous avons noté cette équivalence sous la forme : $(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Remarque générale :

Nous serons amenés à énoncer plus loin des propositions portant sur des systèmes linéaires d'équations (S_a) et (S_b) en distinguant les cas où ces systèmes sont compatibles et ceux où ils sont incompatibles.

Lorsque les hypothèses des théorèmes énoncés porteront sur les ensembles de solutions S_a et S_b de ces systèmes, nous écrirons l'hypothèse de compatibilité (resp. l'hypothèse d'incompatibilité) sous la forme $S_a \neq \emptyset$ et $S_b \neq \emptyset$ (resp. $S_a = \emptyset$ et $S_b = \emptyset$).

Lorsque les hypothèses des théorèmes énoncés porteront sur les ensembles dérivés $\text{EQU}(S_a)$ et $\text{EQU}(S_b)$ de ces systèmes, nous écrirons l'hypothèse de compatibilité (resp. l'hypothèse d'incompatibilité) sous la forme $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a)$ et $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b)$ (resp. $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a)$ et $E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b)$) (1).

Ces deux formulations sont, bien entendu, strictement équivalentes puisque, d'après le Théorème 25-1 de l'Étude initiale, pour tout système linéaire (S) :

$$S \neq \emptyset \Leftrightarrow E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S).$$

(1) E_{imp} désigne l'équation impossible $0x = b$, avec $b \in \mathbb{K}^*$ (cf. Définition 4 de l'Étude initiale).

3. Définitions et Théorèmes préalables.

Définition 26. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues. Nous dirons que (S_a) et (S_b) sont de même nature s'ils sont tous les deux compatibles ou s'ils sont tous les deux incompatibles. Si tel n'est pas le cas, nous dirons que (S_a) et (S_b) ne sont pas de même nature ou encore qu'ils sont de nature contraire.

Théorème 27. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues.

- (1) $S_a = S_b \quad \Rightarrow \quad (S_a) \text{ et } (S_b) \text{ sont de même nature.}$
- (2) $(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad (S_a) \text{ et } (S_b) \text{ sont de même nature.}$
- (3) $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \Rightarrow \quad (S_a) \text{ et } (S_b) \text{ sont de même nature.}$

Preuve :

- (1) Immédiat.
- (2) Immédiat. L'application du Théorème 13 ramène directement au Point (1).
- (3) Supposons que l'on ait : $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, (S_a) compatible et (S_b) incompatible.

On a donc, par hypothèse : $S_a \neq \emptyset$ et $S_b = \emptyset$.

Soit $X_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_p^0)$ un p -uplet de \mathbb{K}^p constituant une solution de (S_a) .

X_0 est alors solution de toutes les équations constitutives de (S_a) .

D'après le Théorème 16, X_0 est donc solution de toutes les équations de $\text{EQU}(S_a)$.

Comme $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, X_0 est solution de toutes les équations de $\text{EQU}(S_b)$.

Or : $(S_b) \subseteq \text{EQU}(S_b)$ - (cf. Section 4.2 de l'Étude initiale, Remarque 2).

X_0 est donc solution de toutes les équations constitutives de (S_b) .

Il s'ensuit que $X_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_p^0)$ est solution de (S_b) .

Et donc : $S_b \neq \emptyset$.

Contradiction avec l'hypothèse de départ : les deux systèmes (S_a) et (S_b) sont donc de même nature.

Remarque :

Les implications réciproques des Points (1), (2) et (3) du Théorème 27 sont évidemment grossièrement fausses.

La Définition 9 de l'Étude initiale a introduit la notion d'équations compatibles (entre elles) à l'intérieur d'un système linéaire de n équations à p inconnues et d'équations incompatibles (entre elles). Les Définition 28/28bis et 29/29bis qui suivent généralisent cette notion.

Définition 28. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, supposés l'un et l'autre compatibles. On a donc : $S_a \neq \emptyset$ et $S_b \neq \emptyset$.

(S_a) et (S_b) seront dits compatibles entre eux si : $S_a \cap S_b \neq \emptyset$.

Dans le cas contraire, (S_a) et (S_b) seront dits incompatibles entre eux, ou encore non compatibles entre eux.

Définition équivalente 28bis. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, supposés l'un et l'autre compatibles. On a donc : $S_a \neq \emptyset$ et $S_b \neq \emptyset$.

(S_a) et (S_b) seront dits compatibles entre eux si le système $\begin{cases} (S_a) \\ (S_b) \end{cases}$ est compatible.

Dans le cas contraire, (S_a) et (S_b) seront dits incompatibles entre eux, ou encore non compatibles entre eux.

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier où l'un des deux systèmes (en l'espèce (S_b)) se réduit à une unique équation linéaire E à p inconnues ($E \neq E_{\text{imp}}$ - cf. Définition 4). Comme $E \neq E_{\text{imp}}$: $S_E \neq \emptyset$ (cf. Théorème 6).

Définition 29. Soit (S_a) un système linéaire de n équations à p inconnues, supposé compatible. On a donc : $S_a \neq \emptyset$.

Soit E une équation linéaire à p inconnues différente de E_{imp} . S_E désigne l'ensemble des solutions de E . Comme $E \neq E_{\text{imp}}$: $S_E \neq \emptyset$.

L'équation E sera dite compatible avec le système (S_a) si : $S_a \cap S_E \neq \emptyset$.

Dans le cas contraire, l'équation E sera dite incompatible avec le système (S_a) , ou encore non compatible avec le système (S_a) .

Définition équivalente 29bis. Soit (S_a) un système linéaire de n équations à p inconnues, supposé compatible. On a donc : $S_a \neq \emptyset$.

Soit E une équation linéaire à p inconnues différente de E_{imp} . S_E désigne l'ensemble des solutions de E . Comme $E \neq E_{\text{imp}}$: $S_E \neq \emptyset$.

L'équation E sera dite compatible avec le système (S_a) si le système $\begin{cases} (S_a) \\ E \end{cases}$ est compatible.

Dans le cas contraire, l'équation E sera dite incompatible avec le système (S_a) , ou encore non compatible avec le système (S_a) .

Nous allons nous intéresser maintenant à un cas particulier qui nous sera utile plus tard.

Soit (S_r) un système linéaire de r équations à p inconnues, de rang r . On a donc : $0 < r \leq p$.

Soit S_r l'ensemble des solutions de (S_r) . (S_r) étant de rang r : $S_r \neq \emptyset$.

Posons : $S_r = \{X_{S_r}\}$, où les X_{S_r} désignent les p -uplets de K^p , solutions de (S_r) .

Soit E une équation linéaire à p inconnues différente de E_{imp} . S_E désigne l'ensemble des solutions de E . Comme $E \neq E_{\text{imp}} : S_E \neq \emptyset$.

Considérons le système (S) $\left\{ \begin{array}{l} (S_r) \quad \{ E_i \quad (1 \leq i \leq r) \\ E \end{array} \right.$.

Rappelons (cf. Section 1.1 de l'Étude initiale) que les équation E_i , $1 \leq i \leq r$, et l'équation E peuvent s'écrire respectivement sous la forme : $MG_i = MD_i$ et $MG = MD$, où :

- les membres de gauche MG_i (resp. MG) sont des formes linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} ,
- les membres de droite MD_i (resp. MD) sont des scalaires de \mathbb{K} .

(S) a donc la structure détaillée suivante :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} (S_r) \quad \{ E_i : MG_i = MD_i \quad (1 \leq i \leq r). \\ E : MG = MD \end{array} \right.$$

Nous supposons que (S) est de rang r . (S_r) constitue donc un système principal de (S) et l'équation E est donc une équation non principale. Rappelons le résultat classique suivant.

E étant une équation non principale de (S), la forme linéaire MG correspondant au membre de gauche de E s'exprime sous forme de combinaison linéaire des formes linéaires MG_i correspondant aux membres de gauche des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

$$\text{Donc : } \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \quad (1 \leq i \leq r) \text{ tels que : } MG = \sum_{i=1}^r \lambda_i MG_i.$$

Soit X_{S_r} une solution de (S_r) . Nous traduirons ce fait en écrivant sous forme symbolique les égalités suivantes : $MG_i[X_{S_r}] = MD_i$ ($1 \leq i \leq r$).

$$\text{Il en résulte que : } MG[X_{S_r}] = \sum_{i=1}^r \lambda_i MG_i[X_{S_r}] = \sum_{i=1}^r \lambda_i MD_i.$$

Dès lors :

- si : $\sum_{i=1}^r \lambda_i MD_i = MD$, alors X_{S_r} est solution de E , et donc : $X_{S_r} \in S_E$.
- si : $\sum_{i=1}^r \lambda_i MD_i \neq MD$, alors X_{S_r} n'est pas solution de E , et donc : $X_{S_r} \notin S_E$.

Finalemment :

- si : $\exists X_{S_r} \in S_E$, alors : $S \cap S_E \neq \emptyset$. On peut alors conclure que E est compatible avec (S).
- si : $\nexists X_{S_r} \in S_E$, alors : $S \cap S_E = \emptyset$. On peut alors conclure que E est incompatible avec (S).

4. Étude de la Réciproque du Théorème 13.

Nous nous intéressons ici à la validité de l'implication n° 1bis:

$$S_a = S_b \Rightarrow (S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Telle que formulée, cette implication est fausse.

En effet, si les deux systèmes (S_a) et (S_b) sont incompatibles et si donc : $S_a = S_b = \emptyset$, alors : $S_a = S_b = \emptyset \not\Rightarrow (S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

Un exemple simple (dans lequel : $K = \mathbb{R}$) illustre la non-validité de l'implication n° 1bis.

Considérons en effet les deux systèmes (S_a) et (S_b) suivants, clairement incompatibles l'un et l'autre :

$$(S_a) : \begin{cases} 0x = 1 \\ 0x = 1 \end{cases}; \quad (S_b) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

On a donc (cf. Étude initiale Section 1.1.) :

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il n'existe à l'évidence aucune matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A_b = P \cdot A_a$ et $B_b = P \cdot B_a$.
On n'a donc pas l'équivalence : $(S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

Il faut donc adjoindre à l'hypothèse $S_a = S_b$ l'hypothèse supplémentaire que (S_a) et (S_b) sont compatibles, c.-à-d. que : $S_a = S_b \neq \emptyset$.

On peut alors énoncer la proposition suivante.

Théorème 30 - Réciproque du Théorème 13 pour les systèmes compatibles. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, supposés compatibles. Alors :
 $S_a = S_b \neq \emptyset \Rightarrow (S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

Preuve :

La principale difficulté de la démonstration de ce théorème est liée à l'absence de standardisation lorsqu'il s'agit de représenter les solutions d'un système linéaire d'équation donné.

Cette absence de standardisation rend problématique la formulation mathématique de l'hypothèse de départ : $S_a = S_b (\neq \emptyset)$.

Un exemple très élémentaire (avec $K = \mathbb{R}$) va nous servir à illustrer ce point.

Soit (S) le système suivant, clairement compatible :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

La solution S de (S) peut s'écrire indifféremment sous l'une des formes S_1 , S_2 ou S_3 suivantes :

$$S_1 \begin{cases} x_1 = -(X_2 + X_3) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}, \text{ où } X_2 \text{ et } X_3 \text{ désignent des paramètres arbitraires dans } \mathbb{R}.$$

$$S_2 \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = -(X_1 + X_3) \\ x_3 = X_3 \end{cases}, \text{ où } X_1 \text{ et } X_3 \text{ désignent des paramètres arbitraires dans } \mathbb{R}.$$

$$S_3 \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = -(X_1 + X_2) \end{cases}, \text{ où } X_1 \text{ et } X_2 \text{ désignent des paramètres arbitraires dans } \mathbb{R}.$$

Il n'est pas aisé de reconnaître du premier coup d'œil l'égalité des ensembles de solutions : $S_1 = S_2 = S_3$ (1).

En revanche, toutes les représentations des solutions de (S) ci-dessus dérivent du système suivant, à inconnues échelonnées, immédiatement résoluble (en abrégé : S.I.R.) (2) :

$$(S. I. R.) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x = 0 \\ 0x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

(1) Il est d'ailleurs possible d'imaginer d'autres formes S_4 , S_5 , S_6 , ... représentant tout aussi valablement la solution S de (S).

(2) Se reporter à la Section 5 de l'Étude initiale. Le système à inconnues échelonnées immédiatement résoluble (S.I.R.) mentionné ici n'est autre que le système ($S_{I_{\max}}$) auquel aboutit toute méthode de résolution basée sur une élimination/substitution successive des inconnues. Il s'agit typiquement d'un système triangulaire associé à une matrice triangulaire.

(3) On reconnaît dans ce système l'équation nulle $E_0 : 0x = 0$ (cf. Définition 5).

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

ou d'un système équivalent à celui-ci (au sens de la Définition 12), comme, par exemple :

$$(S. I. R.) \begin{cases} 0x & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 0x & = & 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$(S. I. R.) \begin{cases} 0x & = & 0 \\ 0x & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Il est donc judicieux de poser *comme définition* que deux systèmes linéaires compatibles (S_a) et (S_b) de n équations à p inconnues ont le même ensemble de solutions, (autrement dit que ces systèmes sont tels que : $S_a = S_b (\neq \emptyset)$), si et seulement si une méthode de résolution donnée appliquée à (S_a) et à (S_b) aboutit :

- au même système à inconnues échelonnées immédiatement résoluble. On a alors : $(S.I.R._a) = (S.I.R._b)$,

ou

- à deux systèmes à inconnues échelonnées immédiatement résolubles équivalents, au sens de la Définition 12. On a alors : $(S.I.R._a) \xleftrightarrow{EQU} (S.I.R._b)$.

Dans les deux cas de figure, nous pouvons alors conclure par transitivité de la relation d'équivalence \xleftrightarrow{EQU} :

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_a) \xleftrightarrow{EQU} (S.I.R._a) \\ \text{et} \\ (S_b) \xleftrightarrow{EQU} (S.I.R._b) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} (S.I.R._a) = (S.I.R._b) \\ \text{ou} \\ (S.I.R._a) \xleftrightarrow{EQU} (S.I.R._b) \end{array} \right\} \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{EQU} (S_b).$$

La réciproque du Théorème 13 est donc établie lorsque les deux systèmes concernés (S_a) et (S_b) sont compatibles.

5. Étude des implications n° 3 et n° 3bis pour les systèmes compatibles et pour les systèmes incompatibles

5.1. Étude de l'implication n° 3 pour les systèmes compatibles

Nous nous intéressons ici à la validité de l'implication suivante, en ce qui concerne les systèmes compatibles :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow S_a = S_b.$$

Nous supposons que l'un au moins des systèmes (S_a) ou (S_b) est compatible. Nous exprimerons cette dernière hypothèse en écrivant (cf. Théorème 25-1) : $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a)$ ou $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b)$ - (voir Remarque générale page 9).

Théorème 31. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, dont l'un des deux est supposé compatible. Alors :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \text{ et } (E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b)) \Rightarrow S_a = S_b \neq \emptyset.$$

Preuve :

Supposons que : $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$ et (S_a) compatible, c.-à-d. $E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a)$.

Le Théorème 27 implique immédiatement que (S_a) et (S_b) sont de même nature et donc, en l'occurrence, qu'ils sont compatibles tous les deux.

Soit $X_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_p^0)$ un p -uplet de \mathbb{K}^p constituant une solution de (S_a) .

X_0 est donc solution de toutes les équations constitutives de (S_a) .

D'après le Théorème 16, X_0 est alors solution de toutes les équations de $\text{EQU}(S_a)$.

Comme $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, X_0 est solution de toutes les équations de $\text{EQU}(S_b)$.

Or : $(S_b) \subseteq \text{EQU}(S_b)$. X_0 est donc solution de toutes les équations constitutives de (S_b) .

Il s'ensuit que $X_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_p^0)$ est solution de (S_b) .

Et donc : $S_a \subseteq S_b$.

De même, soit $Y_0 = (y_1^0, \dots, y_j^0, \dots, y_p^0)$ un p -uplet de \mathbb{K}^p constituant une solution de (S_b) . Y_0 est donc solution de toutes les équations constitutives de (S_b) .

