



**HAL**  
open science

# Existence et unicité pour le frottement élastodynamique avec perturbation par “ inertie de surface ”

Jean-Claude Paumier, Yves Renard

## ► To cite this version:

Jean-Claude Paumier, Yves Renard. Existence et unicité pour le frottement élastodynamique avec perturbation par “ inertie de surface ”. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 2000, 331, pp.175-178. 10.1016/S0764-4442(00)01603-7. hal-00690551

**HAL Id: hal-00690551**

**<https://hal.science/hal-00690551>**

Submitted on 31 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Existence et unicité pour le frottement élastodynamique avec perturbation par « inertie de surface »

*Existence and uniqueness result for elastodynamic friction with a “surface inertia”*

Jean-Claude PAUMIER <sup>a</sup>, Yves RENARD <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire LMC, UMR-CNRS 5523, B.P. 53X, 38041 Grenoble cedex, France

Courriel : Jean-Claude.Paumier@imag.fr

<sup>b</sup> Laboratoire MIP, UMR-CNRS 5640, Insa de Toulouse, 31077 Toulouse cedex 4, France

Courriel : Yves.Renard@gmm.insa-tlse.fr

**Résumé** On présente un résultat d’existence et d’unicité pour un problème régularisé de contact unilatéral avec frottement en élastodynamique obtenu d’une part en régularisant de façon classique la loi de frottement et la condition de contact unilatéral et, d’autre part, en perturbant le système à l’aide d’un opérateur d’élasticité dynamique défini sur le bord de frottement. Un des intérêts de cette perturbation est de conserver le caractère local de la loi de frottement. C’est une étape dans l’analyse des multi-solutions qui apparaissent lorsque l’on utilise un coefficient de frottement décroissant en vitesse de glissement, et fait suite à des travaux dans le cas monodimensionnel.

**Abstract** We present an existence and uniqueness result for a regularized problem of unilateral contact and friction in elastodynamic obtained with a perturbation of a dynamic elasticity operator defined on the contact boundary. This perturbation keep the local characteristic of the friction law. This is a step in the analysis of the multi-solutions appearing in this kind of problems when a decreasing friction coefficient is used.

*Introduction.* – Le problème abordé est celui du contact unilatéral avec frottement d’un solide linéairement élastique, soumis à une condition de frottement de Coulomb avec un coefficient constant ou qui dépend de la vitesse de glissement. En effet, les données expérimentales (voir [5]) font fréquemment état d’un affaiblissement du coefficient de frottement lorsque la vitesse de glissement augmente. Ce type de dépendance amène des difficultés importantes lorsqu’on les applique à un modèle élastodynamique, notamment, une multiplicité des solutions avec apparition de chocs en vitesse de glissement. C’est ce qui a été remarqué dans le problème monodimensionnel d’une couche élastique infinie dans les études [2] et [3], où de plus un critère de choix de solution à été introduit. Ce critère, dit « de retard maximal » consiste à sélectionner la solution qui reste continue en vitesse de glissement le plus longtemps possible.

Le résultat que nous présentons ici, est une étape dans la généralisation au cas multidimensionnel des résultats obtenus dans [7] et publiés dans [6]. Dans ces travaux, il a été montré que l'ajout d'une mince couche verticalement rigide (une simple masse de surface dans le cas monodimensionnel) permet de recouvrer l'unicité de la solution du problème dynamique. De plus, il a été montré (dans un cadre restreint) que la solution du problème perturbé converge vers une solution du problème initial lorsque l'épaisseur de la couche rigide tend vers zéro. Cette solution est en accord avec le principe du retard maximal.

## 1. Le problème élastodynamique de frottement

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , avec  $n = 2$  ou  $3$  le domaine occupé par le corps élastique. Pour simplifier, on suppose l'ouvert cylindrique :  $\Omega = \omega \times ]0, D[$ , où  $\omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , de hauteur  $D > 0$ . On note  $\Gamma_D = \omega \times \{D\}$  le bord des déplacements imposés,  $\Gamma_N = \partial\omega \times ]0, D[$  le bord des forces imposées et  $\Gamma_C = \omega \times \{0\}$  le bord de frottement. Dans l'ouvert  $\Omega$  l'équation de l'élastodynamique s'écrit :  $\rho(x) \ddot{u}(t, x) - \operatorname{div} \sigma(t, x) = f(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in ]0, T[$ , où  $T > 0$  est fixé,  $\rho(x)$  la densité (dans la suite  $\rho(x) \equiv 1$ ),  $f(t, x)$  les effort extérieurs volumiques,  $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$  le déplacement,  $\ddot{u}(t, x)$  l'accélération,  $\sigma(t, x)$  le tenseur des contraintes relié au tenseur linéarisé des déformations  $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  par une loi de comportement linéarisée  $\sigma(t, x) = A(x)\varepsilon(u)(t, x)$ , avec  $A(x)$  tenseur d'ordre quatre ayant les propriétés habituelles de symétrie et de coercivité uniforme. La conditions sur  $\Gamma_D$  est  $u(t, x) = u_D(t, x)$  et sur  $\Gamma_N$  est  $\sigma(t, x)n(x) = g(t, x)$ , où  $n(x)$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ .

Sur  $\Gamma_C$ , le corps élastique est en contact unilatéral avec un support rigide plan, lui même en mouvement horizontal à la vitesse  $\tau(t)$ . On note, sur  $\Gamma_C$ ,  $u_N = u \cdot n$  le déplacement normal,  $\sigma_N = (\sigma n) \cdot n$  la contrainte normale,  $u_T = u - u_N n$  le déplacement tangentiel,  $v_G = \dot{u}_T - \tau(t)$  la vitesse de glissement et  $\sigma_T = \sigma n - \sigma_N n$  la contrainte tangentielle. Avec les fonctions multivoques  $J_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  et  $\operatorname{Dir}_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  définies par :

$$J_N(\xi) = \begin{cases} \{0\} & \text{pour } \xi < 0, \\ [0, +\infty[ & \text{pour } \xi = 0, \\ \emptyset & \text{pour } \xi > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Dir}_T(u) = \begin{cases} \{u_T / \|u_T\|\} & \text{si } u_T \neq 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^n; v_N = 0, \|v_T\| \leq 1\} & \text{si } u_T = 0, \end{cases}$$

les conditions de contact et de frottement s'écrivent pour  $t \in [0, T]$  et  $x \in \Gamma_C$  (voir [7]) :  $\sigma_N(t, x) \in -J_N(u_N(t, x))$ ,  $\sigma_T(t, x) \in \sigma_N(t, x) \mu(\|v_G(t, x)\|) \operatorname{Dir}_T(v_G(t, x))$ , où  $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est le coefficient de frottement avec  $\mu(v)$  borné, lipschitzien et  $\mu(0) = \mu_s > 0$ .

*Régularisation des conditions de contact unilatéral et de frottement.* – Pour mener à bien notre étude, nous utilisons une régularisation assez classique des conditions multivoques précédentes, à l'aide des fonctions  $J_N^\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $\operatorname{Dir}_T^\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$J_N^\eta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \xi < 0, \\ \xi/\eta & \text{pour } \xi > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Dir}_T^\eta(u) = \begin{cases} u_T / \|u_T\| & \text{si } \|u_T\| \geq \eta, \\ u_T / \eta & \text{si } \|u_T\| < \eta, \end{cases}$$

qui approchent les fonctions multivoques  $J_N$  et  $\operatorname{Dir}_T$  respectivement. Les lois régularisées s'écrivent :  $\sigma_N(t, x) = -J_N^\eta(u_N(t, x))$ ,  $\sigma_T(t, x) = \sigma_N(t, x) \mu(\|v_G(t, x)\|) \operatorname{Dir}_T^\eta(v_G(t, x))$ .

Toutefois, dans le cas  $n = 3$ , une difficulté technique est écartée en modifiant sur  $[1/\eta, +\infty[$  la fonction  $J_N^\eta$  décrite ci-dessus :  $J_N^\eta(\xi) = 1/\eta^2$  pour  $\xi \in [1/\eta, +\infty[$ .

## 2. Le problème élastodynamique avec perturbation

En supposant pour le moment que la force de frottement  $F(t, x)$  est donnée sur  $\Gamma_C$ , et en posant :  $a(u, v) = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v) dx$ ,  $b(t, v) = \int_\Omega f(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g(t) \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_C} F(t) \cdot v d\Gamma$ , où  $\sigma(u) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v)$ , le problème élastodynamique se pose en formulation faible dans les espaces  $W_0 = H^1(\Omega)^n$ ,  $V_0 = \{v \in W_0; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  et  $H_0 = L^2(\Omega)^n$ , de la manière suivante :

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \dot{u}(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

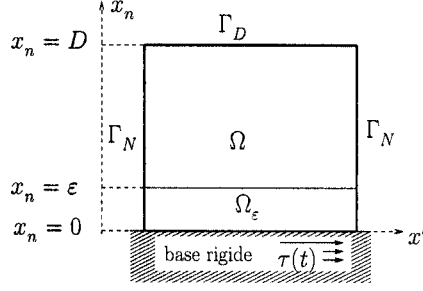


Figure 1. – Perturbation sur une couche  $\Omega_\varepsilon$ .