D'après le Théorème 16, Y_0 est alors solution de toutes les équations de $\text{EQU}(S_b)$.

Comme $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, Y_0 est solution de toutes les équations de $\text{EQU}(S_a)$.

Or : $(S_a) \subseteq \text{EQU}(S_a)$. Y_0 est donc solution de toutes les équations constitutives de (S_a) .

Il s'ensuit que $Y_0 = (y_1^0, \dots, y_j^0, \dots, y_p^0)$ est solution de (S_a) .

Et donc : $S_b \subseteq S_a$.

Finalement : $S_a = S_b$.

5.2. Étude de l'implication n° 3bis pour les systèmes compatibles

Nous nous intéressons ici à la validité de l'implication suivante, en ce qui concerne les systèmes compatibles :

$$S_a = S_b \neq \emptyset \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b).$$

Théorème 32 - Réciproque du Théorème 31. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, supposés compatibles. Alors :

$$S_a = S_b \neq \emptyset \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b).$$

Preuve : Elle est immédiate.

D'après le Théorème 30 :

$$S_a = S_b \neq \emptyset \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Et d'après le Théorème 20 :

$$(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b).$$

Faisons le point à ce stade sur les systèmes compatibles.

Systèmes compatibles

$$1. \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad S_a = S_b \quad (\neq \emptyset) \quad \text{Théorème 13.}$$

$$1\text{bis.} \quad S_a = S_b \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Théorème 30.}$$

$$2. \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Théorème 20.}$$

$$2\text{bis.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ \text{E}_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \quad \text{ou} \quad \text{E}_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad (\text{\`a valider}).$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ \text{E}_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \quad \text{ou} \quad \text{E}_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow S_a = S_b (\neq \emptyset) \quad \text{Théorème 31.}$$

$$3\text{bis.} \quad S_a = S_b \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Théorème 32.}$$

5.3. Étude des implications n° 3 et n° 3bis pour les systèmes incompatibles

L'étude des implications n° 3 et n° 3bis lorsque les systèmes (S_a) ou (S_b) sont incompatibles ne présente pas de difficulté particulière.

Implication n° 3

L'implication n° 3 constitue un truisme sans intérêt puisqu'à l'évidence :

$$\left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ \text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a) \text{ ou } \text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow S_a = S_b (= \emptyset).$$

En effet, d'après le Théorème 27, l'égalité $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$ entraîne que les systèmes (S_a) et (S_b) sont de même nature. On a donc bien : $S_a = S_b$. A partir de là, le fait d'avoir $S_a = S_b = \emptyset$ n'est qu'une simple reformulation de l'hypothèse $\text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a)$ ou $\text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b)$ - (cf. Théorème 25-1).

Implication n° 3bis

Nous allons démontrer en faisant appel à un exemple que :

$$S_a = S_b = \emptyset \not\Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b).$$

L'exemple auquel nous aurons recours est celui déjà utilisé au début de la Section 4.

$$(S_a) : \begin{cases} 0x = 1 \\ 0x = 1 \end{cases} ; \quad (S_b) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

On a bien : $S_a = S_b = \emptyset$.

Par ailleurs :

$$\text{EQU}(S_a) = \{0x = \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{a})$$

$$\text{EQU}(S_b) = \{(\mu + \nu)x_1 + (\mu + \nu)x_2 = \mu\}, \mu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R} \quad (\text{b})$$

On constate que : $\text{EQU}(S_a) \subset \text{EQU}(S_b)$. En effet (a) correspond au cas particulier de (b) où : $\mu = -\nu = \lambda$.

Au final, dans cet exemple : $S_a = S_b = \emptyset$, tandis que : $\text{EQU}(S_a) \neq \text{EQU}(S_b)$.

L'implication n° 3bis est donc fausse.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Nous pouvons faire à ce stade le point suivant concernant les systèmes incompatibles.

Systèmes incompatibles

1. $(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Rightarrow S_a = S_b (= \emptyset)$ Théorème 13.

1bis. $S_a = S_b = \emptyset \not\Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$ Implication fausse.

2. $(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$ Théorème 20.

2bis.
$$\left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \text{ (à valider).}$$

3.
$$\left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow S_a = S_b (= \emptyset) \text{ Truisme sans intérêt.}$$

3bis. $S_a = S_b = \emptyset \not\Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$ Implication fausse.

6. Étude de l'implication n° 2bis pour les systèmes compatibles

Nous nous intéressons ici à la validité de l'implication suivante en ce qui concerne les systèmes compatibles :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Théorème 33 - Réciproque du Théorème 20 pour les systèmes compatibles. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, dont l'un des deux est supposé compatible. Alors :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \text{ et } (E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b)) \Rightarrow (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Preuve : Elle est immédiate.

D'après le Théorème 31 :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \text{ et } (E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b)) \Rightarrow S_a = S_b (\neq \emptyset).$$

Et d'après le Théorème 30 :

$$S_a = S_b \neq \emptyset \Rightarrow (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Nous pouvons donc compléter définitivement le schéma suivant, concernant les systèmes compatibles.

Systèmes compatibles

$$1. \quad (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad S_a = S_b (\neq \emptyset) \quad \text{Théorème 13.}$$

$$1\text{bis.} \quad S_a = S_b \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Théorème 30.}$$

$$2. \quad (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Théorème 20.}$$

$$2\text{bis.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow (S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Théorème 33.}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \notin \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow S_a = S_b (\neq \emptyset) \quad \text{Théorème 31.}$$

$$3\text{bis.} \quad S_a = S_b \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Théorème 32.}$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Autrement dit, les équivalences suivantes sont vraies partout lorsque les systèmes (S_a) et (S_b) sont compatibles.

$$\begin{array}{ccc}
 (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) & \stackrel{1}{\Leftrightarrow} & S_a = S_b (\neq \emptyset) \\
 & \text{1bis} & \\
 2 \Updownarrow 2\text{bis} & & 3\text{bis} \Updownarrow 3 \\
 \text{EQU}(S_a) & = & \text{EQU}(S_b)
 \end{array}$$

7. Étude approfondie d'un système linéaire de n équations à p inconnues - Définitions d'outils nouveaux

S'agissant des systèmes incompatibles, la validité ou la non-validité de l'implication n° 2bis reste à établir. Mais la démonstration de l'implication n° 2bis, qui a été faite pour les systèmes compatibles s'appuyait sur l'existence de solutions pour de tels systèmes. Cette approche est évidemment exclue pour les systèmes incompatibles. Une méthode nouvelle doit donc être élaborée.

La présente Section 7 s'emploie à définir de nouveaux outils permettant la mise en œuvre de cette nouvelle méthode.

Nous n'avons fait appel, dans le cadre de l'Étude initiale, - comme d'ailleurs jusqu'ici dans le cadre de la présente Étude complémentaire -, qu'à des notions mathématiques relativement simples. Tout juste avons-nous introduit quelques éléments de calcul matriciel, mais sans faire d'emprunt à la théorie des espaces vectoriels. En outre, la notion de rang, traditionnellement associée à l'étude d'un système linéaire d'équations n'a pas été mise à contribution. Dans ce qui va suivre, nous ferons appel à cette notion (supposée connue).

7.1. Espace vectoriel \mathcal{E}_p

Considérons l'ensemble \mathcal{E}_p des équations linéaires à p inconnues à coefficients dans \mathbb{K} .

L'addition (membre à membre) de deux équations et la multiplication (membre à membre) d'une équation par un scalaire de \mathbb{K} permet de doter \mathcal{E}_p d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel. Le « vecteur nul » est l'équation nulle $E_0 : 0x = 0$ (cf. Définition 5).

La notion de combinaisons linéaires de « vecteurs », c.-à-d. d'équations de \mathcal{E}_p , est immédiate.

Soient E_i , $i = 1$ à k , k équations linéaires de \mathcal{E}_p .

Rappelons que chacune des équation E_i peut s'écrire en toute généralité sous la forme : $MG_i = MD_i$ (cf. Section 1.1 de l'Étude initiale), où :

- les membres de gauche MG_i sont des formes linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} ,
- les membres de droite MD_i sont des scalaires de \mathbb{K} .

La combinaison linéaire $\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i$ est alors l'équation de \mathcal{E}_p dont le membre de gauche est

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i MG_i \text{ et dont le membre de droite est } \sum_{i=1}^k \lambda_i MD_i.$$

L'équation $\sum_{i=1}^k \lambda_i E_i$ s'écrit ainsi : $\sum_{i=1}^k \lambda_i MG_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i MD_i$.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Les notions de sous-espace vectoriel (en abrégé sev), de systèmes libres, de systèmes liés, de systèmes générateurs et de bases (systèmes libres et générateurs) sont dès lors applicables sans restriction.

Soit E une équation linéaire de $\mathcal{E}_p : a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_p x_p = b$.

Considérons d'une part :

- les p équations élémentaires ε_i ($1 \leq i \leq p$) indépendantes :

$$\varepsilon_1 : x_1 = 0 ; \dots ; \varepsilon_i : x_i = 0 ; \dots ; \varepsilon_p : x_p = 0,$$

et d'autre part :

- l'équation $E^*_{\text{imp}} : 0x = 1$, cas particulier de l'équation impossible $E_{\text{imp}} : 0x = b$, $b \in \mathbb{K}^*$ (cf. Définition 4), indépendante des équations ε_i ($1 \leq i \leq p$).

E s'écrit alors sous la forme canonique : $b E^*_{\text{imp}} + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_i \varepsilon_i + \dots + a_p \varepsilon_p$.

Le système $\{E^*_{\text{imp}}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_p\}$ est libre et générateur de \mathcal{E}_p . Il en constitue donc une base que nous dénommerons : base canonique de \mathcal{E}_p .

On en déduit immédiatement que : $\dim(\mathcal{E}_p) = p + 1$.

La définition et la proposition qui suivent résument ce qui précède.

Définition et Théorème 34. *L'ensemble \mathcal{E}_p des équations linéaires à p inconnues à coefficients dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $p + 1$.*

*Sa base canonique est $\{E^*_{\text{imp}}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_p\}$.*

7.2. Nouvelle définition de l'ensemble dérivé d'un système linéaire d'équations

Définition 35. *Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues :*

$$(S) \begin{cases} \dots \\ E_i & 1 \leq i \leq n. \\ \dots \end{cases}$$

On appelle ensemble dérivé de (S) l'ensemble $\text{EQU}(S) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq n)$.

Remarques :

- 1) On se convaincra que les Définitions 17 et 35 sont bien équivalentes.
- 2) $\text{EQU}(S)$ est ainsi un sev de \mathcal{E}_p . Nous en étudierons plus loin la dimension.

7.3. Étude approfondie des systèmes d'équations compatibles - Système réduit compatible (SRC) - Système réduit compatible (SRC) associé à un système d'équations compatible

Soit (S) un système linéaire compatible de n équations à p inconnues, de rang $r < n$ (1). Nous considérons en toute généralité que : $n < p$, $n = p$ ou $n > p$.

S désigne l'ensemble des solutions de (S). (S) étant compatible : $S \neq \emptyset$.

r désigne le rang de (S), supposé non trivialement nul. On a donc : $0 < r < n$ et $0 < r \leq p$.

Sans rien perdre en généralité, nous considérerons que les équations principales de (S) sont les r premières (quitte à permuter les lignes d'équation) et que les inconnues principales sont les r premières inconnues x_1, \dots, x_r (quitte à re-numéroter les inconnues).

(S) s'écrit alors sous la forme générale :

$$(S) \begin{cases} (S_r) & \{ E_i : MG_i = MD_i & (1 \leq i \leq r) \\ (S_{n-r}) & \{ E_j : MG_j = MD_j & (r+1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

E_i ($1 \leq i \leq r$) sont les équations principales de (S).

E_j ($r+1 \leq j \leq n$) sont les équations non principales de (S).

Rappelons (cf. Étude initiale Section 1.1) que :

- les membres de gauche MG_i et MG_j sont des formes linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} ,
- les membres de droite MD_i et MD_j sont des scalaires de \mathbb{K} .

(S_r) est un système de r équations à p inconnues. Il regroupe les équations principales de (S). Nous le dénommerons système principal de (S).

(S_{n-r}) est un système de $(n-r)$ équations à p inconnues. Il regroupe les équations non principales de (S). Nous le dénommerons système non principal de (S). Comme $r < n$, $(S_{n-r}) \neq \emptyset$.

S_r désigne l'ensemble des solutions de (S_r) . Par définition même d'un système principal : $S_r \neq \emptyset$.

(1) La présente étude concerne les systèmes compatibles de rang $r < n$. Le sous-système (S_{n-r}) dont il est question ici contient donc au moins une équation. Le cas $r = n$ correspondrait en fait au cas « dégénéré » où : $(S_{n-r}) = \emptyset$. Nous ne nous placerons pas dans cette hypothèse. Ceci dit, si $r = n = p$, le système (S) est un système de Cramer et si $r = n < p$, l'étude de (S) se ramène immédiatement à celle d'un système de Cramer. Ces cas sont amplement traités par la théorie classique et nous ne nous y attarderons donc pas.

Rappelons les résultats classiques suivants.

(R1) Les formes linéaires principales MG_i ($1 \leq i \leq r$) correspondant aux membres de gauche des équations principales E_i sont indépendantes, tandis que les formes linéaires non principales MG_j ($r+1 \leq j \leq n$) correspondant aux membres de gauche des équations non principales E_j s'expriment comme des combinaisons linéaires des formes linéaires principales MG_i ($1 \leq i \leq r$).

(R2) (S) étant compatible, le système (S_{n-r}) ne contient que des équations compatibles avec (S_r) (cf. Définitions 29 et 29bis), ce qui signifie que les équations non principales E_j ($r+1 \leq j \leq n$) s'expriment elles-mêmes comme des combinaisons linéaires des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

Explicitation des résultats (R1) et (R2) :

Soit E_{j_0} , $r+1 \leq j_0 \leq n$, une équation quelconque de (S_{n-r}) . Comme $r < n$, il en existe au moins une.

La forme linéaire MG_{j_0} correspondant au membre de gauche de E_{j_0} s'exprime alors sous forme de combinaison linéaire des formes linéaires MG_i correspondant aux membres de gauche des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$). Donc, $\exists \lambda_{j_0 i} \in \mathbb{K}$ ($1 \leq i \leq r$) tels que :

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i.$$

Mais, en outre, E_{j_0} est compatible avec le système principal (S_r) (cf. Définitions 29/29bis). En conséquence, c'est l'équation E_{j_0} toute entière qui s'exprime, à l'aide des mêmes coefficients $\lambda_{j_0 i}$ ($1 \leq i \leq r$) définis ci-dessus, sous forme de combinaison linéaire des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

Autrement dit, les coefficients $\lambda_{j_0 i}$ ($1 \leq i \leq r$) en question réalisent simultanément la double

$$\text{égalité : } MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i \text{ et } MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i, \text{ si bien que : } E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i.$$

On peut donc énoncer le Lemme suivant :

Lemme 36. Soit (S) un système compatible de n équations à p inconnues, de rang r

$$(0 < r < n \text{ et } 0 < r \leq p) : (S) \begin{cases} (S_r) & \{ E_i & (1 \leq i \leq r) \\ (S_{n-r}) & \{ E_j & (r+1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

$$\forall E_{j_0} \in (S_{n-r}), r+1 \leq j_0 \leq n : E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i.$$

En conséquence de ce qui précède, la résolution du seul système (S_r) fournit l'intégralité des solutions de (S) . Le théorème qui suit énonce ce résultat classique.

Théorème 37. *Soit (S) un système compatible de n équations à p inconnues, de rang r*

$$(0 < r < n \text{ et } 0 < r \leq p) : (S) \left\{ \begin{array}{l} (S_r) \\ (S_{n-r}) \end{array} \right\}. \text{ Alors : } S = S_r \neq \emptyset.$$

Remarques :

- 1) Le Théorème 37 est clairement faux quand le système (S) est non compatible. La non-compatibilité de (S) résulte de l'existence dans (S_{n-r}) d'équations incompatibles avec (S_r) au sens des Définitions 29 et 29bis. On a alors : $S_r \neq \emptyset$, tandis que $S = \emptyset$.
- 2) L'égalité $S = S_r \neq \emptyset$ n'entraîne pas l'équivalence : $(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_r)$, sauf si $r = n$, cas que nous avons exclu. Le Théorème 30 n'est en effet applicable qu'à des systèmes de « même taille » (même nombre d'équations, même nombre d'inconnues). L'équivalence $\xleftrightarrow{\text{EQU}}$ n'a pas de sens entre systèmes de « taille différente ». Or le système (S) contient n équations, tandis que le système (S_r) n'en contient que r . On ne peut donc avoir $(S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_r)$, puisque, par hypothèse : $r < n$.

Définition et Théorème 38. *Un système de n équations à p inconnues, de rang r ($0 < r < n$ et $0 < r \leq p$) est dénommé système réduit compatible (en abrégé SRC et nous le noterons (\tilde{S})), si son système non principal ne contient que des équations nulles E_0 . (\tilde{S}) a donc la structure générale suivante :*

$$(\tilde{S}) \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{S}_r) \\ (\tilde{S}_{n-r}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{array} \right\} (n-r) \text{ équations nulles.}$$

Tout système réduit compatible (\tilde{S}) est compatible.

Preuve :

Désignons par \tilde{S} l'ensemble des solutions de (\tilde{S}) et par \tilde{S}_r l'ensemble des solutions de (\tilde{S}_r) . Comme il est possible de passer du système (\tilde{S}) au système (\tilde{S}_r) en supprimant dans (\tilde{S}) les $(n-r)$ équations nulles E_0 , il vient immédiatement (cf. Théorème 8) que : $\tilde{S} = \tilde{S}_r$ ($\neq \emptyset$).

Le système (\tilde{S}) est donc compatible.

Définition 39. Soit (S) un système compatible de n équations à p inconnues, de rang r

$$(0 < r < n \text{ et } 0 < r \leq p) : (S) \begin{cases} (S_r) \\ (S_{n-r}) \end{cases}.$$

On appelle système réduit compatible (en abrégé SRC) associé à (S) , le système (\tilde{S}) de n équations à p inconnues, de la forme :

$$(\tilde{S}) \begin{cases} (\tilde{S}_r) = (S_r) \\ (\tilde{S}_{n-r}) \end{cases} \begin{cases} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{cases} (n-r) \text{ équations nulles.}$$

Remarques :

- 1) Tous les systèmes compatibles ayant même système principal ont le même SRC associé.
- 2) Le SRC associé à un système réduit (\tilde{S}) est le système (\tilde{S}) lui-même.
- 3) Ecrivons (S) sous la forme matricielle : $A \cdot X = B$.
Ecrivons (\tilde{S}) sous la forme matricielle : $\tilde{A} \cdot X = \tilde{B}$.

Les matrices A et B associées à (S) (cf. Section 1.1 de l'Étude initiale) sont de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{r \ r} & A_{r \ p-r} \\ A_{n-r \ r} & A_{n-r \ p-r} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{r \ 1} \\ B_{n-r \ 1} \end{bmatrix}.$$

Les matrices \tilde{A} et \tilde{B} associées à (\tilde{S}) sont donc de la forme :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{r \ r} & A_{r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{r \ 1} \\ O_{n-r \ 1} \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$A_{r \ r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$ (puisque (S_r) est système principal de (\tilde{S}) et que, par hypothèse, les inconnues principales sont les r premières inconnues x_1, \dots, x_r).

$A_{r \ p-r} \in \mathcal{M}_{r \ p-r}(\mathbb{K})$ - n'existe pas si $r = p$,

$A_{n-r \ r} \in \mathcal{M}_{n-r \ r}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$,

$A_{n-r \ p-r} \in \mathcal{M}_{n-r \ p-r}(\mathbb{K})$ - n'existe pas si $r = p$,

$O_{n-r \ r}$ matrice nulle $\in \mathcal{M}_{n-r \ r}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$,

$O_{n-r \ p-r}$ matrice nulle $\in \mathcal{M}_{n-r \ p-r}(\mathbb{K})$ - n'existe pas si $r = p$,

$B_{r \ 1}$ matrice-colonne $\in \mathcal{M}_{r \ 1}(\mathbb{K})$,

$B_{n-r \ 1}$ matrice-colonne $\in \mathcal{M}_{n-r \ 1}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$,

$O_{n-r \ 1}$ matrice-colonne nulle $\in \mathcal{M}_{n-r \ 1}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$.

Les structures de \tilde{A} et de \tilde{B} sont une conséquence directe de la Définition 39.

Théorème 40. Soit (S) un système compatible de n équations à p inconnues, de rang r ($0 < r < n$ et $0 < r \leq p$) et (\tilde{S}) le système réduit compatible (SRC) associé à (S) .

Alors :

$$(1-a) \quad S = S_r = \tilde{S} \neq \emptyset.$$

$$(1-b) \quad \text{rang}(S) = \text{rang}(\tilde{S}) = \text{rang}(S_r) = r.$$

$$(2-a) \quad \text{EQU}(S) = \text{EQU}(\tilde{S}) = \text{EQU}(S_r).$$

(2-b) L'ensemble des équations principales de (S) , $\{E_i, 1 \leq i \leq r\}$, forme une base des sev $\text{EQU}(S_r)$, $\text{EQU}(S)$ et $\text{EQU}(\tilde{S})$.

$$(2-c) \quad \dim(\text{EQU}(S_r)) = \dim(\text{EQU}(S)) = \dim(\text{EQU}(\tilde{S})) = r.$$

$$(3) \quad \text{Les systèmes } (S) \text{ et } (\tilde{S}) \text{ sont équivalents : } (S) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}).$$

Preuve :

Points 1-a et 1-b :

D'après le Théorème 37 : $S = S_r \neq \emptyset$. D'autre part, $\tilde{S} = S_r$ puisque l'on peut passer du système (\tilde{S}) au système (S_r) en supprimant dans (\tilde{S}) les $(n-r)$ lignes d'équation nulle E_0 (cf. Théorème 8).

Les égalités : $\text{rang}(S) = \text{rang}(S_r) = \text{rang}(\tilde{S}) = r$ sont immédiates.

Point 2-a :

$$\text{EQU}(S_r) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \text{ (cf. Définition 35)}.$$

$$\begin{aligned} \text{EQU}(S) &= \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq n) \text{ (cf. Définition 35)} \\ &= \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E_j, r+1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

Comme les équations non principales E_j ($r+1 \leq j \leq n$) sont des combinaisons linéaires des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$) (cf. Lemme 36), on a :

$$\text{EQU}(S) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r).$$

$$\text{Et donc : } \text{EQU}(S) = \text{EQU}(S_r).$$

$$\text{Par ailleurs : } \text{EQU}(\tilde{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup (E_0, \dots, E_0, \dots, E_0)) \text{ (cf. Définition 35).}$$

$(n-r)$ équations nulles E_0

$$\text{Et donc : } \text{EQU}(\tilde{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) = \text{EQU}(S_r).$$

Point 2-b :

$$\text{EQU}(S_r) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \text{ (cf. Définition 35)}.$$

Comme les équations principales E_i , $1 \leq i \leq r$, sont indépendantes, elles forment une base du sev $\text{EQU}(S_r)$, et donc des sev $\text{EQU}(S)$ et $\text{EQU}(\tilde{S})$.

Point 2-c :

Il découle immédiatement du Point 2-b que :

$$\dim(\text{EQU}(S_r)) = \dim(\text{EQU}(S)) = \dim(\text{EQU}(\tilde{S})) = r.$$

Point 3 :

1^{ère} démonstration :

Par application du Théorème 30 aux systèmes compatibles (S) et (\tilde{S}) de « même taille » :
 $S = \tilde{S} \neq \emptyset \Rightarrow (S) \xrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S})$.

2^{ème} démonstration :

Nous allons fournir une 2^{ème} démonstration, directe, du Point 3, sans nous appuyer sur l'existence de solutions dans le cas de systèmes compatibles, et donc, sans faire appel au Théorème 30.

Cette démonstration nous sera utile ultérieurement, lorsqu'il s'agira de traiter le cas des systèmes incompatibles.

La compréhension de cette démonstration nécessite de prendre connaissance au préalable de l'Annexe 1 de la présente Étude complémentaire.

(S) s'écrit sous la forme matricielle : $A \cdot X = B$, avec (cf. Remarque 3 page 27) :

$$A = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ A_{n-r r} & A_{n-r p-r} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ B_{n-r 1} \end{bmatrix}.$$

(\tilde{S}) s'écrit sous la forme matricielle : $\tilde{A} \cdot X = \tilde{B}$, avec (cf. Remarque 3 page 27) :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ O_{n-r r} & O_{n-r p-r} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ O_{n-r 1} \end{bmatrix}.$$

Soit $L(A)_k$ ($1 \leq k \leq n$) la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A.

Soit $L(B)_k$ ($1 \leq k \leq n$) la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B (qui se réduit à 1 unique élément puisque B est une matrice unicolonne).

Rappelons la structure détaillée de (S) (cf. page 24) :

$$(S) \begin{cases} (S_r) & \{ E_i \quad (1 \leq i \leq r) \\ (S_{n-r}) & \{ E_j \quad (r+1 \leq j \leq n) \end{cases}.$$

Rappelons aussi le résultat ci-dessous énoncé par le Lemme 36 :

$$(1) \quad \forall E_{j_0} \in (S_{n-r}), r+1 \leq j_0 \leq n : E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i.$$

Traitement du sous-système (SC _{$n-r$})

La relation (1) ci-dessus exprime la double égalité (cf. page 25) :

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i \quad \text{et} \quad MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i, \quad \text{pour : } r+1 \leq j_0 \leq n.$$

S'agissant des matrices A et B, cette double égalité équivaut à :

$$L(A)_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A)_i \text{ et } L(B)_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B)_i, \text{ pour : } r+1 \leq j_0 \leq n.$$

Par composition de transvections appropriées (cf. Annexe 1), appliquées simultanément aux matrices A et B, il est donc possible de remplacer :

- la ligne $L(A)_{j_0}$ ($r+1 \leq j_0 \leq n$) de la matrice A par la combinaison de lignes :
 $L(A)_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A)_i$, opération qui engendre une ligne j_0 nulle dans la matrice résultante.
- la ligne $L(B)_{j_0}$ ($r+1 \leq j_0 \leq n$) de la matrice B par la combinaison de lignes :
 $L(B)_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B)_i$, opération qui engendre une ligne j_0 contenant un unique élément nul ($0 \in \mathbb{K}$) dans la matrice (unicolonne) résultante.

En itérant cette opération à l'ensemble des lignes $L(A)_{j_0}$ et $L(B)_{j_0}$, $r+1 \leq j_0 \leq n$, on aboutit à des matrices A' et B' , transformées de A et de B, dont les lignes j_0 , $r+1 \leq j_0 \leq n$, sont toutes nulles.

Les matrices obtenues A' et B' ont donc la structure suivante :

$$A' = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ O_{n-r r} & O_{n-r p-r} \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ O_{n-r 1} \end{bmatrix}.$$

On constate que : $A' = \tilde{A}$ et $B' = \tilde{B}$.

Les matrices de transvection intervenant dans l'ensemble des transformations ci-dessus sont inversibles (elles appartiennent toutes à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$). En conséquence, la matrice P correspondant au produit de l'ensemble de ces matrices de transvection appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a donc mis en évidence une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que simultanément :

$$\tilde{A} = P \cdot A \quad \text{et} \quad \tilde{B} = P \cdot B.$$

Le système (\tilde{S}) est donc le transformé du système (S) par la transformation T[P] correspondant à P (cf. Définition 12).

$$\text{Donc : } (S) \xleftarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}).$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Théorème 41. Soient deux systèmes linéaires (S_a) et (S_b) de n équations à p inconnues, supposés compatibles, de rang respectif r_a ($0 < r_a < n$ et $0 < r_a \leq p$) et r_b ($0 < r_b < n$ et $0 < r_b \leq p$).

On pose l'une ou l'autre des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) suivantes :

$$(H_1) : \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \text{ ou } (H_2) : (S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Alors :

$$(1) \quad r_a = r_b.$$

En posant, compte tenu de (1) : $r = r_a = r_b$, les systèmes (S_a) et (S_b) s'écrivent :

$$(S_a) \begin{cases} (S_{a_r}) \\ (S_{a_{n-r}}) \end{cases} \text{ et } (S_b) \begin{cases} (S_{b_r}) \\ (S_{b_{n-r}}) \end{cases}.$$

Désignons par :

(\tilde{S}_a) et (\tilde{S}_b) les systèmes réduits compatibles (SRC) associés à (S_a) et (S_b) .

S_a l'ensemble des solutions de (S_a) ,

S_{a_r} l'ensemble des solutions de (S_{a_r}) ,

\tilde{S}_a l'ensemble des solutions de (\tilde{S}_a) ,

S_b l'ensemble des solutions de (S_b) ,

S_{b_r} l'ensemble des solutions de (S_{b_r}) ,

\tilde{S}_b l'ensemble des solutions de (\tilde{S}_b) .

Alors :

$$(2) \quad S_a = S_{a_r} = \tilde{S}_a = S_b = S_{b_r} = \tilde{S}_b \neq \emptyset.$$

$$(3-a) \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(S_{a_r}) = \text{EQU}(S_{b_r}) = \text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b).$$

$$(3-b) \quad \dim(\text{EQU}(S_a)) = \dim(\text{EQU}(S_b)) = \dim(\text{EQU}(S_{a_r})) = \dim(\text{EQU}(S_{b_r})) \\ = \dim(\text{EQU}(\tilde{S}_a)) = \dim(\text{EQU}(\tilde{S}_b)) = r.$$

$$(4) \quad (\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b).$$

Preuve :

On notera tout d'abord l'équivalence des hypothèses (H_1) et (H_2) .

D'une part : $(H_2) \Rightarrow (H_1)$.

En effet : $(S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$ (cf. Théorème 20).

D'autre part, (S_a) et (S_b) étant compatibles :

$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow (S_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$ (cf. Théorème 33), et donc : $(H_1) \Rightarrow (H_2)$.

Finalement : $(H_1) \Leftrightarrow (H_2)$.

Point 1 :

D'après le Théorème 40 (Point 2-c) :

$$\dim(\text{EQU}(S_a)) = r_a \text{ et } \dim(\text{EQU}(S_b)) = r_b.$$

(H_1) ou $(H_2) \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, et donc : $r_a = r_b$.

On peut donc poser dorénavant : $r = r_a = r_b$.

Point 2 :

D'après le Théorème 31, comme $S_a \neq \emptyset$ et $S_b \neq \emptyset$:

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow S_a = S_b.$$

D'après le Théorème 40 (Point 1-a) : $S_a = S_{a_r} = \tilde{S}_a$ et $S_b = S_{b_r} = \tilde{S}_b$.

D'où la conclusion.

Point 3-a et 3-b :

D'après le Théorème 40 (Point 2-a) :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(S_{a_r}) \text{ et } \text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) = \text{EQU}(S_{b_r}).$$

Comme $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, le Point 3-a est démontré.

Compte tenu du Théorème 40 (Point 2-c), le Point 3-b découle de ce qui précède.

Point 4 :

D'après le Théorème 33, comme $\tilde{S}_a \neq \emptyset$ et $\tilde{S}_b \neq \emptyset$:

$$\text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \Rightarrow (\tilde{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b).$$

Théorème 42. Soient (\tilde{S}_a) et (\tilde{S}_b) deux systèmes réduits compatibles de n équations à p inconnues, de rang respectif r_a ($0 < r_a < n$ et $0 < r_a \leq p$) et r_b ($0 < r_b < n$ et $0 < r_b \leq p$).