Figure 1. – Perturbation on a layer  $\Omega_\varepsilon$ .

$$t \in ]0, T]: u(t) \in W_0 \quad \text{et} \quad u(t, x) = u_D(t, x), \quad x \in \Gamma_D, \quad (2)$$

$$t \in ]0, T]: (\ddot{u}(t), v) + a(u(t), v) = b(t, v), \quad \forall v \in V_0, \quad (3)$$

où  $u_0 \in W_0$  et  $u_1 \in H_0$  sont les conditions initiales et  $(\cdot, \cdot)$  le produit de dualité entre  $V_0'$  et  $V_0$ . Rappelons que l'existence et l'unicité d'une solution appartenant à l'espace  $L^\infty(0, T; W_0) \cap W^{1, \infty}(0, T; H_0) \cap W^{2, \infty}(0, T; V_0')$  est démontrée dans Duvaut–Lions [1] sous des hypothèses suffisantes de régularité portant sur  $u_0, u_1, f, g, F$  et  $u_D$ . En particulier on a l'hypothèse suivante :

(H)  $F_i$  et  $\bar{F}_i \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$ .

La perturbation proposée consiste à distinguer une couche  $\Omega_\varepsilon = \omega \times ]0, \varepsilon[ \subset \Omega$  d'épaisseur  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petite et dont la face inférieure est le bord de frottement.

On note  $x = (x', x_n)$ . Fixons un entier  $m \in \mathbb{N}$  et, pour  $\ell = 0, 1$ , définissons l'espace  $P_{\ell, m}$  :

$$p \in P_{\ell, m} \iff p(x) = \sum_{k=0}^m p_k(x') (x_n)^k, \quad \text{avec } p_0, p_1, \dots, p_m \in H^\ell(\omega).$$

Alors les espaces  $W_\varepsilon = \{v \in W_0; v|_{\Omega_\varepsilon} \in (P_{1, m})^n\}$ ,  $V_\varepsilon = \{v \in V_0; v|_{\Omega_\varepsilon} \in (P_{1, m})^n\}$ ,  $H_\varepsilon = \{v \in H_0; v|_{\Omega_\varepsilon} \in (P_{0, m})^n\}$  sont des sous-espaces fermés respectifs de  $W_0, V_0$  et  $H_0$ . Le problème élastodynamique avec perturbation sera tout simplement le problème (1)–(3), mais posé dans ces espaces (avec des conditions initiales approchées  $u_0^\varepsilon$  et  $u_1^\varepsilon$ ). L'intérêt de cette approche est que l'on peut affaiblir l'hypothèse (H) en l'hypothèse (voir paragraphe suivant) :

(H-bis)  $F \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$ .

### 3. Décomposition des solutions du problème avec perturbation

Pour résoudre le problème de frottement régularisé on va décomposer  $u^\varepsilon$ , la solution du problème perturbé, en la somme d'une fonction de référence  $u^\varepsilon$  solution du problème perturbé pour  $F = 0$  et d'une fonction  $w^\varepsilon$  solution de ce problème pour  $f = 0, g = 0, u_D = 0$  et  $u_0^\varepsilon = u_1^\varepsilon = 0$ . On note ainsi  $w^\varepsilon = \mathcal{E}_\varepsilon(F)$  défini par :

$$w^\varepsilon(0, x) = 0, \quad \dot{w}^\varepsilon(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$t \in ]0, T]: w^\varepsilon(t) \in V_\varepsilon, \quad (5)$$

$$t \in ]0, T]: (\ddot{w}^\varepsilon(t), v) + a(w^\varepsilon(t), v) = \int_{\Gamma_C} F_i(t, x) v_i(x) d\sigma, \quad \forall v \in V_\varepsilon. \quad (6)$$

On peut énoncer le résultat suivant dont la démonstration suit celle du résultat de [1].

**THÉORÈME 1.** – *Supposons l'hypothèse (H-bis) satisfaite, alors le problème (4)–(6) admet une unique solution  $w^\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon)$  vérifiant  $\dot{w}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon)$  et  $\ddot{w}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon')$ .*

De plus, l'application  $\mathcal{E}_\varepsilon : F \mapsto w^\varepsilon = \mathcal{E}_\varepsilon(F)$  est linéaire continue de l'espace  $L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$  dans l'espace  $L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \cap W^{1, \infty}(0, T; H_\varepsilon)$  et on a l'estimation :

$$\|w^\varepsilon(t)\|_{1, \Omega}^2 + \|\dot{w}^\varepsilon(t)\|_{0, \Omega}^2 \leq C \frac{e^{\alpha t}}{\varepsilon} \int_0^t \|F(s)\|_{0, \Gamma_C}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

où  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  sont des constantes indépendante de  $\varepsilon$  et  $T$ .

#### 4. Résolution du problème de frottement régularisé et perturbé

On définit l'application  $\mathcal{F}_\varepsilon$  par  $(F_T, F_N) = \mathcal{F}_\varepsilon(w_T, w_N)$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} F_N(t, x) &= -J_N^\eta(w_N(t, x) + \mathbf{u}_N^\varepsilon(t, x)), \\ F_T(t, x) &= -J_N^\eta(w_N(t, x) + \mathbf{u}_N^\varepsilon(t, x)) \mu_T^\eta(\dot{w}_T(t, x) + \dot{\mathbf{u}}_T^\varepsilon(t, x) - \tau(t)), \end{aligned}$$

où, pour alléger un peu l'écriture, on a noté  $\mu_T^\eta(v) = \mu(\|v\|) \text{Dir}_T^\eta(v)$ .

En posant  $\mathcal{G}_\varepsilon = \mathcal{E}_\varepsilon \circ \mathcal{F}_\varepsilon$  et  $E_\varepsilon = \{w \in W^{1, \infty}(0, T; H_\varepsilon) \cap L^\infty(0, T; V_\varepsilon); w(0) = 0 \text{ dans } H_\varepsilon\}$ , le problème de frottement revient à la recherche d'un point fixe de  $\mathcal{G}_\varepsilon$  :

$$\text{trouver } w = (w_T, w_N) \in E_\varepsilon \quad \text{tel que } w = \mathcal{G}_\varepsilon(w). \quad (7)$$

Le principal résultat est le suivant :

**THÉORÈME 2.** – *Supposons que  $\mathbf{u}_N^\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Gamma_C))$  et  $\dot{\mathbf{u}}_T^\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$ , alors, pour chaque  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$ , le problème de frottement approché (7) admet une unique solution  $w^\varepsilon \in E_\varepsilon$ .*

La méthode de démonstration, développée dans [4], s'inspire de celle du théorème classique de Cauchy–Lipschitz. On montre que, pour un entier  $p$  assez grand, l'opérateur itéré par composition  $p$  fois :  $\mathcal{G}_\varepsilon^p = \mathcal{G}_\varepsilon \circ \dots \circ \mathcal{G}_\varepsilon$ , est contractant dans une certaine boule fermée  $B_\varepsilon \subset E_\varepsilon$ .

*Conclusion.* – Par rapport aux résultats de [7] dans le cas monodimensionnel, où une simple inertie de surface était considérée, nous proposons ici une généralisation au cas multidimensionnel qui fait intervenir en plus, quand  $m = 0$  (voir la définition de  $W_\varepsilon$ ), ce qu'on peut interpréter comme étant un opérateur d'élasticité de surface. Par analogie au cas monodimensionnel nous qualifions toujours cette perturbation d'« inertie de surface ». Au contraire d'autres approches, cette perturbation, conserve le caractère local de la loi de frottement, autorise l'apparition de discontinuités en vitesse et permet d'exprimer les lois de contact et de frottement sous forme classique. Dans le cas monodimensionnel, on peut se passer de la régularisation des lois de contact unilatéral et de frottement, bien que celles-ci ne jouent pas de rôle dans le caractère multiple des solutions. L'exercice semble plus difficile dans le cas multidimensionnel car on utilise le caractère lipschitzien des fonctions  $J_N^\eta$  et  $\text{Dir}_N^\eta$  dans l'argument de point fixe du théorème 2. On pourra voir plus de détails dans [4] et dans un article en cours de préparation.

#### Références bibliographiques

- [1] Duvaut G., Lions J.-L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- [2] Ionescu I.R., Paumier J.-C., On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamic, *Europ. J. Mech., A/Solids* 4 (1994) 555–568.
- [3] Leonov A.I., Srinivasan A., Self-oscillations of an elastic plate sliding over a smooth surface, *Int. J. Engng. Sci.* 31 (3) (1993) 453–473.
- [4] Paumier J.-C., Renard Y., Frottement élastodynamique avec inertie de surface, Rapport Imag RT 179, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France, 1999.
- [5] Rabinowicz E., The intrinsic variables affecting the stick-slip process, *Proc. Roy. Phys. Soc.* 71 (1958) 668–675.
- [6] Renard Y., Singular perturbation approach to an elastic dry friction problem with a non-monotone friction coefficient, *Quart. Appl. Math.* LVIII (2) (2000) 303–324.
- [7] Renard Y., Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques, Thèse de doctorat, LMC-Imag Grenoble, 1998.