On pose l'une ou l'autre des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) suivantes :

$$(H_1) \text{ EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \text{ ou } (H_2) (\tilde{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b).$$

Alors :

$$(1) \quad r_a = r_b.$$

En posant, compte tenu de (1) : $r = r_a = r_b$, les systèmes (\tilde{S}_a) et (\tilde{S}_b) s'écrivent sous les deux formes (matricielle et détaillée) suivantes :

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_a) : \tilde{A}_a \cdot X = \tilde{B}_a \quad \text{et} \quad (\tilde{S}_a) & \begin{cases} (\tilde{S}_{a_r}) \\ (\tilde{S}_{a_{n-r}}) \end{cases} \begin{cases} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{cases} . \\ (\tilde{S}_b) : \tilde{A}_b \cdot X = \tilde{B}_b \quad \text{et} \quad (\tilde{S}_b) & \begin{cases} (\tilde{S}_{b_r}) \\ (\tilde{S}_{b_{n-r}}) \end{cases} \begin{cases} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Alors :

(2) Il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\tilde{A}_b = P \cdot \tilde{A}_a$ et $\tilde{B}_b = P \cdot \tilde{B}_a$, avec :

$$P = \begin{bmatrix} P_{r_r} & O_{r_{n-r}} \\ O_{n-r_r} & I_{n-r_{n-r}} \end{bmatrix} \text{ et } P_{r_r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K}).$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Remarque :

Comme $r < n$, les matrices $O_{r \ n-r}$, $O_{n-r \ r}$ et $I_{n-r \ n-r}$ qui apparaissent ci-après, existent bien.

Preuve :

On notera tout d'abord l'équivalence des hypothèses (H_1) et (H_2) .

D'une part : $(H_2) \Rightarrow (H_1)$.

En effet : $(\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b) \Rightarrow \text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b)$ (cf. Théorème 20).

D'autre part, (\tilde{S}_a) et (\tilde{S}_b) étant compatibles (comme c'est le cas pour tout SRC - cf. Définition et Théorème 38) :

$\text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \Rightarrow (\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b)$ (cf. Théorème 33), et donc : $(H_1) \Rightarrow (H_2)$.

Finalement : $(H_1) \Leftrightarrow (H_2)$.

Point 1 :

D'après le Théorème 40 (Point 2-c) :

$\dim(\text{EQU}(\tilde{S}_a)) = r_a$ et $\dim(\text{EQU}(\tilde{S}_b)) = r_b$.

D'après (H_1) : $\text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b)$ donc : $r_a = r_b$.

On peut donc poser dorénavant : $r = r_a = r_b$.

Point 2 :

$(\tilde{S}_a) : \tilde{A}_a \cdot X = \tilde{B}_a$.

Les matrices associées \tilde{A}_a et \tilde{B}_a sont de la forme (cf. Remarque 3 page 27) :

$$\tilde{A}_a = \begin{bmatrix} A_{a \ r \ r} & A_{a \ r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix} \text{ où : } A_{a \ r \ r} \in \mathcal{GL}_r(K) ; \tilde{B}_a = \begin{bmatrix} B_{a \ r \ 1} \\ O_{n-r \ 1} \end{bmatrix}$$

$(\tilde{S}_b) : \tilde{A}_b \cdot X = \tilde{B}_b$.

Les matrices associées \tilde{A}_b et \tilde{B}_b sont de la forme (cf. Remarque 3 page 27) :

$$\tilde{A}_b = \begin{bmatrix} A_{b \ r \ r} & A_{b \ r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix} \text{ où : } A_{b \ r \ r} \in \mathcal{GL}_r(K) ; \tilde{B}_b = \begin{bmatrix} B_{b \ r \ 1} \\ O_{n-r \ 1} \end{bmatrix}$$

Le système principal $(\tilde{S}_{a \ r})$ de (\tilde{S}_a) et le système principal $(\tilde{S}_{b \ r})$ de (\tilde{S}_b) s'écrivent alors respectivement sous la forme matricielle suivante :

$$A_{a \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \end{bmatrix} + A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix} = B_{a \ r \ 1} \quad (1)$$

$$A_{b \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \end{bmatrix} + A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix} = B_{b \ r \ 1} \quad (2)$$

Dans les systèmes (1) et (2), les inconnues non principales sont paramétrables.

Posons dans le système (1) :

$$x_{r+1} = X_{r+1}, \dots, x_p = X_p, \quad X_{r+1}, \dots, X_p \text{ étant des paramètres à valeur arbitraire dans } \mathbb{K},$$

et dans le système (2) :

$$x_{r+1} = X'_{r+1}, \dots, x_p = X'_p, \quad X'_{r+1}, \dots, X'_p \text{ étant des paramètres à valeur arbitraire dans } \mathbb{K}.$$

Les systèmes (1) et (2) se réécrivent alors respectivement sous la forme (3) et (4) :

$$A_{a \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \end{bmatrix} = B_{a \ r \ 1} - A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_{b \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \end{bmatrix} = B_{b \ r \ 1} - A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} \quad (4)$$

D'après (H₁) : $(\tilde{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b)$, et donc : $\tilde{S}_a = \tilde{S}_b$ (cf. Théorème 13).

Comme $\tilde{S}_a = \tilde{S}_{a \ r}$ et $\tilde{S}_b = \tilde{S}_{b \ r}$, on a : $\tilde{S}_{a \ r} = \tilde{S}_{b \ r}$.

(3) et (4) sont donc des systèmes de Cramer de r équations à r inconnues, ayant le même ensemble de solutions (puisque : $\tilde{S}_{a \ r} = \tilde{S}_{b \ r}$).

D'après le Théorème 30 : $\tilde{S}_{a \ r} = \tilde{S}_{a \ r} (\neq \emptyset) \Rightarrow (\tilde{S}_{a \ r}) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_{b \ r})$

Par suite (cf. Définition 12) : $\exists P_{r \ r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$ tel que, à la fois :

$$A_{b \ r \ r} = P_{r \ r} \cdot A_{a \ r \ r} \quad (5)$$

$$B_{b \ r \ 1} - A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = P_{r \ r} \cdot \left[B_{a \ r \ 1} - A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} \right] \quad (6)$$

Or la relation (6) est vérifiée $\forall (X_{r+1}, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$ et $\forall (X'_{r+1}, \dots, X'_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

En posant en particulier $\begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{p-r}$, il vient :

$$\mathbf{B}_{b \ r \ 1} = \mathbf{P}_{r \ r} \cdot \mathbf{B}_{a \ r \ 1} \quad (7)$$

Compte tenu de (7), il découle de (6) que :

$$\mathbf{A}_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} - \mathbf{P}_{r \ r} \mathbf{A}_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{p-r} \quad (8)$$

La relation (8) est vérifiée $\forall (X_{r+1}, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$ et $\forall (X'_{r+1}, \dots, X'_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$.

(8) est donc vérifiée si l'on impose en particulier les égalités : $X_{r+1} = X'_{r+1}, \dots, X_p = X'_p$.

(8) s'écrit alors :

$$[\mathbf{A}_{b \ r \ p-r} - \mathbf{P}_{r \ r} \cdot \mathbf{A}_{a \ r \ p-r}] \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{p-r}, \quad \forall (X_{r+1}, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^{p-r} \quad (9)$$

Chacune des $(p-r)$ lignes de (9) est composée d'un polynôme aux $(p-r)$ indéterminées X_{r+1}, \dots, X_p , qui s'annule pour toutes les valeurs de ces indéterminées. Ces $(p-r)$ polynômes sont donc identiquement nuls.

$$\text{Par suite : } \mathbf{A}_{b \ r \ p-r} = \mathbf{P}_{r \ r} \cdot \mathbf{A}_{a \ r \ p-r}. \quad (10)$$

Soit alors la matrice $\mathbf{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ de la forme : $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r \ r} & \mathbf{O}_{r \ n-r} \\ \mathbf{O}_{n-r \ r} & \mathbf{I}_{n-r \ n-r} \end{bmatrix}$.

On vérifie immédiatement, en tenant compte des relations (5), (7) et (10), que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{b \ r \ r} & \mathbf{A}_{b \ r \ p-r} \\ \mathbf{O}_{n-r \ r} & \mathbf{O}_{n-r \ p-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r \ r} & \mathbf{O}_{r \ n-r} \\ \mathbf{O}_{n-r \ r} & \mathbf{I}_{n-r \ n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{a \ r \ r} & \mathbf{A}_{a \ r \ p-r} \\ \mathbf{O}_{n-r \ r} & \mathbf{O}_{n-r \ p-r} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{b \ r \ 1} \\ \mathbf{O}_{n-r \ 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r \ r} & \mathbf{O}_{r \ n-r} \\ \mathbf{O}_{n-r \ r} & \mathbf{I}_{n-r \ n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a \ r \ 1} \\ \mathbf{O}_{n-r \ 1} \end{bmatrix}.$$

Donc : $\tilde{\mathbf{A}}_b = \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_a$ et $\tilde{\mathbf{B}}_b = \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_a$.

Le Théorème 42 est donc démontré.

7.4. Étude approfondie des systèmes d'équations incompatibles - Système réduit incompatible (SRI) - Système réduit incompatible (SRI) associé à un système d'équations incompatible

Soit (S) un système linéaire incompatible de n équations à p inconnues. Nous considérons en toute généralité que : $n < p$, $n = p$ ou $n > p$.

S désigne l'ensemble des solutions de (S). (S) étant incompatible : $S = \emptyset$.

r désigne le rang, supposé non trivialement nul, de (S). On a donc : $0 < r < n$ (1) et $0 < r \leq p$.

Sans rien perdre en généralité, nous considérerons que les équations principales de (S) sont les r premières (quitte à permuter les lignes d'équation) et que les inconnues principales sont les r premières inconnues x_1, \dots, x_r (quitte à re-numéroter les inconnues).

(S) s'écrit alors sous la forme générale :

$$(S) \begin{cases} (S_r) & \{ E_i : MG_i = MD_i \quad (1 \leq i \leq r) \\ (S_{n-r}) & \{ E_j : MG_j = MD_j \quad (r+1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

E_i ($1 \leq i \leq r$) sont les équations principales de (S).

E_j ($r+1 \leq j \leq n$) sont les équations non principales de (S).

Rappelons (cf. Étude initiale Section 1.1) que :

- les membres de gauche MG_i et MG_j sont des formes linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} ,
- les membres de droite MD_i et MD_j sont des scalaires de \mathbb{K} .

(S_r) est un système de r équations à p inconnues. Il regroupe les équations principales de (S). Nous le dénommerons système principal de (S).

(S_{n-r}) est un système de $(n-r)$ équations à p inconnues. Il regroupe les équations non principales de (S). Nous le dénommerons système non principal de (S). Comme $r < n$, $(S_{n-r}) \neq \emptyset$.

S_r désigne l'ensemble des solutions de (S_r) . Par définition même d'un système principal : $S_r \neq \emptyset$. Mais tandis que pour les systèmes d'équations (S) compatibles : $S = S_r \neq \emptyset$ (cf. Théorème 37), pour les systèmes d'équations (S) incompatibles : $S = \emptyset$ et $S_r \neq \emptyset$ (et donc : $S \neq S_r$).

(1) (S) étant, par hypothèse, incompatible, on a nécessairement : $r < n$. Le sous-système (S_{n-r}) introduit plus loin contient donc toujours au moins une équation.

Rappelons les résultats classiques suivants.

(R1) Les formes linéaires principales MG_i ($1 \leq i \leq r$) correspondant aux membres de gauche des équations principales E_i sont indépendantes, tandis que les formes linéaires non principales MG_j ($r+1 \leq j \leq n$) correspondant aux membres de gauche des équations non principales E_j s'expriment comme des combinaisons linéaires des formes linéaires principales MG_i ($1 \leq i \leq r$).

(R2) (S) étant incompatible, nous pouvons subdiviser le système (S_{n-r}) en deux sous-systèmes, (SC_{n-r}) - éventuellement vide - et (SI_{n-r}) - nécessairement non vide :

$$(S_{n-r}) \begin{cases} (SC_{n-r}) & q \text{ équations} \\ (SI_{n-r}) & q' \text{ équations} \end{cases}.$$

(SC_{n-r}) regroupe les q équations de (S_{n-r}) compatibles avec le système principal (S_r) (cf. Définitions 29 et 29bis). Il est possible que : $(SC_{n-r}) = \emptyset$, et dans ce cas : $q = 0$.

(SI_{n-r}) regroupe les $q' = (n - r - q)$ équations de (S_{n-r}) incompatibles avec le système principal (S_r) (cf. Définitions 29/29bis). (S) étant incompatible, on a nécessairement : $(SI_{n-r}) \neq \emptyset$, et donc : $q' \geq 1$. Ceci veut dire qu'il existe au moins une équation non principale de (S), incompatible avec le système principal (S_r) .

Note : Sans rien perdre en généralité, nous avons considéré (quitte à permuter les lignes d'équation) que les q équations constitutives de (SC_{n-r}) sont les q premières équations de (S_{n-r}) et que les q' équations constitutives de (SI_{n-r}) sont les q' dernières équations de (S_{n-r}) .

Nous aboutissons de ce fait à la structure détaillée suivante du système (S) :

$$(S) \begin{cases} (S_r) & \left\{ \begin{array}{ll} E_i & : \quad MG_i = MD_i & (1 \leq i \leq r) & r \text{ équations} \end{array} \right. \\ (S_{n-r}) & \left\{ \begin{array}{ll} (SC_{n-r}) & \left\{ \begin{array}{ll} E_j & : \quad MG_j = MD_j & (r+1 \leq j \leq r+q) & q \text{ équations} . \\ (SI_{n-r}) & \left\{ \begin{array}{ll} E_j & : \quad MG_j = MD_j & (r+q+1 \leq j \leq n) & q' \text{ équations} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

Si $(SC_{n-r}) \neq \emptyset$ (et donc si $q \neq 0$), les q équations non principales E_j ($r+1 \leq j \leq r+q$) compatibles avec le système principal (S_r) s'expriment comme des combinaisons linéaires des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$). Si, au contraire, $(SC_{n-r}) = \emptyset$ (et donc si $q = 0$), il n'existe aucune équation non principale compatible avec le système principal (S_r) .

On a par ailleurs : $(SI_{n-r}) \neq \emptyset$ (et donc $q' \geq 1$). Ceci signifie que (S) étant incompatible, il existe au moins une équation incompatible avec le système principal (S_r) de (S). Les q' équations non principales E_j ($r+q+1 \leq j \leq n$) incompatibles avec le système principal (S_r) , ne s'expriment donc pas comme des combinaisons linéaires des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

Explicitation des résultats (R1) et (R2) :

Soit E_{j_0} , $r+1 \leq j_0 \leq r+q$, une équation quelconque de (SC_{n-r}) , - s'il en existe une (c.-à-d. si $q \neq 0$).

La forme linéaire MG_{j_0} correspondant au membre de gauche de E_{j_0} s'exprime alors sous forme de combinaison linéaire des formes linéaires MG_i correspondant aux membres de gauche des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$). Donc, $\exists \lambda_{j_0 i} \in K$ ($1 \leq i \leq r$) tels que :

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i.$$

Mais, en outre, E_{j_0} est compatible avec le système principal (S_r) (cf. Définitions 29/29bis). En conséquence, c'est l'équation E_{j_0} toute entière qui s'exprime, à l'aide des mêmes coefficients $\lambda_{j_0 i}$ ($1 \leq i \leq r$) définis ci-dessus, sous forme de combinaison linéaire des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

Autrement dit, les coefficients $\lambda_{j_0 i}$ ($1 \leq i \leq r$) en question réalisent simultanément la double égalité : $MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i$ et $MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i$, si bien que : $E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i$.

Soit maintenant E_{j_0} , $r+q+1 \leq j_0 \leq n$, une équation quelconque de (SI_{n-r}) . Comme nous l'avons déjà dit, il en existe au moins une, faute de quoi (S) ne serait pas incompatible.

La forme linéaire MG_{j_0} correspondant au membre de gauche de E_{j_0} s'exprime toujours sous forme de combinaison linéaire des formes linéaires MG_i correspondant aux membres de gauche des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$). Donc, $\exists \lambda_{j_0 i} \in K$ ($1 \leq i \leq r$) tels que :

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i.$$

Mais, en l'occurrence, l'équation E_{j_0} étant incompatible avec le système principal (S_r) (cf. Définitions 29/29bis), E_{j_0} ne s'exprime pas, à l'aide des coefficients $\lambda_{j_0 i}$ ($1 \leq i \leq r$) en question, sous forme de combinaison linéaire des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

Autrement dit, si les coefficients $\lambda_{j_0 i}$ ($1 \leq i \leq r$) définis ci-dessus réalisent bien l'égalité :

$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i$, ils ne réalisent pas l'égalité $MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i$, et c'est précisément ce qui rend E_{j_0} incompatible avec les équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$).

Dans le cas d'une équation incompatible E_{j_0} de (SI_{n-r}) , nous nous trouvons donc confrontés à une situation où :

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i, \text{ tandis que : } MD_{j_0} \neq \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i, \text{ et donc : } E_{j_0} \neq \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i.$$

Introduisons alors $\delta_{j_0} \in K^*$ tel que : $\delta_{j_0} = MD_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i$.

$$\text{On a donc : } MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i \text{ et } MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i + \delta_{j_0}.$$

$$\text{De ce fait : } E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i + \delta_{j_0} E^*_{\text{imp}}.$$

On peut donc énoncer le Lemme suivant (à rapprocher du Lemme 36) :

Lemme 43. Soit (S) un système incompatible de n équations à p inconnues, de rang r

$$(0 < r < n \text{ et } 0 < r \leq p) : (S) \begin{cases} (S_r) & \{ E_i & (1 \leq i \leq r) \\ (S_{n-r}) & \begin{cases} (SC_{n-r}) & \{ E_j & (r+1 \leq j \leq r+q) \\ (SI_{n-r}) & \{ E_j & (r+q+1 \leq j \leq n) \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall E_{j_0}, r+1 \leq j_0 \leq r+q, \in (SC_{n-r}) : E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i.$$

$$\forall E_{j_0}, r+q+1 \leq j_0 \leq n, \in (SI_{n-r}) : E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i + \delta_{j_0} E^*_{\text{imp}}, \text{ avec } \delta_{j_0} \in K^*.$$

Définition et Théorème 44. Un système de n équations à p inconnues, de rang r ($0 < r < n$ et $0 < r \leq p$) est dénommé système réduit incompatible (en abrégé SRI et nous le noterons (\hat{S})), si son système non principal contient $(n-r-1)$ équations nulles E_0 et une unique équation impossible E^*_{imp} de la forme : $0x = 1$.

Note : Lorsque $r = n-1$, (\hat{S}_{n-r}) ne contient que l'unique équation impossible E^*_{imp} .

(\hat{S}) a donc la structure générale suivante :

$$(\hat{S}) \begin{cases} (\hat{S}_r) \\ (\hat{S}_{n-r}) \begin{cases} (\hat{S}C_{n-r}) \begin{cases} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{cases} \\ (\hat{S}I_{n-r}) E^*_{\text{imp}} \end{cases} \end{cases} \begin{matrix} (n-r-1) \text{ équations nulles} \\ 1 \text{ équation impossible } 0x = 1 \end{matrix} .$$

Tout système réduit incompatible (\hat{S}) est incompatible.

Preuve :

La présence d'une équation impossible E^*_{imp} dans (\hat{S}) suffit à rendre (\hat{S}) incompatible.

Remarque :

Les (éventuelles) équations nulles E_0 et l'équation E_{imp}^* ont pour membre de gauche la forme linéaire nulle. Elles appartiennent donc au système non principal (\hat{S}_{n-r}) . La justification des appartenances $E_0 \in (\hat{S}C_{n-r})$ et $E_{\text{imp}}^* \in (\hat{S}I_{n-r})$ est immédiate.

Définition 45. Soit (S) un système incompatible de n équations à p inconnues, de rang r

$$(0 < r < n \text{ et } 0 < r \leq p) : (S) \begin{cases} (S_r) \\ (S_{n-r}) \end{cases}.$$

On appelle système réduit incompatible (en abrégé SRI) associé à (S) , le système (\hat{S}) de n équations à p inconnues, de la forme :

$$(\hat{S}) \begin{cases} (\hat{S}_r) = (S_r) \\ (\hat{S}_{n-r}) \end{cases} \begin{cases} (\hat{S}C_{n-r}) \begin{cases} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{cases} \\ (\hat{S}I_{n-r}) \begin{cases} E_0 \\ E_{\text{imp}}^* \end{cases} \end{cases} \begin{cases} (n-r-1) \text{ équations nulles (1).} \\ 1 \text{ équation impossible } 0x = 1 \end{cases}$$

(1) Lorsque $r = n-1$, $(\hat{S}C_{n-r}) = \emptyset$ et, dans ce cas, (\hat{S}_{n-r}) ne contient que l'unique équation impossible E_{imp}^* .

Remarques :

- 1) Tous les systèmes incompatibles ayant même système principal ont le même SRI associé.
- 2) Le SRI associé à un système réduit (\hat{S}) est le système (\hat{S}) lui-même.
- 3) Ecrivons (S) sous la forme matricielle : $A \cdot X = B$.
Ecrivons (\hat{S}) sous la forme matricielle : $\hat{A} \cdot X = \hat{B}$.

Les matrices A et B associées à (S) (cf. Section 1.1 de l'Étude initiale) sont de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{r \ r} & A_{r \ p-r} \\ A_{n-r \ r} & A_{n-r \ p-r} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{r \ 1} \\ B_{n-r \ 1} \end{bmatrix}.$$

Les matrices \hat{A} et \hat{B} associées à (\hat{S}) sont donc de la forme :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{r \ r} & A_{r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{r \ 1} \\ U_{n-r \ 1} \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$A_{r \ r} \in \mathcal{GL}_r(K)$ (puisque (S_r) est système principal de (\tilde{S}) et que, par hypothèse, les inconnues principales sont les r premières inconnues x_1, \dots, x_r).

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

$A_{r \ p-r} \in \mathcal{M}_{r \ p-r}(\mathbb{K})$ - n'existe pas si $r = p$,

$A_{n-r \ r} \in \mathcal{M}_{n-r \ r}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$,

$A_{n-r \ p-r} \in \mathcal{M}_{n-r \ p-r}(\mathbb{K})$ - n'existe pas si $r = p$,

$O_{n-r \ r}$ matrice nulle $\in \mathcal{M}_{n-r \ r}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$,

$O_{n-r \ p-r}$ matrice nulle $\in \mathcal{M}_{n-r \ p-r}(\mathbb{K})$ - n'existe pas si $r = p$,

$B_{r \ 1}$ matrice-colonne $\in \mathcal{M}_{r \ 1}(\mathbb{K})$,

$B_{n-r \ 1}$ matrice-colonne $\in \mathcal{M}_{n-r \ 1}(\mathbb{K})$ - existe bien puisque $r < n$,

$U_{n-r \ 1}$ matrice-colonne $\in \mathcal{M}_{n-r \ 1}(\mathbb{K})$, de la forme : $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n-r}$ - existe bien puisque $r < n$.

Les structures de \hat{A} et de \hat{B} sont une conséquence directe de la Définition 45.

Le Théorème 46 ci-dessous constitue pour les systèmes d'équations incompatibles l'équivalent du Théorème 40 pour les systèmes d'équations compatibles.

Théorème 46. Soit (S) un système incompatible de n équations à p inconnues, de rang r ($0 < r < n$ et $0 < r \leq p$) et (\hat{S}) le système réduit incompatible (SRI) associé à (S) .

Alors :

(1-a) $S_r \neq \emptyset$, tandis que : $S = \hat{S} = \emptyset$.

(1-b) $\text{rang}(S) = \text{rang}(\hat{S}) = \text{rang}(S_r) = r$.

(2-a) $\text{EQU}(S) = \text{EQU}(\hat{S}) = \text{EQU}((S_r) \cup E_{\text{imp}}^*)$,

(2-b) L'ensemble des équations principales de (S) , $\{E_i, 1 \leq i \leq r\}$, forme une base du sev $\text{EQU}(S_r)$. L'ensemble des équations $\{E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E_{\text{imp}}^*\}$ forme une base des sev $\text{EQU}(S)$ et $\text{EQU}(\hat{S})$.

(2-c) $\dim(\text{EQU}(S_r)) = r$, tandis que : $\dim(\text{EQU}(S)) = \dim(\text{EQU}(\hat{S})) = r + 1$.

(3) Les systèmes (S) et (\hat{S}) sont équivalents : $(S) \xrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S})$.

Preuve :

Points 1-a et 1-b :

$S_r \neq \emptyset$ puisque (S_r) est système principal de rang r .

$S = \hat{S} = \emptyset$ puisque (S) et (\hat{S}) sont incompatibles.

Les égalités : $\text{rang}(S) = \text{rang}(S_r) = \text{rang}(\hat{S}) = r$ sont immédiates.

Points 2-a :

$$\text{EQU}(S_r) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \quad (\text{cf. Définition 35}).$$

$$\text{EQU}(S) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq n) \quad (\text{cf. Définition 35}).$$

Soit encore :

$$\text{EQU}(S) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E_j, r+1 \leq j \leq r+q, \cup E_j, r+q+1 \leq j \leq n).$$

Comme les équations non principales E_j ($r+1 \leq j \leq r+q$) sont des combinaisons linéaires des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$) (cf. Lemme 43), on a :

$$\text{EQU}(S) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E_j, r+q+1 \leq j \leq n).$$

Comme, par ailleurs, les équations non principales E_j ($r+q+1 \leq j \leq n$) sont des combinaisons linéaires des équations principales E_i ($1 \leq i \leq r$) et de l'équation impossible E^*_{imp} (cf. Lemme 43), on a :

$$\text{EQU}(S) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) = \text{EQU}((S_r) \cup E^*_{\text{imp}}).$$

Par ailleurs :

$$\text{EQU}(\hat{S}) = \text{Vect}((E_i, 1 \leq i \leq r) \cup (E_0, \dots, E_0, \dots, E_0) \cup E^*_{\text{imp}}) \quad (\text{cf. Définition 35}).$$

$(n-r)$ équations nulles E_0

$$\text{Donc : } \text{EQU}(\hat{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) = \text{EQU}((S_r) \cup E^*_{\text{imp}}).$$

$$\text{En conclusion : } \text{EQU}(S) = \text{EQU}(\hat{S}) = \text{EQU}((S_r) \cup E^*_{\text{imp}}).$$

Point 2-b :

$$\text{EQU}(S_r) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \quad (\text{cf. Définition 35}).$$

Comme les équations principales E_i , $1 \leq i \leq r$, sont indépendantes, elles forment une base du sev $\text{EQU}(S_r)$.

$$\text{D'autre part (cf. Point 2-a) : } \text{EQU}(S) = \text{EQU}(\hat{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}).$$

Comme les équations principales E_i , $1 \leq i \leq r$, sont indépendantes et que l'équation impossible E^*_{imp} est également indépendante, $\{E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}\}$ forme une base des sev $\text{EQU}(S)$ et $\text{EQU}(\hat{S})$.

Point 2-c :

Il découle immédiatement du Point 2-b que :

$$\dim(\text{EQU}(S_r)) = r \quad \text{et que : } \dim(\text{EQU}(S)) = \dim(\text{EQU}(\hat{S})) = r+1.$$

Point 3 :

Le Point 3 du Théorème 46, à savoir que : $(S) \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S})$, constitue pour la présente étude un résultat essentiel.

La démonstration qui suit s'inspire de la 2^{ème} démonstration du Point 3 du Théorème 40 qui concerne les systèmes d'équations compatibles.

La compréhension de cette démonstration nécessite de prendre connaissance au préalable de l'Annexe 1 de la présente Étude complémentaire.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

(S) s'écrit sous la forme matricielle : $A \cdot X = B$, avec (cf. Remarque 3 page 40) :

$$A = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ A_{n-r r} & A_{n-r p-r} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ B_{n-r 1} \end{bmatrix}.$$

(\hat{S}) s'écrit sous la forme matricielle : $\hat{A} \cdot X = \hat{B}$, avec (cf. Remarque 3 page 40) :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ O_{n-r r} & O_{n-r p-r} \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ U_{n-r 1} \end{bmatrix}.$$

Soit $L(A)_k$ ($1 \leq k \leq n$) la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Soit $L(B)_k$ ($1 \leq k \leq n$) la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B (qui se réduit à 1 unique élément puisque B est une matrice unicolonne).

Rappelons la structure détaillée de (S) (cf. page 37) :

$$(S) \quad \begin{cases} (S_r) & \{ E_i : MG_i = MD_i & (1 \leq i \leq r) \\ (S_{n-r}) & \begin{cases} (SC_{n-r}) & \{ E_j : MG_j = MD_j & (r+1 \leq j \leq r+q) \\ (SI_{n-r}) & \{ E_j : MG_j = MD_j & (r+q+1 \leq j \leq n) \end{cases} \end{cases}.$$

Rappelons aussi les résultats ci-dessous énoncés par le Lemme 43 :

$$(1) \quad \forall E_{j_0}, r+1 \leq j_0 \leq r+q, \in (SC_{n-r}) : E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i.$$

$$(2) \quad \forall E_{j_0}, r+q+1 \leq j_0 \leq n, \in (SI_{n-r}) : E_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} E_i + \delta_{j_0} E_{\text{imp}}^*, \text{ avec } \delta_{j_0} \in K^*.$$

Traitement du sous-système (SC_{n-r})

La relation (1) ci-dessus concerne les équations du sous-système (SC_{n-r}), compatibles avec (S_r), c.-à-d. celles correspondant à un indice j_0 tel que : $r+1 \leq j_0 \leq r+q$.

Cette relation exprime la double égalité (cf. page 38) :

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i \text{ et } MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i, \text{ pour } r+1 \leq j_0 \leq r+q.$$

S'agissant des matrices A et B , cette double égalité équivaut à :

$$L(A)_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A)_i \text{ et } L(B)_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B)_i, \text{ pour } r+1 \leq j_0 \leq r+q.$$

Nous nous trouvons dans le cas de figure déjà traité lors de la démonstration du Point 3 du Théorème 40 concernant les systèmes d'équations compatibles. Le raisonnement qui suit est donc le même.

Par composition de transvections appropriées (cf. Annexe 1), appliquées simultanément aux matrices A et B, il est donc possible de remplacer :

- la ligne $L(A)_{j_0}$ ($r+1 \leq j_0 \leq r+q$) de la matrice A par la combinaison de lignes :

$L(A)_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A)_i$, opération qui engendre une ligne j_0 nulle dans la matrice résultante.

- la ligne $L(B)_{j_0}$ ($r+1 \leq j_0 \leq r+q$) de la matrice B par la combinaison de lignes :

$L(B)_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B)_i$, opération qui engendre une ligne contenant un unique élément nul ($0 \in \mathbb{K}$) dans la matrice (unicolonne) résultante.

En itérant cette opération à l'ensemble des lignes $L(A)_{j_0}$ et $L(B)_{j_0}$, $r+1 \leq j_0 \leq r+q$, on aboutit à des matrices A' et B' , transformées de A et de B, dont les lignes j_0 , $r+1 \leq j_0 \leq r+q$, sont toutes nulles.

Les matrices obtenues A' et B' ont donc la structure suivante :

$$A' = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ O_{q r} & O_{q p-r} \\ A_{n-r-q r} & A_{n-r-q p-r} \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ O_{q 1} \\ B_{n-r-q 1} \end{bmatrix}.$$

Les matrices de transvection intervenant dans l'ensemble des transformations ci-dessus sont inversibles (elles appartiennent toutes à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$). En conséquence, la matrice P_1 correspondant au produit de l'ensemble de ces matrices de transvection appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a donc mis en évidence une matrice P_1 de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que simultanément :

$$A' = P_1 \cdot A \quad \text{et} \quad B' = P_1 \cdot B.$$

Le système (S') associé aux matrices A' et B' est donc le transformé du système (S) par la transformation $T[P_1]$ associée à P_1 (cf. Définition 12).

$$\text{Donc : } (S) \xleftarrow{\text{EQU}} (S').$$

Il résulte de ce qui précède que la structure détaillée de (S') est la suivante :

$$(S') \begin{cases} (S_r) & \left\{ \begin{array}{l} E_i : MG_i = MD_i \quad (1 \leq i \leq r) \\ (SC'_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} E_j : 0x = 0 \quad (r+1 \leq j \leq r+q) \\ (SI_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} E_j : MG_j = MD_j \quad (r+q+1 \leq j \leq n) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}.$$

Traitement du sous-système (SI_{n-r})

La relation (2) page 43 concerne les équations du sous-système (SI_{n-r}) incompatibles avec (S_r), c.-à-d. celles correspondant à un indice j_0 , tel que : $r+q+1 \leq j_0 \leq n$.

Cette relation exprime la double égalité (cf. page 39) :

$$MG_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MG_i \text{ et } MD_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} MD_i + \delta_{j_0}, \text{ pour } r+q+1 \leq j_0 \leq n.$$

S'agissant des matrices A et B, cette double égalité équivaut à :

$$L(A)_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A)_i \text{ et } L(B)_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B)_i + \delta_{j_0}, \text{ pour } r+q+1 \leq j_0 \leq n.$$

Or, cette double égalité est aussi valable pour les lignes correspondantes des matrices A' et B' . On peut donc écrire :

$$L(A')_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A')_i \text{ et } L(B')_{j_0} = \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B')_i + \delta_{j_0}, \text{ pour } r+q+1 \leq j_0 \leq n.$$

Par composition de transvections appropriées (cf. Annexe 1), appliquées simultanément aux matrices A' et B' , il est donc possible de remplacer :

- la ligne $L(A')_{j_0}$ ($r+q+1 \leq j_0 \leq n$) de la matrice A' par la combinaison de lignes : $L(A')_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(A')_i$, opération qui engendre une ligne j_0 nulle dans la matrice résultante.
- la ligne $L(B')_{j_0}$ ($r+q+1 \leq j_0 \leq n$) de la matrice B' par la combinaison de lignes : $L(B')_{j_0} - \sum_{i=1}^r \lambda_{j_0 i} L(B')_i$, opération qui engendre une ligne j_0 contenant un seul élément égal à δ_{j_0} ($\in K^*$) dans la matrice (unicolonne) résultante.

En itérant cette opération à l'ensemble des lignes $L(A')_{j_0}$ et $L(B')_{j_0}$, $r+q+1 \leq j_0 \leq n$, on aboutit à des matrices A'' et B'' , transformées de A' et de B' , dont les lignes j_0 , $r+q+1 \leq j_0 \leq n$, sont nulles pour A'' et égales à δ_{j_0} ($\in K^*$) pour B'' .

Les matrices obtenues A'' et B'' ont donc la structure suivante :

$$A'' = \begin{bmatrix} A_{r r} & A_{r p-r} \\ O_{q r} & O_{q p-r} \\ O_{n-r-q r} & O_{n-r-q p-r} \end{bmatrix}; B'' = \begin{bmatrix} B_{r 1} \\ O_{q 1} \\ B''_{n-r-q 1} \end{bmatrix}, \text{ avec : } B''_{n-r-q 1} = \begin{bmatrix} \delta_{r+q+1} \\ \dots \\ \delta_{j_0} \\ \dots \\ \delta_n \end{bmatrix}.$$

Les matrices de transvection intervenant dans l'ensemble des transformations ci-dessus sont inversibles (elles appartiennent toutes à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$). En conséquence, la matrice P_2 correspondant au produit de l'ensemble de ces matrices de transvection appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a donc mis en évidence une matrice P_2 de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que simultanément :

$$A'' = P_2 \cdot A' \quad \text{et} \quad B'' = P_2 \cdot B'.$$

Le système (S'') associé aux matrices A'' et B'' est donc le transformé du système (S') par la transformation $T[P_2]$ associée à P_2 (cf. Définition 12).

$$\text{Donc : } (S') \xleftarrow{\text{EQU}} (S'').$$

Il résulte de ce qui précède que la structure détaillée de (S'') est la suivante :

$$(S'') \left\{ \begin{array}{l} (S_r) \left\{ \begin{array}{l} E_i : MG_i = MD_i \quad (1 \leq i \leq r) \\ (SC''_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} E_j : 0x = 0 \quad (r+1 \leq j \leq r+q) \\ (SI''_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} E_j : 0x = \delta_{j_0} \quad (r+q+1 \leq j_0 \leq n) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

avec : $\delta_{j_0} \in \mathbb{K}^*$, $r+q+1 \leq j_0 \leq n$.

Traitement du sous-système (SI''_{n-r})

Appliquons simultanément aux deux matrices A'' et B'' les transvections appropriées (cf. Annexe 1) permettant de remplacer chacune des équations E_{j_0} ($r+q+1 \leq j_0 \leq n-1$)

de (SI''_{n-r}) par la combinaison linéaire : $E_{j_0} - \frac{\delta_{j_0}}{\delta_n} E_n$, puis une dilatation de coefficient $\frac{1}{\delta_n}$

(cf. Annexe 1) affectant l'élément a''_{nn} (qui vaut : $0 \in \mathbb{K}$) de la matrice A'' et l'élément b''_{n1} (qui vaut : $\delta_n \in \mathbb{K}^*$) de la matrice B'' .

Ces opérations engendrent l'apparition d'une équation nulle E_0 dans chaque ligne d'équation j_0 ($r+q+1 \leq j_0 \leq n-1$) du système résultant et celle d'une équation impossible E_{imp}^* dans la ligne d'équation n .

Les matrices A''' et B''' obtenues à l'issue de l'ensemble de ces transformations ont donc la structure suivante :

$$A''' = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix}; \quad B''' = \begin{bmatrix} B_{r1} \\ U_{n-r1} \end{bmatrix}, \quad \text{avec : } U_{n-r1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n-r}.$$

On constate que : $A''' = \hat{A}$ et $B''' = \hat{B}$.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

Les matrices de transvection et de dilatation intervenant dans l'ensemble des transformations ci-dessus sont inversibles (elles appartiennent toutes à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$). En conséquence, la matrice P_3 correspondant au produit de l'ensemble de ces matrices de transvection et de dilatation appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

On a donc mis en évidence une matrice P_3 de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que simultanément :

$$\hat{A} = P_3 \cdot A'' \quad \text{et} \quad \hat{B} = P_3 \cdot B''.$$

Le SRI (\hat{S}) associé aux matrices \hat{A} et \hat{B} est donc le transformé du système (S'') par la transformation $T[P_3]$ associée à P_3 (cf. Définition 12).

$$\text{Donc : } (S'') \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S}).$$

Nous avons finalement démontré successivement que :

$$(S) \xleftarrow{\text{EQU}} (S') ; (S') \xleftarrow{\text{EQU}} (S'') ; (S'') \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S}).$$

Par transitivité de la relation d'équivalence $\xleftarrow{\text{EQU}}$, il en résulte que : $(S) \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S})$.

Le Point 3 du Théorème 46 est ainsi démontré.

Nous aurons besoin plus loin du Lemme 47 qui suit (et qui est d'ailleurs évident) :

Lemme 47. Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $r+1$. Considérons deux bases de \mathcal{E} de la forme $\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_r, w\}$ et $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_r, w\}$. Alors :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_r) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

Preuve :

Soit $\mathcal{U} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_r)$ le sev de \mathcal{E} engendré par le système libre $U = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_r\}$ et $\mathcal{V} = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)$ le sev de \mathcal{E} engendré par le système libre $V = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_r\}$.

Comme tout vecteur de \mathcal{E} , chacun des vecteurs v_i ($1 \leq i \leq r$) se décompose dans la base

$$\{u_1, \dots, u_i, \dots, u_r, w\} \text{ sous la forme : } v_i = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} u_j + \lambda_{iw} w.$$

Mais comme le système (v_i, w) est libre, nécessairement : $\lambda_{iw} = 0$ ($0 \in \mathbb{K}$).

Il en résulte que : $v_i = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} u_j$ et donc que : v_i ($1 \leq i \leq r$) $\in \mathcal{U}$.

On en déduit que tout vecteur de \mathcal{V} appartient à \mathcal{U} .

On démontre de la même façon que tout vecteur de \mathcal{U} appartient à \mathcal{V} .

En conclusion : $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Le Théorème 48 ci-dessous constitue pour les systèmes d'équations incompatibles l'équivalent du Théorème 41 pour les systèmes d'équations compatibles.

Théorème 48. Soient deux systèmes linéaires (S_a) et (S_b) de n équations à p inconnues, supposés incompatibles, de rang respectif r_a ($0 < r_a < n$ et $0 < r_a \leq p$) et r_b ($0 < r_b < n$ et $0 < r_b \leq p$).

On pose l'hypothèse (H_1) suivante :

$$(H_1) : \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b).$$

Alors :

$$(1) \quad r_a = r_b.$$

En posant, compte tenu de (1) : $r = r_a = r_b$, les systèmes (S_a) et (S_b) s'écrivent :

$$(S_a) \begin{cases} (S_{a_r}) \\ (S_{a_{n-r}}) \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_b) \begin{cases} (S_{b_r}) \\ (S_{b_{n-r}}) \end{cases}.$$

Désignons par :

(\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) les systèmes réduits incompatibles (SRI) associés à (S_a) et (S_b) .

S_a l'ensemble des solutions de (S_a) ,

S_{a_r} l'ensemble des solutions de (S_{a_r}) ,

\hat{S}_a l'ensemble des solutions de (\hat{S}_a) ,

S_b l'ensemble des solutions de (S_b) ,

S_{b_r} l'ensemble des solutions de (S_{b_r}) ,

\hat{S}_b l'ensemble des solutions de (\hat{S}_b) .

Alors :

$$(2) \quad S_a = \hat{S}_a = \emptyset ; S_b = \hat{S}_b = \emptyset ; S_{a_r} = S_{b_r} \neq \emptyset.$$

$$(3-a) \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) ; \text{EQU}(S_{a_r}) = \text{EQU}(S_{b_r}).$$

$$(3-b) \quad \dim(\text{EQU}(S_a)) = \dim(\text{EQU}(S_b)) = \dim(\text{EQU}(\hat{S}_a)) = \dim(\text{EQU}(\hat{S}_b)) = r+1. \\ \dim(\text{EQU}(S_{a_r})) = \dim(\text{EQU}(S_{b_r})) = r.$$

On pose maintenant l'hypothèse (H_2) suivante :

$$(H_2) : (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Alors :

$$(4) \quad (\hat{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

Preuve :

Point 1 :

D'après le Théorème 46 (Point 2-c) :

$$\dim(\text{EQU}(S_a)) = r_a + 1 \quad \text{et} \quad \dim(\text{EQU}(S_b)) = r_b + 1.$$

D'après (H_1) : $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, et donc : $r_a = r_b$.

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

On peut donc poser dorénavant : $r = r_a = r_b$.

Point 2 :

Par définition même des systèmes incompatibles : $S_a = \hat{S}_a = \emptyset$ et $S_b = \hat{S}_b = \emptyset$.

D'autre part (cf. Définition 35) :

$\text{EQU}(S_{a_r}) = \text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r)$ et $\text{EQU}(S_{b_r}) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r)$.

D'après le Théorème 46 (Point 2-a) :

$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}((S_{a_r}) \cup E_{\text{imp}}^*) = \text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E_{\text{imp}}^*)$.

$\text{EQU}(S_b) = \text{EQU}((S_{b_r}) \cup E_{\text{imp}}^*) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E_{\text{imp}}^*)$.

D'après (H_1) : $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$.

Donc : $\text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E_{\text{imp}}^*) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E_{\text{imp}}^*)$.

Le Lemme 47 permet alors de conclure que : $\text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r)$.

Donc : $\text{EQU}(S_{a_r}) = \text{EQU}(S_{b_r})$.

D'après le Théorème 31, comme les systèmes (S_{a_r}) et (S_{b_r}) sont compatibles ($S_{a_r} \neq \emptyset$ et $S_{b_r} \neq \emptyset$) : $\text{EQU}(S_{a_r}) = \text{EQU}(S_{b_r}) \Rightarrow S_{a_r} = S_{b_r}$.

Point 3-a et 3-b :

D'après le Théorème 46 (Point 2-a) : $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(\hat{S}_a)$ et $\text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(\hat{S}_b)$.

Donc : $(H_1) \Rightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(\hat{S}_b)$.

D'autre part, l'égalité $\text{EQU}(S_{a_r}) = \text{EQU}(S_{b_r})$ a déjà été établie au Point 2 ci-dessus.

Compte tenu du Théorème 46 (Point 2-c), le Point 3-b découle de ce qui précède.

Point 4 :

D'après le Théorème 46 (Point 3) : $(S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_a)$ et $(S_b) \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b)$.

D'après (H_2) : $(S_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

Par transitivité de la relation d'équivalence $\xleftarrow{\text{EQU}}$: $(\hat{S}_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b)$.

Le Théorème 48 est donc démontré.

Remarque :

Nous savons, d'après le Théorème 20, que $(H_2) \Rightarrow (H_1)$ pour les systèmes linéaires compatibles comme pour les systèmes linéaires incompatibles. Mais à ce stade de l'étude, et en ce qui concerne les systèmes linéaires incompatibles, nous ne savons rien de l'implication inverse. Nous ne savons pas si $(H_1) \Rightarrow (H_2)$ ou si $(H_1) \not\Rightarrow (H_2)$.

En tout état de cause, l'hypothèse (H_1) est suffisante pour démontrer les 3 premiers Points du Théorème 48, mais elle ne permet pas d'en démontrer le Point 4. C'est la raison pour laquelle l'hypothèse (H_2) (plus forte que (H_1)) a été introduite. En revanche, si l'on pose d'emblée l'hypothèse (H_2) (en lieu et place de (H_1)), alors les 4 Points du Théorème 48 sont démontrables.

Le Théorème 49 ci-dessous constitue pour les systèmes d'équations incompatibles l'équivalent du Théorème 42 pour les systèmes d'équations compatibles.

Théorème 49. Soient (\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) deux systèmes réduits incompatibles de n équations à p inconnues, de rang respectif r_a ($0 < r_a < n$ et $0 < r_a \leq p$) et r_b ($0 < r_b < n$ et $0 < r_b \leq p$).

On pose l'une ou l'autre des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) suivantes :

$$(H_1) \text{ EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) \text{ ou } (H_2) (\hat{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

Alors :

$$(1) \quad r_a = r_b.$$

En posant, compte tenu de (1) : $r = r_a = r_b$, les systèmes (\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) s'écrivent sous les deux formes (matricielle et détaillée) suivantes :

$$\begin{aligned} (\hat{S}_a) : \hat{A}_a \cdot X = \hat{B}_a \quad \text{et} \quad (\hat{S}_a) & \left\{ \begin{array}{l} (\hat{S}_{a \ r}) \\ (\hat{S}_{a \ n-r}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (\hat{S}C_{a \ n-r}) \\ (\hat{S}I_{a \ n-r}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} E_0 \\ \dots \\ E_0 \\ E^*_{\text{imp}} \end{array} \right. \\ (\hat{S}_b) : \hat{A}_b \cdot X = \hat{B}_b \quad \text{et} \quad (\hat{S}_b) & \left\{ \begin{array}{l} (\hat{S}_{b \ r}) \\ (\hat{S}_{b \ n-r}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (\hat{S}C_{b \ n-r}) \\ (\hat{S}I_{b \ n-r}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} E_0 \\ \dots \\ E_0 \\ E^*_{\text{imp}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Alors :

(2) Il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\hat{A}_b = P \cdot \hat{A}_a$ et $\hat{B}_b = P \cdot \hat{B}_a$, avec :

$$P = \begin{bmatrix} P_{r \ r} & O_{r \ n-r} \\ O_{n-r \ r} & I_{n-r \ n-r} \end{bmatrix} \text{ et } P_{r \ r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K}).$$

Remarque :

Comme $r < n$, les matrices $O_{r \ n-r}$, $O_{n-r \ r}$ et $I_{n-r \ n-r}$ qui apparaissent ci-après, existent bien.

Preuve :

On notera tout d'abord que : $(H_2) \Rightarrow (H_1)$ (cf. Théorème 20).

Point 1 :

D'après le Théorème 46 (Point 2-c) :

$$\dim(\text{EQU}(\hat{S}_a)) = r_a + 1 \text{ et } \dim(\text{EQU}(\hat{S}_b)) = r_b + 1.$$

Comme $\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) : r_a = r_b$.

On peut donc poser dorénavant : $r = r_a = r_b$.

Point 2 :

$$(\hat{S}_a) : \hat{A}_a \cdot X = \hat{B}_a.$$

Les matrices associées \hat{A}_a et \hat{B}_a sont de la forme (cf. Remarque 3 page 40) :

$$\hat{A}_a = \begin{bmatrix} A_{a \ r \ r} & A_{a \ r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix} \text{ où : } A_{a \ r \ r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{B}) ; \hat{B}_a = \begin{bmatrix} B_{a \ r \ 1} \\ U_{n-r \ 1} \end{bmatrix}.$$

$$(\hat{S}_b) : \hat{A}_b \cdot X = \hat{B}_b.$$

Les matrices associées A_b et B_b sont de la forme (cf. Remarque 3 page 40) :

$$\hat{A}_b = \begin{bmatrix} A_{b \ r \ r} & A_{b \ r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix} \text{ où : } A_{b \ r \ r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{B}) ; \hat{B}_b = \begin{bmatrix} B_{b \ r \ 1} \\ U_{n-r \ 1} \end{bmatrix}.$$

Rappelons que $U_{n-r \ 1}$ est la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n-r \ 1}(\mathbb{K})$ de la forme : $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n-r}$.

Le système principal $(\hat{S}_{a \ r})$ de (\hat{S}_a) et le système principal $(\hat{S}_{b \ r})$ de (\hat{S}_b) s'écrivent alors respectivement sous la forme matricielle suivante :

$$A_{a \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} + A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = B_{a \ r \ 1} \quad (1)$$

$$A_{b \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} + A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = B_{b \ r \ 1} \quad (2)$$

Dans les systèmes (1) et (2), les inconnues non principales sont paramétrables.

Posons dans le système (1) :

$$x_{r+1} = X_{r+1}, \dots, x_p = X_p, \quad X_{r+1}, \dots, X_p \text{ étant des paramètres à valeur arbitraire dans } \mathbb{K},$$

et dans le système (2) :

$$x_{r+1} = X'_{r+1}, \dots, x_p = X'_p, \quad X'_{r+1}, \dots, X'_p \text{ étant des paramètres à valeur arbitraire dans } \mathbb{K}.$$

Les systèmes (1) et (2) se réécrivent alors respectivement sous la forme (3) et (4) :

$$A_{a \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = B_{a \ r \ 1} - A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A_{b \ r \ r} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \end{bmatrix} = B_{b \ r \ 1} - A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\hat{S}_{a \ r}$ et $\hat{S}_{b \ r}$ désignent les solutions de $(\hat{S}_{a \ r})$ et de $(\hat{S}_{b \ r})$. Par définition même d'un système principal : $\hat{S}_{a \ r} \neq \emptyset$ et $\hat{S}_{b \ r} \neq \emptyset$. Nous allons démontrer que : $\hat{S}_{a \ r} = \hat{S}_{b \ r}$.

D'après la Définition 35 :

$$\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{Vect}(E_{a \ i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) \text{ et } \text{EQU}(\hat{S}_b) = \text{Vect}(E_{b \ i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}).$$

$$(H_1) \text{ ou } (H_2) \Rightarrow \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b).$$

$$\text{Donc : } \text{Vect}(E_{a \ i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) = \text{Vect}(E_{b \ i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}).$$

Le Lemme 47 permet alors de conclure que : $\text{Vect}(E_{a \ i}, 1 \leq i \leq r) = \text{Vect}(E_{b \ i}, 1 \leq i \leq r)$.

$$\text{Donc : } \text{EQU}(\hat{S}_{a \ r}) = \text{EQU}(\hat{S}_{b \ r}).$$

$$\text{Enfin, d'après le Théorème 31 : } \text{EQU}(\hat{S}_{a \ r}) = \text{EQU}(\hat{S}_{b \ r}) \Rightarrow \hat{S}_{a \ r} = \hat{S}_{b \ r}.$$

(3) et (4) sont donc des systèmes de Cramer de r équations à r inconnues, ayant le même ensemble de solutions (puisque : $\hat{S}_{a \ r} = \hat{S}_{b \ r}$).

$$\text{D'après le Théorème 30 : } \hat{S}_{a \ r} = \hat{S}_{b \ r} (\neq \emptyset) \Rightarrow (\hat{S}_{a \ r}) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_{b \ r}).$$

Par suite (cf. Définition 12) : $\exists P_{r \ r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$ tel que, à la fois :

$$A_{b \ r \ r} = P_{r \ r} \cdot A_{a \ r \ r} \quad (5)$$

$$B_{b \ r \ 1} - A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = P_{r \ r} \cdot \left[B_{a \ r \ 1} - A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} \right] \quad (6)$$

Or la relation (6) est vérifiée $\forall (X_{r+1}, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$ et $\forall (X'_{r+1}, \dots, X'_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$.

$$\text{En posant en particulier } \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{p-r}, \text{ il vient :}$$

$$B_{b \ r \ 1} = P_{r \ r} \cdot B_{a \ r \ 1} \quad (7)$$

Compte tenu de (7), il découle de (6) que :

$$A_{b \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} - P_{r \ r} A_{a \ r \ p-r} \begin{bmatrix} X'_{r+1} \\ \dots \\ X'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{p-r} \quad (8)$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

La relation (8) est vérifiée $\forall (X_{r+1}, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$ et $\forall (X'_{r+1}, \dots, X'_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$.

(8) est donc vérifiée si l'on impose en particulier les égalités : $X_{r+1} = X'_{r+1}, \dots, X_p = X'_p$.

(8) s'écrit alors :

$$[A_{b \ r \ p-r} - P_{r \ r} \cdot A_{a \ r \ p-r}] \begin{bmatrix} X_{r+1} \\ \dots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{p-r}, \quad \forall (X_{r+1}, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^{p-r} \quad (9)$$

Chacune des $(p-r)$ lignes de (9) est composée d'un polynôme aux $(p-r)$ indéterminées X_{r+1}, \dots, X_p , qui s'annule pour toutes les valeurs de ces indéterminées. Ces $(p-r)$ polynômes sont donc identiquement nuls.

$$\text{Par suite : } A_{b \ r \ p-r} = P_{r \ r} \cdot A_{a \ r \ p-r}. \quad (10)$$

Soit alors la matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ de la forme : $\begin{bmatrix} P_{r \ r} & O_{r \ n-r} \\ O_{n-r \ r} & I_{n-r \ n-r} \end{bmatrix}$.

On vérifie immédiatement, en tenant compte des relations (5), (7) et (10), que :

$$\begin{bmatrix} A_{b \ r \ r} & A_{b \ r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{r \ r} & O_{r \ n-r} \\ O_{n-r \ r} & I_{n-r \ n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{a \ r \ r} & A_{a \ r \ p-r} \\ O_{n-r \ r} & O_{n-r \ p-r} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} B_{b \ r \ 1} \\ U_{n-r \ 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{r \ r} & O_{r \ n-r} \\ O_{n-r \ r} & I_{n-r \ n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{a \ r \ 1} \\ U_{n-r \ 1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc : } \hat{A}_b = P \cdot \hat{A}_a \text{ et } \hat{B}_b = P \cdot \hat{B}_a.$$

Le Théorème 49 est donc démontré.

Remarque :

La démonstration du Théorème 49 est calquée sur celle du Théorème 42. Cependant, deux différences importantes méritent d'être notées.

Dans le cas du Théorème 42, on a l'équivalence des hypothèses : $(H_1) \Leftrightarrow (H_2)$.

Dans le cas du Théorème 49, on a la seule implication : $(H_2) \Rightarrow (H_1)$. A ce stade de l'étude, nous ne savons pas si $(H_1) \Rightarrow (H_2)$ ou si $(H_1) \not\Rightarrow (H_2)$.

Dans le cas du Théorème 42, (H_1) ou (H_2) permet de déduire immédiatement l'égalité :

$$\tilde{S}_{a \ r} = \tilde{S}_{b \ r}.$$

Dans le cas du Théorème 49, il a fallu faire appel au Lemme 47 pour pouvoir conclure à l'égalité : $\hat{S}_{a \ r} = \hat{S}_{b \ r}$ (cf. démonstration ci-dessus).

8. « Passerelle » entre systèmes réduits compatibles et systèmes réduits incompatibles

Définition 50. Soient (\tilde{S}) et (\hat{S}) deux systèmes linéaires réduits de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible. Les systèmes (\tilde{S}) et (\hat{S}) seront dits compagnons s'ils ne diffèrent que par leur $n^{\text{ème}}$ équation : équation nulle E_0 pour (\tilde{S}) , équation impossible E_{imp}^* pour (\hat{S}) .

Les structures de (\tilde{S}) et (\hat{S}) sont alors respectivement les suivantes (cf. Définitions et Théorèmes 38 et 44) :

$$\begin{array}{l}
 (\tilde{S}) \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{S}_r) \\ (\tilde{S}_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (n-r) \text{ équations nulles.} \\
 \\
 (\hat{S}) \left\{ \begin{array}{l} (\hat{S}_r) \\ (\hat{S}_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} (\hat{S}C_{n-r}) \left\{ \begin{array}{l} E_0 \\ \dots \\ E_0 \end{array} \right\} \\ (\hat{S}I_{n-r}) \quad E_{\text{imp}}^* \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (n-r-1) \text{ équations nulles} \\ 1 \text{ équation impossible } 0x=1 \end{array}
 \end{array}$$

Remarques :

- 1) Deux SRC et SRI compagnons contiennent donc le même système principal (S_r) . Ils ont donc le même rang r .
- 2) Lorsque deux SRC et SRI, (\tilde{S}) et (\hat{S}) , sont compagnons, nous dirons que (\hat{S}) est le SRI compagnon de (\tilde{S}) et que (\tilde{S}) est le SRC compagnon de (\hat{S}) .

Théorème 51. Soient (\tilde{S}) et (\hat{S}) deux systèmes linéaires réduits compagnons de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible. (\tilde{S}) et (\hat{S}) s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{array}{l}
 (\tilde{S}) : \tilde{A} \cdot X = \tilde{B} \\
 (\hat{S}) : \hat{A} \cdot X = \hat{B}.
 \end{array}$$

Alors :

$$\hat{A} = \tilde{A} \quad \text{et} \quad \hat{B} = \tilde{B} + U_{n_1}, \quad \text{avec} : U_{n_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_n \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}).$$

Preuve :

Se reporter à la Remarque 3 page 27 (concernant les SRC) et à la Remarque 3 page 40 (concernant les SRI).

Comme les systèmes (\tilde{S}) et (\hat{S}) contiennent le même système principal (S_r) , les matrices \tilde{A} et \hat{A} contiennent les mêmes sous-matrices $A_{r,r}$ et $A_{r,p-r}$, tandis que les matrices \tilde{B} et \hat{B} contiennent la même sous-matrice $B_{r,1}$. On a donc :

$$\tilde{A} = \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{r,r} & A_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{r,1} \\ O_{n-r,1} \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{r,1} \\ U_{n-r,1} \end{bmatrix}, \text{ avec : } U_{n-r,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n-r}.$$

Par suite :

$$\hat{B} - \tilde{B} = \begin{bmatrix} O_{r,1} \\ U_{n-r,1} \end{bmatrix} \text{ où } O_{r,1} \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K}). \text{ Donc :}$$

$$\hat{B} - \tilde{B} = U_{n,1}, \text{ avec : } U_{n,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Cette dernière égalité traduit simplement le fait que les systèmes (\tilde{S}) et (\hat{S}) ne diffèrent que par leur dernière ligne d'équation et, plus précisément, par le membre de droite de leur dernière ligne d'équation, qui vaut 0 pour (\tilde{S}) et 1 pour (\hat{S}) .

Théorème 52. *Tout système linéaire réduit compatible (\tilde{S}) possède un unique système linéaire réduit incompatible compagnon (\hat{S}) . Tout système linéaire réduit incompatible (\hat{S}) possède un unique système linéaire réduit compatible compagnon (\tilde{S}) .*

Preuve : immédiate.

Rappels :

Soient A et B deux sev de \mathcal{E}_p . $A + B$ désigne la somme de A et de B (définition classique).

Si A et B sont en somme directe (définition classique), $A \oplus B$ désigne l'ensemble $A + B$.

Nous utiliserons ci-après le résultat classique : $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A + B)$.

Théorème 53. Soient (\tilde{S}) et (\hat{S}) deux systèmes linéaires réduits de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible. Si les systèmes (\tilde{S}) et (\hat{S}) sont compagnons : $\text{EQU}(\hat{S}) = \text{EQU}(\tilde{S}) \oplus (\lambda E^*_{\text{imp}})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve :

D'après le Théorème 40 (Point 2-b) et avec les notations utilisées dans la démonstration de ce théorème : $\{E_i, 1 \leq i \leq r\}$ est une base de $\text{EQU}(\tilde{S})$. Donc :

$$\text{EQU}(\tilde{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \text{ - cf. démonstration du Point 2-a du Théorème 40.}$$

D'après le Théorème 46 (Point 2-b) et avec les notations utilisées dans la démonstration de ce théorème : $\{E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}\}$ est une base de $\text{EQU}(\hat{S})$. Donc :

$$\text{EQU}(\hat{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) \text{ - cf. démonstration du Point 2-a du Théorème 46.}$$

Donc :

$$\text{EQU}(\hat{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) + \text{Vect}(E^*_{\text{imp}}).$$

Par ailleurs : $\text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \cap \text{Vect}(E^*_{\text{imp}}) = E_0$ (vecteur nul de \mathcal{E}_p). Donc :

$$\text{EQU}(\hat{S}) = \text{Vect}(E_i, 1 \leq i \leq r) \oplus \text{Vect}(E^*_{\text{imp}}).$$

Comme $\text{Vect}(E^*_{\text{imp}})$ n'est autre que la droite vectorielle λE^*_{imp} , $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\text{EQU}(\hat{S}) = \text{EQU}(\tilde{S}) \oplus (\lambda E^*_{\text{imp}}), \lambda \in \mathbb{K}.$$

Théorème 54. Soient (\tilde{S}_a) et (\hat{S}_a) deux systèmes linéaires réduits compagnons, de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible.

Soient (\tilde{S}_b) et (\hat{S}_b) deux autres systèmes linéaires réduits compagnons de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible. Alors :

$$\text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \Leftrightarrow \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b).$$

Preuve :

Partie directe.

D'après le Théorème 53, avec $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_a) \oplus (\lambda E^*_{\text{imp}}) \text{ et } \text{EQU}(\hat{S}_b) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \oplus (\lambda E^*_{\text{imp}}).$$

$$\text{Donc : } \text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \Rightarrow \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b).$$

Réciproque.

$$\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) \text{ et } \text{EQU}(\hat{S}_b) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}).$$

$$\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) \Rightarrow \text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r, \cup E^*_{\text{imp}}).$$

Le Lemme 47 permet alors de conclure que : $\text{Vect}(E_{a_i}, 1 \leq i \leq r) = \text{Vect}(E_{b_i}, 1 \leq i \leq r)$.

$$\text{Et donc : } \text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b).$$

Théorème 55. Soient (\tilde{S}_a) et (\hat{S}_a) deux systèmes linéaires réduits compagnons, de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible.

Soient (\tilde{S}_b) et (\hat{S}_b) deux autres systèmes linéaires réduits compagnons, de n équations à p inconnues, respectivement compatible et incompatible. Alors :

$$1) (\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b) \Leftrightarrow (\hat{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

$$2) \text{ Il existe une matrice } P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ de la forme : } P = \begin{bmatrix} P_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & I_{n-r,n-r} \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$P_{r,r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K}), \text{ telle que : } (\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{TIP1}} (\tilde{S}_b) \text{ et } (\hat{S}_a) \xrightarrow{\text{TIP1}} (\hat{S}_b) \text{ (cf. Définition 12).}$$

Preuve :

$$\text{Posons : } U_{n1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_n \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}).$$

Ecrivons (\tilde{S}_a) et (\hat{S}_a) sous la forme matricielle :

$$(\tilde{S}_a) : \tilde{A}_a \cdot X = \tilde{B}_a \text{ et } (\hat{S}_a) : \hat{A}_a \cdot X = \hat{B}_a.$$

Comme (\tilde{S}_a) et (\hat{S}_a) sont compagnons, d'après le Théorème 51 :

$$\hat{A}_a = \tilde{A}_a \text{ et } \hat{B}_a = \tilde{B}_a + U_{n1} \quad (1)$$

Ecrivons de même (\tilde{S}_b) et (\hat{S}_b) sous la forme matricielle :

$$(\tilde{S}_b) : \tilde{A}_b \cdot X = \tilde{B}_b \text{ et } (\hat{S}_b) : \hat{A}_b \cdot X = \hat{B}_b.$$

Comme (\tilde{S}_b) et (\hat{S}_b) sont compagnons, d'après le Théorème 51 :

$$\hat{A}_b = \tilde{A}_b \text{ et } \hat{B}_b = \tilde{B}_b + U_{n1} \quad (2)$$

Partie directe : Par hypothèse : $(\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b)$.

D'après le Théorème 42 (Point 2) :

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ de la forme } \begin{bmatrix} P_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & I_{n-r,n-r} \end{bmatrix}, \text{ avec : } P_{r,r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K}), \text{ tel que :}$$

$$\tilde{A}_b = P \cdot \tilde{A}_a \text{ et } \tilde{B}_b = P \cdot \tilde{B}_a.$$

Compte tenu de (1) et (2) ci-dessus :

$$\hat{A}_b = P \cdot \hat{A}_a \text{ et } [\hat{B}_b - U_{n1}] = P \cdot [\hat{B}_a - U_{n1}].$$

$$\text{Par suite : } \hat{A}_b = P \cdot \hat{A}_a \text{ et } \hat{B}_b = P \cdot \hat{B}_a.$$

$$\text{Donc : } (\hat{S}_a) \xrightarrow{\text{TIP1}} (\hat{S}_b) \text{ (cf. Définition 12).}$$

$$\text{Et donc : } (\hat{S}_a) \xrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

Réciproque : Par hypothèse : $(\hat{S}_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b)$.

D'après le Théorème 49 (Point 2) :

$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ de la forme $\begin{bmatrix} P_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & I_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$, avec : $P_{r,r} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$, tel que :

$$\hat{A}_b = P \cdot \hat{A}_a \text{ et } \hat{B}_b = P \cdot \hat{B}_a.$$

Compte tenu de (1) et (2) ci-dessus :

$$\tilde{A}_b = P \cdot \tilde{A}_a \text{ et } [\tilde{B}_b + U_{n_1}] = P \cdot [\tilde{B}_a + U_{n_1}].$$

Par suite : $\tilde{A}_b = P \cdot \tilde{A}_a$ et $\tilde{B}_b = P \cdot \tilde{B}_a$.

Donc : $(\tilde{S}_a) \xrightarrow{\text{IP1}} (\tilde{S}_b)$ (cf. Définition 12).

Et donc : $(\tilde{S}_a) \xleftarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b)$.

9. Étude de l'implication n° 2bis pour les systèmes incompatibles

Nous allons dans un premier temps démontrer la validité de l'implication n° 2bis pour les systèmes réduits incompatibles (Théorème 56), puis, dans un deuxième temps, pour des systèmes incompatibles quelconques (Théorème 57).

Théorème 56. Soient (\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) deux systèmes linéaires réduits incompatibles de n équations à p inconnues. Alors :

$$\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) \Rightarrow (\hat{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

Preuve :

Soient (\tilde{S}_a) et (\tilde{S}_b) les deux systèmes réduits compatibles compagnons respectivement de (\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) .

D'après le Théorème 54 : $\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) \Rightarrow \text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b)$.

D'après le Théorème 33 : $\text{EQU}(\tilde{S}_a) = \text{EQU}(\tilde{S}_b) \Rightarrow (\tilde{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b)$.

D'après le Théorème 55 : $(\tilde{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\tilde{S}_b) \Rightarrow (\hat{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b)$.

Le Théorème 56 est donc démontré.

Théorème 57 - Réciproque du Théorème 20 pour les systèmes incompatibles. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues, dont l'un des deux est supposé incompatible. Alors :

$$\left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a) \text{ ou } E_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Preuve :

Comme $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, les deux systèmes (S_a) et (S_b) sont de même nature (cf. Théorème 27). Ils sont donc, en l'occurrence, incompatibles tous les deux.

Soient alors (\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) les deux systèmes réduits incompatibles associés à (S_a) et (S_b) .

D'après le Théorème 46 (Point 2-a) :

$$\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(\hat{S}_a) \text{ et } \text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(\hat{S}_b).$$

Donc : $\text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Rightarrow \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b)$.

D'après le Théorème 56 : $\text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) \Rightarrow (\hat{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b)$.

D'après le Théorème 46 (Point 3) :

$$(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_a) \text{ et } (S_b) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

Par transitivité de la relation d'équivalence $\xleftrightarrow{\text{EQU}}$: $(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

Le Théorème 57 est donc démontré.

Nous pouvons donc compléter définitivement le schéma suivant, concernant les systèmes incompatibles.

Systèmes incompatibles

$$1. \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad S_a = S_b (= \emptyset) \quad \text{Théorème 13.}$$

$$1\text{bis.} \quad S_a = S_b = \emptyset \quad \not\Rightarrow \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Implication fausse.}$$

$$2. \quad (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Théorème 20.}$$

$$2\text{bis.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ \text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a) \text{ ou } \text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \quad \text{Théorème 57.}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \\ \text{et} \\ \text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_a) \text{ ou } \text{E}_{\text{imp}} \in \text{EQU}(S_b) \end{array} \right\} \Rightarrow S_a = S_b (= \emptyset) \quad \text{Truisme sans intérêt.}$$

$$3\text{bis.} \quad S_a = S_b = \emptyset \quad \not\Rightarrow \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{Implication fausse.}$$

Remarque :

Nous avons été amenés à introduire dans l'énoncé du Théorème 48 (concernant les systèmes incompatibles) l'hypothèse $(H_1) : \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$, puis, dans un deuxième temps, l'hypothèse $(H_2) : (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b)$.

Le Théorème 57 établit l'équivalence entre ces deux hypothèses (équivalence qui était déjà valable pour les systèmes compatibles).

Nous pouvons donc reformuler le Théorème 48 (concernant les systèmes incompatibles) en calquant son énoncé sur celui du Théorème 41 (concernant les systèmes compatibles) pour aboutir finalement au Théorème 48bis qui suit.

Théorème 48bis. Soient deux systèmes linéaires (S_a) et (S_b) de n équations à p inconnues, supposés incompatibles, de rang respectif r_a ($0 < r_a < n$ et $0 < r_a \leq p$) et r_b ($0 < r_b < n$ et $0 < r_b \leq p$).

On pose l'une ou l'autre des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) suivantes :

$$(H_1) : \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \quad \text{ou} \quad (H_2) : (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

Alors :

$$(1) \quad r_a = r_b.$$

C.N.S. de compatibilité d'un système linéaire de n équations à p inconnues

En posant, compte tenu de (1) : $r = r_a = r_b$, les systèmes (S_a) et (S_b) s'écrivent :

$$(S_a) \begin{cases} (S_{a_r}) \\ (S_{a_{n-r}}) \end{cases} \text{ et } (S_b) \begin{cases} (S_{b_r}) \\ (S_{b_{n-r}}) \end{cases}.$$

Désignons par :

(\hat{S}_a) et (\hat{S}_b) les systèmes réduits incompatibles (SRI) associés à (S_a) et (S_b) .

S_a l'ensemble des solutions de (S_a) ,

S_{a_r} l'ensemble des solutions de (S_{a_r}) ,

\hat{S}_a l'ensemble des solutions de (\hat{S}_a) ,

S_b l'ensemble des solutions de (S_b) ,

S_{b_r} l'ensemble des solutions de (S_{b_r}) ,

\hat{S}_b l'ensemble des solutions de (\hat{S}_b) .

Alors :

$$(2) \quad S_a = \hat{S}_a = \emptyset ; S_b = \hat{S}_b = \emptyset ; S_{a_r} = S_{b_r} \neq \emptyset.$$

$$(3-a) \quad \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) = \text{EQU}(\hat{S}_a) = \text{EQU}(\hat{S}_b) ; \text{EQU}(S_{a_r}) = \text{EQU}(S_{b_r}).$$

$$(3-b) \quad \dim(\text{EQU}(S_a)) = \dim(\text{EQU}(S_b)) = \dim(\text{EQU}(\hat{S}_a)) = \dim(\text{EQU}(\hat{S}_b)) = r. \\ \dim(\text{EQU}(S_{a_r})) = \dim(\text{EQU}(S_{b_r})) = r + 1.$$

$$(4) \quad (\hat{S}_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (\hat{S}_b).$$

Preuve :

Démonstration identique à celle du Théorème 48, dans la mesure où le Théorème 20 et le Théorème 57 établissent désormais l'équivalence des deux hypothèses :

$$(H_1) : \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b) \Leftrightarrow (H_2) : (S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b).$$

10. Conclusion

Le Théorème 58 ci-dessous résume le résultat majeur de la présente Étude complémentaire.

Son énoncé fait la synthèse du Théorème 20 (qui concerne à la fois les systèmes linéaires compatibles et les systèmes linéaires incompatibles), du Théorème 33 (Réciproque du Théorème 20 concernant les systèmes linéaires compatibles) et du Théorème 57 (Réciproque du Théorème 20 concernant les systèmes linéaires incompatibles).

Théorème 58. Soient (S_a) et (S_b) deux systèmes linéaires de n équations à p inconnues. $\text{EQU}(S_a)$ et $\text{EQU}(S_b)$ désignent leur ensemble dérivé respectif. Alors :

$$(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Leftrightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b).$$

* * *

L'ensemble des résultats de l'Étude complémentaire peut être représenté sous la forme condensée suivante :

Systemes compatibles

$$(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Leftrightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$$

\Downarrow

$$S_a = S_b \neq \emptyset$$

Systemes incompatibles

$$(S_a) \xleftrightarrow{\text{EQU}} (S_b) \Leftrightarrow \text{EQU}(S_a) = \text{EQU}(S_b)$$

Truisme sans intérêt $\Downarrow \Uparrow$ Implication fausse

$$S_a = S_b = \emptyset$$

ANNEXE 1

La présente Annexe 1 est consacrée au rappel de deux transformations élémentaires classiques opérant sur les lignes d'équation d'un système linéaire (S) et garantissant l'obtention d'un système (S') équivalent à (S) au sens de la Définition 12 de l'Étude initiale.

Nous écrirons (S) et (S') sous leur forme matricielle (cf. Section 1.1 de l'Étude initiale) :

$$(S) \quad A \cdot X = B ; \quad (S') \quad A' \cdot X = B'.$$

Les deux transformations élémentaires qui nous intéressent ici, sont :

- (1) le remplacement d'une ligne d'équation L_i de (S) par la combinaison de lignes d'équation $L_i + \lambda L_k$ (avec : $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, k \neq i$, et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Plus précisément, si l'on écrit (cf. Section 1.1 de l'Étude initiale) $L_i : MG_i = MD_i$ et $L_k : MG_k = MD_k$, alors la nouvelle ligne d'équation L'_i de (S') s'écrit : $MG_i + \lambda MG_k = MD_i + \lambda MD_k$.

On écrit symboliquement : $L_i \rightarrow L'_i = L_i + \lambda L_k$.

- (2) le remplacement *in situ* d'une ligne d'équation L_i (avec : $1 \leq i \leq n$) de (S) par la ligne d'équation λL_i ($\lambda \in \mathbb{K}^*$).

Plus précisément, si l'on écrit $L_i : MG_i = MD_i$, alors la nouvelle ligne d'équation L'_i de (S') s'écrit : $\lambda MG_i = \lambda MD_i$.

On écrit symboliquement : $L_i \rightarrow L'_i = \lambda L_i$.

I_n est la matrice unité d'ordre n . O_n est la matrice unité d'ordre n .

Nous ferons référence ci-après aux matrices de la base canonique E_{ij} ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappelons que :

$$\forall i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}^4 : E_{ij} E_{kl} = O_n, \text{ si } j \neq k, \text{ et } E_{ij} E_{kl} = E_{il}, \text{ si } j = k.$$

Terminologie

Lorsqu'elles portent sur les lignes d'une matrice donnée (et non sur les lignes d'équation d'un système (S)), ces deux transformations sont classiquement dénommées « tranvection » s'agissant de (1) et « dilatation » s'agissant de (2).

Dans la présente Étude complémentaire, nous appliquerons toujours ces transformations simultanément aux matrices A et B associées à un système linéaire (S) (en impliquant toujours des lignes de même indice, pour A comme pour B). Ce faisant, l'opération effectuée portera bien sur les lignes d'équation de (S) correspondant aux indices concernés.

Nous continuerons, par commodité de langage, à parler de « tranvection » et de « dilatation » pour de telles opérations portant sur les lignes d'équation d'un système (S).

1. **Remplacement de la ligne L_i d'un système (S) par la combinaison de lignes $L_i + \lambda L_k$ (Transvection)**

Soit λ un scalaire de \mathbb{K} (1).

Introduisons la matrice $V_{ik}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ik}$.

$$V_{ik}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \dots & & & \\ & & 1 & \dots & \lambda \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } i$$

↑ colonne k

Les prémultiplications (multiplications à gauche) de A et B par $V_{ik}(\lambda)$ fournissent les matrices $A' = V_{ik}(\lambda) \cdot A$ et $B' = V_{ik}(\lambda) \cdot B$.

Si l'on considère alors le système (S') : $A' \cdot X = B'$, on vérifiera sans peine que (S') n'est autre que le système (S) dans lequel la ligne d'équation L_i a été remplacée par la ligne d'équation $L'_i = L_i + \lambda L_k$.

De plus, comme $V_{ik}(\lambda) \cdot V_{ik}(-\lambda) = (I_n + \lambda E_{ik})(I_n - \lambda E_{ik}) = I_n$, ou encore comme $\det(V_{ik}(\lambda)) = 1 : V_{ik} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Nous noterons $T[V_{ik}(\lambda)]$ la transvection associée à la matrice $V_{ik}(\lambda)$.

On a donc : (S') = $T[V_{ik}(\lambda)]$ (S) (cf. Définition 12 de l'Étude initiale).

Et donc : (S) $\xrightarrow{\text{EQU}}$ (S').

(1) Le cas $\lambda = 0$ ne présente pas d'intérêt, puisque dans ce cas : $V_{ik}(0) = I_n$ et donc : (S') = (S).

2. Remplacement de la ligne L_i d'un système (S) par le produit λL_i (Dilatation)

Soit λ un scalaire (non nul) de \mathbb{K}^* . λ représente le coefficient (ou encore le facteur) de la Dilatation (1).

Introduisons la matrice $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii}$.

$$D_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & \dots & 0 \\ & & \dots & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \lambda & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } i$$

\uparrow colonne i

Les prémultiplications (multiplications à gauche) de A et B par $D_i(\lambda)$ fournissent les matrices $A' = D_i(\lambda) \cdot A$ et $B' = D_i(\lambda) \cdot B$.

Si l'on considère alors le système (S') : $A' \cdot X = B'$, on vérifiera sans peine que (S') n'est autre que le système (S) dans lequel la ligne d'équation L_i a été remplacée par la ligne d'équation $L'_i = \lambda L_i$.

De plus, comme $D_i(\lambda) D_i(\lambda^{-1}) = (I_n + (\lambda - 1) E_{ii}) (I_n + (\lambda^{-1} - 1) E_{ii}) = I_n$, ou encore comme $\det(D_i(\lambda)) = \lambda \neq 0$: $D_i(\lambda) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Nous noterons $T[D_i(\lambda)]$ la dilatation associée à la matrice $D_i(\lambda)$.

On a donc : (S') = $T[D_i(\lambda)]$ (S) (cf. Définition 12 de l'Étude initiale).

Et donc : (S) $\xrightarrow{\text{EQU}}$ (S').

(1) Le cas $\lambda = 1$ ne présente pas d'intérêt, puisque dans ce cas : $D_i(1) = I_n$ et donc : (S') = (S).